

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ НЕ РОЗВ'ЯЗАНІ ВІДНОСНО ПОХІДНОЇ

Рівняння розв'язати відносно y' , після чого загальний розв'язок відшукувати відомими методами:

$$1) y'^2 + xy = y^2 + xy'$$

$$\bullet y'^2 - xy' + xy - y^2 = 0.$$

Розглянемо це рівняння як квадратне відносно y' :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$$

$$y'_{1,2} = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4xy + 4y^2}}{2} = \frac{x \pm (x - 2y)}{2}$$

$$a) y' = x - y$$

$$y = uv$$

$$u'v + uv' = x - uv \Rightarrow u' = -u \Rightarrow \frac{du}{u} = -dx \Rightarrow \underline{u = e^{-x}}$$

$$e^{-x}v' = x \Rightarrow v' = xe^x \Rightarrow v = \int xe^x dx = xe^x - e^x + C_1$$

$$y = x - 1 + e^{-x}C_1$$

$$б) y' = y \Rightarrow \frac{dy}{y} = dx \Rightarrow y = e^x + C_2 \bullet$$

$$2) xy'^2 - 2yy' + x = 0$$

$$\bullet y'_{1,2} = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4x^2}}{2x} = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - x^2}}{x}$$

$$a) y = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 1}$$

$$\frac{y}{x} = z \quad z + xz' = z + \sqrt{z^2 - 1}$$

$$\frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \frac{dx}{x} \quad \ln|z + \sqrt{z^2 - 1}| = \ln|x| + \ln|C_1|$$

$$\frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 1} = C_1 x$$

$$b) y' = \frac{y}{x} - \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 1}$$

$$\frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = -\frac{dx}{x}, \quad \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 1} = \frac{C_2}{x} \bullet$$

$$3) y'^3 + (x+2)e^y = 0$$

$$\bullet y' = \sqrt[3]{-(x+2)e^y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{\sqrt[3]{e^y}} = -(x+2)^{1/3} dx \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -3e^{-\frac{y}{3}} = -\frac{3}{4}(x+2)^{\frac{4}{3}} + C \quad \Rightarrow \quad e^{-\frac{y}{3}} = \frac{1}{4}(x+2)^{\frac{4}{3}} - \frac{C}{3} \bullet$$

На практиці в рідких випадках вдається розв'язати рівняння відносно похідної і ще рідше – розв'язати отримані рівняння. В таких випадках розв'язок рекомендується відшукувати в параметричному вигляді, що значно розширює клас задач, для яких вдається знайти аналітичний розв'язок.

В наступних рівняннях ввести параметр і розв'язати.

$$4) y = y'^2 + 2y'^3$$

$$\bullet y' = t, \quad y = t^2 + 2t^3; \quad x(t) = ?$$

$$\frac{dy}{dx} = 2t \frac{dt}{dx} + 6t^2 \frac{dt}{dx} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{dt}{dx} (2t + 6t^2) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dx = (2 + 6t) dt \quad \Rightarrow \quad x = 2t + 3t^2 + C$$

Розв'язок має вигляд:

$$\begin{cases} y = t^2 + 2t^3 \\ x = 2t + 3t^2 + C \end{cases} \bullet$$

$$5) x = y'^3 + y'$$

$$\bullet y' = t \quad x = t^3 + t \quad y(t) = ?$$

$$\frac{dx}{dy} = 3t^2 \frac{dt}{dy} + \frac{dt}{dy} \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{dy} (3t^2 + 1) = \frac{1}{t} \quad \Rightarrow \quad dy = (3t^3 + t) dt \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{4}t^4 + \frac{t^2}{2} + C$$

Тоді розв'язок визначається рівняннями:

$$\begin{cases} y = \frac{3}{4}t^4 + \frac{t^2}{2} + C \\ x = t^3 + t \end{cases} \bullet$$

б) Знайти розв'язок рівняння Лагранжа:

$$y = 2xy' - (y')^3$$

$$\bullet \quad y' = t, \quad y = 2xt - t^3 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = t = 2t + 2x \frac{dt}{dx} - 3t^2 \frac{dt}{dx} \Big| \frac{dx}{dt}$$

1) $t = 0$ – втрачений розв'язок.

$$2) \quad -t \frac{dx}{dt} - 2x = -3t^2 \quad \Rightarrow \quad t \frac{dx}{dt} + 2x = 3t^2 \quad \text{– лінійне рівняння.}$$

$$x(t) = u(t) \cdot v(t)$$

$$tu'v + tuv' + 2uv = 3t^2,$$

$$tu' + 2u = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u} = -\frac{2dt}{t} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{t^2}$$

$$t \cdot \frac{1}{t^2} v' = 3t^2 \quad \Rightarrow \quad v' = 3t^3 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{3}{4}t^4 + C$$

$$x(t) = \frac{3}{4}t^2 + \frac{C}{t^2}$$

Розв'язок має вигляд:

$$1) \quad t = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$2) \quad \begin{cases} x = \frac{3}{4}t^2 + \frac{C}{t^2} \\ y = 2\left(\frac{3}{4}t^3 + \frac{C}{t}\right) - t^3 \end{cases} \bullet$$

$$7) x = y' \sqrt{y'^2 + 1}$$

$$\bullet y' = t, \quad x = t \sqrt{t^2 + 1}, \quad y(t) = ?$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dt}{dy} \sqrt{t^2 + 1} + t \cdot \frac{1}{2} (t^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} 2t \frac{dt}{dy}$$

$$\frac{1}{t} = \frac{dt}{dy} \left(\sqrt{t^2 + 1} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1}} \right)$$

$$dy = t \left(\sqrt{t^2 + 1} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1}} \right) dt$$

$$dy = \frac{1}{2} \frac{2(t^2 + 1) - 1}{\sqrt{t^2 + 1}} d(t^2 + 1)$$

$$t^2 + 1 = z$$

$$dy = \left(\frac{z}{\sqrt{z}} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{z}} \right) dz$$

$$y = \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot z^{\frac{1}{2}} + C$$

$$y = \frac{2}{3} (t^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - (t^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + C$$

Розв'язок має вигляд:

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3} (t^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - (t^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + C \\ x = t \sqrt{t^2 + 1} \end{cases} \bullet$$

$$8) (y'+1)^3 = (y'-y)^2$$

$$\bullet y' - y = \pm \sqrt{(y'+1)^3} \Rightarrow y = y' \pm \sqrt{(y'+1)^3}$$

$$a) y = y' + \sqrt{(y'+1)^3}$$

$$y' = t \quad y = t + \sqrt{(t+1)^3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} + \frac{3}{2} \sqrt{t+1} \frac{dt}{dx}$$

$$t = \left(1 + \frac{3}{2} \sqrt{t+1} \right) \frac{dt}{dx} \Rightarrow dx = \left(\frac{1}{t} + \frac{3}{2} \frac{\sqrt{t+1}}{t} \right) dt$$

$$\begin{aligned} \left\| \int \frac{\sqrt{t+1}}{t} dt = \left| \begin{array}{l} t+1 = u^2 \\ t = u^2 - 1 \Rightarrow dt = 2udu \end{array} \right| = \right. \\ \left. = 2 \int \frac{u^2}{u^2 - 1} du = 2 \left(\int \frac{u^2 - 1}{u^2 - 1} du + \int \frac{1}{u^2 - 1} du \right) = 2 \left(u + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| \right) = 2\sqrt{t+1} + \ln \left| \frac{\sqrt{t+1}-1}{\sqrt{t+1}+1} \right| \right\| \end{aligned}$$

$$x = \ln|t| + 3\sqrt{t+1} + \frac{3}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{t+1}-1}{\sqrt{t+1}+1} \right| + C$$

$$\begin{cases} y = t + \sqrt{(t+1)^3} \\ x = \ln|t| + 3\sqrt{t+1} + \frac{3}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{t+1}-1}{\sqrt{t+1}+1} \right| + C \end{cases}$$

$$\text{б) } y = y' - \sqrt{(y'+1)^3}$$

За аналогією з випадком **а)** маємо:

$$\left(\frac{1}{t} - \frac{3}{2} \frac{\sqrt{t+1}}{t} \right) dt = dx$$

$$\begin{cases} y = t - \sqrt{(t+1)^3} \\ x = \ln|t| - 3\sqrt{t+1} - \frac{3}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{t+1}-1}{\sqrt{t+1}+1} \right| + C \end{cases} \bullet$$

Домашнє завдання.

$$1) y'^2 - 2xy' = 8x^2$$

$$3) x(y'^2 - 1) = 2y'$$

$$2) xy'^2 = y(2y' - 1)$$

$$4) y = \ln(1 + y'^2)$$