

РІВНЯННЯ, ЩО ДОЗВОЛЯЮТЬ ЗНИЖЕННЯ ПОРЯДКУ

$$1) 2xy'y'' = y'^2 - 1$$

• Рівняння не містить в явному вигляді шукану функцію $y(x)$.

$$y' = p(x) \Rightarrow y'' = p'$$

$$2xpp' = p^2 - 1$$

$$\frac{2pdp}{p^2 - 1} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|p^2 - 1| = \ln|x| + \ln|C_1| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^2 - 1 = C_1x \Rightarrow y'^2 - 1 = C_1x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \pm\sqrt{C_1x+1} \Rightarrow y = \pm\int\sqrt{C_1x+1}dx = \pm\frac{1}{C_1}\frac{2}{3}(C_1x+1)^{\frac{3}{2}} + C_2 \bullet$$

$$2) y'^2 + 2yy'' = 0$$

• Рівняння не містить в явному вигляді незалежну змінну x .

$$y' = p(y) \Rightarrow y'' = p \cdot p'$$

$$p^2 + 2ypp' = 0$$

$$\frac{2pdp}{p^2} = -\frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|p^2| = \ln\left|\frac{C_1}{y}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^2 = \frac{C_1}{y} \Rightarrow p = \pm\sqrt{\frac{C_1}{y}} \Rightarrow y' = \pm\frac{\sqrt{C_1}}{\sqrt{y}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{y}dy = \pm\sqrt{C_1}dx \Rightarrow \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = \pm\sqrt{C_1}x + C_2 \bullet$$

$$3) y''' = y''^2$$

$$\bullet y'' = p(x) \Rightarrow y''' = p'$$

$$p' = p^2 \Rightarrow \frac{dp}{p^2} = dx \Rightarrow -\frac{1}{p} = x + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = -\frac{1}{x+C_1} \Rightarrow y'' = -\frac{1}{x+C_1} \Rightarrow$$

$$y' = -\ln|x+C_1| + C_2 \Rightarrow y = -\int(\ln|x+C_1| - C_2)dx + C_3 =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} u = \ln|x+C_1| \\ dv = dx \end{array} \right\| \begin{array}{l} du = \frac{1}{x+C_1} \\ v = x \end{array} =$$

$$= -(x\ln|x+C_1| - \int \frac{x}{x+C_1}dx - C_2x) + C_3 =$$

$$= -x \ln|x + C_1| + x - C_1 \ln|x + C_1| + C_2 x + C_3 \bullet$$

$$4) x^2 y'' = y'^2$$

$$\bullet y' = p(x) \Rightarrow y'' = p'$$

$$x^2 p' = p^2 \Rightarrow \frac{dp}{p^2} = \frac{dx}{x^2} \Rightarrow -\frac{1}{p} = -\frac{1}{x} - C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = \frac{x}{1 + C_1 x} \Rightarrow y' = \frac{x}{1 + C_1 x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \int \frac{x dx}{1 + C_1 x} + C_2 = \frac{1}{C_1} \left(x - \frac{1}{C_1} \ln|x + \frac{1}{C_1}| \right) + C_2 \bullet$$

$$5) yy'' + 1 = y'^2$$

$$\bullet y' = p(y) \Rightarrow y'' = pp'$$

$$ypp' + 1 = p^2$$

$$\frac{p dp}{p^2 - 1} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \frac{1}{2} \ln|p^2 - 1| = \ln|C_1 y| \Rightarrow p^2 - 1 = C_1^2 y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \pm \sqrt{C_1^2 y^2 + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{C_1^2 y^2 + 1}} = \pm dx \Rightarrow \frac{1}{C_1} \ln \left| y + \sqrt{y^2 + \frac{1}{C_1^2}} \right| = \pm x + C_2 \bullet$$

$$6) y''^2 = y'^2 + 1$$

$$\bullet y' = p(y) \Rightarrow y'' = pp'$$

$$(pp')^2 = p^2 + 1 \Rightarrow (p')^2 = \frac{p^2 + 1}{p^2} \Rightarrow p' = \pm \sqrt{\frac{p^2 + 1}{p^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{p^2}{p^2 + 1}} dp = \pm dy \Rightarrow \frac{p dp}{\sqrt{p^2 + 1}} = \pm dy \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d(p^2 + 1)}{\sqrt{p^2 + 1}} = \pm y + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{p^2 + 1} = \pm y + C_1 \Rightarrow p^2 + 1 = (C_1 \pm y)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^2 = (C_1 \pm y)^2 - 1 \Rightarrow y' = \pm \sqrt{(C_1 \pm y)^2 - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pm \frac{dy}{\sqrt{(C_1 \pm y)^2 - 1}} = dx \Rightarrow \frac{d(C_1 \pm y)}{\sqrt{(C_1 \pm y)^2 - 1}} = dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln \left| C_1 \pm y + \sqrt{(C_1 \pm y)^2 - 1} \right| = x + C_2 \bullet$$

Домашнє завдання.

1) $y^3 y'' = 1;$

2) $y'' = 2yy';$

3) $y''(e^x + 1) + y' = 0;$

4) $yy'' = y'^2 - y'^3;$

5) $2yy'' = y^2 + y'^2.$