

ЛЕКЦІЯ 5

ТЕХНОЛОГІЇ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ (ПРОДОВЖЕННЯ)

- 5.1. Метод аналізу ієрархій. Основні етапи методу аналізу ієрархій
- 5.2. Шкала Т. Сааті.
- 5.3. Метод парних порівнянь.
- 5.4. Ступінь погодженості.
- 5.5. Вектор пріоритетів.
- 5.6. Розрахунок локальних пріоритетів. Синтез пріоритетів.

5.1. Метод аналізу ієрархій. Основні етапи методу аналізу ієрархій

Будь-яка проблема являє собою складний об'єкт, що має ієрархічну структуру. При аналізі такого об'єкта дослідник, звичайно, зіштовхується зі складною системою взаємодії компонент проблеми (ресурси, мети, впливові особи й групи, політичні, економічні й інші фактори), які потрібно проаналізувати.

Метод аналізу ієрархій (МАІ) є систематичною процедурою для ієрархічного представлення компонентів проблеми. Метод становить у декомпозиції проблеми на усе більш прості складові і подальшій обробці послідовності суджень особи,

що приймає рішення (ЛПР), за парними порівняннями. У результаті може бути отриманий відносний ступінь (інтенсивність) взаємодії (впливу) компонентів нижнього і рівня на компоненти верхнього ($i-1$) рівня або i рівня на самий верхній (нульовий) рівень. Ці оцінки виражаються потім чисельно. МАІ включає процедури синтезу множинних суджень, одержання пріоритетності критеріїв і пошуку альтернативних рішень.

Теорія систем надала концептуальну основу для побудови нової методології, що дозволяє, описувати систему і її проблеми в термінах взаємозалежної ієрархічної структури. Ця методологія пропонує засоби для встановлення упорядкування пріоритетів і виміру інтенсивності взаємодії компонент, що описують структуру системи ієрархії. Методологія враховує роль людини (як елемента ієрархії) у складних соціальних і організаційних системах і примиряє численні і суперечливі устремління, що мають у людей, чий інтерес торкають поводження системи.

Метод аналізу ієрархій включає наступні основні етапи:

- декомпозиція проблеми;
- побудова ієрархічної структури моделі проблеми;
- експертне оцінювання переваг;
- побудова локальних пріоритетів;
- оцінка погодженості суджень;
- синтез локальних пріоритетів;
- висновки й пропозиції для прийняття рішень.

5.2. Шкала Т. Сааті

Метод аналізу ієрархій при побудові єдиної шкали для різних компонентів проблеми використовує міру ступеня впливу кожного фактора одного рівня на фактори верхнього рівня або на кінцеву мету. Ця міра утвориться в результаті висловлення суджень про ступінь впливу (важливості) цих факторів.

Американський фахівець із системного аналізу Т. Сааті запропонував шкалу відносної важливості (значущості, переваги) представлену в таблиці 5.1.

Таблиця 5.1 – Шкала відносної значущості

Ступінь переваги одного об'єкта перед іншим	Міра важливості (значимості) переваги
Рівна важливість (значимість). Немає переваги	1
Слабка перевага по важливості. Слабка перевага.	3
Істотна або сильна перевага по важливості (значимості). Сильна перевага.	5
Дуже сильна або значна перевага по важливості (значимості). Дуже сильна перевага.	7
Абсолютна перевага.	9
Проміжна оцінка міри переваги між сусідніми значеннями	2, 4, 6, 8

Вибір дискретної шкали «1 – 9» для оцінки порівняльної міри важливості (значимості або рівня переваг), одержуваної в результаті висловлення суджень експертом, ґрунтується на наступних передумовах:

1) якісні розходження значимі на практиці і мають елемент точності, коли величина порівнюваних об'єктів (предметів, явищ, процесів, видів діяльності) одного порядку або об'єкти близькі щодо властивості, по якій вони порівнюються;

2) психометричні властивості людини дозволяють досить добре проводити якісні розмежування мір властивостей порівнюваних об'єктів по наступним рівням: *немає розходження, слабке розходження, сильне розходження, дуже*

сильне розходження, абсолютне розходження. З огляду на компромісні оцінки розходження між перерахованими вище рівнями значущості (важливості), одержуємо дев'ять рівнів (ступенів) розходження, що можуть бути добре погоджені;

3) у психології існує поняття психологічної межі здатності людини одночасно розрізняти якесь число предметів по якійсь властивості. Ця межа дорівнює 7 ± 2 , тобто для створення шкали, на якій ці предмети будуть розбірливі, необхідно 9 точок. З огляду на вищесказане, шкалу Сааті іноді називають психометричною шкалою.

5.3. Метод парних порівнянь

Для побудови шкали пріоритетів (переваг), одержуваної при експертному висловленні суджень про рівень розходження між порівнюваними об'єктами в МАІ застосовується метод парних порівнянь. Якщо для порівняння обране n (A_1, A_2, \dots, A_n) об'єктів, то результати порівнянь заносяться в квадратну n -мірну матрицю (рис. 5.1).

	A_1	A_2	...	A_j	...	A_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}
...
A_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{in}
...
A_n	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nj}	...	a_{nn}

Рисунок. 5.1 – Матриця парних порівнянь

Елементом цієї матриці a_{ij} є міра переваги об'єкта A_i у порівнянні з об'єктом A_j . Таким чином, i -й рядок матриці показує міру переваги i -го об'єкта над іншими $(n-1)$ об'єктами і над самим собою. Міра переваги виражається експертом у шкалі Сааті і приймає значення від 1 до 9, якщо об'єкт A_i більш важливий, чим об'єкт A_j . У випадку, коли $i = j$, міра переваги дорівнює 1, тобто діагональні елементи

матриці парних порівнянь завжди рівні 1. Варто враховувати, що для матриці парних порівнянь виконується така умова:

$$a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}$$

Це означає, що якщо по шкалі Сааті об'єкт A_i більш важливий, чим об'єкт A_j і ця міра переваги дорівнює a_{ij} (наприклад $a_{ij}=5$), то міра переваги A_j -го об'єкта в порівнянні з об'єктом A_i – величина зворотна a_{ij} (тобто $a_{ji}=1/5$). Таким чином, експертом заповнюється тільки верхня наддіюганальна частина матриці парних порівнянь і матриця здобуває наступний вид (наприклад, для чотирьох порівнюваних об'єктів, рис. 5.2):

	A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	1	a_{12}	a_{13}	a_{14}
A_2	$1/a_{12}$	1	a_{23}	a_{24}
A_3	$1/a_{13}$	$1/a_{23}$	1	a_{34}
A_4	$1/a_{14}$	$1/a_{24}$	$1/a_{34}$	1

Рисунок. 5.2 – Матриця парних порівнянь для чотирьох порівнюваних об'єктів

5.4. Ступінь погодженості

У загальному випадку під погодженістю мається на увазі те, що при наявності основного масиву неопрацьованих даних усі інші дані можуть бути логічно отримані з них. Якщо порівнюються n об'єктів, то досить $(n-1)$ судження, у яких порівнювані об'єкти представлені, принаймні, один раз. Усі інші судження (у випадку погодженості суджень) можуть бути виведені з них.

Повна погодженість включає як *порядкову погодженість*, що називають ще властивістю *транзитивності* (якщо A_i має перевагу над A_j , а A_j має перевагу над A_k , то A_i має перевагу над A_k), так і *кардинальну погодженість* ($a_{ij} \cdot a_{jk} = a_{ik}$).

Очевидно, що домогтися повної погодженості матриці парних порівнянь при експертних оцінках об'єктів неможливо. Природно після експертних оцінок по

методу парних порівнянь порушити питання про ступінь погодженості отриманих оцінок.

Як міру погодженості розглядають два показники:

- індекс погодженості (ІП);
- відношення погодженості (ВП).

З теорії матриць відомо, що погодженість зворотно симетричної матриці (яка виходить як результат застосування експертом методу парних порівнянь по шкалі Сааті) еквівалентна вимозі рівності її максимального власного значення λ_{max} і числа порівнюваних об'єктів n ($\lambda_{max} = n$).

Тому як міру неузгодженості розглядають нормоване відхилення λ_{max} від n , називане *індексом погодженості*:

$$ІП = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}.$$

Для того щоб оцінити, чи є отримане узгодження прийнятним чи ні, його порівнюють із випадковим індексом (ВІ).

Випадковим індексом називають індекс погодженості, розрахований для квадратної n -мірної позитивної зворотно симетричної матриці, елементи якої генеровані датчиком випадкових чисел, розподілених по рівномірному закону для інтервалу значень: $1/9, 1/8, 1/7, 1/6, 1/5, 1/4, 1/3, 1/2, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Для матриці з фіксованим значенням n індекс розраховується як середнє значення для вибірки N (наприклад, $N = 100$). Нижче представлена таблиця величин випадкового індексу для різних матриць порядку від 2 до 15.

Таблиця 5.2 – Таблиця величин випадкового індексу

Порядок матриці ($n \times n$)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Випадковий індекс (ВІ)	0	0,58	0,90	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49	1,51	1,54	1,56	1,57	1,59

Одержавши в результаті розрахунку індекс погодженості i , вибравши з таблиці випадковий індекс для заданого порядку матриці, розраховують відношення погодженості (ВП):

$$ВП = \frac{ІІ}{ВІ}$$

Якщо величина ВП менше 0,1, то ступінь погодженості варто вважати гарною. У деяких випадках прийнятним ступенем погодженості можна вважати діапазон (0,1 – 0,3). Це, як правило, відноситься до проблем, для яких прийняті по експертних висновках рішення не спричиняють серйозних негативних наслідків. У протилежному випадку (якщо $ОС > 0,1 - 0,3$) експерту рекомендується переглянути свої судження. Для цього необхідно виявити ті позиції в матриці суджень, що вносять максимальний вклад у величину відносини погодженості, і спробувати змінити міру непогодженості в меншу сторону на основі більш глибокого аналізу питання.

5.5. Вектор пріоритетів

Проведемо математичну обробку матриці парних порівнянь у шкалі Сааті з метою одержання вектора пріоритетів порівнюваних об'єктів. З математичної точки зору задача зводиться до обчислення головного власного вектора, що після нормалізації стає вектором пріоритетів.

Точний спосіб обчислення головного власного вектора матриці парних порівнянь полягає в зведенні матриці в достатньо великі ступені і поділ суми кожного рядка на загальну суму елементів матриці. Ми скористаємося іншим, більш простим, способом, що дає добре наближення (табл. 5.3).

Таблиця 5.3 – Таблиця обчислення вектора пріоритетів

	A_1	A_2	...	A_n	Головний власний вектор	Вектор пріоритетів
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	V_1	P_1
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	V_2	P_2
...
A_n	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nn}	V_n	P_n

Компонента головного власного вектора обчислюється як середнє геометричне значень у рядку матриці:

$$V_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n a_{ij}}.$$

Компонента вектора пріоритетів обчислюється як нормоване значення головного власного вектора:

$$P_i = \frac{V_i}{\sum_{i=1}^n V_i}.$$

Наближені значення λ_{max} для оцінки відносини погодженості можна розрахувати за наступною формулою:

$$\lambda_{max} = \sum_{j=1}^n M_j P_j,$$

де $M_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}$ – сума елементів i -го стовпця матриці;

P_j – вектор пріоритетів аналізованої матриці.