РІВНЯННЯ, ЩО ДОЗВОЛЯЮТЬ ЗНИЖЕННЯ ПОРЯДКУ

Розв'язати рівняння, претворивши їх до такого вигляду, щоб обидві частини рівняння були повними похідними.

1) $yy''' = y'y'' \,|: y''y$

$\bullet\ \dfrac{y'''}{y''} = \dfrac{y'}{y} \quad \Rightarrow \quad (\ln y'')' = (\ln y)' \quad \Rightarrow \quad \ln y'' = \ln y + \ln C_1 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad y'' = C_1 y$

$y' = p(y) \quad \Rightarrow \quad y'' = pp'$

$pp' = C_1 y \quad \Rightarrow \quad pdp = C_1 ydy \quad \Rightarrow \quad p^2 = C_1 y^2 + C_2 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad y' = \pm\sqrt{C_1 y^2 + C_2} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{\sqrt{C_1}\cdot\sqrt{y^2 + \dfrac{C_2}{C_1}}} = \pm dx \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{\sqrt{C_1}} \ln\left| y + \sqrt{y^2 + \dfrac{C_2}{C_1}} \right| = \pm x + C_3 \bullet$

2) $yy'' + y'^2 = 1$

$\bullet\ (yy')' = (x)' \quad \Rightarrow \quad yy' = x + C_1 \quad \Rightarrow \quad ydy = (x + C_1)dx \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \dfrac{y^2}{2} = \dfrac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \bullet$

3) $yy'' = y'(y'+1) \,|: (y'+1) : y$

$\bullet\ \dfrac{y''}{y'+1} = \dfrac{y'}{y} \quad \Rightarrow \quad (\ln|y'+1|)' = (\ln|y|)' \quad \Rightarrow \quad y' + 1 = C_1 y \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \dfrac{dy}{C_1 y - 1} = dx \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{C_1} \ln\left| y - \dfrac{1}{C_1} \right| = x + C_2 \bullet$

4) $y'y''' = 2y''^2$

$\bullet\ \dfrac{y'''}{y''} = 2\dfrac{y''}{y'} \quad \Rightarrow \quad (\ln|y''|)' = (2\ln|y'|)' \quad \Rightarrow \quad y'' = y'^2 \cdot C_1;$

$y' = p(x) \quad \Rightarrow \quad y'' = p'$

$p' = p^2 C_1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dp}{p^2} = C_1 dx \quad \Rightarrow \quad -\dfrac{1}{p} = C_1 x + C_2 \quad \Rightarrow \quad p = -\dfrac{1}{C_1 x + C_2} \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad y' = -\dfrac{1}{C_1 x + C_2} \quad \Rightarrow \quad y = -\dfrac{1}{C_1} \ln|C_1 x + C_2| + C_3 \bullet$

5) $5y'''^2 - 3y''y^{IV} = 0$

• $5\dfrac{y'''}{y''} = 3\dfrac{y^{IV}}{y'''} \quad \Rightarrow \quad 5(\ln|y''|)' = 3(\ln|y'''|)' \quad \Rightarrow \quad (y'')^5 = (y''')^3 \cdot C_1;$

$y'' = p(x)$

$$p^5 = (p')^3 C_1 \quad \Rightarrow \quad p' = C_1^{-\frac{1}{3}} p^{\frac{5}{3}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{p^{\frac{5}{3}}} = C_1^{-\frac{1}{3}} dx \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(-\frac{3}{2}\right) p^{-\frac{2}{3}} = C_1^{-\frac{1}{3}} x + C_2 \quad \Rightarrow \quad p^{-\frac{2}{3}} = \overline{C_1} x + \overline{C_2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y'' = (\overline{C_1} x + \overline{C_2})^{-\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad y' = (\overline{C_1} x + \overline{C_2})^{-\frac{1}{2}} (-\frac{2}{\overline{C_1}}) + C_3 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y = -\frac{4}{(\overline{C_1})^2} (\overline{C_1} x + \overline{C_2})^{\frac{1}{2}} + C_3 x + C_4 \bullet$$

Означення. Диференціальне рівняння

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

називаєтся *однорідним диференціальним рівнянням* p -го порядку якщо виконується рівність

$$F(x, ky, ky', ..., ky^n) = k^p F(x, y, y', ..., y^{(n)}).$$

Знизити порядок диференціальних рівнянь використовуючи їх однорідність та розв'язати.

6) $xyy'' - xy'^2 = yy'$

• $y = e^{\int z dx} \quad \Rightarrow \quad y' = e^{\int z dx} \cdot z \quad \Rightarrow \quad y'' = (e^{\int z dx} \cdot z)' = e^{\int z dx} \cdot z^2 + e^{\int z dx} \cdot z';$

$$x(z^2 + z') - xz^2 = z \quad \Rightarrow \quad xz' = z \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \ln z = \ln x + \ln C_1 \quad \Rightarrow \quad z = C_1 x;$$

$$y = e^{\int C_1 x dx} = e^{\frac{C_1}{2} x^2 + C_2} \bullet$$

7) $(x^2 + 1)(y'^2 - yy'') = xyy'$

• $y = e^{\int z dx}$

$$(x^2+1)(z^2-(z^2+z'))=xz \quad \Rightarrow \quad -(x^2+1)z'=xz \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{z}=-\frac{xdx}{x^2+1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \ln|z|=-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+\ln C_1 \quad \Rightarrow \quad y=e^{\int C_1(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}dx}=e^{C_1\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+C_2} \quad \bullet$$

8) $xyy''+xy'^2=2yy'$

• $y=e^{\int zdx}$

$$x(z^2+z')+xz^2=2z \quad \Rightarrow \quad x(z'+2z^2)=2z \quad \Rightarrow \quad \frac{z'+2z^2}{2z}=\frac{1}{x} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{z'}{2z}+z=\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad z'+2z^2=\frac{2z}{x};$$

$z=uv$

$$u'v+uv'+2u^2v^2=\frac{2uv}{x};$$

$$u'=\frac{2u}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u}=\frac{2dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \underline{u=x^2};$$

$$x^2v'+2x^4v^2=0 \quad \Rightarrow \quad v'+2x^2v^2=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v^2}=-2x^2dx \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{v}=-\frac{2}{3}x^3-C_1 \quad \Rightarrow \quad v=\frac{1}{\frac{2}{3}x^3+C_1};$$

$$z=\frac{x^2}{\frac{2}{3}x^3+C_1}; \qquad y=e^{\int\frac{x^2dx}{\frac{2}{3}x^3+C_1}}=e^{\frac{1}{2}\ln\left|x^3+C_1\cdot\frac{3}{2}\right|+C_2} \quad \bullet$$

Домашнє завдання.

1) $yy''=y'^2+15y^2\sqrt{x}$;

2) $x^2yy''=(y-xy')^2$;

3) $y''^2-y'y'''=\left(\frac{y'}{x}\right)^2 \ |:(y')^2$;

4) $y'^2+2xyy''=0$.