**РОЗДІЛ 1. Основні поняття теплообміну**

**1.1. Температурне поле. Ізотермічна поверхня**

*Температурне поле* є сукупність значень температури в усіх точках даної розрахункової області і в часі.

Температурне поле вимірюють в градусах Цельсія і Кельвінах і позначають також як і в ТТД : , де хi - координати точки в просторі, в якій знаходять температуру, в метрах [м]; τ – час процесу теплообміну в секундах [с]. Т.ч., температурне поле характеризується кількістю координат і своєю поведінкою в часі.

У теплових розрахунках використовують наступні системи координат:

хi = х1, х2, х3 – довільна ортогональна система координат;

хi = x, y, z – декартова система координат;

хi = r φ, z – циліндрова система координат;

хi = r φ, ψ – сферична система координат.

Залежно від числа координат розрізняють *тривимірне, двовимірне, одновимірне і нульмірне (однорідне)* температурні поля.

Температурне поле, яке змінюється в часі, називають *нестаціонарним* температурним полем. І навпаки, температурне поле, яке не змінюється в часі, називають *стаціонарним* температурним полем.

Приклади запису температурних полів:

T(x, y, z, τ) – тривимірне нестаціонарне температурне поле;

T(τ) – нульмірне нестаціонарне температурне поле;

T(x) – стаціонарне одновимірне температурне поле;

T = const – нульмірне стаціонарне температурне поле – окремий випадок температурного поля, що характеризує термодинамічну рівновагу системи.

*Ізотермічна поверхня –* поверхня рівних температур*.*

Властивості ізотермічних поверхонь:

а) ізотермічні поверхні не перетинаються;

б) у нестаціонарних процесах ізотермічні поверхні переміщаються в просторі.

Ми розглядатимемо тіла простої або класичної форми. Таких тіл три:

— *безкінечна* або *необмежена* пластина – пластина, в якої товщина багато менше (у декілька разів) довжини і ширини;

— *безкінечний* циліндр – циліндр, в якого діаметр менше (у декілька разів) довжини циліндра;

— куля або сфера.

Приклади ізотермічних поверхонь в тілах простої форми:

а) ізотермічні поверхні в безконечній пластині за однакових на обох поверхнях умов теплообміну – це площини, що паралельні створюючим площинам дану пластину (рис.1.1);

б) ізотермічні поверхні в безкінечному циліндрі за однакових по всій його поверхні умов теплообміну – співісні (коаксіальні) циліндрові поверхні або, іншими словами, вкладені один в одного циліндри меншого діаметру (рис. 1.2);

в) у кулі при рівномірному нагріві або охолоджуванні ізотермічні поверхні – вкладені один в одного сфери.

Q

Q

Q

Q

Q

0

x

T1

T2

T3

Tn

Рис. 1.1. Ізотермічні поверхні Рис. 1.2. Ізотермічні поверхні в у безкінечній пластині безконечному циліндрі

**1.2. Градієнт температури**

*Градієнт температури* (позначається gradT або ) – вектор, направле-ний по нормалі до ізотермічної поверхні, у бік збільшення температури і чисельно рівний зміні температури на одиниці довжини:

 або 

де n – нормаль;  - одиничний вектор;  – оператор Гамільтона ("набла") - символічний вектор, замінюючий символ градієнта.

У декартовій системі координат:

,

де  – одиничні вектори або орты в декартовій системі координат.

**1.3. Кількість теплоти. Тепловий потік. Питомі теплові потоки**

*Кількість теплоти* – кількість теплової енергії, отримана або віддана тілом (твердим, рідким або газоподібним) або що проходить через це тіло за деякий час **τ** в результаті теплообміну.

Позначають і вимірюють кількість теплоти в джоулях [Дж](калоріях [кал]):

1 кал = 4,187 Дж, 1 Дж = 0,24 кал.

При цьому часто використовують кратні джоулю і калорії одиниці виміру:

1 кДж = 103 Дж;1 МДж = 106 Дж; 1 ГДж = 109 Дж; 1 ТДж = = 1012 Дж.

*Тепловий потік (позначають* *) –* кількість теплоти, що проходить через задану і нормальну до напряму поширення теплоти поверхню в одиницю часу:

.

При стаціонарному режимі теплообміну тепловий потік не змінюється в часі і розраховується по формулі: , Вт.

У старій системі одиниць потік вимірюється в :  Вт.

У розрахунках використовують три види питомих теплових потоків:

а) поверхневу щільність теплового потоку (позначають: q, Вт/м2) – тепловий потік, віднесений до площі поверхні тіла;

б) лінійну щільність теплового потоку (позначають: , Вт/м) – тепловий потік, віднесений до довжини протяжного тіла;

в) об'ємну щільність теплового потоку (позначають: qv,Вт/м3) – тепловий потік, віднесений до об'єму тіла.

*Поверхнева щільність теплового потоку* – кількість теплоти, що проходить через задану і нормальну до напрвлению поширення теплоти одиничний майданчик в одиницю часу.

, Вт/м2

де  - одиничний вектор; τ – час, с; F – площа, м2.

У стаціонарному режимі теплообміну і за однакових умов теплообміну на всій поверхні тіла:

.

*Лінійна щільність теплового потоку* – тепловий потік, що проходить через бічну поверхню одиничної довжини деякого протяжного тіла, довільного, але постійного по довжині поперечного перетину. У стаціонарному режимі теплообміну і за однакових умов теплообміну на всій поверхні тіла:

, звідки витікає, що

де τ – час, с;

 – довжина протяжного об'єкту, м.

Поверхнева щільність теплового потоку і лінійна щільність теплового потоку зв'язані між собою наступним співвідношенням:

 або 

де П – периметр довільного, але постійного поперечного перетину.

Наприклад, для труби діаметром **d** периметр дорівнює довжині кола () і формула зв'язку q і  набере вигляду

.

*Об'ємна щільність теплового потоку* – кількість теплоти, яка виділяється або поглинається усередині одиничного об'єму тіла в одиницю часу. У стаціонарному режимі теплообміну і за умови рівномірного розподілу внутрішніх джерел (стоків) теплоти в об'ємі тіла:

 звідки слідує  і  .

Об'ємну щільність теплового потоку **qv** використовують в наступних розрахунках тепловиділень або теплопоглинань: у ядерному реакторі; при проходженні електричного струму по провідникові з великим опором; внутрішнього тертя при течії рідини; при хімічних реакціях.

Величина **qv** може бути як позитивною (теплота виділяється), так і негативною (теплота поглинається).

**1.4. Елементарні способи передачі теплоти (види процесів теплообміну)**

Розрізняють три елементарні способи передачі теплоти:

1. теплопровідність (кондукція);
2. конвекція;
3. теплове випромінювання (радіаційний теплообмін).

*Теплопровідність (кондукция*) – спосіб передачі теплоти за рахунок взаємодії мікрочасток тіла (атомів, молекул, іонів в електролітах і електронів в металах) в змінному полі температур. Теплопровідність має місце в твердих, рідких і газоподібних тілах. У твердих тілах теплопровідність є єдиним способом передачі теплоти. У вакуумі теплопровідність відсутня.

*Конвекція* – спосіб передачі теплоти за рахунок переміщення макрооб'ємів середовища з області з однією температурою в область з іншою температурою. При цьому плинне середовище (флюїд) з вищою температурою переміщається в ділянку нижчих температур, а холодний флюїд – в область з високою температурою. У вакуумі конвекція теплоти неможлива.

*Теплове випромінювання (радіаційний теплообмін)* – спосіб передачі теплоти за рахунок поширення електромагнітних хвиль в певному діапазоні частот. *Зауваження:*

— всі тіла вище **0** К володіють власним тепловим випромінюванням, тобто енергію випромінюють всі тіла;

— для передачі теплоти випромінюванням не потрібне тіло-посередник, тобто промениста енергія може передаватися і у вакуумі.

**1.5. Складний теплообмін. Тепловіддача і теплопередача**

У природі і в технічних пристроях, як правило, всі три способи передачі теплоти відбуваються одночасно. Такий теплообмін називається *складним теплообміном.* Наприклад, конвекція теплоти завжди протікає спільно з теплопровідністю, оскільки макрооб'єми складаються з мікрооб'ємів, і є нерівномірне по простору температурне поле. Передача теплоти спільно теплопровідністю і конвекцією називається *конвективним теплообміном.*

Спільна передача теплоти випромінюванням і теплопровідністю називається *радіаційно-кондуктивним теплообміном.*

Спільна передача теплоти випромінюванням і конвекцією називається *радіаційно-конвективним теплообміном*.

У природі і техніці найчастіше зустрічаються наступні два варіанти складного теплообміну:

— *тепловіддача* – процес теплообміну між непроникною твердою стінкою і плинним довкіллям;

— *теплопередача* – передача теплоти від одного плинного середовища до іншого плинного середовища через непроникну тверду стінку.

*Тепловіддача.* Графік температурного поля при тепловіддачі показаний на рис.3. Температура плинного середовища змінюється в дуже вузькій області, яка називається тепловим пограничним шаром.



Рис. 1.3. Схема процесу тепловіддачі:

Tw – температура стінки; Tf – температура плинного середовища; δq – товщина теплового пограничного шару.

Відмітимо, що залежно від співвідношення температур стінки Tw і флюїда Tf тепловий потік **Q** може нагрівати стінку за умови  або охолоджувати її, якщо  .

Процес тепловіддачі може бути здійснений поєднанням наступних елементарних процесів теплообміну:

— *конвективна тепловіддача* (конвекція + теплопровідність = конвективний теплообмін) – має місце при обмиванні твердих поверхонь різної форми плинним середовищем ( променевопрозорою краплинною рідиною);

— *промениста або радіаційна тепловіддача* (теплове випромінювання) – має місце при радіаційному теплообміні у вакуумі або між стінкою і випромінюючим і поглинаючим нерухомим газом;

— *радіаційно - конвективна тепловіддача* (теплове випромінювання + конвективний теплообмін) – випадок складного теплообміну, що найбільш часто зустрічається в практиці розрахунків;

— *конвективна тепловіддача при фазових перетвореннях теплоносія* (конвекція + теплопровідність + можливе випромінювання) – тепловіддача при конденсації і кипінні, що протікає з виділенням або поглинанням теплоти фазового переходу.

Розрахунок тепловіддачі полягає у визначенні теплового потоку, яким обмінюються стінка і плинне середовище. У інженерних розрахунках тепловіддачі використовується так званий закон тепловіддачі – закон Ньютона:

,

де Q – тепловий потік, Вт;  – коефіцієнт тепловіддачі, Вт/(м2·К); Tf і Tw – температура плинного середовища і стінки; F – площа поверхні теплообміну.

*Теплопередача.* В курсі ТМО вивчають розрахунок теплопередачі через стінки плоскої, циліндрової, сферичної і довільної форми. У нашому короткому курсі обмежимося розрахунком теплопередачі через плоску і циліндрову стінки. Графік температурного поля при теплопередачі через плоску стінку показаний на рис. 4.

Отже, теплопередача включає наступні процеси:

а) тепловіддачу від гарячого середовища (гарячого теплоносія) до стінки;

б) теплопровідність усередині стінки;

в) тепловіддачу від стінки до холодного середовища (холодному теплоносію).



Рис. 1.4. Схема процесу теплопередачі:

Tf1 і Tf2 – температура гарячого і холодного флюїда (плинного середовища); Tw1 і Tw2 – температура поверхонь плоскої стінки; δ – товщина плоскої стінки.

Тепловий потік при теплопередачі, передаваний від гарячого флюїда з температурою Tf1 до холодного флюїда з температурою Tf2, розраховується по формулі (для плоскої стінки):

,

де  – коефіцієнт теплопередачі через плоску стінку, Вт/(м2·К);

Rt – термічний опір теплопровідності плоскої стінки, (м2·К) /Вт.

***Висновок*** – для вирішення основного завдання розрахунку теплообміну – визначення температурних полів і теплових потоків при тепловіддачі і теплопередачі – необхідно вміти розраховувати три елементарні способи передачі теплової енергії.

**РОЗДІЛ 2. Теплопровідність**

**2.1. Основний закон теорії теплопровідності. Закон (гіпотеза) Фур'є.**

У 1807 році французький вчений Фур'є запропонував вважати, що в кожній точці тіла (речовини) в процесі теплопровідності існує однозначний зв'язок між тепловим потоком і градієнтом температури:

, (2.1)

де Q – тепловий потік, Вт; grad(T) – градієнт температурного поля, К/м; F – площа поверхні теплообміну, м2;  – коефіцієнт теплопровідності, – величина, що характеризує фізичні властивості речовини. Коефіцієнт теплопровідності визначають експериментально і наводять в довідковій літературі.

Закон Фур'є для поверхневої щільності теплового потоку запишеться як

. (2.2)

Фізичний сенс коефіцієнта теплопровідності полягає в тому, що він (**λ**) характеризує здатність даної речовини проводити теплоту. Коефіцієнт теплопровідності **λ** знаходять експериментально, використовуючи вирази (2.1) і (2.2) рішенням, так званого, зворотного завдання теорії теплопровідності.

Знак "–" показує, що вектори теплового потоку і градієнта температури направлені в протилежні сторони. Градієнт температурного поля направлений по нормалі до ізотермічної поверхні у бік зростання температури, тепловий потік – у бік убування температури. Вирази (2.1) і (2.2) є лінійним законом теплопровідності, оскільки в цьому законі коефіцієнт теплопровідності є величина постійна (**λ** = const). При експериментальній перевірці закону Фур'є виявляється відхилення розрахунку і експерименту, яке в першому наближенні можна врахувати, зберігши форму запису закону, але прийнявши залежність **λ** = f(T). В цьому випадку отримуємо нелінійний закон Фур'є:

.

Для різних речовин і їх фазового стану **λ** може, як збільшуватися, так зменшуватися із зростанням температури. Для пористих і сипких матеріалів коефіцієнт теплопровідності **λ** також залежить від порозности (величина пір) і від вологості. Із збільшенням порозности **λ** зменшується, оскільки пори заповнюються газом, а **λ** газів малий. При збільшенні вологості пори заповнюються вологою, і коефіцієнт теплопровідності **λ** збільшується. Домішки зменшують коефіцієнт теплопровідності. Коефіцієнт теплопровідності газів також залежить і від тиску.

В таблиці 2.1 приведемо зразкові значення коефіцієнта **λ** різних речовин. Оскільки **λ** функція температури, то ці дані узяті з довідника при t = 0 0С.

*Таблиця 2.1*

**Значення коефіцієнта** **теплопровідності λ різних речовин**

|  |  |
| --- | --- |
| Речовина | **λ**, Вт/(м·К) |
| Cu, мідь  Сталь  Вогнетриви  Теплова ізоляція  Гази  Рідини | 390  10÷50  0,25÷3  0,05÷0,25  0,005÷0,4  0,08÷0,7 |

**2.2. Енергетична форма запису закону Фур'є. Коефіцієнт температуропровідності**

Коефіцієнт температуропровідності **а**, [м2/с] – фізична характеристика речовини, яка визначається експериментально і наводиться в довідниках.

Коефіцієнт температуропровідності **а**, характеризує теплоінерційні властивості речовини або іншими словами характеризує швидкість зміни температури тіла в часі. Швидкість зміни температури  ~ **а**, прямо пропорційна коефіцієнту температуропровідності. Т.ч., коефіцієнт температуропровідності характеризує лише нестаціонарні процеси.

Коефіцієнт температуропровідності пов'язаний з іншими фізичними характеристиками речовини наступними співвідношеннями:

; ,

де **с** – питома масова теплоємність, Дж/(кг·град);  - питома об'ємна теплоємність, Дж/(м3·град); ρ – щільність, кг/м3; λ – коефіцієнт теплопровідності, Вт/(м·град);.

Для твердих тіл з малим коефіцієнтом температурного розширення .

Для газів, в яких теплоємність залежить від вигляду процесу і коефіцієнт температуропровідності є функцією процесу:

— для ізохорного процесу **v=const**: ;

— для ізобарного процесу **p=const**: .

Порядок величини коефіцієнта температуропровідності можна характеризувати наступними величинами:

а ≈ 10-7 м2/с – для теплової ізоляції;

а ≈ 10-6 м2/с – для вогнетривів;

а ≈ 10-5 м2/с – для сталі.

Для представлення закону Фур'є в енергетичній формі замінимий **λ** у класичній формі запису закону теплопровідності вираженням

 або .

Отримаємо

 – для ізохорних процесів

де  – питома об'ємна внутрішня енергія, Дж/м3;

 – для ізобарних процесів

де  - питома об'ємна ентальпія, Дж/м3.

Для твердих тіл енергетична форма запису закону Фур'є має вигляд:



**2.3. Диференціальне рівняння теплопровідності. (Диференціальне рівняння Фур'є)**

Якщо помістити тіло, наприклад, безкінечну пластинку завтовшки **δ** і початковою температурою **T0** в гаряче середовище з температурою **Tf** (рис. 2.1), то пластинка, отримуючи енергію від гарячого середовища, нагріватиметься, і її температура змінюється з часом в кожній точці.



Рис. 2.1. Нагрів пластини в середовищі з температурою Tf

Температурне поле, тобто розподіл температур в просторі і в часі, знаходять вирішенням диференціального рівняння (ДР) теплопровідності, яке в 1814 році вивів французький вчений Фур'є і тому це рівняння носить його ім'я. Виведення ДР теплопровідності засноване на законі збереження енергії і використовує закон Фур'є. Рівняння Фур'є моделює процеси, які в процесі теплопровідності протікають в кожному елементарному об'ємі тіла:

1) поглинання теплоти при нагріві або її виділення при охолоджуванні;

2) проходження теплової енергії через елементарний об'єм транзитом;

3) виділення або поглинання теплоти за рахунок дії внутрішніх джерел або стоків теплоти потужністю **qv**.

У векторній формі диференціальне рівняння теплопровідності має вигляд:

,

де  – питома об'ємна теплоємність, Дж/(м3⋅К);  – щільність, кг/м3; **с** – питома масова теплоємність, Дж/(кг⋅К).

Нагадаємо, що для твердих тіл  .

Вирішуючи це рівняння, ми отримаємо температурне поле: Т(хi, τ). Т.ч. диференціальне рівняння теплопровідності встановлює *зв'язок між просторовою і часовою змінами температури*.

Вигляд формул для операторів дивергенції (div) і градієнта (grad) залежить від вибору системи координат. Наприклад, в декартовій системі координат ДР теплопровідності набере вигляду:

,

або, приймаючи допущення про незалежність фізичних властивостей речовини від температури {}:

,

де  – коефіцієнт температуропровідності, м2/с.

У нашому короткому курсі ТМО вирішуватимемо диференціальне рівняння Фур'є для тіл простої форми (безкінечна пластина, безкінечний циліндр і куля або сфера) з постійними фізичними коефіцієнтами:

,

де x1 – перша координата в ортогональній системі координат: x1 = x в декартовій системі координат, x1 = r в циліндровій і сферичній системах координат; k = 1, 2 або 3 – коефіцієнт форми тіла: k = 1 – безкінечна пластина;

k = 2 – безкінечний циліндр; k = 3 – куля.

За відсутності в системі внутрішніх джерел\стоків теплоти (qv = 0) ДР Фур'є для тіл простої форми записуються таким чином:

k = 1 :  ; k = 2 :  ; k = 3 : .

За незмінних умов теплообміну (постійних температурах флюїда, що омиває тіло з різних сторін, і постійних коефіцієнтах тепловіддачі) на границях тіла його температурне поле з деякого моменту часу перестає змінюватися в часі і настає стаціонарний режим теплопровідності, який для тіл простої форми описується рівнянням Пуассона при дії внутрішніх джерел теплоти

,

або рівнянням Лапласа, якщо qv =0

.

В результаті вирішення одновимірного диференціального рівняння для стаціонарного процессу теплопровідності знаходять температурне поле у вигляді T(x1) або в явному вигляді T(x) – в декартовій системі координат і T(r) – в циліндровій і сферичній системах координат.

**2.4. Умови однозначності, необхідні для вирішення рівняння Фур'є**

ДР теплопровідності має незліченну безліч рішень. Для виділення єдиного вирішення цього рівняння, відповідного єдиному явищу теплопровідності, мають бути задані наступні параметри:

1. Геометричні розміри і форма тіла, а також час **τ** для нестаціонарного процесу. Відмітимо, що час процесу може бути заданий неявно по якій-небудь додатковій умові, наприклад, нагрівання або охолоджування тіла до досягнення теплової рівноваги з довкіллям;

2. Фізичні властивості речовини (коефіцієнт теплопровідності **λ**, питома об'ємна теплоємність **с'** (або питома масова теплоємність **с**), щільність **ρ**, коефіцієнт температуропровідності **а**);

3. Закон розподілу внутрішніх джерел теплоти **qv (xi, τ)**. У окремому випадку ;

4. Краєві умови (КУ) задають початковий розподіл температури в заданій розрахунковій області (ПУ) і умови теплообміну на границі цієї області (ГУ).

**2.4.1. Початкові умови (ПУ)**

Перед початком розрахунку процесу нестаціонарної теплопровідності необхідна інформація про розподіл температури в об'ємі тіла в деякий момент часу, що вважається початком відліку, або початковим моментом часу (момент часу **τ = 0**). Т.ч., має бути задана функція

 або 

де  – система координат.

У окремому випадку одновимірного і рівномірно розподіленого в об'ємі тіла початкового температурного поля ПУ мають вигляд:

Т (х, 0) = Т0 = const.

Відмітимо, що для завдань стаціонарної теплопровідності завдання початкових умов не має сенсу.

**2.4.2. Граничні умови (ГУ)**

У розрахунках теплообміну застосовують граничні умови чотирьох типів, які називають родами. Граничні умови теплообміну необхідно задавати як на зовнішній поверхні тіла (зовнішні ГУ), так і при розташуванні кордону розрахункової області усередині тіла, на внутрішній поверхні (внутрішні ГУ). Граничні умови першого і другого родів можуть бути як зовнішніми, так і внутрішніми, граничні умови третього роду – лише зовнішні граничні умови, граничні умови четвертого роду – лише внутрішні граничні умови.

*Граничні умови першого роду*

За граничних умов I-го роду задають значення температури на границі розрахункової області:

,

де індекс w означає "границю";  – координати границі заданої розрахункової області. У окремому випадку ця температура після миттєвої зміни до температури **Tw** може залишатися незмінною в часі і не змінюватися уздовж границі:

.

*Граничні умови другого роду*

При граничних умовах II-го роду задають значення щільності теплового потоку на границі розрахункової області:

,

де індекс w означає "границю";  – координати границі заданої розрахунко-вої області.

З врахуванням закону Фур'є ГУ II-го роду можна записати таким чином

,

де **n** – координата, направлена по нормалі до границі розрахункової області.

У окремому випадку щільність теплового потоку **qw** може не змінюватися уздовж границі розрахункової області і бути постійною в часі:

.

*Граничні умови третього роду*

За граничних умов III-го роду задають температуру зовнішнього середовища, що оточує тіло, і закон теплообміну між середовищем і поверхнею тіла. Граничні умови третього роду є найбільш загальними і часто використовуваними в практиці розрахунків ГУ. Як закон теплообміну між довкіллям і поверхнею тіла найчастіше в інженерних розрахунках використовують закон тепловіддачі – закон Ньютона



де **** – коефіцієнт тепловіддачі (пригадаємо, що в загальному випадку тепловіддача відбувається конвекцією і випромінюванням); **Tf** – температура флюїда; **Tw** – температура поверхні тіла.

З врахуванням закону Фур'є ГУ III-го роду можна записати таким чином

,

де знак + або – в законі Фур'є залежить від вибору початку системи координат.

У розрахунках теплопровідності використовують безрозмірну форму запису граничних умов третього роду

,

де – безрозмірна температура;  – безрозмірна координата, перпендикулярна поверхні теплообміну; **R** – характерний (визначаючий) розмір тіла;  – критерій Біо (Biot); **λw** – коефіцієнт теплопровідності тіла.

Критерій Біо – визначальний критерій в завданнях теплопровідності, тобто від його величини залежить інтенсивність процесу теплопровідності. Фізичний сенс критерію Біо можна розкрити, записавши його формулу у вигляді

,

тобто, критерий Біо характеризує:

а) відношення інтенсивності зовнішнього теплообміну (**α**) до інтенсивності внутрішнього теплообміну(**λ/R**);

або

б) відношення термічного опору теплопровідності(**R/λ**) до термічного опору конвективної тепловіддачі(**1/α**).

*Граничні умови четвертого роду*

Граничні умови IV-го роду задають умови теплообміну на границі ідеального контакту двох тіл, що складаються з різної речовини з різними фізичними властивостями. В цьому випадку в зоні ідеального контакту в обох тіл рівні температури і теплові потоки

, або, використовуючи закон Фур'є,  .

**2.5. Методи рішення краєвої задачі в теорії теплопровідності**

Всі методи рішення краєвої задачі теорії теплопровідності можна розділити на дві великі групи. До першої групи відносять методи, що використовують сучасні засоби математичного аналізу, обчислювальної математики і обчислювальної техніки, тому їх називають теоретичними методами. У другу групу включені методи, коли температурне поле знаходять в результаті проведення експерименту. Тому їх називають експериментальними методами.

Експериментальні методи діляться на методи теорії подібності і методи аналогій. По методу теорії подібності температурне поле знаходять експериментально на моделі, в якій реалізується процес тієї ж фізичної природи, що і в об'єкті моделювання. По методу аналогій дослідження процесу теплопровідності замінюється дослідженням процесу іншої фізичної природи, який протікає аналогічно процесу теплопровідності. Ця аналогія виявляється в однакових за формою запису диференціальних рівняннях перенесення, що відносяться до різних фізичних явищ.

Теоретичні методи можна підрозділити на аналітичні, чисельні, чисельно-аналітичні методи.

При використанні аналітичних методів рішення отримують у вигляді кінцевої формули або безкінечного ряду. Розрізняють точні аналітичні методи (метод розділення змінних або метод Фур'є, метод інтегральних перетворень, метод конформних відображень і ін.) і наближені аналітичні методи (різні форми варіаційних методів, метод підстановок і ін.). Точні аналітичні методи можна застосовувати лише до лінійних завдань теорії теплопровідності.

При використанні чисельних методів рішення задачі отримують у вигляді набору значень температур в дискретних точках простору в дискретні моменти часу. В даний час для вирішення завдань теплообміну найчастіше використовують метод сіток і метод кінцевих елементів.

Методи, які використовують аналітичні рішення для набуття значень температур в дискретних точках простору в дискретні моменти часу, називаються чисельно-аналітичними (метод граничних елементів, метод R-функций, метод дискретного задоволення краєвих умов і ін.).

**2.6. Нестаціонарна теплопровідність в тілах простої форми**

В результаті рішення задачі нестаціонарної теплопровідності знаходять температурне поле, що змінюється в просторі і в часі. Точні аналітичні вирішення диференціального рівняння теплопровідності для тіл простої форми з граничними умовами I-го, II-го і III-го родів приведені в довідниках "Нестаціонарна теплопровідність". Для зручності інженерних розрахунків аналітичне вирішення при ГУ III роду представлене у вигляді графіків – номограм, які для тіл простої форми також приведені в тій же довідниковій літературі. Тому далі розглянемо постановку завдання і алгоритм визначення температурного поля за допомогою номограм.

**2.6.1. Математичне формулювання завдання**

Лінійне диференціальне рівняння теплопровідності для тіл класичної форми за відсутності внутрішніх джерел теплоти має вигляд

,

де x1 – перша координата в ортогональній системі координат; k = 1, 2 або 3 – коефіцієнт форми тіла; а – коефіцієнт температуропровідності.

Температурне поле знаходитимемо в розрахункової області, обмеженою віссю симетрії тіла і його зовнішнім кордоном (див. рис. 1.2). Для виділення єдиного вирішення даного рівняння задамо умови однозначності:

— розмір розрахункової області  ;

— теплофізичні властивості матеріалу тіла відомі: **a** и **λ**;

— внутрішні джерела теплоти відсутні:  ;

— початкові умови: Т (х1, 0)=Т0;

— граничні умови:

а) на внутрішньому кордоні з умови симетрії температурного поля виходить, що  ;

б) на зовнішньому кордоні теплообмін визначається температурою довкілля Tf і коефіцієнтом тепловіддачі : .

Рішенням поставленої задачі буде температурне поле  для заданих умов однозначності.



Рис. 2.2. До розрахунку температурного поля при ГУ III-го роду

У практиці інженерних розрахунків знаходять загальне вирішення температурного поля в безрозмірному вигляді  залежно від безрозмірного коефіцієнта тепловіддачі – критерію Біо (Bi) в безрозмірних точках простору (X) в моменти часу Fo. В цьому випадку математичне формулювання завдання має вигляд:

.

Початкова умова 

Граничні умови:

а) на внутрішньому кордоні ;

б) на зовнішньому кордоні 

де  – безрозмірна температура;  – безрозмірна координата; R – характерний (визначаючий) розмір тіла; – критерій Біо; λw – коефіцієнт теплопровідності твердого тіла;  – безрозмірний час – критерій Фур'є.

В результаті рішення задачі нестаціонарної теплопровідності, записаної в безрозмірному вигляді, отримуємо функціональну залежність . Для зручності аналізу рішення дану залежність представляють графічно для теплового центру і поверхні кожного тіла окремо. Т.ч. найчастіше використовують шість графіків залежності  для конкретних значень k=1,2 і 3 в точках X=0 і X=1, які приведені в підручниках по ТМО і в довідниках. На рис. 2.3 показаний вигляд номограми розрахунку нестаціонарної теплопровідності в тілах простої форми за граничних умов III-го роду.



Рис.2.3. Номограма для розрахунку нестаціонарної теплопровідності при ГУ III-го роду

При розрахунку нестаціонарної теплопровідності існує дві основних постановки завдання: пряма і зворотна. Метою рішення прямої задачі є визначення температурного поля (Θ) за заданих умов однозначності (Fo, Bi). В результаті рішення зворотної задачі теплопровідності по відомому температурному полю (Θ) знаходять умови однозначності – час процесу теплопровідності або коефіцієнт тепловіддачі. Якщо по умові завдання задані Θ і Bi, то по графіку  визначають критерій Fo, а потім час процесу. Якщо по умові завдання задані Θ і Fo, то по графіку  визначають критерій Bi, за значенням якого розраховують коефіцієнт тепловіддачі.

*Пряма постановка завдання розрахунку нестаціонарної теплопровідності*

Дано: , де  – час нагріву або охолоджування тіла

Знайти: 1) температуру поверхні тіла 

2) температуру теплового центру тіла 

3) середню по масі температуру тіла .

Алгоритм поставленого вище завдання полягає в наступному.

1. Перед початком розрахунку необхідно розрахувати розмір розрахункової області R, який для безкінечного циліндра і кулі дорівнює радіусу тіла, а для безкінечної пластини  – при симетричному нагріві або охолоджуванні і, відповідно, , якщо теплообмін на одній із сторін пластини відсутній – несиметричний процес теплопровідності.

2. Розраховуємо критерії і по графіках для поверхні і теплового центру тіла визначаємо безрозмірні температури поверхні  і центру  відповідно.



3. Знаходимо температури на поверхні і в центрі тіла. Оскільки за визначенням , то, виражаючи невідому температуру, отримаємо , де Т = Тw, якщо  і Т = Тс, якщо .

4. Розраховуємо середню по масі температуру тіла в кінці процесу теплопровідності. При допущенні параболічного розподілу температури по перетину тіл простої форми формула для розрахунку середньомасової температури матиме вигляд:

,

де k – коефіцієнт форми тіла;– перепад температур по перетину тіла.

*Зворотна постановка завдання розрахунку нестаціонарної теплопровідності*

***А***. *Визначення часу процесу нагріва/охолождення*

Дано: 

Знайти: 1) час процесу теплопровідності – ;

2) температуру теплового центру, або температуру поверхні ;

3) середню по масі температуру тіла .

Алгоритм поставленого вище завдання полягає в наступному.

1. Перед початком розрахунку необхідно розрахувати розмір розрахунко-вої області R, який для безкінечного циліндра і кулі дорівнює радіусу тіла, а для безкінечної пластини  – при симетричному нагріві або охолоджуванні і, відповідно, , якщо теплообмін на одній із сторін пластини відсутній – несиметричний процес теплопровідності.

2. Розраховуємо температурні критерії , або  залежно від вихідних даних і критерій Bi. Потім по графіках  або  визначаємо критерій Фур'є.



3. Розраховуємо час процесу по формулі .

4. Невідому температуру і середню по масі температуру знаходимо по алгоритму рішення прямої задачі.

***Б***. *Визначення коефіцієнта тепловіддачі від зовнішнього середовища до поверхні тіла*

Дано: 

Знайти: 1) коефіцієнт тепловіддачі – ;

2) температуру теплового центру, або температуру поверхні ;

3) середню по масі температуру тіла .

Алгоритм поставленого вище завдання полягає в наступному.

1. Перед початком розрахунку необхідно розрахувати розмір розрахунко-вої області R, який для безкінечного циліндра і кулі дорівнює радіусу тіла, а для безкінечної пластини  – при симетричному нагріві або охолоджуванні і, відповідно, , якщо теплообмін на одній із сторін пластини відсутній – несиметричний процес теплопровідності.

2. Розраховуємо температурні критерії , або  залежно від вихідних даних і критерій Fo. Потім по графіках  або  визначаємо критерій Біо.



3. Розраховуємо коефіцієнт тепловіддачі по формулі .

4. Невідому температуру і середню по масі температуру знаходимо по алгоритму рішення прямої задачі.

**2.7. Стаціонарна теплопровідність в плоскій і циліндровій стінках**

У стаціонарному режимі теплопровідності температурне поле не змінюється в часі, тобто . В цьому випадку диференціальне рівняння теплопровідності для тіл простої форми при допущенні незалежності фізичних властивостей тіла від температури набирає вигляду:

 або в дивергентній формі ,

де x1 – координата, м; k – коефіцієнт форми тіла. Підставляючи в останнє рівняння значення коефіцієнта форми тіла і позначення координати для тіл простої форми, отримаємо:

а) безкінечна пластина або плоска стінка (k = 1, x1 = x)

;

б) безкінечний циліндр (k = 2, x1 = r)

 або в дивергентній формі ;

в) куля або сфера (k = 3, x1 = r) або в дивергентній формі  .

*Плоска стінка*

Вирішимо диференціальне рівняння теплопровідності для плоскої стінки за наступних умов однозначності:

— товщина стінки рівна δ, м;

— коефіцієнт теплопровідності стінки не залежить від температури і рівний **λ**, Вт/(м·К);

— внутрішні джерела (стоки) теплоти в стінці відсутні, тобто ;

— на обох поверхнях плоскої стінки задано значення температури (ГУ I-го роду): .



Рис. 2.4. Стаціонарне температурне поле в плоскій стінці

Вирішення диференціального рівняння для безкінечної пластини виконаємо подвійним інтегруванням:

 звідки слідує .

І остаточно отримуємо загальне вирішення температурного поля у вигляді

,

з аналізу, якого витікає, що в плоскій стінці при стаціонарному режимі теплопровідності температура лінійно змінюється по її товщині (див. рис. 2.4.).

Постійні інтегрування знаходимо, використовуючи граничні умови шляхом вирішення системи з двох лінійних рівнянь

.

З першого рівняння виходить, що , а з другого рівняння системи знаходимо постійну

.

Підставляючи значення постійних інтегрування в загальне рішення, остаточно отримуємо

.

Знаючи температурне поле, нескладно розрахувати щільність теплового потоку в плоскій стінці, скориставшись законом Фур'є

 або ,

де  – теплова провідність плоскої стінки, Вт/(м2⋅К);  – термічний опір теплопровідності плоскої стінки (м2⋅К) /Вт.

З аналізу формули для розрахунку щільності теплового потоку витікає, що тепловий потік не змінюється по товщині плоскої стінки  або  в будь-якій точці плоскої стінки. Тому для будь-якого i-го шару багатошарової стінки можна записати

,

де  – перепад температур на i-ому шарі багатошарової стінки;  – термічний опір теплопровідності i-го шару багатошарової стінки.

З останнього вираження виходить, що перепад температур на кожному шарі багатошарової стінки прямо пропорційний термічному опору цього шару



Щільність теплового потоку для плоскої стінки, що складається з **n** шарів, розраховується по формулі:

.

*Циліндрова стінка*

Вирішимо диференціальне рівняння теплопровідності для циліндрової стінки за наступних умов однозначності:

— внутрішній і зовнішній радіуси циліндрової стінки рівні **r1** і **r2**, м;

— коефіцієнт теплопровідності стінки не залежить від температури і рівний **λ**, Вт/(м·К);

— внутрішні джерела (стоки) теплоти в стінці відсутні, тобто ;

— на обох поверхнях циліндрової стінки задано значення температури (ГУ I-го роду): .

Вирішення диференціального рівняння для безконечного циліндра виконаємо подвійним інтегруванням. Для цього скористаємося записом диференціального рівняння теплопровідності в дивергентній формі

, оскільки 

Розділяючи змінні і інтегруючи другий раз, отримаємо загальне вирішення температурного поля



,

з аналізу, якого витікає, що в циліндровій стінці при стаціонарному режимі теплопровідності зміна температури по її товщині підкоряється логарифмічному закону (див. рис. 2.5.).

Постійні інтегрування знаходимо, використовуючи граничні умови шляхом вирішення системи з двох лінійних рівнянь

.

Надаючи читачеві самостійно вирішити вищезгадану систему рівнянь алгебри, приведемо формулу зміни температурного поля в циліндровій стінці





Рис. 2.5. Стаціонарне температурне поле в циліндровій стінці

Тепловий потік, що проходить через циліндрову стінку завдовжки **λ**, розрахуємо за законом Фур'є

.

З аналізу останньої формули виходить, що тепловий потік не змінюється по товщині циліндрової стінки . У розрахунках теплопровідності через циліндрову стінку використовують тепловий потік, віднесений до довжини циліндрової стінки, – лінійну щільність теплового потоку

,(м⋅К) /Вт

де  – лінійний термічний опір теплопровідності циліндрової стінки.

У загальному випадку для будь-якого i – го шару багатошарової циліндро-вої стінки можемо записати

,

звідки витікає, що

