ЛІНІЙНІ НЕОДНОРІДНІ РІВНЯННЯ З ПОСТІЙНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ. МЕТОД ВАРІАЦІЇ ДОВІЛЬНИХ СТАЛИХ

1) $y'' + y = \cos 2x + \cos x$.

• $k^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = \pm i; \qquad y_o(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

В правій частині маємо доданки різних типів. Тому знаходження частинного розвязку зручно розбити на два етапи: $\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2$.

а) $y'' + y = \cos 2x$

$\bar{y}_1 = A\cos 2x + B\sin 2x$;

$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + A\cos 2x + B\sin 2x = \cos 2x$;

$$\left.\begin{array}{l|l} \cos 2x & -4A + A = 1 \\ \sin 2x & -4B + B = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} A = -\dfrac{1}{3} \\ B = 0 \end{array} \qquad \bar{y}_1 = -\frac{1}{3}\cos 2x;$$

б) $y'' + y = \cos x$

$\bar{y}_2 = x(C\cos x + D\sin x) \;\Rightarrow\; \bar{y}_2' = (C\cos x + D\sin x) + x(-C\sin x + D\cos x)$;

$2(-C\sin x + D\cos x) \underline{- x(C\cos x + D\sin x)} + \underline{x(C\cos x + D\sin x)} = \cos x$;

$$\left.\begin{array}{l|l} \cos x & 2D = 1 \\ \sin x & -2C = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} D = \dfrac{1}{2} \\ C = 0 \end{array} \qquad \bar{y}_2 = \frac{x}{2}\sin x.$$

Тоді $\qquad y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \dfrac{1}{3}\cos 2x + \dfrac{x}{2}\sin x$. •

2) $y'' - 5y' = 3x^2 + \sin 5x$.

• $k^2 - 5k = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 0,\; k_2 = 5; \qquad y(x) = C_1 + C_2 e^{5x}$.

$\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2$;

а) $\bar{y}_1 = \left(Ax^2 + Bx + C\right)x = Ax^3 + Bx^2 + Cx \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \bar{y}_1' = 3Ax^2 + 2Bx + C \quad \Rightarrow \quad \bar{y}_1'' = 6Ax + 2B$;

$$6Ax+2B-15Ax^2-10Bx-5C=3x^2$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 & -15A=3 \\ x & 6A-10B=0 \\ x^0 & 2B-5C=0 \end{array}\Bigg\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} A=-\dfrac{1}{5} \\ B=-\dfrac{3}{25} \\ C=-\dfrac{6}{125} \end{array} \qquad \bar{y}_1=-\frac{1}{5}x^3-\frac{3}{25}x^2-\frac{6}{125}x;$$

б) $\bar{y}_2=D\sin 5x+K\cos 5x$

$$-25D\sin 5x-25K\cos 5x-25D\cos 5x+25K\sin 5x=\sin 5x;$$

$$\begin{array}{r|l} \sin 5x & -25D+25K=1 \\ \cos 5x & -25K-25D=0 \end{array}\Bigg\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} D=-\dfrac{1}{50} \\ K=\dfrac{1}{50} \end{array}$$

$$\bar{y}_2(x)=-\frac{1}{50}\sin 5x+\frac{1}{50}\cos 5x;$$

$$y(x)=C_1+C_2e^{5x}-\frac{1}{5}x^3-\frac{3}{25}x^2-\frac{6}{125}x-\frac{1}{50}\sin 5x+\frac{1}{50}\cos 5x. \bullet$$

3) $y''-4y'+8y=e^{2x}+\sin 2x$

- $k^2-4k+8=0 \Rightarrow \quad k_{1,2}=2\pm\sqrt{4-8}=2\pm 2i;$

$$y_o(x)=e^{2x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x); \qquad \bar{y}=\bar{y}_1+\bar{y}_2;$$

а) $y''-4y'+8y=e^{2x};$

$\bar{y}_1=Ae^{2x};$

$$4Ae^{2x}-\underline{8Ae^{2x}}+\underline{8Ae^{2x}}=e^{2x} \quad \Rightarrow \quad 4A=1 \Rightarrow \quad A=\frac{1}{4}; \qquad \bar{y}_1=\frac{1}{4}e^{2x};$$

б) $y''-4y'+8y=\sin 2x$

$\bar{y}_2=B\sin 2x+C\cos 2x;$

$$-4B\sin 2x-4C\cos 2x-4(2B\cos 2x-2C\sin 2x)+8(B\sin 2x+C\cos 2x)=\sin 2x;$$

$$\left.\begin{array}{l|l} \sin 2x & -4B+8C+8B=1 \\ \cos 2x & -4C-8B+8C=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4B+8C=1 \\ 4C-8B=0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} B=\dfrac{1}{20} \\ C=\dfrac{1}{10} \end{array}$$

$$\bar{y}_2(x)=\frac{1}{20}\sin 2x+\frac{1}{10}\cos 2x;$$

$$y(x)=e^{2x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{1}{20}\sin 2x+\frac{1}{10}\cos 2x. \bullet$$

4) $y''+6y'+10y=3xe^{-3x}-2e^{3x}\cos x$

- $k^2+6k+10=0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2}=-3\pm\sqrt{9-10}=-3\pm i;$

$$y_o(x)=e^{-3x}(C_1\cos x+C_2\sin x); \qquad \bar{y}=\bar{y}_1+\bar{y}_2;$$

а) $y''+6y'+10y=3xe^{-3x}$

$$\bar{y}_1=(Ax+B)e^{-3x} \quad \Rightarrow \quad \bar{y}_1'=Ae^{-3x}-3(Ax+B)e^{-3x};$$

$$-\underline{3Ae^{-3x}}-\underline{3Ae^{-3x}}+9(Ax+B)e^{-3x}+\underline{6Ae^{-3x}}-18(Ax+B)e^{-3x}+$$
$$+10(Ax+B)e^{-3x}=3e^{-3x}$$

$$\left.\begin{array}{l|l} e^{-3x} & 9B-18B+10B=0 \\ xe^{-3x} & 9A-18A+10A=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} B=0 \\ A=3 \end{array} \qquad \bar{y}_1=3xe^{-3x};$$

б) $y''+6y'+10y=-2e^{3x}\cos x$

$$\bar{y}_2=e^{3x}(C\cos x+D\sin x);$$

$$\bar{y}_2'=3e^{3x}(C\cos x+D\sin x)+e^{3x}(-C\sin x+D\cos x);$$

$$9e^{3x}(C\cos x+D\sin x)+6e^{3x}(-C\sin x+D\cos x)+e^{3x}(-C\cos x-D\sin x)+$$

$$+18e^{3x}(C\cos x+D\sin x)+6e^{3x}(-C\sin x+D\cos x)+10e^{3x}(C\cos x+D\sin x)=$$

$$=-2e^{3x}\cos x;$$

$$\left.\begin{array}{l|l} e^{3x}\cos x & 9C+6D-C+18C+6D+10C=-2 \\ e^{3x}\sin x & 9D-6C-D+18D-6C+10D=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 36C+12D=-2 \\ -12C+36D=0 \end{matrix}\right\} \left|\begin{matrix} \cdot 12 \\ \cdot 36 \end{matrix}\right. \quad \Rightarrow \quad D=-\frac{1}{60}; \quad C=\frac{36D}{12}=-\frac{1}{20};$$

$$\bar{y}_2=e^{3x}\left(-\frac{1}{20}\cos x-\frac{1}{60}\sin x\right);$$

$$y(x)=e^{-3x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+3xe^{-3x}+e^{3x}\left(-\frac{1}{20}\cos x-\frac{1}{60}\sin x\right). \bullet$$

5) $y''+3y'+2y=\dfrac{1}{e^x+1}$

• $y''+3y'+2y=0$

$$k^2+3k+2=0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{-3\pm 1}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} k_1=-2 \\ k_2=-1 \end{matrix}$$

$$y_o(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}$$

Подальший розв'язок будемо відшукувати методом варіації довільних сталих, згідно якому C_1 і C_2 будемо вважати не константами, а деякими *функціями*, тобто розв'язок будемо відшукувати у вигляді:

$$y(x)=C_1(x)e^{-2x}+C_2(x)e^{-x}.$$

Для відшукання $C_1(x)$ і $C_2(x)$ сформуємо наступну систему рівнянь:

$$\left.\begin{matrix} C_1'e^{-2x}+C_2'e^{-x}=0 \\ -2C_1'e^{-2x}-C_2'e^{-x}=\dfrac{1}{e^x+1} \end{matrix}\right\}+ \left|\begin{matrix} \cdot 2 \\ + \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} -C_1'e^{-2x}=\dfrac{1}{e^x+1} \\ C_2'e^{-x}=\dfrac{1}{e^x+1} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} C_1'(x)=\dfrac{-e^{2x}}{e^x+1} \\ C_2'(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1} \end{cases}$$

Інтегруючи останні вирази, отримаємо:

$$C_1(x)=-\int\frac{e^xd(e^x)}{e^x+1}=-\int\frac{e^x+1}{e^x+1}d(e^x)+\int\frac{d(e^x)}{e^x+1}+\bar{C}_1=$$

$$=-e^x+\ln\left|e^x+1\right|+\bar{C}_1;$$

$$C_2(x)=\int\frac{e^x}{e^x+1}dx+\bar{C}_2=\int\frac{d(e^x+1)}{e^x+1}+\bar{C}_2=\ln\left|e^x+1\right|+\bar{C}_2;$$

$$y(x)=\left(-e^x+\ln\left|e^x+1\right|+\bar{C}_1\right)e^{-2x}+\left(\ln\left|e^x+1\right|+\bar{C}_2\right)e^{-x} \bullet$$

6) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x$

- $k^2 + 4k + 4 = 0 \;\Rightarrow\; (k+2)^2 = 0 \;\Rightarrow\; k = -2$ – кратності 2

$y_o(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$

$y(x) = C_1(x) e^{-2x} + C_2(x) x e^{-2x}$

$$\left.\begin{aligned} C_1' e^{-2x} + C_2' x e^{-2x} &= 0 \\ -2C_1' e^{-2x} + C_2'\left(e^{-2x} - 2xe^{-2x}\right) &= e^{-2x}\ln x \end{aligned}\right\}\begin{matrix}\cdot 2 \\ + \end{matrix}$$

$$\left.\begin{aligned} C_2' e^{-2x} &= e^{-2x}\ln x \\ C_1' e^{-2x} &= -xe^{-2x}\ln x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} C_2'(x) = \ln x \\ C_1'(x) = -x\ln x \end{cases}$$

$$C_1(x) = -\int x\ln x\,dx + \overline{C}_1 = \left\| \begin{matrix} u = \ln x \\ dv = xdx \end{matrix} \left| \begin{matrix} du = \frac{1}{x}dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right. \right\| =$$

$$= -\left(\frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}dx \right) + \overline{C}_1 = -\frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + \overline{C}_1;$$

$$C_2(x) = \int \ln x\,dx = \left\| \begin{matrix} u = \ln x \\ dv = dx \end{matrix} \left| \begin{matrix} du = \frac{1}{x} \\ v = x \end{matrix} \right. \right\| = x\ln x - x + \overline{C}_2;$$

$$y(x) = \left[\frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{2} - \ln x \right) + \overline{C}_1 \right] e^{-2x} + \left[x(\ln x - 1) + \overline{C}_2 \right] x e^{-2x}. \quad \bullet$$

Домашнє завдання.

1) $y'' - 2y' + 2y = xe^x \sin x$;

2) $y'' - 2y' + y = e^x(\cos x + 3)$;