Лінійні однорідні диференціальні рівняння n-го порядку

зі сталими коефіцієнтами

Загальний розв'язок однорідних рівнянь записується за виглядом корнів характеристичного рівняння.

1) $y''' - 8y = 0$. $\boxed{a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)}$

• $k^3 - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad (k-2)(k^2 + 2k + 4) = 0$;

а) $k_1 = 2$ **б)** $k^2 + 2k + 4 = 0$

$k_{2,3} = -1 \pm \sqrt{1-4} = -1 \pm i\sqrt{3}$

$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} \cos\sqrt{3}x + C_3 e^{-x} \sin\sqrt{3}x$. •

2) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$. $\boxed{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3}$

• $k^3 - 3k^2 + 3k - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (k-1)^3 = 0 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad k_{1,2,3} = 1$ – корінь кратності 3; $y(x) = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)e^x$. •

Зауваження. У випадку, коли корінь декілька разів повторюється в розв'язку, кажуть, що корінь кратний.

3) $y''' + y' = 0$

• $k^3 + k = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 0, \; k_{2,3} = \pm i$; $y(x) = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x$.•

4) $y^{IV} - y = 0$.

• $k^4 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 1, \; k_2 = -1, \; k_3 = i, \; k_4 = -i$.

$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 cos\, x + C_4 sin\, x$ •

5) $y^{IV} + y'' = 0$

• $k^4 + k^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = 0$ – кратності 2; $k_{3,4} = \pm i$;

$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x$. •

6) $y''' - 3y' + 2y = 0$

• $k^3 - 3k + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 1, \quad (k-1)\left(k^2 + k - 2\right) = 0 \quad \Rightarrow$

$k^2 + k - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{2,3} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2} \quad \Rightarrow \quad k_2 = 1, \; k_3 = -2$;

$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{x} + C_3 e^{-2x}$. •

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами

1) $y^{IV} - y = x^3 + 1.$

- $k^4 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = i, \quad k_4 = -i.$

$y_o = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$

Оскільки число $k = \alpha \pm i\beta = 0$ не є коренем характеристичного рівняння, тоді частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у формі

$$\overline{y} = A_0 x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3.$$

Диференціюючи $\overline{y}$ чотири рази й підставляючи отримані вирази в задане рівняння, одержимо

$$-A_0 x^3 - A_1 x^2 - A_2 x - A_3 = x^3 + 1.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x (справа і зліва):

$$-A_0 = 1, \qquad -A_1 = 0, \qquad -A_2 = 0, \qquad -A_3 = 1.$$

Отже,

$$\overline{y} = -x^3 - 1.$$

Загальний інтеграл неоднорідного рівняння знаходиться за формулою $y = y_o + \overline{y}$, тобто

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - x^3 - 1. \bullet$$

2) $y^{IV} - y = 5\cos x.$

$\bullet$ Скориставшись результатами попереднього прикладу, будемо мати: $k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = i, \quad k_4 = -i.$

$$y_o = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

Оскільки $k = \pm i$ є простим коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y^* = x\left(A\cos x + B\sin x\right).$$

Підставляючи цей вираз у рівняння, знайдемо

$$4A\sin x - 4B\cos x = 5\cos x,$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових функціях справа і зліва:

$$4A = 0, \qquad -4B = 5,$$

або $A = 0$, $B = -\frac{5}{4}$. Отже, частинним розв'язком диференціального рівняння є $y^* = -\frac{5}{4}x\sin x$, а загальним розв'язком

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - \frac{5}{4}x\sin x. \bullet$$

1) $y''' + y' = tgx$

- $k^3 + k = 0 \;\Rightarrow\; k\left(k^2+1\right) = 0 \;\Rightarrow\; k_1 = 0,\; k_{2,3} = \pm i$;

$y_o(x) = C_1 + C_2\cos x + C_3 \sin x$

$y(x) = C_1(x) + C_2(x)\cos x + C_3(x)\sin x$

$$\left.\begin{array}{r} C_1' + C_2'\cos x + C_3'\sin x = 0 \\ -C_2'\sin x + C_3'\cos x = 0 \\ -C_2'\cos x - C_3'\sin x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

$(1)+(3) \;\Rightarrow\; C_1'(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$;

$(2)\cdot\sin x + (3)\cos x \;\Rightarrow\; -C_2'(x) = \sin x \;\Rightarrow\; C_2'(x) = -\sin x$;

$(2)\cos x - (3)\sin x \;\Rightarrow\; C_3'(x) = -\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$;

$$C_1(x) = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx + \overline{C}_1 = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} + \overline{C}_1 = -\ln|\cos x| + \overline{C}_1;$$

$$C_2(x) = -\int \sin x dx + \overline{C}_2 = \cos x + \overline{C}_2;$$

$$C_3(x) = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}dx + \overline{C}_3 = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x}dx + \overline{C}_3 = -\int \frac{1}{\cos x}dx +$$

$$+\int \cos x dx + \overline{C}_3 = \left\| \begin{array}{c} tg\dfrac{x}{2} = t; \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2};\; dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right\| =$$

$$= -\int \frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} + \sin x + \overline{C}_3 = -2\int \frac{dt}{1-t^2} + \sin x + \overline{C}_3 = -\ln\left|\frac{1+tg\dfrac{x}{2}}{1-tg\dfrac{x}{2}}\right| + \sin x + \overline{C}_3;$$

$$y(x) = -\ln|\cos x| + \overline{C}_1 + \left(\cos x + \overline{C}_2\right)\cos x + \left(\sin x - \ln\left|\frac{1+tg\dfrac{x}{2}}{1-tg\dfrac{x}{2}}\right| + \overline{C}_3\right)\sin x \quad \bullet$$

2) $y''' + 4y' = \sin x \cdot e^{2x}$;

- $k^3 + 4k = 0 \;\Rightarrow\; k\left(k^2+4\right) = 0 \;\Rightarrow\; k_1 = 0,\; k_{2,3} = \pm 2i$

$y_o(x) = C_1 + C_2\cos 2x + C_3\sin 2x$

$y(x) = C_1(x) + C_2(x)\cos 2x + C_3(x)\sin 2x$

$$\left.\begin{array}{r} C_1' + C_2' \cos 2x + C_3' \sin 2x = 0 \\ -2C_2' \sin 2x + 2C_3' \cos 2x = 0 \\ -4C_2' \cos 2x - 4C_3' \sin 2x = \sin x \cdot e^{2x} \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

$$(1)\cdot 4 + (3) \;\Rightarrow\; 4C_1'(x) = \sin x \cdot e^{2x} \;\Rightarrow\; C_1'(x) = \frac{1}{4}\sin x \cdot e^{2x};$$

$$(2)\cdot 2\sin 2x + (3)\cos 2x \;\Rightarrow\; -4C_2'(x) = \sin x \cos 2x e^{2x} \;\Rightarrow\; C_2'(x) = -\frac{1}{4}\sin x \cos 2x \cdot e^{2x};$$

$$(2)\cdot 2\cos 2x - (3)\sin 2x \;\Rightarrow\; 4C_3'(x) = -\sin x \sin 2x e^{2x} \;\Rightarrow\; C_3'(x) = -\frac{1}{4}\sin x \sin 2x \cdot e^{2x};$$

$$\boxed{\int \sin\alpha x \cdot e^{\beta x} dx = \frac{e^{\beta x}}{\beta^2 + \alpha^2}(\beta \sin\alpha x - \alpha\cos\alpha x)}$$

$$\boxed{\int \cos\alpha x \cdot e^{\beta x} dx = \frac{e^{\beta x}}{\beta^2 + \alpha^2}(\beta \cos\alpha x + \alpha\sin\alpha x)}$$

$$C_1(x) = \frac{1}{4}\int \sin x \cdot e^{2x} dx = \frac{1}{20} e^{2x}(2\sin x - \cos x) + \overline{C}_1;$$

$$\boxed{\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]}$$

$$\boxed{\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]}$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{4}\int \sin x \cdot \cos 2x \cdot e^{2x} dx = -\frac{1}{8}\left[-\int \sin x \cdot e^{2x} dx + \int \sin 3x \cdot e^{2x} dx\right] =$$

$$= -\frac{1}{8}\left[-\frac{e^{2x}}{5}(2\sin x - \cos x) + \frac{e^{2x}}{13}(2\sin 3x - 3\cos 3x)\right] + \overline{C}_2 =$$

$$= e^{2x}\left[\frac{1}{40}(2\sin x - \cos x) - \frac{1}{104}(2\sin 3x - 3\cos 3x)\right] + \overline{C}_2;$$

$$C_3(x) = -\frac{1}{4}\int \sin x \cdot \sin 2x \cdot e^{2x} dx = -\frac{1}{8}\left[\int \cos x \cdot e^{2x} dx - \int \cos 3x \cdot e^{2x} dx\right] =$$

$$= -\frac{1}{8}\left[\frac{e^{2x}}{5}(2\cos x + \sin x) - \frac{e^{2x}}{13}(2\cos 3x + 3\sin 3x)\right] + \overline{C}_3 =$$

$$= e^{2x}\left[-\frac{1}{40}(2\cos x + \sin x) + \frac{1}{104}(2\cos 3x + 3\sin 3x)\right] + \overline{C}_3$$

Остаточно

$$y(x)=\frac{1}{20}e^{2x}(2\sin x-\cos x)+\overline{C}_1+$$
$$+\cos 2x\cdot\left\{e^{2x}\left[\frac{1}{40}(2\sin x-\cos x)-\frac{1}{104}(2\sin 3x-3\cos 3x)\right]+\overline{C}_2\right\}+$$
$$+\sin 2x\cdot\left\{e^{2x}\left[-\frac{1}{40}(2\cos x+\sin x)+\frac{1}{104}(2\cos 3x+3\sin 3x)\right]+\overline{C}_3\right\}\quad\bullet$$

Домашнє завдання.

1) $y'''-7y''+6y=x^2$.

2) $y'''-2y''+2y'=2x+e^x$.

3) $y'''+y'=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$.