ЛІНІЙНІ ОДНОРІДНІ РІВНЯННЯ
З ПОСТІЙНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Загальний розв'язок однорідних рівнянь записується за виглядом корнів характеристичного рівняння.

1) $y'' - y = 0$

• $k^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = -1,\ k_2 = 1; \qquad y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x}$. •

2) $y'' + 2y' + 10y = 0$

• $k^2 + 2k + 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-10} = -1 \pm 3i$;

$y(x) = C_1 e^{-x} \cos 3x + C_2 e^{-x} \sin 3x$. •

3) $y'' + 9y = 0$.

• $k^2 + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 3i,\quad k_2 = -3i$;

$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$. •

4) $y'' - 4y' + 4y = 0$.

• $k^2 - 4k + 4 = 0 \quad \Rightarrow k_1 = k_2 = 2$;

$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$. •

ЛІНІЙНІ НЕОДНОРІДНІ РІВНЯННЯ З ПОСТІЙНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

1) $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$

• Загальний розв'язок має вигляд $y(x) = y_o(x) + \bar{y}(x)$, де $y_o(x)$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, $\bar{y}(x)$ – частковий розв'язок неоднорідного рівняння.

$$k^2 - 2k - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = 1 \pm 2 \quad \Rightarrow \quad k_1 = -1,\ k_2 = 3;$$

$$y_o(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}.$$

Розглянутий нижче метод дозволяє будувати часткові розв'язки $\bar{y}(x)$ тільки для правих частин вигляду

$$\boxed{e^{\alpha x}\left(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x\right)},$$

де $P(x)$, $Q(x)$ – многочлени.

Розв'язок будемо відшукувати за виглядом правої частини.

$$\bar{y} = Ae^{4x}$$

Для відшукання константи A, $\bar{y}$ підставимо в рівняння.

$$16Ae^{4x} - 8Ae^{4x} - 3Ae^{4x} = e^{4x}.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових функціях справа і зліва.

$$e^{4x}\Big|\, 16A - 8A - 3A = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{5}; \qquad \bar{y} = \frac{1}{5}e^{4x}.$$

Остаточно

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{5}e^{4x}. \ \bullet$$

2) $y'' - 2y' - 3y = e^{3x}$

- Скориставшись результатами попереднього прикладу, будемо мати:

$k_1 = -1,;$ $\boxed{k_2 = 3};$ $y_o(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x};$

$\bar{y} = xAe^{3x} \Rightarrow \bar{y}' = Ae^{3x} + 3xAe^{3x} \Rightarrow \bar{y}'' = 3Ae^{3x} + 3Ae^{3x} + 9xAe^{3x};$

$6Ae^{3x} + \underline{9xAe^{3x}} - 2Ae^{3x} - \underline{6xAe^{3x}} - \underline{3xAe^{3x}} = e^{3x};$

$A = \frac{1}{4};$ $\bar{y} = \frac{1}{4} xe^{3x};$ $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{4} xe^{3x}.$ •

3) $y'' - 2y' - 3y = xe^{3x}$

- $k_1 = -1,;$ $\boxed{k_2 = 3};$ $y_o(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x};$

$\bar{y} = x(Ax + B)e^{3x} \Rightarrow \bar{y}' = 3(Ax^2 + Bx)e^{3x} + (2Ax + B)e^{3x};$

$\underline{9(Ax^2 + Bx)e^{3x}} + 6(2Ax + B)e^{3x} + (2A)e^{3x} - \underline{6(Ax^2 + Bx)e^{3x}} -$

$-2(2Ax + B)e^{3x} - \underline{3x(Ax + B)e^{3x}} = xe^{3x}$

$$\begin{array}{c|l} xe^{3x} & 12A - 4A = 1 \\ e^{3x} & 6B + 2A - 2B = 0 \end{array}\Bigg\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} A = \frac{1}{8} \\ B = -\frac{1}{16} \end{array}$$

$\bar{y} = x\left(\frac{x}{8} - \frac{1}{16}\right)e^{3x};$ $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + \left(\frac{x^2}{8} - \frac{x}{16}\right)e^{3x}.$ •

4) $y'' - 3y' + 2y = \sin x$

- $k^2 - 3k + 2 = 0 \Rightarrow$ $k_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow$ $k_1 = 1,\ k_2 = 2;$

$y_o(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x};$

$\bar{y} = A\sin x + B\cos x;$

$-A\sin x - B\cos x - 3A\cos x + 3B\sin x + 2A\sin x + 2B\cos x = \sin x$

$$\begin{array}{l|l} \sin x & A+3B=1 \\ \cos x & B-3A=0 \end{array}\Bigg\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} A=\dfrac{1}{10} \\ B=\dfrac{3}{10} \end{array} \qquad \bar{y}=\frac{1}{10}\sin x+\frac{3}{10}\cos x;$$

$$y(x)=C_1e^{x}+C_2e^{2x}+\frac{1}{10}\sin x+\frac{3}{10}\cos x. \bullet$$

5) $y''-9y=e^{3x}\cos x$.

• $k^2-9=0 \quad \Rightarrow \quad k_1=-3,\ k_2=3; \qquad y(x)=C_1e^{-3x}+C_2e^{3x}$.

$\bar{y}=e^{3x}(A\cos x+B\sin x)$;

$\bar{y}'=3e^{3x}(A\cos x+B\sin x)+e^{3x}(-A\sin x+B\cos x)$;

$\underline{9e^{3x}(A\cos x+B\sin x)}+6e^{3x}(-A\sin x+B\cos x)-e^{3x}(A\cos x+B\sin x)-$

$-\underline{9e^{3x}(A\cos x+B\sin x)}=e^{3x}\cos x$;

$$\begin{array}{l|l} e^{3x}\sin x & -6A-B=0 \\ e^{3x}\cos x & 6B-A=1 \end{array}\Bigg\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} B=-6A \\ A=-\dfrac{1}{37} \end{array} \quad \Rightarrow \quad B=\frac{6}{37};$$

$$\bar{y}=e^{3x}\left(-\frac{1}{37}\cos x+\frac{6}{37}\sin x\right);$$

$$y(x)=C_1e^{-3x}+C_2e^{3x}+e^{3x}\left(-\frac{1}{37}\cos x+\frac{6}{37}\sin x\right). \bullet$$

Домашнє завдання.

1) $y''-y=2e^{x}$;

2) $y''-5y'+4y=4x^2e^{2x}$; $\qquad \bar{y}(x)=(Ax^2+Bx+C)e^{2x}\cdot(x^k\ ?)$

3) $y''-5y'=3x^2$. $\qquad \bar{y}(x)=(Ax^2+Bx+C)\cdot(x^k\ ?)$