МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА

ПРАКТИКУМ

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальністю 113 «Прикладна математика»,
освітньою програмою «Наука про дані та математичне моделювання»

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2020

Рецензенти: *Романкевич О.М.*, д-р техн. наук., проф., професор кафедри системного програмування і спеціалізованих комп'ютерних систем ФПМ

Дичка І.А., д-р. техн. наук., проф., професор кафедри програмного забезпечення комп'ютерних систем ФПМ

Відповідальний редактор *Сулема Є.С.*, канд. техн. наук, доц., доцент кафедри програмного забезпечення комп'ютерних систем ФПМ

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 10 від 18.06.2020 р.)
за поданням Вченої ради факультету прикладної математики (протокол № 12 від 25.05.2020 р.)

Електронне мережне навчальне видання
Темнікова Олена Леонідівна

МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА
ПРАКТИКУМ

МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА. ПРАКТИКУМ [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 113 «Прикладна математика», освітньої програми «Наука про дані та математичне моделювання» / О.Л.Темнікова ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,37 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 76 с.

Навчальний посібник розроблено для оволодіння студентами, які навчаються за спеціальністю 113 «Прикладна математика», освітньою програмою «Наука про дані та математичне моделювання» факультету прикладної математики КПІ ім. Ігоря Сікорського, практичними навичками з дисципліни «Математична логіка та теорія алгоритмів». «Математична логіка. Практикум» містить основні теоретичні відомості та практичні прийоми розв`язання задач з математичної логіки, основи формалізації та доведення логічних слідувань, вимоги до правил їх оформлення; поняття з основ теорії нетрадиційних логік та суджень для застосування методів багатозначних логік і нечітких множин.

ЗМІСТ

ВСТУП 4

1. Алгебра висловлювань 6

2. Формальні теорії… 20

3. Теорія предикатів першого порядку 27

4. Автоматиче доведення теорем 42

4.1. Метод резолюцій 42

4.2. Логічне програмування 46

5. Некласична логіка 59

5.1. Нечіткі множини 59

5.2. Багатозначна логіка 64

Відповіді… 71

Рекомендована література………………………………………75

ВСТУП

Навчальне видання призначене для студентів, які вивчають дисципліну «Математична логіка та теорія алгоритмів» з циклу загальної підготовки навчального плану спеціальності 113 «Прикладна математика» і є базовим при навчанні за освітньою програмою «Наука про дані та математичне моделювання», що спрямована на розроблення і використання нових інформаційних технологій, моделювання складних систем, систем штучного інтелекту, і для вирішення інших задач професійної діяльності. Дисципліна «Математична логіка та теорія алгоритмів» розрахована на 36 академічних годин лекційних занять та на 36 годин занять практичних; вивчається на факультеті прикладної математики у 3 семестрі.

Метою викладання дисципліни є оволодіння основними поняттями і методами, що дає змогу сформувати у студентів компетенції, потрібні для вивчення наступних дисциплін спеціальності, формування світогляду на математичну логіку як на фундаментальну науку, що призначена для формалізації знань, розробки і використання нових інформаційних технологій, моделювання складних систем, систем штучного інтелекту.

Основною ідеєю викладання частини дисципліни – математичної логіки – є поняття аксіоматичного методу, його використання для побудови формальних систем, відображення формальної системи на моделі і використання цього математичного апарату для формалізації і дослідження проблемних областей. З цією метою при викладанні курсу використовується велика кількість змістових логічних задач. При вивченні математичної логіки розглядаються методи і результати, що стали основою однієї з парадигм програмування - логічного програмування. Курс містить поняття з основ теорії нетрадиційних логік та суджень для застосування методів багатозначних логік і нечітких множин для опису слабко структурованих проблемних областей.

У даному практикумі розглядаються основні теоретичні відомості та практичні прийоми розв`язання задач з математичної логіки, вимоги до правил їх оформлення та доведення логічних слідувань.

Навчальне видання складається з п’яти розділів за наступними темами (до кожної теми вказано список рекомендованої літератури):

Тема 1. Алгебра висловлювань. Логічне слідування в алгебрі висловлювань. Література: 3, 4, 10, 13, 16,17.

Тема 2. Формальні теорії. Доведення у численні висловлювань L. Література: 2, 7, 11, 15, 16,17.

Тема 3. Теорія предикатів першого порядку: інтерпретація формул логіки предикатів, формалізація речень природної мови, доведення логічних слідувань. Література: 7, 10, 11, 12, 13, 16, 17.

Тема 4. Автоматичне доведення теорем: метод резолюцій, логічне програмування. Література: 1, 6, 8, 11, 12, 14, 16, 17.

Тема 5. Некласична логіка: нечіткі множини; багатозначна логіка. Література: 5, 8, 16,18.

Кожній темі відповідає глава у практикумі; перед завданнями наводиться короткі теоретичні відомості; приклад, що містить методичні вказівки з виконання та оформлення розв’язання задач за даною темою; наприкінці є відповіді на деякі завдання та список рекомендованої літератури.

Навчальне видання має стати в нагоді під час проведення практичних занять, для заочної форми навчання та при самостійній підготовці до ректорського контролю і вступу на навчання за програмою магістерської підготовки.

1. АЛГЕБРА ВИСЛОВЛЮВАНЬ

1.1. Визначити, чи є наступні формули тавтологіями.

Приклад 1. Чи є формула $((A \to B) \to B) \to B$ *тавтологією*?

Розв'язання.

1 спосіб – побудова таблиці істинності.

A	B	$A \to B$	$(A \to B) \to B$	$((A \to B) \to B) \to B$
F	F	T	F	T
F	T	T	T	T
T	F	F	T	F
T	T	T	T	T

Формула не є тавтологією, тому що існує інтерпретація $|A| = T, |B| = F,$ на якій вона набуває хибне значення.

2 спосіб. Дослідження формули методом редукції.

Припустимо, що існує набір, на якому формула набуває хибне значення:

$|((A \to B) \to B) \to B| = F.$

Тоді $|((A \to B) \to B)| = T,$ $|B| = F.$ Підставимо знайдене значення $|B| = F$ в першу рівність: $|((A \to F) \to F)| = T.$ Розв'яжемо це рівняння відносно A: якщо $A = T$, то $|((T \to F) \to F)| = T.$ Отже, при $|A| = T,$ $|B| = F$ формула набуває значення, яке дорівнює F. Таким чином, вона не є тавтологією.

3 спосіб. Перевірка формули $((A \to B) \to B) \to B$ *методом резолюції.*

Формула складається з антецедента $(A \to B) \to B$ та консеквента B.

Перетворимо антецедент в кон'юнктивну форму, тобто в кон'юнкцію диз'юнктів для запису множини диз'юнктів:

$(A \to B) \to B = \neg(\neg A \vee B) \vee B = (A \& \neg B) \vee B = (A \vee B) \& (\neg B \vee B) =$

$= (A \vee B) \& T^{true} = A \vee B$, та візьмемо заперечення висновку.

Отримаємо множину $\{ A \vee B , \neg B \}$. Пустий диз'юнкт отримати не можливо, тому формула не є тавтологією.

Приклад 2. Чи є формула $(A \to B) \& (B \to C) \& A \to C$ тавтологією?

Розв'язання.

Дослідження формули методом редукції.

Припустимо, що існує така інтерпретація, на якій формула набуває хибне значення.

Тоді $|A \to B| = T$, $|B \to C| = T$, $|A| = T$, $|C| = F$.

Тоді:

$|B \to C| = |B \to F| = T \Rightarrow |B| = F$;

$|A \to B| = |A \to F| = T \Rightarrow |A| = F$.

Звідси $|A| = F$, що суперечить третій рівності $|A| = T$. Отримане протиріччя демонструє, що формула не може набувати хибних значень. Отже, формула $(A \to B) \& (B \to C) \& A \to C$ є тавтологією.

Перевірка формули $(A \to B) \& (B \to C) \& A \to C$ *методом резолюції.*

Складемо множину диз'юнктів з посилок і заперечення висновку (це можливо тоді, коли зовнішня формула є імплікацією, тоді висновок – останній консеквент). Посилки $(A \to B)$, $(B \to C)$, A, та консеквент – C.

Тоді множина диз’юнктів буде наступною: $\{ \neg A \vee B , \neg B \vee C , A , \neg C\}$.

Ми бачимо, що пустий диз’юнкт отримати можна, отже, система є суперечливою (за рахунок додавання заперечення висновку), тобто формула – тавтологія.

Перевірити, чи є формула тавтологією, методом резолюції.

Приклад 3. $(B \to C) \to (A \vee C \to (B \to C))$

Якщо ми допускаємо, що формула – тавтологія, то можемо «розібрати» її за правилами ОМТД: $B \to C, A \vee C, B \ |\!- C$

Отримаємо множину диз’юнктів з посилок та заперечення висновку:

$\{ \neg B \vee C , A \vee C , B , \neg C\}$.

Ми бачимо, що пустий диз’юнкт отримати можна (навіть без другої посилки, вона – зайва), отже, система є суперечливою (за рахунок додавання заперечення висновку), тобто формула – тавтологія.

Приклад 4. $(A \to (B \to C)) \to (A \vee B \to C)$

Розберемо формулу так, як би вона була тавтологією (відокремлюємо комами подформули, рухаючись зліва направо по черзі, починаючи з самої зовнішньої операції):

1) $(A \to (B \to C)) \to (A \vee B \to C);$
2) $A \to (B \to C),\ (A \vee B \to C);$
3) $A \to (B \to C),\ \ A \vee B$ та висновок, що перевіряється в нашому випадку – C

Таким чином перетворюючи першу посилку та взявши заперечення висновку отримаємо множину диз’юнктів $\{\neg A \vee \neg B \vee C, A \vee B,\ \neg C\}$.

Спробуємо застосувати правило Робінсона і отримати резольвенти:

1. $\neg C$ – заперечення висновку
2. $\neg A \vee \neg B \vee C$ – посилка (гіпотеза) 1
3. $A \vee B$ – посилка (гіпотеза) 2
4. $\neg A \vee \neg B$ – резольвента 1,2
5. $B \vee \neg B$ – резольвента 3,4 *

Пустий диз'юнкт отримати не можна, тобто, формула не є тавтологією.

Зауваження *. *$A \vee B$ та $\neg A \vee \neg B$ не дають пустий диз'юнкт. Вони не є запереченням один до одного.*

Якщо діяти за правилом Робінсона, то, обравши за основу для контрарних літер будь-яку з двох A або B, наприклад, $\neg A$ та A, отримаємо в якості резольвенти диз'юнкт, що побудований з літер, що залишилися після видалення контрарних, $B \vee \neg B$=True, що робить його зовсім непотрібним, але не приводить до пустого диз'юнкта.

Завдання.

1) $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$;

2) $(A \to B) \to ((C \to B) \to (A \vee C \to B))$;

3) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;

4) $(\neg A \to \neg B) \to (A \to B)$;

5) $((A \to B) \to A) \to ((A \to B) \to B)$;

6) $(A \to C) \to (A \to B \vee C)$;

7) $((A \to B) \to (A \to C)) \to ((A \to (B \to C))$;

8) $(B \to C) \to (B \to (A \to C))$;

9) $(B \to A) \to (A \vee B \to A)$;

10) $(B \to A \lor C) \to ((B \to C) \to ((D \to C) \to (B \lor D \to C)))$;

11) $((B \to A) \to C) \to (A \to C)$;

12) $(A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B)$;

13) $\neg(A \& B) \to (A \& B \to B)$;

14) $(B \to C) \to (A \lor C \to (B \to C))$;

15) $(A \to (B \to C)) \to (A \lor B \to C)$.

1.2. Перевірити, чи є формули тавтологіями, протиріччями або нейтральними.

Завдання.

1) $(A \& B) \lor (C \& D) \to (A \lor B) \& (C \lor D)$;

2) $A \& (A \& \neg B \lor \neg A \& B) \& B$

3) $(A \to B) \& (C \to D) \to (A \lor C \to B \lor D)$;

4) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;

5) $\neg((A \lor B \to C) \to \neg(\neg A \lor C \to B \& \neg C))$

6) $(A \lor B \to C) \to (A \to C) \lor (B \to C)$;

7) $(A \& B \to C) \to ((A \to C) \to (B \to C))$;

8) $(A \to B) \& (C \to D) \to (A \& C \to B \& D)$;

9) $A \& (\neg A \lor \neg B) \& B$;

10) $(A \& \neg B \lor \neg A \& B) \to B$.

1.3. Дослідити систему посилок (гіпотез) на несуперечливість.

Приклад 1.

$\{F \to E \lor L, E \lor \neg F \& U, U \to E \lor L, \neg F \to \neg L, E \to \neg E\}$

Система посилок несуперечлива, якщо можна знайти таку інтерпретацію літер, при який кожна посилка є істинною, тобто дорівнює *T*.

1. $|F \to E \vee L| = T$;
2. $|E \vee \neg F \& U| = T$;
3. $|U \to E \vee L| = T$;
4. $|\neg F \to \neg L| = T$;
5. $|E \to \neg E| = T$.

З 5-ої посилки слідує, що $|E|=F$. Тоді, з 2-ої : $|F|=F$ *і* $|U|=T$.

Для того, щоб 3-я посилка дорівнювала *T* , при вже отриманих значеннях пропозиціональних літер, має бути $|L|=T$. Але при таких значеннях *F* та *L* 4-а посилка не буде дорівнювати *T*. Отже, дана система посилок є суперечливою.

Метод резолюції: перевірити на несуперечлівість множину диз'юнктів (систему посилок).

Для цього перетворимо кожну гіпотезу (посилку) у диз'юнкт і перевіримо на несуперечливість отриману множину диз'юнктів, використовуючи правило резолюції Робінсона по вилученню контрарних літер.

1. $F \to E \vee L = \neg F \vee E \vee L$ Г1
2. $E \vee \neg F \& U = (E \vee \neg F) \& (E \vee U)$: 2.а $E \vee \neg F$ 2.б $E \vee U$ Г2
3. $U \to E \vee L = \neg U \vee E \vee L$ Г3
4. $\neg F \to \neg L = F \vee \neg L$ Г4
5. $E \to \neg E = \neg E \vee \neg E = \neg E$ Г5
6. $\neg F \vee L$ резольвента (1,5)
7. $\neg F$ резольвента (2.а,5)

8. U резольвента (2.б,5)
9. $\neg U \vee L$ резольвента (3,5)
10. $\neg$ L резольвента (4,7)
11. $\neg U$ резольвента (9,10)
12. □ резольвента (8,11)

Отримано пустий диз`юнкт, отже система є суперечлівою.

Приклад 2.

$\{A \rightarrow B,\ C \vee A,\ C \rightarrow E, \neg E,\ \neg E \rightarrow \neg C\}$

Розглянемо систему:

1. $|A \rightarrow B|=T;$
2. $|C \vee A|=T;$
3. $|C \rightarrow E|=T;$
4. $|\neg E|=T;$

З 4-ої посилки отримуємо $|E|=F$. Тоді при $|C|=F$, $|A|=T,$ $|B|=T$ кожна посилка є істинною.

Система – несуперечлива.

Метод резолюції:

1. $\neg A \vee B$ Г1
2. $C \vee A$ Г2
3. $\neg C \vee E$ Г3
4. $\neg E$ Г4
5. $E \vee \neg C$ Г5 – співпадає з Г3
6. $\neg C$ резольвента (3,4)
7. A резольвента (2,6)
8. B резольвента (1,7)

Пустий диз’юнкт отримати не можна, система не є суперечливою.

Завдання.

1) $\{ A \vee B \rightarrow C \,\&\, D,\ D \vee E \rightarrow G, A \vee \neg G \}$

2) $\{(A \rightarrow B)\&(C \rightarrow D), (B\rightarrow D)\&(\neg C \rightarrow A), (E \rightarrow G)\&(G \rightarrow\neg D),\neg E \rightarrow E\}$

3) $\{(A\rightarrow B\&C)\&(D\rightarrow B\&E), (G\rightarrow\neg A)\&H\rightarrow I, (H \rightarrow I)\rightarrow G\&D, \neg(\neg C\rightarrow E)\}$

4) $\{(A\rightarrow B\&C)\&(D\rightarrow B \,\&\, E), (G \rightarrow\neg A), (H \rightarrow I) \rightarrow G \,\&\, D, \neg(\neg C\rightarrow E)\}$

5) $\{ A \rightarrow C \,\&\, D,\ D \vee E \rightarrow C,\ A \vee C \rightarrow E \}$

6) $\{ A \rightarrow B ,\ B\rightarrow D ,\ C \rightarrow A ,\ (E \rightarrow C) \,\&\, (G \rightarrow\neg D) \}$

1.4. Перевірити логічне слідування.

Приклад. *Джон або втомився, або він хворий. Якщо він втомився, то він роздратований. Він не роздратований. Отже, Джон – хворий.*

Формалізуємо в логіці висловлювань гіпотези.

Нехай *A* – «Джон втомився», *B* – «Джон хворий», *C* – «Джон роздратований».

Побудуємо дедуктивний вивід, використовуючи наступні правила виводу:

$\boldsymbol{A, A \rightarrow B \models B}$ – ***modus ponens*** **(MP);**

$\boldsymbol{A \rightarrow B, B \rightarrow C \models A \rightarrow C}$ **– правило силогізму (ПС);**

$\boldsymbol{A \rightarrow B \models \neg B \rightarrow \neg A}$ **– правило контрапозиції (ПК);**

$\boldsymbol{A \rightarrow B , A \rightarrow \neg B \models \neg A}$ **– правило доведення до абсурду (ПА);**

$\boldsymbol{A \rightarrow B, \neg B \models \neg A}$ – ***modus tollens*** **(MT).**

Побудуємо формальний вивід:

1. $A \vee B$ — Γ_1
2. $A\rightarrow C$ — Γ_2
3. $\neg C$ — Γ_3
4. $\neg A$ — MT (2,3)

5. $\neg A \to B$ еквівалентна заміна (1)

6. B МР (4,5)

Можна перевірити логічне слідування **методом резолюції * .** Для цього перетворимо кожну гіпотезу (посилку) у диз'юнкт, візьмемо заперечення висновку і складемо множину диз'юнктів, яку перевіримо на несуперечливість за правилом резолюції Робінсона.

Зауваження*. Порівняйте з використанням методу резолюції в попередньому завданні – 1.3. *Метод резолюції технологічно перевіряє систему на суперечливість шляхом пошуку за правилом Робінсона пустого диз'юнкта (якщо знайде □, то суперечлива; якщо ні – то несуперечлива). Глобальні висновки залежать від того, ЩО ми перевіряємо на суперечливість. Ми можемо перевіряти будь яку систему посилок (як в завданні 1.3) – наприклад, систему правил бази знань, систему гіпотез для постановки задачі. В такому випадку наявність □ робить неможливим подальше використання системи, тому що вона є суперечливою. Інша справа – перевірка логічного слідування з множини гіпотез (поточна задача) – множина диз'юнктів, що перевіряється на суперечливість, складається з диз'юнктів гіпотез та з диз'юнктів, отриманих від заперечення запропонованого висновку. Тоді наявність □ – це добре, це означає, що система стала суперечливою при додаванні до неї заперечення висновку, отже, висновок – дійсний. А, якщо не отримано □, то висновок не є слідуванням з системи гіпотез.*

Складемо систему: $\{ A \vee B, \neg A \vee C, \neg C, \neg B\}$.

1. $A \vee B$ Γ_1

2. $\neg A \vee C$ Γ_2

3. $\neg C$ Γ_3

4. $\neg B$ заперечення висновку

5. A резольвента 1, 4

6. C резольвента 2, 5

7. □ резольвента 3,6

Отримано пустий диз`юнкт, отже система, що складається з гіпотез і заперечення висновку, суперечлива; тобто логічне слідування є істинним.

Приклад 2. *Малі діти нерозумні. Той, хто може приборкувати крокодилів, заслуговує на повагу. Нерозумні люди не заслуговують на повагу. Отже, малі діти не приборкують крокодилів.*

Нехай *A* – «малі діти», *B* – «розумні», *C* – «заслуговують на повагу», *D* - «можуть приборкувати крокодилів». Побудуємо дедуктивний вивід, використовуючи наступні правила виводу:

Формальний вивід:

1. $A \to \neg B$ Γ_1
2. $D \to C$ Γ_2
3. $\neg B \to \neg C$ Γ_3
4. $A \to \neg C$ правило силогізму (1,3)
5. $C \to B$ правило контрапозиції (3)
6. $D \to B$ правило силогізму (2,5)
7. $\neg B \to \neg D$ правило контрапозиції (6)
8. $A \to \neg D$ правило силогізму (1,7)

Можна перевірити логічне слідування методом резолюції. Для цього перетворимо кожну гіпотезу (посилку) у диз'юнкт, візьмемо заперечення висновку і складемо множину диз'юнктів, яку перевіримо на несуперечливість за правилом резолюції Робінсона.

Складемо систему: { $\neg A \vee \neg B, \neg D \vee C, B \vee \neg C, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{D}$ }.

1. $\neg A \lor \neg B$ Γ_1

2. $\neg D \lor C$ Γ_2

3. $B \lor \neg C$ Γ_3

4. *A* **заперечення висновку*:***

5. *D* $\boldsymbol{\neg (A \to \neg D) = \neg (\neg A \lor \neg D) = A \,\&\, D}$

6. $\neg B$ *резольвента 1,4*

7. $\neg C$ *резольвента 3,6*

8. $\neg D$ *резольвента 2,7*

9. □ резольвента 5,8

Отримано пустий диз`юнкт, отже система, що складається з гіпотез і заперечення висновку, суперечлива; тобто логічне слідування є істинним.

Завдання.

1) Якщо студент пропускає заняття, він погано засвоює предмет. Якщо студент не навчається вдома, він також погано засвоює предмет. Якщо студент погано засвоїв предмет, він не складе залік. Студент не допускається до іспиту, якщо він не склав залік. Недопущений до іспиту студент має менше часу на відпочинок. Отже, якщо студент пропускає заняття або не навчається вдома, у нього менше часу на відпочинок.

2) Влітку студент може поїхати відпочивати або влаштуватися на роботу. Якщо студент відпочине, він буде задоволений. Студент також задоволений, якщо він отримує гроші. Щоб отримувати гроші, потрібно влаштуватися на роботу. Отже, студент буде задоволений в будь-якому випадку.

3) Якщо студент не складе залік, його не допускають до іспиту. Він не складе іспит, якщо він не допущений до іспиту. Якщо він складе іспит, він буде відпочивати. Але якщо студент складе залік, то він не відпочине. Отже, студент не складе іспит.

4) Якщо підозрюваний вчинив цю крадіжку, то або вона була ретельно підготовлена, або він мав співучасника. Якби крадіжка була ретельно підготовлена, або, якщо б він мав співучасника, то вкрадено було б набагато більше. Украдено мало. Отже, він невинуватий.

5) Якщо Джонс не зустрічав цієї ночі Сміта, то або Сміт був убивцею, або Джонс бреше. Якщо Сміт був убивцею, то Джонс не зустрічав Сміта цієї ночі, і вбивство мало місце після опівночі. Якщо вбивство сталося після опівночі, то або Сміт був убивцею, або Джонс бреше. Отже, Сміт був убивцею.

6) Якщо Сміт переможе на виборах, він буде задоволений, а якщо він буде задоволений, то він поганий борець в передвиборній кампанії. Але якщо він завалить вибори, то втратить довіру партії. Якщо він поганий борець у передвиборній кампанії, йому слід вийти з партії. Він поганий борець, якщо втратить довіру партії. Сміт або переможе в передвиборній кампанії, або завалить її. Отже, йому треба вийти з партії в будь якому випадку.

7) Якщо Петров є членом нашої команди, він обов’язково хоробрий і добре володіє технікою удару. Але він не входить у склад нашої команди. Отже, він не хоробрий.

8) Зарплата збільшується тільки, якщо буде інфляція. Якщо буде інфляція, то збільшиться вартість життя. Якщо вартість життя зростає, то люди нещасливі. Зарплата збільшується. Отже, при збільшенні зарплати люди будуть нещасними?

9) Якщо конгрес відмовляється прийняти нові закони, то страйк не буде завершено, якщо тільки він не триває більше року. Страйк також буде завершено, якщо президент фірми піде у відставку. Конгрес відмовляється діяти, страйк завершено, і президент фірми не йде у відставку. Отже, страйк тривав більше року.

10) Кульки синього кольору легко проколоти. Фірмові кульки відрізняються особливою міцністю. Кульки форми "сердечком" бувають тільки фірмовими. Кульки форми "сердечко" - завжди синього або сріблястого кольору. Кульки мають форму "сердечко". Отже, кульки сріблясті.

11) Дерева, які ростуть в цьому саду, плодоносять. Дерева, які плодоносять, дають хороший урожай. Дерева, що дають хороший урожай, отримують ретельний догляд. Жодне дерево в цьому саду не отримує ретельного догляду. Отже, в цьому саду не ростуть дерева.

12) Якщо результат перегонів буде вирішений змовою, або в будинках будуть орудувати шулери, то доходи від туризму впадуть і місто постраждає. Якщо доходи від туризму впадуть, то поліція буде задоволена. Поліція ніколи не буває задоволена. Отже, змови на перегонах не буде.

13) Якщо страйк завершено, то робочі перемогли або досягли компромісу. Якщо робочі перемогли або досягнуто компромісу, то вони задоволені. Якщо вони задоволені, то вони погані борці за свої права. Якщо страйк триває, то, значить, робітники не оцінили свої можливості або не здатні піти на компроміс. Якщо вони не змогли оцінити свої можливості або не здатні піти на компроміс, то вони не можуть боротися за свої права. Страйк або продовжується, або завершено. Отже, робітники - погані борці за свої права.

14) Якщо Петро поїде до Києва, то Іван поїде до Львова. Петро збирається або в Київ, або до Одеси. Якщо він поїде в Одесу, то Сергій залишиться в Дніпрі. Іван не поїхав до Львова. Отже, Сергій залишився в Дніпрі.

15) Якщо студент прогуляє багато занять, то він отримає двійку на іспиті. Якщо він отримає двійку на іспиті, то пропадуть канікули. Студент може добре відпочити, якщо у нього будуть канікули. Отже, прогуляв багато занять, студент не відпочине.

16) Якби Цезар вірив у забобони, то прислухався б до порад не йти до сенату. Якби він був обережним, то прогнав би Брута. Але Цезар не прислухався до порад і не прогнав Брута. Отже, Цезар не вірив в забобони і не був при цьому обережним.

17) Сьогодні не сонячний день і дощить. Ми будемо засмагати тільки, якщо сьогодні буде сонячний день. Якщо ми не будемо засмагати, то ми будемо кататися на човні. Якщо ми будемо кататися на човні, то ми повернемося додому пізно ввечері. Отже, ми повернемося додому пізно ввечері.

18) Якщо ти надішлеш мені листа електронною поштою, то я закінчу писати програму. Якщо ти не надішлеш мені листа, то я рано ляжу спати. Якщо я рано ляжу спати, то я прокинуся вранці бадьорим. Отже, якщо я не закінчу писати програму, то прокинуся вранці бадьорим.

19) Ми не поїдемо на пікнік тільки у випадку, якщо дощитиме. Якщо сьогодні піде дощ, то ми підемо в музей. У музеї або в бібліотеці ми можемо дізнатися багато цікавого. Отже, якщо ми не поїдемо на пікнік, то дізнаємося багато цікавого.

20) Сьогодні пішов сніг, і немає морозу. Якщо не буде морозу, то можна піти кататися на лижах. Якщо ми йдемо кататися на лижах, то треба тепло одягнутися. Отже, якщо немає морозу, то треба тепло одягнутися.

2. ФОРМАЛЬНІ ТЕОРІЇ

2.1. За допомогою метатеореми про дедукцію довести теореми теорії L.

Вказівка. Схеми аксіом формальної теорії L:

A1: $A \to (B \to A)$;

A2: $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;

A3: $(\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$.

Правило виводу MP: $A, A \to B \vdash B$.

Метавизначення: $A \,\&\, B = \neg(A \to \neg B)$; $A \vee B = \neg A \to \neg B$.

Можна використовувати похідні правила виводу і теореми:

Правило силогізму: $A \to B, B \to C \vdash A \to C$.

Правило видалення середньої посилки: $A \to (B \to C), B \vdash A \to C$.

Правило видалення крайньої посилки: $(A \to B) \to C \vdash B \to C$.

Теорема 3 (*зняття подвійного заперечення*): $\vdash \neg\neg A \to A$.

Теорема 4 (*введення подвійного заперечення*): $\vdash A \to \neg\neg A$.

Теорема 5 (*протиріччя*): $\vdash \neg A \to (A \to B)$.

Теорема 6 (*контрапозиції*): $\vdash (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$.

Теорема 7 (*контрапозиції*): $\vdash (B \to A) \to (\neg A \to \neg B)$.

Теорема 8. $\vdash A \to (\neg B \to \neg(A \to B))$.

Теорема 9. $\vdash (A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B)$.

Приклад 1. Довести теорему: $\vdash \neg A \to (A \to B)$.

Використаємо обернену метатеорему про дедукцію: $\neg A \vdash A \to B$, і ще один раз: $\neg A, A \vdash B$. Побудуємо вивід $\neg A, A \vdash B$.

1. $\neg A$ Г1

2. A Г2

3. $(\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$ A3

4. $\neg A \to (\neg B \to \neg A)$ A1

5. $A \to (\neg B \to A)$ A1

6. $\neg B \to \neg A$ MP (1,4)

7. $\neg B \to A$ MP (2,5)

8. $(\neg B \to A) \to B$ MP (3,6)

9. B MP (7,8)

Застосовуючи до отриманого виводу двічі метатеорему про дедукцію, отримуємо доведення теореми.

Приклад 2. Довести теорему (закон Пірса): $\vdash ((A \to B) \to A) \to A$.

Використаємо обернену метатеорему про дедукцію: $(A \to B) \to A) \vdash A$.

Побудуємо вивід $(A \to B) \to A) \vdash A$.

1. $(A \to B) \to A$ Г1

2. $\vdash \neg A \to (A \to B)$ T5

3. $\neg A \to A$ B1 (1,2)

4. $(\neg A \to A) \to A$ T2

5. A MP (3,4)

Застосовуючи до отриманого виводу метатеорему про дедукцію, отримуємо доведення теореми.

Завдання.

1) $\vdash ((A \to B) \to A) \to ((A \to B) \to B)$;

2) $\vdash (A \to C) \to (A \to B \lor C)$;

3) $\vdash (\neg A \to B) \to (\neg B \to A)$;

4) $\vdash (B \to C) \to (B \to (A \to C))$;

5) $\vdash (B \to A) \to (A \lor B \to A)$;

6) $\vdash (A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$.

7) $\vdash A \,\&\, B \to (C \to B)$;

8) $\vdash ((B \to A) \to C) \to (A \to C)$;

9) $\vdash (A \to B) \,\&(B \to C) \to (A \to C)$;

10) $\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$;

11) $\vdash (A \to B) \,\&\, (C \to D) \to (A \lor C \to B \lor D)$;

12) $\vdash (A \lor B \to C) \to (A \to C) \lor (B \to C)$;

13) $\vdash (A \to B) \,\&\, (C \to D) \to (A \,\&\, C \to B \,\&\, D)$;

14) $\vdash \neg(A \,\&\, B) \to (A \,\&\, B \to B)$;

15) $\vdash (B \to C) \to (A \lor C \to (B \to C))$;

16) $\vdash (A \to C) \,\&\, (B \to C) \to (A \lor B \to C)$;

17) $\vdash (A \to C) \,\&\, (A \to B) \to (A \to B \,\&\, C)$;

18) $\vdash (A\&B \to C) \to (A \to (B \to C))\&(B \to (A \to C))$;

19) $\vdash (A\to B \lor C) \to (\neg A \lor B \lor C)$;

20) $\vdash (A \lor B \to C) \to (B \to C)\&(A \to C)$;

21) $\vdash (A\to B\&C) \to (A \to B)\&(A \to C)$;

22) $\vdash (A \to (B \to C)) \to (A \,\&\, B \to C)$.

2.2. Довести теореми теорії L_1 (система Гільберта-Аккермана).

Вказівка. Схеми аксіом формальної теорії L_1:

A1: $A \vee A \to A$

A2: $A \to A \vee B$

A3: $A \vee B \to B \vee A$

A4: $(B \to C) \to (A \vee B \to A \vee C)$

Правило виводу MP: $A, A \to B \vdash B.$

Метавизначення: $A \to B = \neg A \vee B.$

Завдання.

1) **T1:** $A \to B \vdash C \vee A \to C \vee B$;

2) **T2:** $\vdash (A \to B) \to ((C \to A) \to (C \to B))$;

3) **T3:** $C \to A, A \to B \vdash C \to B$;

4) **T4:** $\vdash A \to A$ (тобто $\vdash \neg A \vee A$);

5) **T5:** $\vdash A \vee \neg A$;

6) **T6:** $\vdash A \to \neg\neg A$;

7) **T7:** $\vdash \neg B \to (B \to C)$;

8) **T8:** $\vdash A \vee (B \vee C) \to ((B \vee (A \vee C)) \vee A)$;

9) **T9:** $\vdash (B \vee (A \vee C)) \vee A \to B \vee (A \vee C)$;

10) **T10:** $\vdash A \vee (B \vee C) \to B \vee (A \vee C)$;

11) **T11:** $\vdash (A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$;

12) **T12:** $\vdash (C \to A) \to ((A \to B) \to (C \to B))$;

13) **T13:** $A \to (B \to C), A \to B \vdash A \to (A \to C)$;

14) **T14:** $A \to (B \to C), A \to B \vdash A \to C$;

15) **T15:** $B \to A, \neg B \to A \vdash A$;

16) **T16: МТД:** $\mathbf{\Gamma, A \vdash B \Rightarrow \Gamma \vdash A \to B}$**.**

2.2. Довести теореми теорії L_2 (система Россера).

Вказівка. Схеми аксіом формальної теорії L_2:

A1: $A \to (A \,\&\, A)$

A2: $(A \,\&\, B) \to A$

A3: $(A \to B) \to (\neg (B \,\&\, C) \to \neg (C \,\&\, A))$

Правило виводу MP: $A, A \to B \vdash B$.

Метавизначення: $A \to B = \neg (A \,\&\, \neg B)$.

Приклад. Побудуємо доведення декількох теорем без допомоги метатеореми про дедукцію спираючись на схеми аксіом, метавизначення та властивості виводимості.

T1: $\boldsymbol{A \to B, B \to C \vdash \neg(\neg C \,\&\, A)}$ (теорема 1)

1. $A \to B$ Г1
2. $B \to C$ Г2
3. $\neg (B \,\&\, \neg C)$ МВ (2)
4. $(A \to B) \to (\neg (B \,\&\, \neg C) \to \neg (\neg C \,\&\, A))$ A3
5. $\neg (B \,\&\, \neg C) \to \neg (\neg C \,\&\, A)$ MP (1,4)
6. $\neg (\neg C \,\&\, A)$ MP (3,5)

T2: $\boldsymbol{\vdash \neg(\neg A \,\&\, A)}$ (теорема 2)

1. $A \to (A \,\&\, A)$ A1
2. $(A \,\&\, A) \to A$ A2
3. $A \to (A \,\&\, A), (A \,\&\, A) \to A \vdash \neg(\neg A \,\&\, A)$ T1

T3: $\vdash \neg\neg A \to A$ (теорема 3)

1. $\vdash \neg(\neg\neg A \;\&\; \neg A)$ T2
2. $\neg\neg A \to A$ МВ (1)

T4: $\vdash \neg(\mathbf{A} \;\&\; \mathbf{B}) \to (\mathbf{B} \to \neg\mathbf{A})$ (теорема 4)

1. $\neg\neg A \to A$ T3
2. $(\neg\neg A \to A) \to (\neg(A \;\& B) \to \neg(B \& \neg\neg A))$ A3
3. $\neg(A \;\& B) \to \neg(B \& \neg\neg A)$ МР (1, 2)
4. $\neg(A \;\& B) \to (B \to \neg A)$ МВ (3)

Завдання.

1) **T5:** $\vdash A \to \neg\neg A$;
2) **T6:** $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$;
3) **T7:** $\neg A \to \neg B \vdash B \to A$;
4) **T8:** $A \to B \vdash C \;\&\; A \to B \;\&\; C$;
5) **T9:** $A \to B,\ B \to C,\ C \to D \vdash A \to D$;
6) **T10:** $\vdash A \to A$;
7) **T11:** $\vdash A \;\&\; B \to B \;\&\; A$;
8) **T12:** $A \to B,\ B \to C \vdash A \to C$;
9) **T13:** $A \to B,\ C \to D \vdash A \;\&\; C \to B \;\&\; D$;
10) **T14:** $B \to C \vdash A \;\&\; B \to A \;\&\; C$;
11) **T15:** $\vdash (A \to (B \to C)) \to ((A \;\&\; B) \to C)$;
12) **T16:** $A \to B,\ A \to (B \to C) \vdash A \to C$;
13) **T17:** $\vdash A \to (B \to A \;\&\; B)$;
14) **T18:** $\vdash A \to (B \to A)$;

15) T19: МТД: $\Gamma, A \vdash B \Rightarrow \Gamma \vdash A \to B$;

16) T20: $\vdash (\neg A \to A) \to A$;

17) T21: $A \to B, \neg A \to B \vdash B$.

2.4. Довести теореми теорії L_4 (система Кліні).

Вказівка. Схеми аксіом формальної теорії L_4:

A1: $A \to (B \to A)$;

A2: $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;

A3: $A \,\&\, B \to A$;

A4: $A \,\&\, B \to B$;

A5: $A \to (B \to (A \,\&\, B))$;

A6: $A \to (A \vee B)$;

A7: $B \to (A \vee B)$;

A8: $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$;

A9: $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$;

A10: $\neg\neg A \to A$.

Правило виводу MP: $A, A \to B \vdash B$.

Завдання.

1) **T1:** $\vdash A \to A$
2) **T2: МТД: $\Gamma, A \vdash B \Rightarrow \Gamma \vdash A \to B$**
3) **T3:** силогізм $A \to B, B \to C \vdash A \to C$
4) **T4:** контрапозиція $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$
5) **T5:** $B, \neg B \vdash C$

6) **T6:** $\vdash B \to \neg\neg B$

7) **T7:** $\vdash \neg B \to (B \to C)$

8) **T8:** $\vdash B \to (\neg C \to \neg (B \to C))$

9) **T9:** $\vdash \neg B \to (\neg C \to \neg (B \vee C))$

10) **T10:** $\vdash (\neg B \to A) \to ((B \to A) \to A)$

3. ТЕОРІЯ ПРЕДИКАТІВ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

3.1. Записати висловлювання у вигляді формул логіки предикатів.

Приклад.

Нехай $x \in$ {*числа*}, на цій області визначення задані наступні предикати:
N(x): x – натуральне число, C(x): x – ціле число, B(x): x – парне число, D(x, y): x ділиться на y, P(x): x– просте число, G(x): x– додатне число.

1 Будь-яке натуральне число - ціле.

$\forall$**x (N(x) $\to$ C(x))**

2 Будь-яке ціле число - або парне або ні

$\forall$**x (C(x) $\to$ B(x) & $\neg$ B(x))**

3 Для будь-якого цілого числа знайдеться інше ціле таке, що ділить перше.

$\forall$**x(C(x) $\to$ $\exists$y (C(y) & D(x,y)))**

4 Існують прості парні числа.

$\exists$**x (P(x) & B(x))**

5 Будь-яке просте ціле число - натуральне.

$\forall$**x (P(x) & C(x) $\to$ N(x))** або* $\forall$**x (P(x) $\to$ (C(x) $\to$ N(x)))**

6 Всі парні числа діляться на два.

$\forall x\ (B(x) \to D(x,2))$

7 Жодне натуральне число не є від`ємним.

$\forall x\ (N(x) \to G(x))$ або** $\neg \exists x (N(x) \ \& \ \neg G(x))$

8 15 ділиться на 3 і 5.

$D(15,5) \ \& \ D(15,3)$

9 Всяке натуральне число, що ділиться на 12, ділиться на 3 і 4.

$\forall x (N(x) \ \& \ D(x,12) \to D(x,3) \ \& \ D(x,4))$ або

$\forall x (N(x) \to (D(x,12) \to D(x,3) \ \& \ D(x,4)))$

10 Ділення на нуль - неможливо!

$\forall x \neg D(x,0)$ або** $\neg \exists x\ D(x,0)$

Вказівка. ***2,3,4,5,12,15*** – константи з області визначення.

***** випливає з еквівалентності представлень формул :

$A \ \& \ B \to C = \neg (A \ \& \ B) \lor C = \neg A \lor \neg B \lor C = A \to (B \to C).$

******випливає з законів де Моргана загальних і для кванторів.

Предикати можна розглядати як функції, визначені на певній предметній області, що набувають значення T або F. Тому до них можуть застосовуватися усі логічні операції, а також ще додаткові – навішування кванторів. Правила формалізації речень природної мови з предикатами наступні: якщо вживається «для всіх», «кожний», «будь-який», то навішується квантор загальності ($\forall$), якщо - «деякий», «знайдеться», то квантор існування ($\exists$). Якщо в предикатах речення є спільна змінна, пов'язана із квантором загальності, то між предикатами ставиться логічна зв'язка імплікація ($\to$), якщо існування - то кон'юнкція (&). Для позначення окремих об'єктів з області визначення (Том - один зі студентів) прийнято використовувати константи. Речення з константами не мають вигляд законів (те, що повинне виконуватися для всіх), то, також як і у випадку, якщо мова йде про «деяких», зв'язкою між предикатами служить кон'юнкція.

Природне сполучення «і» формалізується логічною операцією кон'юнкцією (&), «або» - диз’юнкцією (V). При оцінюванні рішення враховуються варіативність, яка спирається на переставні закони - комутативності та контрапозиції.

Завдання.

Нехай $x \in \{\textit{люди}\}$, $y \in \{\textit{речі, які можна читати і писати}\}$.

На цих областях визначення задані предикати:

P(x): x – професор,

S(x): x – студент,

V(x): x – поет,

R(x, y): x полюбляє читати y,

W(x, y): x пише y,

N(y): y – роман,

K(y): y – конспект,

C(y): y – вірші,

U(y): y – підручник,

L(y): y – лист,

H(y): y – шпаргалка.

1) *Деякі романи написані у віршах.*

2) *Жоден підручник не написаний у віршах.*

3) *Усі конспекти – підручники.*

4) *Деякі вірші – листи.*

5) *«Евгений Онегин» – це роман у віршах.*

6) *Ніхто не любить писати листи.*

7) *Деякі люди пишуть вірші.*

8) *Усі поети полюбляють читати вірші.*

9) *Усі студенти полюбляють читати підручники.*

10) *Усі студенти пишуть конспекти.*

11) *Деякі студенти пишуть тільки шпаргалки.*

12) *Ніхто зі студентів не пише підручники.*

13) *Деякі професори, а також студенти, пишуть вірші.*

14) *Деякі не люблять читати ніяких підручників.*

15) *Студент Том полюбляє читати підручники.*

16) *Професор Джонс – поет.*

17) *Конспекти пишуть тільки студенти.*

18) *Кожен професор написав хоч один підручник.*

19) *Студенти не пишуть листів.*

20) *Кожен полюбляє читати будь-які вірші.*

3.2. Побудувати таблиці істинності на області інтерпретації D={1,2}.

Приклад. $E = \forall x \exists y (P(x) \vee Q(y) \to R)$.

Предикат P(x) та формули від нього з кванторами (для Q(y) - так само) на області інтерпретації D = {1, 2} набувають наступні значення:

x	P_1	P_2	P_3	P_4
1	F	F	T	T
2	F	T	F	T
$\exists x P(x)$	F	T	T	T
$\forall x P(x)$	F	F	F	T

Вказівка. R – замкнута формула, а саме висловлення, що набуває значення T і F.

Оскільки предикат P(x) набуває 4 значення, предикат Q(y) – 4 значення, формула R – 2 значення, і у формулі E немає вільних змінних, її таблиця істинності буде складатися з 4×4×2 = 32 рядків. Очевидно, що якщо |R| = T, то |E| = T, тому залишається обчислити значення формули на тих 16 інтерпретаціях, що залишились при |R| = F.

Нехай |R| = F. Розглянемо обчислення значення формули на інтерпретації $P = P_1$ і $Q = Q_2$.

$$\forall x\begin{cases} x=1\ \exists y\begin{cases} y=1\ P_1(1)\vee Q_2(1)\to R \\ y=2\ P_1(1)\vee Q_2(2)\to R \end{cases} \\ x=2\ \exists y\begin{cases} y=1\ P_1(2)\vee Q_2(1)\to R \\ y=2\ P_1(2)\vee Q_2(2)\to R \end{cases} \end{cases} = \forall x\begin{cases} x=1\ \exists y\left\{\begin{matrix} F\vee F\to F=T \\ F\vee T\to F=F \end{matrix}\right\}=T \\ x=2\ \exists y\left\{\begin{matrix} F\vee F\to F=T \\ F\vee T\to F=F \end{matrix}\right\}=T \end{cases} = T$$

Нехай $P = P_2$ и $Q = Q_1$.

Тоді

$$\forall x\begin{cases} x=1\ \exists y\begin{cases} y=1\ P_2(1)\vee Q_1(1)\to R \\ y=2\ P_2(1)\vee Q_1(2)\to R \end{cases} \\ x=2\ \exists y\begin{cases} y=1\ P_2(2)\vee Q_1(1)\to R \\ y=2\ P_2(2)\vee Q_1(2)\to R \end{cases} \end{cases} = \forall x\begin{cases} x=1\ \exists y\left\{\begin{matrix} F\vee F\to F=T \\ F\vee F\to F=T \end{matrix}\right\}=T \\ x=2\ \exists y\left\{\begin{matrix} T\vee F\to F=F \\ T\vee F\to F=F \end{matrix}\right\}=F \end{cases} = \forall x\left\{\begin{matrix} T \\ F \end{matrix}\right\} = F$$

Аналогічно знаходяться інші значення формули E, які наведені нижче у таблиці.

P	P_1	P_1	P_1	P_1	P_2	P_2	P_2	P_2	P_3	P_3	P_3	P_3	P_4	P_4	P_4	P_4
Q	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
E	T	T	T	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F

Завдання.

1) $\exists x\forall y(P(x)\vee Q(y)\to R)$;

2) $\forall x(\exists y\,(R\to P(x)\vee Q(y)))$;

3) $\exists x(R\to\forall y(P(x)\to Q(y)))$;

4) $\forall x(R\to\forall y(Q(y)\to P(x)))$;

5) $\exists x(P(x)\to\exists y(R\to Q(y)))$;

6) $\exists x(P(x)\to\forall y(Q(y)\to P(x)))$;

7) $\exists x(P(x) \,\&\, \exists y(Q(y) \to R))$; **8)** $\forall x(P(x) \vee \exists y(Q(y) \to R) \to S)$;

9) $\exists x(P(x) \,\&\, \forall y\, Q(y)) \to \forall x\, P(x)$; **10)** $\exists x \forall y(P(x) \vee Q(y) \to Q(y))$.

3.3. Перевірити логічну загальнозначущість наступних формул.

Вказівка. Формула логічно загальнозначуща, якщо вона набуває істинне значення на всіх можливих інтерпретаціях. Є достатнім знайти хоча б одну інтерпретацію, на якій формула набуває хибне значення, щоб довести, що вона не загальнозначуща. Якщо такої інтерпретації не вдається знайти, та в процесі пошуку ми приходимо до протиріччя, то можна зробити висновок, що формула є логічно загальнозначущою.

Приклад 1. Дана формула: $\forall x(P(x) \to Q(x)) \vee \forall x \neg Q(x)$.

Для перевірки загальнозначущості використовуємо метод знаходження контрприкладу. Допустимо, що формула $\forall x(P(x) \to Q(x)) \vee \forall x \neg Q(x)$ не є логічно загальнозначущою. Тоді існує така множина M, і такі інтерпретації P*(x), Q*(x) предикатів P(x), Q(x) відповідно, що $|\forall x(P^*(x) \to Q^*(x)) \vee \forall x \neg Q^*(x)| = F$. Звідси випливає, що

$|\forall x(P^*(x) \to Q^*(x))| = F$ (1)

$|\forall x \neg Q^*(x)| = F$ (2)

Формула (2) набуває хибне значення, якщо на області інтерпретації існує хоча б одне значення a ∈ M, при якому $|\neg Q^*(a)| = F$, а саме |Q*(a)| = T. Для того, щоб формула (1) набула значення F, є достатнім, щоб існувало хоча б одне значення x, наприклад, x = c, таке, що $|P^*(c)| = T$, а |Q*(c)| = F (c не обов'язково співпадає з a), Отже, ми знайшли контрприклад: є достатнім на деякій n–елементній множині M (n ≥ 2) знайти таку інтерпретацію, при якій |P*(c)| = T, |Q*(c)| = F и |Q*(a)| = T.

Таким чином, формула $\forall x(P(x) \to Q(x)) \vee \neg Q(x)$ не є логічно загальнозначущою.

Приклад 2. $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \to \exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$.

Припустимо, що існує множина M і інтерпретація на ній P*(x), Q*(x), така, що формула на цій інтерпретації приймає значення F:

$|\exists x(P^*(x) \vee Q^*(x)) \to \exists xP^*(x) \vee \exists xQ^*(x)| = F$. Тоді:

$|\exists xP^*(x) \vee \exists xQ^*(x)| = F$, (1)

$|\exists x(P^*(x) \vee Q^*(x))| = T$. (2).

Формула (1) хибна, якщо $|\exists xP^*(x)| = F$ и $|\exists xQ^*(x)| = F$, а звідси витікає, що

$|P^*(x)| = F$ для кожного x $\in$ M (3)

і $|Q^*(x)| = F$ для кожного x $\in$ M. (4)

З (2) випливає, що існує таке a $\in$ M, що $|P^*(c) \vee Q^*(c)| = T$. Можливі три варіанти: a) |P*(a)| = T, |Q*(a)| = T; b) |P*(a)| = T, |Q*(a)| = F; c) |P*(a)| = F, |Q*(a)| = T.

Варіант a) знаходиться у протиріччі з умовами (3), (4). Однак, це протиріччя ще не доводить загальнозначущість формули – слід перевірити усі варіанти.

Варіант b). Якщо |P*(a)| = T, то це є протиріччям до умов (3).

Варіант c). Якщо |Q*(a)| = T, то це є протиріччям до умов (4).

Отже, не існує такої інтерпретації, на якій формула $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \to \exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$ набуває хибне значення, а саме, вона логічно загальнозначуща.

Завдання.

1) $\forall x(P(x) \,\&\, Q(x)) \equiv \forall xP(x) \,\&\, \forall xQ(x)$;

2) $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$;

3) $\forall xP(x) \vee \forall xQ(x) \to \forall x(P(x) \vee Q(x))$;

4) $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \to \forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$;

5) $\exists x(P(x) \,\&\, Q(x)) \to \exists xP(x) \,\&\, \exists xQ(x)$;

6) $\exists xP(x) \,\&\, \exists xQ(x) \to \exists x(P(x) \,\&\, Q(x))$;

7) $(\exists xP(x) \to \exists xQ(x)) \to \exists x(P(x) \to Q(x))$;

8) $\exists x(P(x) \to Q(x)) \to (\exists xP(x) \to \exists xQ(x))$;

9) $\forall x(P(x) \equiv Q(x)) \to (\forall xP(x) \equiv \forall xQ(x))$;

10) $(\exists xP(x) \equiv \exists xQ(x)) \to \exists x(P(x) \equiv Q(x))$;

11) $(\forall xP(x) \to \forall xQ(x)) \to \forall x(P(x) \to Q(x))$;

12) $\forall x(P(x) \to Q(x)) \to (\forall xP(x) \to \forall xQ(x))$.

3.4. Перевірити логічне слідування в логіці предикатів 1-го порядку.

Приклад. Область визначення - люди коледжу. 1. Усі випускники Ітона в коледжі грають в крикет. 2. Ніхто, крім викладачів, не обідає за верхнім столом. 3. Жоден з тих, хто грає в крикет, не вміє веслувати. 4. Всі мої друзі в цьому коледжі - випускники Ітона. 5. Всі викладачі – чудові веслувальники. Отже, жоден мій друг не обідає за верхнім столом.

Процес доведення логічного слідування починається з формалізації поставленого завдання засобами логіки предикатів 1-го порядку.

Введемо предикати на заданій області визначення: V (x) - x випускник Ітона; K (x) - x грає в крикет; P (x) - x викладач; O (x) - x обідає за верхнім столом; G (x) - x вміє веслувати; D (x) - x мій друг.

Формалізуємо посилки: 1. $\forall x\ (V(x) \to K(x))$; 2. $\forall x\ (O(x) \to P(x))$; 3. $\forall x\ (K(x) \to \neg G(x))$; 4. $\forall x\ (D(x) \to V(x))$; 5. $\forall x\ (P(x) \to G(x))$; і висновок, який треба перевірити: $\forall x(D(x) \to \neg O(x))$.

Доказ логічного слідування можна провести методом від протилежного (метод редукції) або за допомогою побудови формального виводу в теорії К - теорії числення предикатів першого порядку.

Доказ **методом редукції** полягає в наступному:
- передбачається існування інтерпретації, на якій всі посилки (гіпотези) набувають істинне значення, а слідування - хибне;
- знаходяться значення кожного простого висловлювання, що входить до посилок і висновка;
- при отриманні суперечності доводиться відсутність такої інтерпретації.

Припустимо, що всі посилки істинні, а висновок хибний. У такому випадку справедливий наступний запис:

1. $|\forall x\ (V(x) \to K(x))| = T$;
2. $|\forall x\ (O(x) \to P(x))| = T$;
3. $|\forall x\ (K(x) \to \neg G(x))| = T$;
4. $|\forall x\ (D(x) \to V(x))| = T$;
5. $|\forall x\ (P(x) \to G(x))| = T$;

В. $|\forall x(D(x) \to \neg O(x))| = F$.

Тоді, якщо висновок хибний, то існує інтерпретація, на якій це висловлювання набуває помилкове значення.

Нехай існує така константа a з області визначення, що справедливо наступне:

$|D(a) \to \neg O(a)| = F \Rightarrow |D(a)| = T, |O(a)| = T$.

Оскільки посилки правильні для всіх *x* з області визначення, то вони також правильні і для константи *a* з цієї ж області визначення, тому справедлива заміна *x* на *a*.

Після підстановки в посилку 2 вже відомих значень висловлювань отримаємо:

$|T \rightarrow P(a)|=T \quad \Rightarrow \quad |P(a)|=T$

Після підстановки в посилку 4 вже відомих значень висловлювань отримаємо:

$|T \rightarrow V(a)|=T \quad \Rightarrow \quad |V(a)|=T$

Після підстановки в посилку 1 вже відомих значень висловлювань отримаємо:

$|T \rightarrow K(a)|=T \quad \Rightarrow \quad |K(a)|=T$

Після підстановки в посилку 3 вже відомих значень висловлювань отримаємо:

$|T \rightarrow \neg G(a)|=T \quad \Rightarrow \quad |G(a)|=F$

Після підстановки в посилку 5 вже відомих значень висловлювань отримаємо: $|T \rightarrow G(a)|=T \quad \Rightarrow \quad |G(a)|=T \neq F$.

Отримане протиріччя доводить неправильність припущення, з чого випливає, що висновок істинний, а не хибний.

При побудові формального виводу для перевірки логічного слідування в численні предикатів першого порядку використовуються наступні правила:

Правило універсальної конкретизації (УК) -

$\forall$ x A(x)|=A(y), якщо y вільно для x в A (x).

Правило узагальнення (Gen) -

Якщо *Г | = A (x), то Г | = x A (x)*, якщо x не входить вільно ні в одну з формул Г.

Також в теорії К числення предикатів першого порядку використовуються правило виведення MP і теореми теорії L, які включені в множину теорем теорії К (див. Розділ 2).

Формальний висновок в теорії К

1.	$\forall x\,(V(x)\rightarrow K(x))$	Г1
2.	$\forall x\,(O(x)\rightarrow P(x))$	Г2
3.	$\forall x\,(K(x)\rightarrow \neg G(x))$	Г3
4.	$\forall x\,(D(x)\rightarrow V(x))$	Г4
5.	$\forall x\,(P(x)\rightarrow G(x))$	Г5
6.	$V(y)\rightarrow K(y)$	УК(1)
7.	$O(y)\rightarrow P(y)$	УК(2)
8.	$K(y)\rightarrow \neg G(y)$	УК(3)
9.	$D(y)\rightarrow V(y)$	УК(4)
10.	$P(y)\rightarrow G(y)$	УК(5)
11.	$V(y)\rightarrow \neg G(y)$	ПС(6, 8)
12.	$\neg G(y)\rightarrow \neg P(y)$	ПК(10)
13.	$V(y)\rightarrow \neg P(y)$	ПС(11, 12)
14.	$D(y)\rightarrow \neg P(y)$	ПС(9, 13)
15.	$\neg P(y)\rightarrow \neg O(y)$	ПК(7)
16.	$D(y)\rightarrow \neg O(y)$	ПС(14, 15)
17.	$\forall x(D(x)\rightarrow \neg O(x))$	Gen(16)

Завдання.

1) Область визначення: тварини. 1. Я люблю всіх тварин, які належать мені. 2. Собаки гризуть кістки. 3. Жодну тварину я не пускаю до себе в кабінет, якщо вона не "служить", коли її про це просять. 4. Усі тварини в дворі належать мені. 5. Усім тваринам, яких я люблю, дозволяється входити до мене в кабінет. 6. Єдині тварини, які "служать", якщо їх попросити, – собаки. Отже, всі тварини в цьому дворі гризуть кістки.

2) Область визначення: дні. 1. Я не називаю день "нещасливим", якщо Робінсон ввічливий зі мною. 2. Середи завжди бувають похмурими днями. 3. Якщо люди беруть з собою парасольки, день ніколи не буває сонячним. 4. Єдиний день тижня, коли Робінсон неввічливий зі мною, - середа. 5. Усякий візьме з собою парасольку, якщо дощить. 6. Мої "щасливі" дні незмінно виявляються сонячними. Отже, дощові дні похмурі.

3) Область визначення: люди. 1. Ніхто не забуде причесатися, якщо він вирушає на бал. 2. Не можна сказати, що людина виглядає чудово, якщо вона неохайна. 3. Курці опіуму втрачають контроль над собою. 4. Людина, що причесалась, виглядає чудово. 5. Ніхто не вдягне білих лайкових рукавичок, якщо він не вирушає на бал. 6. Людина завжди неохайна, якщо вона втратила контроль над собою. Отже, курці опіуму ніколи не носять білих лайкових рукавичок.

4) Область визначення: представлені тут картини. 1. Жодна з представлених тут картин, окрім батальних, не є цінністю. 2. Жодна з картин, вивішених без рам, не покрита лаком. 3. Усі батальні картини написані олією. 4. Усі розпродані картини є цінністю. 5. Усі картини англійських майстрів покриті лаком. 6. Усі картини, які були вивішені в рамах, продані. Отже, усі представлені тут картини англійських майстрів написані олією.

5) Області визначення: логічні задачі, які я вирішую. 1. Якщо я розв'язую логічну задачу без бурчання, то можна бути впевненим, що вона мені зрозуміла. 2. Посилки в цих соритах розташовані не в тому ж порядку, як у звичних мені задачах. 3. Жодна легка задача не викликає у мене головного болю. 4. Я не можу зрозуміти задачі, в яких посилки стоять не в тому порядку, до якого я звик. 5. Я ніколи не бурчу на задачу, якщо від неї у| мене не болить голова. Отже, ці сорити дуже важкі.

6) Область визначення: предмети. 1. Я з огидою ставлюся до всього, що не може слугувати за міст. 2. Усе, що можна славити у віршах, для мене приємний подарунок. 3. Веселка не витримає ваги тачки. 4. Усе, що може слугувати за міст, витримає вагу тачки. 5. Я не сприйняв би за подарунок те, що викликає у мене огиду. Отже, веселку не варто славити у віршах.

7) Область визначення: автори літературних творів. 1. Усі автори літературних творів, що осягнули природу людини, розумні люди. 2. Жодного автора не можна вважати дійсним поетом, якщо він не здатний хвилювати серця людей. 3. Шекспір написав "Гамлета". 4. Жоден автор, що не осягнув природу людини, не здатний хвилювати серця людей. 5. Лише дійсний поет міг написати "Гамлета". Отже, Шекспір був розумною людиною.

8) Області визначення: тварини. 1. Тварини завжди відчувають смертельну образу, якщо я не звертаю на них уваги. 2. Ті тварини, які належать мені, знаходяться на тому майданчику. 3. Жодна тварина не зможе відгадати загадку, якщо вона не здобула відповідної освіти в школі-інтернаті. 4. Жодна тварина на тому майданчику не борсук. 5. Якщо тварина відчуває смертельну образу, вона мечеться зі скаженою швидкістю і виє. 6. Я ніколи не звертаю уваги на тварин, які не належать мені. 7. Жодна тварина з відповідною освітою, що одержана в школі-інтернаті, не стане метатися зі скаженою швидкістю і вити. Отже, жоден борсук не може відгадати загадки.

9) Область визначення: люди. 1. Ті, хто порушують свої обіцянки, не заслуговують довіри. 2. Любителі випити дуже товариські. 3. Людина, що виконує свої обіцянки, чесна. 4. Жоден непитущий не лихвар. 5. Тому, хто дуже товариський, завжди можна вірити. Отже, жоден лихвар не буває нечесний.

10) Область визначення: плоди на цій виставці. 1. Усі плоди на цій виставці, які не будуть удостоєні нагороди, є власністю організаційного комітету. 2. Жоден з представлених мною персиків не удостоєний нагороди. 3. Жоден з плодів, розпроданих після закриття виставки, не був нестиглим. 4. Жоден із стиглих плодів не був вирощений у теплиці. 5. Усі плоди, що належать оргкомітету виставки, були розпродані після її закриття. Отже, жоден з моїх персиків не був вирощений у теплиці.

11) Область визначення: поеми. 1. Жодна цікава поема не залишиться невизнаною людьми з тонким смаком. 2. Жодна сучасна поема не позбавлена афектації. 3. Усі ваші поеми написані про мильні бульбашки. 4. Жодна афектована поема не знаходить визнання у людей з тонким смаком. 5. Жодна стародавня поема не написана про мильні бульбашки. Отже, усі ваші поеми нецікаві.

12) Область визначення: книжки в цій бібліотеці. 1. Єдині книжки в цій бібліотеці, які я не рекомендую читати, аморальні за своїм змістом. 2. Усі книжки в твердих палітурках мають видатні літературні достоїнства. 3. Усі романи цілком етичні за своїм змістом. 4. Я не рекомендую вам читати жодну з книжок у м'якій обкладинці. Отже, усі романи в цій бібліотеці мають видатні літературні достоїнства.

13) Область визначення: птахи. 1. Жоден птах, окрім страуса, не досягає 9 футів зросту. 2. У цьому пташнику немає птахів, які б належали кому-небудь окрім мене. 3. Пирогами з начинкою харчуються тільки страуси. 4. У мене немає птахів, які досягали б 9 футів зросту. Отже, жоден птах в цьому пташнику не харчується пирогами з начинкою.

14) Область визначення: людські істоти. 1. Усе людство, за винятком моїх лакеїв, володіє певною часткою здорового глузду. 2. Лише діти можуть харчуватися одними солодощами. 3. Лише той, хто грає в "класи", знає, що таке справжнє щастя. 4. Жодна дитина не має й малої частки здорового глузду. 5. Жоден машиніст не грає в "класи". 6. Про жодного з моїх лакеїв не можна сказати, що він не знає, в чому полягає справжнє щастя. Отже, жоден машиніст не харчується одними солодощами.

15) Область визначення: книжки, що продаються тут. 1. Жодна книжка, що продається тут, окрім тих книжок, що виставлені на вітрині, не має золоченого обрізу. 2. Усі авторські видання мають червоний ярличок. 3. Усі книги із червоними ярличками продаються за ціною 5 шилінгів і вище. 4. Лише авторські видання виставляються на вітрині. Отже, жодна книга, що продається тут, не має золоченого обрізу, якщо вона не йде за ціною 5 шилінгів і вище.

16) Область визначення: кошеня. 1. Кошеня, що любить рибу, піддається дресируванню. 2. Кошеня без хвоста не гратиме з горилою. 3. Кошеня із вусами завжди люблять рибу. 4. У кошеняти, що піддається дресируванню, не буває зелених очей. 5. Якщо у кошеняти немає вусів, то у нього немає і хвоста. Отже, жодне кошеня з зеленими очима не гратиме з горилою.

17) Область визначення: риби. 1. Жодна акула не сумнівається, що вона чудово озброєна. 2. До риби, що не вміє танцювати менует, ставляться без шанування. 3. Жодна риба не буде цілком упевнена в тому, що вона чудово озброєна, якщо у неї немає трьох рядів зубів. 4. Усі риби, окрім акул, дуже добрі до дітей. 5. Жодна крупна риба не вміє танцювати менует.

6. До риби, що має три ряди зубів, слід ставитися з повагою. Отже, жодна крупна риба не буває недоброю до дітей.

18) Область визначення: речі. 1. Усі речі, що продаються на вулиці, не мають особливої цінності. 2. Тільки мотлох можна купити за гріш. 3. Яйця великої гагарки являють велику цінність. 4. Лише те, що продається на вулиці, і є справжній мотлох. Отже, яйце великої гагарки за гріш не купиш.

19) Область визначення: речі . 1. Усе, що не занадто потворно, можна тримати в вітальні. 2. Те, що покрите нальотом солі, ніколи не буває абсолютно сухим. 3. Те, що покрите вологою, не слід тримати в вітальні. 4. Купальні кабінки завжди розташовані на морському березі. 5. Ніщо, зроблене з перламутру, не може бути занадто потворним. 6. Усе, що стоїть на узбережжі, покривається нальотом солі. Отже, купальні кабінки ніколи не робляться з перламутру.

20) Область визначення: люди. 1. Всі полісмени в цій околиці вечеряють у нашої кухарки. 2. Людина з довгим волоссям не може не бути поетом. 3. Амос Джадд ніколи не сидів у в'язниці. 4. Усі кузени нашої кухарки полюбляють холодну баранину. 5. У цій околиці немає інших поетів, окрім полісменів. 6. З нашою кухаркою не вечеряє ніхто, окрім її кузенів. 7. Усі люди з коротким волоссям сиділи у в'язниці. Отже, Амос Джадд полюбляє холодну баранину.

4. АВТОМАТИЧНЕ ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМ

4.1. Метод резолюцій

4.1. Довести логічне слідування методом резолюцій.

Приклад. Доведемо виконуваність логічного слідування для завдання з попереднього розділу методом автоматичного доведення теорем - методом резолюцій.

Основна ідея застосування методу резолюцій для перевірки логічного слідування полягає в тому, щоб перевірити, чи містить множина S (поле знань задачі) пустий диз'юнкт □. Якщо S його містить, то множина S нездійсненна, якщо ні, то треба перевірити чи може він бути отриманий з даної множини диз'юнктів. Іншими словами, необхідно знайти множину основних прикладів, що спростовують вихідну множину диз'юнктів. Ця процедура грунтується на правилі резолюції.

Правило резолюції Робінсона: для будь-яких двох диз'юнктів C_1 і C_2 якщо існує літера $L_1 \in C_1$ і контрарна їй літера $L_2 \in C_2$ ($L_2 = \neg L_1$), то, викреслюючи L_1 з C_1 і L_2 з C_2 і побудувавши диз'юнкт з решти літер, отримаємо резольвенту C_1 і C_2 ($C_1 \vee C_2$).

Резольвента C є логічне слідування C_1 и C_2, що містять контрарні літери L и $\neg$L.

Застосування методу резолюції в логіці першого порядку ускладнюється тим, що диз'юнкти містять змінні, які можуть не збігатися в двох однакових літерах. У таких випадках здійснюються підстановки, заміни та уніфікації.

Складемо спочатку множину диз'юнктів даного логічного слідування, привівши посилки і заперечення висновку до упередженої нормальної форми (УНФ) і, потім, до стандартної скулемовської форми (ССФ):

1. $\forall$ x (V(x) $\rightarrow$ K(x))

   $\forall$ x ($\neg$V(x) $\vee$ K(x))

   $\neg$V(x) $\vee$ K(x)

2. $\forall$ x (O(x) $\rightarrow$ P(x))

$\forall x\ (\neg O(x) \vee P(x))$

$\neg P(x) \vee O(x)$

3. $\forall x\ (K(x) \rightarrow \neg G(x))$

$\forall x\ (\neg K(x) \vee \neg G(x))$

$\neg K(x) \vee \neg G(x)$

4. $\forall x\ (D(x) \rightarrow V(x))$

$\forall x\ (\neg D(x) \vee V(x))$

$\neg D(x) \vee V(x)$

5. $\forall x\ (P(x) \rightarrow G(x))$

$\forall x\ (\neg P(x) \vee G(x))$

$\neg P(x) \vee G(x)$

В. $\neg(\forall x (D(x) \rightarrow \neg O(x))$

$\exists x \neg(\neg D(x) \vee \neg O(x))$

$\exists x\ (D(x) \& O(x))$

$D(a)$

$O(a)$

Отримана множина диз’юнктів: $\{\neg V(x) \vee K(x),\ \neg P(x) \vee O(x),$
$\neg K(x) \vee \neg G(x),\ \neg D(x) \vee V(x),\ \neg P(x) \vee G(x), D(a),\ O(a)\}$

Тепер побудуємо висновок, послідовно застосовуючи правило резолюцій:

1. $D(a)$
2. $O(a)$
3. $\neg V(x) \vee K(x)$
4. $\neg O(x) \vee P(x)$
5. $\neg K(x) \vee \neg G(x)$
6. $\neg D(x) \vee V(x)$
7. $\neg P(x) \vee G(x)$

8. $V(a)$ $\{a/x\}$ рез. (1, 6)
9. $K(a)$ $\{a/x\}$ рез. (1, 8)
10. $\neg G(a)$ $\{a/x\}$ рез. (5, 9)
11. $\neg P(a)$ $\{a/x\}$ рез. (7, 10)
12. $\neg O(a)$ $\{a/x\}$ рез. (4, 11)
13. $\square$ рез. (2, 12)

Пустий диз'юнкт отриманий, отже, висновок - істинний.

Завдання.

1) *Область визначеня: живі істоти.* 1. Всі, у кого є крила, літають. 2. У всіх птахів є крила. 3. У страуса є крила, але він не літає. *Висновок: страус - не птах.*

2) *Область визначення: люди і книжки.* 1. Деякі студенти не люблять читати жодних підручників. 2. Всі студенти люблять читати журнали. *Висновок: підручники - це не журнали.*

3) *Область визначення: люди і книжки.* 1. Існують студенти. 2. Всі студенти люблять читати гарні книги. 3. Ніхто з них не любить читати підручники з математики. *Висновок: підручники з математики - погані книги.*

4) *Область визначення: люди і книжки.* 1. Існують письменники. 2. Всі письменники пишуть романи. 3. Ніхто з них не пише підручників. *Висновок: підручники - не романи.*

5) *Область визначення: люди і тексти.* 1. Існують такі студенти, які пишуть тільки програми. 2. Програми - це не вірші. *Висновок: деякі студенти не пишуть вірші.*

6) *Область визначення: живі істоти.* 1. З тими, хто часом відчуває запаморочення, поводяться шанобливо. 2. Розумна істота завжди носить з собою парасольку. 3. До безрозсудних істот ставляться без шанування. 4. Жодна істота не стане брати з собою парасольку, збираючись подорожувати на повітряній кулі. *Висновок: жодна істота, що вирушає в подорож на повітряній кулі, не відчуває запаморочення.*

7) *Області визначень: тварини і люди.* 1. Жоден дракон, що живе в зоопарку, не є щасливим. 2. Будь-який звір, що зустрічає добрих людей, є щасливим. 3. Люди, які зустрічаються в зоопарку, – добрі. 4. Звірі, що живуть в зоопарку, зустрічають людей, які відвідують зоопарк. *Висновок: жоден дракон не живе в зоопарку.*

8) *Область визначення: щось.* 1. Щось, що має в собі риси чогось доброго, добре саме по собі. 2. Щось, що має в собі риси чогось поганого, погане саме по собі. 3. Війна має в собі риси миру і страждання. 4. Мир добрий, а страждання погане. *Висновок: деякі речі і добрі, і погані одночасно.*

9) *Область визначення: живі істоти.* 1. Всі леви – дикі істоти. 2. Зустрічаються такі, що не п\`ють каву. *Висновок: всі леви є дикими істотами, що не п\`ють каву.*

10) *Область визначення: фрукти.* 1. Усі стиглі фрукти – корисні. 2. Деякі стиглі фрукти – дуже кислі. *Висновок: Стиглі кислі фрукти* - *корисні.*

4.2. Логічне програмування

4.2. Скласти логічну програму і перевірити логічне слідування.

Приклад. Побудова логічної програми включає в себе опис задачі на мові клауз і побудову дерева логічного висновку.

Логічна програма складається із сукупності фактів, які утворюють базу знань. Завдання формулюється як питання про деякі факти або відносини, визначені у базі знань. Розв'язання завдання - це перевірка логічного слідування (з фактів і правил, визначених у базі знань). Виведення логічного слідування здійснюється методом резолюцій, який реалізується виконанням самої програми. Сам метод резолюцій прихований від користувача.

Логічна програма включає в себе перелік предикатів (після слова predicates), що вводяться при формалізації; сукупність фактів (що записуються після слова clauses) і правил (після фактів). Вирази, що описують правила, називаються «клозами» або «клаузами» (clause). Їх синтаксис відрізняється від традиційного синтаксису числення предикатів. Клауза є різновидом запису диз'юнкта, в якій позитивні та негативні літери розділені символами :-, причому, позитивні літери пишуться зліва, а негативні - справа.

Перевірка логічного слідування відбувається у вигляді запиту до бази знань і має синтаксис: Goal? - <вираз>. Знак «-» перед виразом в питанні означає, що при пошуку відповіді від цього виразу береться заперечення, а потім виконується резолютивний висновок на множині фактів, правил і заперечення виразу, що записаноий в питанні. Якщо ця множина виявиться суперечливою, тобто буде отриманий пустий диз'юнкт, то логічне слідування виконано, і програма відповість «так» (yes), або програма видасть результат уніфікацій (підстановки), який привів до отримання □;
в іншому випадку вона відповість «ні» (no).

Запишемо множину диз'юнктів завдання з розділу 4.1 у вигляді клауз.

Predicates: V(x), K(x), P(x), O(x), G(x), D(x).

Clauses:

D(a)

K(x):- V(x)

P(x):- O(x)

:- K(x), G(x)

V(x):- D(x)

G(x):- P(x)

Goal ? – not O(a)

Дерево виконання логічної програми представлено нижче.

Ініціюється робота з заперечення виразу, що знаходиться у розділі Goal. Потім проглядається список клауз і вибирається перша зустрінута клауза або факт, що містять літери, контрарні до наявної. Після уніфікації, якщо вона є необхідною, отримуємо резольвенту, яка тепер задає пошук контрарної літери в списку клауз. Процес продовжується до отримання пустого диз'юнкту або до вичерпання можливого перебору.

O(a)

|

P(x):- O(x)

{a/x}

|

P(a)

|

G(x):- P(x)

{a/x}

|

G(a):-

|

:- K(x), G(x)

{a/x}

|

:- K(a)

|

K(x):- V(x)

{a/x}

|

:- V(a)

|

V(x):- D(x)

{a/x}

|

:- D(a)

|

D(a)

|

□

У даному прикладі отримано пустий диз'юнкт, отже, множина диз'юнктів, що складена з посилок і заперечення висновку, є суперечливою. А це означає, що логічне слідування виконується.

Розглянемо ще декілька прикладів доведення логічного слідування в різний спосіб в змістовних задач теорії предикатів.

Приклад 1.

Жоден торговець уживаними автомобілями не купує уживані автомобілі для своєї сім'ї. Деякі люди, які купують уживані автомобілі для своїх сімей, абсолютно нечесні.

Висновок: серед торговців уживаних автомобілів немає нечесних людей.

A(x) - x- торговець уживаними автомобілями;

B(x) - x купує уживані автомобілі для своєї сем'ї;

C(x) - x абсолютно нечесений;

$\forall x(A(x)\to\neg B(x)), \exists x(B(x)\&C(x)) \models \exists x(C(x)\&\neg A(x));$

<u>Від супротивного (редукція)</u>

Нехай $|\forall x(A(x)\to\neg B(x))\&\exists x(B(x)\&C(x)) \to \exists x(C(x)\&\neg A(x))|=F;$

тоді:

$|\forall x(A(x)\to\neg B(x))|=T,$

$|\exists x(B(x)\&C(x))|=T,$

$|\exists x(C(x)\&\neg A(x))|= F;$

Знайдеться x=a: $|B(a)\&C(a)|=T; \Rightarrow |B(a)|=T; |C(a)|=T;$

$|C(a)\&\neg A(a)|= F; \Rightarrow |\neg A(a)|= F; |A(a)|=T;$

Тоді $|A(a)\to\neg B(a)|= F$, та $|\forall x(A(x)\to\neg B(x))|= F$, отримали протиріччя, отже, логічне слідування виконується.

Приклад 2.

Жоден ледар не гідний слави. Деякі митці не ледарі.

Висновок: Деякі митці гідні слави.

A(x) - x- ледар;

$B(x)$ - x гідний слави;

$C(x)$ - x- митець.

<u>Від супротивного (редукція)</u>

$\forall x(A(x)\rightarrow\neg B(x)), \exists x(C(x)\&\neg A(x)) \;\vdash\; \exists x(C(x)\&B(x))$.

Нехай $|\forall x(A(x)\rightarrow\neg B(x))\&\exists x(C(x)\&\neg A(x))\rightarrow\exists x(C(x)\&B(x))|= F$, тоді

$|\forall x(A(x)\rightarrow\neg B(x))|=T$,

$|\exists x(C(x)\&\neg A(x))|=T$,

$|\exists x(C(x)\&B(x))|= F$;

Знайдеться x=a; $|C(a)|=T$; $|\neg A(a)|=T$; $\Rightarrow |A(a)|= F$;

$|C(a)\&B(a))|= F$; $\Rightarrow |B(a)|= F$;

Раз для всіх x, то і для x=a теж, $|(A(a)\rightarrow\neg B(a))|=| F\rightarrow F |=T$; протиріччя немає, логічне слідування не виконується.

<u>Резодюція</u>

1.$\forall x(A(x)\rightarrow\neg B(x)) \Leftrightarrow \forall x(\neg A(x)\vee\neg B(x))$

2. $\exists x(C(x)\&\neg A(x)) \Rightarrow C(a)\&\neg A(a)$;

Висновок: $\exists x(C(x)\&B(x))$, заперечення висновку: $\neg\exists x(C(x)\&B(x))\Rightarrow \forall x\neg(C(x)\&B(x)) \Rightarrow \forall x(\neg C(x)\vee\neg B(x))$;

Диз'юнкти:

1. $\neg A(x)\vee\neg B(x)$

2.$C(a)$

3.$\neg A(a)$

4. $\neg C(x)\vee\neg B(x)$

5. $\neg B(a)$ (2,4) $\{a/x\}$;

Пустий диз’юнкт отримати не можна, отже, логічне слідування не виконується.

Приклад 3.

Митні чиновники обшукують кожного, хто в'їжджає в країну, крім високопоставлених осіб. Деякі, що сприяють провезенню наркотиків, в'їжджали в країну і були обшукані виключно людьми, які також сприяють провезенню наркотиків. Ніхто з високопоставлених осіб не сприяв провезенню наркотиків.

Висновок: деякі з митників сприяли провезенню наркотиків.

T(x): x- митник;

V(x): x- висопоставлена особа;

D(x): - сприяє провезенню наркотиків;

O(x, y): - x обшукан y- ком;

C(x): x в'їжджає в країну;

1) $\forall x(C(x)\&\neg V(x)\to\exists y(O(x,y)\&T(y)))$;

2) $\exists x(C(x)\&D(x)\&\forall y(O(x,y)\to D(y)))$;

3) $\forall x(V(x)\to\neg D(x))$;

В.: $\exists x(T(x)\&D(x))$

<u>Метод резолюції</u>

Приводимо першу посилку до упередженої нормальної форми, а потім до стандартної скулемовської:

$\forall x(\neg C(x)\vee V(x)\vee\exists y(O(x, y)\&T(y)))$; $\Rightarrow\forall x\exists y(\neg C(x)\vee V(x)\vee(O(x, y)\&T(y)))$; $\Rightarrow$

$\Rightarrow\forall x\exists y((\neg C(x)\vee V(x)\vee(O(x, y))\&(\neg C(x)\vee V(x)\vee T(y)))$; $\Rightarrow$

$\Rightarrow\forall x((\neg C(x)\vee V(x)\vee(O(x, f(x)))\&(\neg C(x)\vee V(x)\vee T(f(x))))$;

Друга посилка:

$\exists x(C(x)\&D(x)\&\forall y(\neg O(x, y)\vee D(y)))$; $\Rightarrow$ $\exists x\forall y(C(x)\&D(x)\&(\neg O(x, y)\vee D(y)))$; $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\forall y(C(a)\&D(a)\&(\neg O(a, y)\vee D(y)))$;

Третя посилка: $\forall x(V(x)\to\neg D(x));\Rightarrow \forall x(\neg V(x)\vee\neg D(x));$

Заперечення висновку: $\neg(\exists x(T(x)\&D(x)));\Leftrightarrow \forall x(\neg T(x)\vee\neg D(x)).$

Отримано множину диз'юнктів:

1. $\neg C(x)\vee V(x)\vee(O(x, f(x))$

2. $\neg C(x)\vee V(x)\vee T(f(x))$

3.$C(a)$

4.$D(a)$

5.$\neg O(a, y)\vee D(y)$

6.$\neg V(x)\vee\neg D(x)$

7.$\neg T(x)\vee\neg D(x)$,

Ербранівський універсум буде виглядати наступним чином:

$H0 = \{a\}; H1 =\{a, f(a), f(f(a)), \dots\};$

Ербранівський базис:

$A=\{C(a);\ V(a);\ O(a,\ f(a));\ D(a);\ T(a);\ C(f(a));\ V(f(a));\ O(f(a),f(f(a));\ D(f(a));\ \dots\}$,

8. $\neg V(a)$ (4,6) $\{a/x\}$

9. $\neg C(a)\vee T(f(a))$ (2,8) $\{a/x\}$

10. $\neg T(a)$ (4,7) $\{a/x\}$

11. $T(f(a))$ (3,9)

12. $V(a)\vee T(f(a))$(3,2) $\{a/x\}$

13. $\neg D(f(a))$ (7,11) $\{a/x\}$

14. $\neg O(a, f(a))$ (5,13) $\{f(a)/y\}$

15. $\neg C(a)\vee V(a)$ (1,14) $\{a/x\}$

16. $\neg C(a)$ (8, 15)

17. □ (4,16)

Приклад 4.

Деякі режисери знімають серіали. Ніхто з них не знімає мультфільми, отже, жоден серіал не є мультфільмом.

Предикати задані на областях X= {*люди*} и Y = *{фильмова продукція}*. Пусть $P(x)$: *x – режисер*, $D(y)$: *y – серіал*, $Q(y)$: *y –мультфільмы*, $L(x, y)$ *– x знімає y*. Формализуємо умову задачі:

*Г*1: $\exists x(P(x)\&\forall y(D(y) \to L(x,y)))$

*Г*2: $\forall x(P(x) \to \forall y(Q(y) \to \neg L(x,y)))$

Висновок *G*: $\forall y(D(y) \to \neg Q(y))$

Для доведення логічного слідування можна застосувати метод від супротивного, формальне виведення і метод резолюцій.

<u>Метод від супротивного.</u>

Припустимо, що при істинності посилок $|F1| = T$, $|F2| = T$ висновок приймає хибне значення: $|G| = F$.

З $|\forall y(D(y) \to \neg Q(y))| = F$ слідує, що існує таке $y = a$, що $|D(a) \to \neg Q(a)| = F$. Тоді $|D(a)| = T$, $|\neg Q(a)| = F$, т.е. $|Q(a)| = T$.

З $|\exists x(P(x)\&(D(a) \to L(x,a)))| = T$ слідує, що існує таке $x = b$, що $|P(b)\&(D(a) \to L(b,a))| = T$. Тоді $|P(b)| = T$ та $|D(a) \to L(b,a)| = T$, а так як $|D(a)| = T$, то $|L(b,a)| = T$.

Посилка *F*2: $|\forall x(P(x) \to (Q(a) \to \neg L(x,a)))| = T$ для всіх *x*, в тому числі для $x = b$, отже, $|P(b) \to (Q(a) \to \neg L(b,a))| = T$, а так як $|P(b)| = T$, $|Q(a)| = T$, то з $|Q(a) \to \neg L(b,a)| = T$ следує $|\neg L(b,a)| = T$.

Таким чином, отримуємо, що істинні обидва твердження: $|T \to L(b,a)| = T$ и $|T \to \neg L(b,a)| = T$, т.е. $|L(b,a)| = T$ и $|\neg L(b,a)| = T$. Отримане протиріччя доводить логічне слідування.

<u>Формальний вивід:</u>

1. $\exists x(P(x)\&\forall y(D(y) \to L(x,y)))$ Г1

2. $\forall x(P(x) \rightarrow \forall y(Q(y) \rightarrow \neg L(x,y)))$ Г2

3. $P(b) \& \forall y(D(y) \rightarrow L(b,y))$ ЕК(1)

4. $P(b)$ вид. &(3)

5. $\forall y(D(y) \rightarrow L(b,y)))$ вид. &(3)

6. $P(b) \rightarrow \forall y(Q(y) \rightarrow \neg L(b,y))$ УК(2)

7. $\forall y(Q(y) \rightarrow \neg L(b,y))$ GMP(4, 6)

8. $Q(z) \rightarrow \neg L(b,z)$ УК(7)

9. $D(z) \rightarrow L(b,z)$ УК(5)

10. $L(b,z) \rightarrow \neg Q(z)$ контрапозиція (8)

11. $D(z) \rightarrow \neg Q(z)$ силогізм (9,10)

12. $\forall y(D(y) \rightarrow \neg Q(y))$ *Gen* (11)

<u>Метод резолюцій.</u>

Знайдемо упереджені нормальні форми (УНФ) для посилок.

Г1: $\exists x(P(x) \& \forall y(D(y) \rightarrow L(x,y)))$=$\exists x(P(x) \& \forall y(\neg D(y) \vee L(x, y)))$ =

= $\exists x(\forall y(\neg D(y) \vee L(x, y)) \& P(x))$ = $\exists x \forall y((\neg D(y) \vee L(x, y))$ & $P(x))$ – УНФ.

Г2: $\forall x(P(x) \rightarrow \forall y(Q(y) \rightarrow \neg L(x,y)))$ = $\forall x(\neg P(x) \vee \forall y(\neg Q(y) \vee \neg L(x, y)))$ =

= $\forall x(\forall y(\neg Q(y) \vee \neg L(x, y)) \vee \neg P(x))$ = $\forall x \forall y(\neg Q(y) \vee \neg L(x, y) \vee \neg P(x))$– УНФ.

Знайдемо скулемовскую стандартну форму (ССФ) посилок.

Г1: Елімінуємо квантор $\exists$ в формулі $\exists x \forall y((\neg D(y) \vee L(x, y))$ & $P(x))$. Візьмемо $x = a$, отримаємо ССФ посилки *Г1:* $\forall y((\neg D(y) \vee L(a, y)) \& P(a)$,

Г2: $\forall x \forall y(\neg Q(y) \vee \neg L(x, y) \vee \neg P(x))$ знаходиться в ССФ.

Візьмемо заперечення від висновка *G*: $\neg \forall y(D(y) \rightarrow \neg Q(y))$ = $\exists y \neg(\neg D(y) \vee \neg Q(y))$

$= \exists y(D(y)\&Q(y))$. Це УНФ. Елімінуємо квантор $\exists$, взяв $y = b$: $D(b)\&Q(b)$ – ССФ.

Отримаємо множину диз'юнктів:

$S = \{\neg D(y)\vee L(a, y), P(a), \neg Q(y)\vee\neg L(x, y)\vee\neg P(x), D(b), Q(b)\}$.

Побудуємо резолютивний вивід:

1.	$\neg D(y)\vee L(a, y)$	
2.	$P(a)$	
3.	$\neg Q(y)\vee\neg L(x, y) \vee \neg P(x)$	
4.	$D(b)$	
5.	$Q(b)$	
6.	$\neg L(x, b) \vee \neg P(\mathrm{x})$	$\{b/y\}$, резольвента 5, 3
7.	$\neg L(a, b)$	$\{a/x\}$, резольвента 2, 6
8.	$\neg D(b)$	$\{b/y\}$, резольвента 1, 7
9.	$\square$	резольвента 4, 8

Побудова логічної програми.

Запишемо множину диз'юнктів у вигляді клауз.

Predicates

P(x)

D(y)

Q(y)

L(x, y)

Clauses

P(a)

D(b)

:– *Q(y), L(x, y), P(x)*

L(a, y):– D(y)

Goal: ? – *not Q(b)*

Логічне дерево виконання логічної програми:

Q(b)

↓

:– Q(y), L(x, y), P(x)

↓ ***{b/y}***

:– L(x, b), P(x)

↓

P(a)

↓ ***{a/x}***

:– L(a, b)

↓

L(a, y):– D(y)

↓ ***{ b/y}***

:– D(b)

↓

D(b)

↓

□

Завдання.

1) *Область визначення: люди.* 1. Жоден старанний студент не пропускає занять. 2. Студенти, які погано навчаються зазвичай пропускають заняття. 3. Викладачі люблять студентів, які добре навчаються. 4.Студент Том - старанний. 5. Сміт - професор. *Висновок: Чи любить професор Сміт студента Тома?*
2) *Область визначення: люди.* 1. Кожен, хто сильний і розумний, досягне успіху в кар'єрі. 2. Джон - сильний. 3. Тільки розумні люди навчаються в університетах. 4. Джон - студент університету. *Висновок: Джон досягне успіху в кар'єрі.*
3) *Область визначення: люди і тексти.* 1. Програмісти пишуть тільки програми. 2. Програми - це не вірші. 3. Джон - програміст. *Висновок: Джон не пише віршів.*
4) *Область визначення: люди.* 1. Всі дівчата люблять тих, у кого є автомобіль. 2. Багаті люди мають автомобіль. 3. Джон - багатий. 4. Ненсі - дівчина. *Висновок: Ненсі любить Джона.*
5) *Область визначення: люди.* 1. Кожен, хто хоче мати цікаву роботу, повинен бути сучасним і мати освіту. 2. Кожен, хто вміє працювати на комп'ютері - сучасний. 3. Том закінчив Оксфорд і вміє працювати на комп'ютері. 4. Всім дівчатам подобаються ті, хто має цікаву роботу.   5. Існує дівчина на ім'я Ненсі. *Чи подобається Ненсі Том?*
6) *Область визначення: живі істоти.* 1. Кожна тварина або звір, або птах, або плазун, або риба. 2. Всі птахи мають хвости. 3. Риби не літають. 4. Лулу не має хвоста. 5. Деякі звірі не мають хвоста. 6. Всі птахи літають. 7. Лулу не літає. *Хто Лулу?*
7) *Область визначення: живі істоти.* 1. Кожна тварина або звір, або птах, або риба. 2. Всі птахи мають хвости. 3. Риби теж мають хвости.

4. Риби не літають. 5. Риби плавають. 6. Звірі не літають. 7. Деякі птахи не літають. 8. Тіті має хвіст. 9. Тити не літає. 10. Тити не плаває. *Хто Тити?*

8) О*бласть визначення: живі істоті.* 1. Усякий, хто танцює на канаті, не користується повагою. 2. Не танцюють на канаті лише істоти похилого віку. 3. Смішний вигляд мають тільки ті, хто їсть пиріжки на вулиці. 4. Усякий, хто їсть пиріжки на вулиці, молодий душею. 5. Свинка із парасолькою має смішний вигляд. *Висновок: свинка із парасолькою не користується повагою.*

9) *Область визначення: люди.* 1. Святий Франциск любить кожного, хто любить кого-небудь. 2. Кожен кого-небудь любить. *Висновок: Святий Франциск любить кожного.*

10) *Область визначення: люди.* 1. Ніхто зі студентів не пише підручники. 2. Професори пишуть підручники. 3. Деякі професори, а також студенти, пишуть вірші. 4. Всі, хто пише вірші - поети. 5. Професор Джонс пише вірші. *Висновок: професор Джонс* - *поет.*

5. НЕКЛАСИЧНА ЛОГІКА

5.1. Нечіткі множини

5.1.1. Для заданої універсальної множини і нечітких підмножин A і B знайдіть $A \cap B$, $A \cup B$, A', B' , відстань Хеммінга, відстань Евкліда та відповідні відносні відстані.

Приклад. Задана універсальна множина X = {D, E, F, G } і нечіткі підмножини A і B: A={(D¦0,5), (E¦0,6), (F¦0,9)}, B={(D¦0,1), (E¦0,8), (G¦0,3)}.

Нечітку множину A визначають через універсальну множину X і функцію належності $\mu_A(x)$, що набуває значення з відрізка $[0, 1]$. Тому, нечітка множина A - це сукупність пар виду

$$A = \{(x, \mu_A(x)), x \in X\}.$$

Основними операціями над нечіткими множинами, що використовуються у моделюванні, є наступні:

1. Операція об'єднання: об'єднанням нечітких множин A і B у X називають нечітку множину $A \cup B$ з функцією належності, що має вигляд

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \ x \in X.$$

2. Операція перетину (перерізу): перетином нечітких множин A і B у X називають нечітку множину $A \cap B$ з функцією належності, що має вигляд

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \ x \in X.$$

3. Операція доповнення: доповненням A в X називають множину $\overline{A}$ (A') з функцією належності

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x), \ x \in X.$$

4. Відстань Хеммінга

$$d_h = \sum_i |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|$$

Відстань Евкліда

$$d_e = \sqrt{\sum_i \ (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2}$$

Для підрахунку відносної відстані, треба розділити отримане значення відповідної відстані на кількість елементів в універсальній множині (у даному випадку - 4).

Для заданого приклада знайдемо A ∩ B, A ∪ B, A′, B′ , відстань Хеммінга, відстань Евкліда та відповідні відносні відстані:

перетин - $A \cap B$={(D¦0,1), (E¦0,6), (F¦0), (G¦0)};

об`єднання - $A \cup B$ ={(D¦0,5), (E¦0,8), (F¦0,9), (G¦0,3)};

доповнення - A′={(D¦0,5), (E¦0,4), (F¦0,1), (G¦1)}

та B′={(D¦0,9), (E¦0,2), (F¦1), (G¦0,7)}.

Відстань Хемінга дорівнює

d_h=|0,5-0,1|+|0,6-0,8|+|0,9-0|+|0-0,3|=0,4+0,2+0,9+0,3=1,8.

Для підрахунку відносної відстані, треба розділити отримане значення на кількість елементів в універсальній множині: (1,8/4)=0.45.

Відстань Евкліда: d_e=1,1; відносна відстань Евкліда: 0,275.

Вказівка. Довести самостійно $d_e \leq d_h$.

Завдання.

На універсальній множині X = { D, E, F, G} задано:

1) A = {((D ¦ 1), (E ¦ 0), (F ¦ 0, 2), (G ¦ 0, 6)},
B = {(D ¦ 0, 8), (E ¦ 1), (F ¦ 0, 5), (G ¦ 0, 6)}.

2) A = {((D ¦ 0,1), (E ¦ 0), (F ¦ 0, 2), (G ¦ 0, 7)},
B = {(D ¦ 0, 5), (E ¦ 0,3), (F ¦ 0, 2), (G ¦ 0, 6)}.

3) A = {((D ¦ 0,5), (E ¦ 0), (F ¦ 0, 4), (G ¦ 0, 7)},
B = {(D ¦ 0, 1), (E ¦ 0,3), (F ¦ 0, 4), (G ¦ 0, 6)}.

4) A = {((D ¦ 0,2), (E ¦ 0,3), (F ¦ 0, 4), (G ¦ 0, 8)},
B = {(D ¦ 0, 1), (E ¦ 0,5), (F ¦ 0, 5), (G ¦ 0, 6)}.

5) A = {((D ¦ 0,2), (E ¦ 0,3), (F ¦ 0, 4), (G ¦ 0, 8)},
B = {(D ¦ 0, 6), (E ¦ 0,2), (F ¦ 0, 3), (G ¦ 0)}.

5.1.2. Перевірити виконуваність основних логічних законів для нечітких підмножин А, В і С.

Приклад 1. Доведемо $A \cup U = U$. Доведення проводиться за визначеннями. Дві нечіткі множини дорівнюють одна одній, якщо співпадають функції належності кожного елемента універсальної множини, що входять до нечітких підмножин. Для доведення рівності необхідно показати, що функції належності в нечітких підмножинах праворуч і ліворуч від знака «=» - однакові.

Праворуч знаходиться множина *U,* функції належності в якої для кожного елемента є *«1»* (для пустої множини *Ø* за визначенням функції належності кожного елемента дорівнюють *«0»*). Ліворуч знаходиться нечітка підмножина, яка є результатом виконання операції об\`єднання нечітких підмножин *A* і *U*.

За визначенням операції об\`єднання функції належності елементів є $\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$. Значення функцій належності елементів з *A* набувають значення з відрізка $[0, 1]$, отже, максимальне значення між числом з $[0, 1]$ і *1* є *1,* що доводить рівність $A \cup U = U$.

Приклад 2. Доведемо $A \cup A` \neq U$.

Для нечітких підмножин не виконується закон виключення третього. Покажемо це.

Ліворуч знаходиться нечітка множина з функцією належності, що визначається для кожного елемента як $max\{\mu_A(x), \mu_{A`}(x)\}$, де $\mu_A(x)$ число з

$[0,1]$, а $\mu_{A`}(x)=1- \mu_{A`}(x)$. В загальному випадку $max\{\mu_A(x), \mu_{A`}(x)\}\neq 1$; наприклад, якщо $\mu_A(x)=0,3$, то $max\{0,3; 1-0,3\}= max\{0,3; 0,7\}=0,7$.

У випадку, коли $\mu_A(x)=1$, або $\mu_A(x)=0$, рівність A∪A`=U виконується, що співпадає з результатами теорії чітких множин (чіткі множини є частковим випадком нечітких множин, коли $\mu_A(x_i)$ належать $\{0,1\}$), і показує, що теорія нечітких множин є розширенням теорії чітких множин.

В теорії нечітких множин також не виконується закон протиріччя, і, як наслідок, не виконуються закони поглинання доповнень та склеювання.

Приклад 3. Доведемо $A\cap(A\cup B) = A$.

Для доведення даної тотожності слід розглянути три випадки:

1) $\mu_A(x_i) =\mu_B(x_i)$;

2) $\mu_A(x_i) <\mu_B(x_i)$;

3) $\mu_A(x_i) >\mu_B(x_i)$.

Розглянемо, наприклад, випадок $\mu_A(x_i) < \mu_B(x_i)$. Тоді для елемента x_i функція належності для нечіткої підмножини ліворуч буде визначена як

$\min\{\mu_A(x_i), \max\{\mu_A(x_i), \mu_B(x_i)\}= \min\{\mu_A(x_i), \mu_B(x_i)\}= \mu_A(x_i)$.

Аналогічно визначаємо функції належності елементів x_i для кожного з випадків нечіткої підмножини ліворуч. Результатом $A\cap(A\cup B)$ буде нечітка підмножина A.

Завдання.

1) $\varnothing \subset A\cap A`$;

2) $\varnothing = A\cap\varnothing$;

3) $A = A\cap U$;

4) $A \cup \varnothing = A$;

5) $A \cap A` \neq \varnothing$;

6) $A \cup (A \cap B) = A$;

7) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

8) $A \cup A = A$;

9) $(A \cap B) \cup (A` \cap B) \neq B$;

10) $A \cap (A` \cup B) \neq A \cap B$.

5.2. Багатозначна логіка

5.2.1. Перевірити закон зняття подвійного заперечення у тризначній логіці Лукасевича та у тризначній логіці Гейтинга.

Закон зняття подвійного заперечення формулюється наступним чином:
$\neg\neg A \rightarrow A$.
Необхідно перевірити, чи є дана формула в логіці Лукасевича та в логіці Гейтинга тавтологією.
В системах Лукасевича та Гейтинга висловлювання бувають істинні (1), хибні (0) або нейтральні (S). Основними функціями є заперечення і імплікація. Тавтології в логіці Лукасевича та в логіці Гейтинга набувають значення «1».

Приклад 1. Розгянемо тризначну логіку Лукасевича.

Заперечення і імплікація визначаються таблицями, що наведені нижче:

заперечення

x	¬x
1	0
S	S
0	1

імплікація

x→y	1	S	0
1	1	S	0
S	1	1	S
0	1	1	1

Побудуємо таблицю істинності:

A	¬A	¬¬A	¬¬A→A
1	0	1	1
S	S	S	1
0	1	0	1

Отже, закон зняття подвійного заперечення у логіці Лукасевича виконується, тобто формула є тавтологією.

Приклад 2. Заперечення і імплікація у логіці Гейтинга визначаються наступними таблицями:

заперечення

x	¬x
1	0
S	0
0	1

імплікація

x→y	1	S	0
1	1	S	0
S	1	1	0
0	1	1	1

Побудуємо таблицю істиннності для формули ¬¬A→A в даній системі:

A	¬A	¬¬A	¬¬A→A
1	0	1	1
S	0	1	S
0	1	0	1

Отже, закон зняття подвійного заперечення у логіці Гейтинга не виконується, для значення висловлювання S формула не дорівнює «1».

Завдання.

1) Перевірити закон навішування подвійного заперечення:

а) у тризначній логіці Лукасевича;

б) у тризначній логіці Гейтинга.

2) Перевірити закон силогізму:

а) у тризначній логіці Лукасевича;

б) у тризначній логіці Гейтинга.

3) Перевірити прямий закон контрапозиції:

а) у тризначній логіці Лукасевича;

б) у тризначній логіці Гейтинга.

4) Перевірити закон оберненої контрапозиції:

а) у тризначній логіці Лукасевича;

б) у тризначній логіці Гейтинга.

5) Перевірити закон доведення до абсурду:

а) у тризначній логіці Лукасевича;

б) у тризначній логіці Гейтинга.

6) Перевірити закон де Моргана:

а) у тризначній логіці Лукасевича;

б) у тризначній логіці Гейтинга.

5.2.2.

Приклад. У тризначній логіці Поста (для циклічного заперечення) побудувати таблицю істинності для імплікації.

Вказівка. ***K***-значна логіка Поста Е.Л. є узагальненням окремого випадку двозначної логіки ($k=2$). Пост ввів $N^1{}_x$ - циклічне заперечення, $N^2{}_x$ - симетричне заперечення. Циклічне заперечення визначається рівностями:

$[N^1{}_x] = [x] +1$ *при* $[x] \leq k-1$

$[N^1{}_x] = 1$

Симетричне заперечення за Постом визначається:

$[N^2{}_x] = k- [x] +1.$

Вочевидь, що при $k=2$ циклічне і симетричне заперечення збігаються з запереченням двозначної логіки і між собою. Операції кон'юнкції і диз'юнкції визначаються як мінімум і максимум значення аргументів.

Якщо значеннями істинності є *1,2,3*, то з *n*-значної системи Поста виокремлюється тризначна логіка Р3.

Як приклад розглянемо тризначну систему Поста Р3.

x	$N^1{}_x$	$N^2{}_x$
1	2	3
2	3	2
3	1	1

Імплікацію можна визначити за формулою : $X \rightarrow Y = \neg X \vee Y$. Побудуємо таблицю істинності формули $\neg X \vee Y$ для циклічного заперечення.

X	***Y***	$\neg X$	$\boldsymbol{\neg X \vee Y}$
1	1	3	**3**
1	2	3	**3**
1	3	3	**3**
2	1	2	**2**
2	2	2	**2**
2	3	2	**3**
3	1	1	**1**
3	2	1	**2**
3	3	1	**3**

Завдання.

1) У тризначній логіці Поста (для симетричного заперечення) побудувати таблицю істинності для імплікації.

2) У тризначній логіці Поста (для циклічного заперечення) побудувати таблицю істинності для еквівалентності.

3) У тризначній логіці Поста (для симетричного заперечення) побудувати таблицю істинності для еквівалентності.

4) У тризначній логіці Поста (для симетричного заперечення) побудувати таблицю істинності для формули $X \vee \neg X$.

5) У тризначній логіці Поста (для циклічного заперечення) побудувати таблицю істинності для формули $X \vee \neg X$.

6) У тризначній логіці Поста (для симетричного заперечення) побудувати таблицю істинності для формули $X \wedge \neg X$.

7) У тризначній логіці Поста (для циклічного заперечення) побудувати таблицю істинності для формули $X \wedge \neg X$.

5.2.3. Формалізувати речення з використанням модальних операторів.

Вказівка. У природній мові висловлювання можуть набувати різні значення істинності в залежності від контексту. При цьому вживаються такі слова, як «можливо», «іноді», «повинно», «необхідно» тощо. Такі слова називаються *модальностями.*

Формальна мова, що використовує поняття "можливо" і "необхідно" в якості кванторів, називається логікою можливого, або *алетічною логікою*.

У модальній логіці на рівні числення висловлювань використовується відома система пропозіціональних зв'язок, але до цих зв'язок додаються модальні оператори □ - *необхідно і* ◊ - *можливо.*

Наприклад, □*F* читається: «необхідно, щоб F" або "F необхідно". Це означає, що *F* необхідно істинно, або істинно у всіх можливих світах.

◊*F* читається: «можливо, що F" або "F можливо". Це означає, що *F* можливо істинно, або істинно в деякому можливому світі.

Тимчасова логіка вводить модальності "іноді" і "завжди" і їх заперечення "часто" і "ніколи" разом з квантифікаторами "минулого" і "в майбутньому". Тимчасові оператори при цьому використовуються наступні:

G - завжди (в майбутньому); *GA* істинно, якщо *A* залишається завжди істинним;

H - завжди (в минулому); *HA* істинно, якщо *A* завжди було істинним;

F - іноді (в майбутньому); *FA* - істинно, якщо *A* іноді буде істинним;

P - іноді (в минулому); *PA* істинно, якщо *A* іноді було істинним;

U - до тих пір, поки; *U (A, B)* істинно, якщо *A* істинно, починаючи з поточного моменту до тих пір, поки *B* не стане істинним в майбутньому.

Всі ці модальності вводяться як оператори.

Приклад.

1. Можливо, що Том виграє в лотерею телевізор:

$$\Diamond\ \text{Виграти (Том, лотерея, телевізор)}\ .$$

2. Неможливо, щоб Сміт в майбутньому завжди у все вигравав:

$$\neg(\Diamond(F\forall y\exists z\text{Виграти (Сміт, } y, z)))\text{.}$$

3. Необхідно, щоб у кожної людини було якесь хобі:

$$\Box\ \forall x\exists y\ \text{МаєХобі }(x,y)\text{.}$$

Завдання.

1) Можливо, що Джон складе іспит на відмінно.

2) Кожний студент мусить вести конспект всіх лекцій.

3) Можливо існувала снігова людина.

4) Неможливо, щоб людині постійно не щастило.

5) Будь-яка людина вірить в можливу удачу.

6) Не можна завжди вигравати.

7) Можливо на Марсі є життя.

8) Можливо в минулому Землю відвідували прибульці.

9) Щоб влаштуватися на престижну роботу, треба мати диплом.

10) Треба займатися якимось видом спорту, щоб запобігти можливим майбутнім хворобам.

ВІДПОВІДІ

1.1.

не є тавтологіями формули у завданні 4 та 15.

1.2.

1) нейтральна;	2) протиріччя;
3) тавтологія;	4) тавтологія;
5) протиріччя;	6) тавтологія;
7) нейтральна;	8) тавтологія;
9) протиріччя;	10) нейтральна.

1.3.

1) , 4), 5) , 6) – система несуперечлива;

2),3)- система суперечлива.

3.1.

1) $\exists y(C(y) \& N(y))$;
2) $\forall y(U(y) \rightarrow \neg C(y))$;
3) $\forall y(K(y) \rightarrow U(y))$;
4) $\exists x(C(x) \& L(y))$;
5) $N(e) \& C(e)$;
6) $\forall x \forall y(L(y) \rightarrow \neg W(x,y))$;
7) $\exists x \forall y(C(y) \rightarrow W(x,y))$;
8) $\forall x(V(x) \rightarrow \forall y(C(y) \rightarrow R(x,y))$;
9) $\forall x(S(x) \rightarrow \forall y(U(y) \rightarrow R(x,y))$;
10) $\forall x(S(x) \rightarrow \forall y(K(y) \rightarrow W(x,y))$;
11) $\exists x(S(x) \& \forall y(W(x,y) \rightarrow H(y))$;

12) $\forall x(S(x) \to \forall y(U(y) \to \neg W(x,y))$;

13) $\exists x((S(x) \vee P(x)) \& \forall y(C(y) \to W(x,y))$;

14) $\exists x \forall y(U(y) \to \neg R(x,y))$;

15) $S(t) \& \forall y(U(y) \to R(x,y))$;

16) $P(d) \& V(d)$;

17) $\forall y(K(x) \to \forall x(S(x) \to W(x,y))$;

18) $\forall x(P(x) \to \exists y(U(y) \& W(x,y)))$;

19) $\forall x(S(x) \to \forall y(L(y) \to \neg W(x,y))$;

20) $\forall x \exists y(C(y) \& R(x,y))$.

3.2.

P	P_1	P_1	P_1	P_1	P_2	P_2	P_2	P_2	P_3	P_3	P_3	P_3	P_4	P_4	P_4	P_4
Q	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
1	при значенні R=F															
	T	F	F	F	T	F	F	F	T	F	F	F	F	F	F	F
2	при значенні R=T															
	F	T	T	T	F	T	T	T	F	T	T	T	T	T	T	T
3	при значенні R=T															
	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	F	F	F	T
4	при значенні R=T															
	T	F	F	F	T	F	F	F	T	F	F	F	T	T	T	T
5	при значенні R=T															
	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	F	T	T	T
6	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
7	при значенні R=F															

	F	F	F	F	T	T	T	F	T	T	T	F	T	T	T	F
8	при значеннях S=F та R=F															
	F	F	F	T	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F
9	T	T	T	T	T	T	T	F	T	T	T	F	T	T	T	T
10	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	F	F	F	T

3.3.

4), 6), 8), 11) - формула не логічно загальнозначуща.

4.1.

9) - логічне слідування не виконується.

4.2.

6) Лулу - не птах; Лулу - або звір, або плазун, або риба.

7) Тіті - не риба; Тіті - або звір, або плазун, або птах.

10) – логічний наслідок виконується з посилок 4 та 5; решта – зайві.

5.2. 1.

1) Закон формулюється таким чином: $A \to \neg\neg A$

а) виконується (тобто є тавтологією);

б) виконується;

2) Закон формулюється таким чином: $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$

а) не виконується

(не є тавтологією; на наборі 1S0 формула дорівнює S);

б) виконується;

3) Закон формулюється таким чином: $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

а) виконується;

б) виконується;

4) Закон формулюється таким чином: (¬A→¬B)→(B→A)

а) виконується;

б) не виконується

(не є тавтологією; на наборі S1 формула дорівнює 0);

5) Закон формулюється таким чином: (A→B)→((A→¬B)→¬A)

а) не виконується

(не є тавтологією; на наборі SS формула дорівнює S);

б) виконується;

6) Один з варіантів закону формулюється таким чином:

¬(A&B)= ¬A∨¬B

а) виконується;

б) виконується.

5.2. 2.

Вказівка: еквівалентність розглядати як (X≡Y)=(X→Y)&(Y→X).

5.2. 3.

1) ◊ СкластиІспит (Джон, відмінно);

2) □ (∀x∀y ПишеКонспект (x,y));

3) ◊ P Існує (снігова людина);

4) ¬◊(∃x ¬ Щастить(x));

5) ◊∃z ∀x Вірить (x, z);

6) ¬◊(G (∀x∀y Виграватиx, y)));

7) ◊ (∃x Проживає(x, Марс));

8) ◊(P (∃x (Прибульці (x) & Відвідувати (Земля, x))));

9) ∀x (□ МаєДиплом(x) → G (∃y (ПрестижРаб(y) & Влаштувався(x,y))));

10) ∀x (□ (H (∃y Займається(x,y))) → F (¬◊ ∃z Хворіє(x, z))).

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Братко И. Программирование на языке Пролог для искусственного интеллекта. - М.: Мир, 1990. - 560 С.
2. Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. –- М.: Наука. 1979.
3. Гиндикин С. Г. Алгебра логики в задачах. – М.: Наука. 1972.
4. Ершов Ю.А., Палютин Е.А. Математическая логика.–М.: Наука, 1979.
5. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию решений. – М.: Мир, 1976. – 160 с.
6. Ин Ц., Соломон Д. Использование Турбо-Пролога.-М: Мир, 1993.-608 С.
7. Клини С. К. Математическая логика. - М.: Мир, 1973.
8. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. – М.: Радио и связь. 1982.
9. Кэррол Л. История с узелками. – М.: Мир. 1973.
10. Лавров И. А., Максимова Л. Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. – М. : Наука, 1975.
11. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. –- М.: Наука, 1976.
12. Нікольський Ю.В., Пасічник В.В., Щербина Ю.М. Дискретна математика. К.: Видавнича група BHV. 2007. 368 с.
13. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. 2ое издание. Учебник для ВУЗов. СПб.: Питер. – 2006. – с.368.
14. Робертс Ф. С. Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам. – М.: Наука, 1986.
15. Столл Р. Множество, логика, аксиоматические теории. – М.: Просвещение, 1968.

16. Таран Т. А. Основы дискретной математики. Учебное пособие. К.: Просвіта. – 1998. – с. 148.
17. Таран Т.А., Мыценко Н.А., Темникова Е.Л. Сборник задач по дискретной математике. 2-ое издание. К.: Инрес. – 2005. – с. 64.
18. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику.–- М.: Наука. 1979.