РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ ХАРАКТЕРИСТИЧНОГО РІВНЯННЯ СИСТЕМИ
(ВИПАДОК ДІЙСНИХ РІЗНИХ І КОМПЛЕКСНИХ КОРЕНІВ)

1) $\begin{cases} \dot{x} = x + z - y \\ \dot{y} = x + y - z \\ \dot{z} = 2x - y \end{cases}$

- Розв'язок будемо шукати у вигляді

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} e^{kt}.$$

Після підстановки його у початкову систему диференціальних рівнянь, отримаємо *однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь* відносно невідомих α_1, α_2, α_3. Однорідна система (при нульових правих частинах) завжди має нульовий розв'язок. Для того, щоб така система мала ненульовий розв'язок необхідно, щоб визначник, утворений з коефіцієнтів при невідомих, дорівнював нулю. Таким чином, приходимо до характеристичного рівняння системи у наступному вигляді.

$$\begin{vmatrix} 1-k & -1 & 1 \\ 1 & 1-k & -1 \\ 2 & -1 & -k \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-k)^2(-k) - (1-k) \underline{-1} - k \underline{+2} - 2(1-k) = 0$$

$$(1-k)(-k(1-k) - 1 + 1 - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad (1-k)(k^2 - k - 2) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad k_1 = 1, \; k^2 - k - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad k_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \quad \Rightarrow \quad k_2 = -1; \; k_3 = 2$$

а) $k = 1$

$$\begin{cases} 0 \cdot \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_2 = \alpha_3 \\ \alpha_1 = \alpha_3 \end{cases}$$

Отримана система має нескінченну множину розв'язків, оскільки корні характеристичного рівняння знаходилися з умови рівності визначника нулю. Тому одна з констант може бути довільною (звичайно її приймають рівною 1). Далі необхідно виразити дві константи через одну з трьох, що входять до системи. При цьому, деякі з констант можуть визначитися однозначно (звичайно вони рівні нулю).

$\alpha_3 = 1; \quad \alpha_2 = 1; \quad \alpha_1 = 1;$ $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}$$

б) $k = -1$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = -3\alpha_1 \\ \alpha_3 = -5\alpha_1 \end{cases}$$

$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = -3, \quad \alpha_3 = -5;$ $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} e^{-t}$$

в) $k = 2$

$$\begin{cases} -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = \alpha_3 \end{cases}$$

$\alpha_3 = 1, \quad \alpha_1 = 1;$ $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

Загальний розв'язок має вигляд:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} e^{-t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

В розгорнутому вигляді:

$$\begin{cases} x = C_1 e^{t} + C_2 e^{-t} + C_3 e^{2\mathrm{t}} \\ y = C_1 e^{t} - 3C_2 e^{-t} \\ z = C_1 e^{t} - 5C_2 e^{-t} + C_3 e^{2\mathrm{t}} \end{cases} \bullet$$

2) $\begin{cases} \dot{x} = 2\mathrm{x} - y + z \\ \dot{y} = x + 2\mathrm{y} - z \\ \dot{z} = x - y + 2\mathrm{z} \end{cases}$

- $\begin{vmatrix} 2-k & -1 & 1 \\ 1 & 2-k & -1 \\ 1 & -1 & 2-k \end{vmatrix} = 0$

$(2-k)^3 \underline{-(2-k)} - 1 \underline{+(2-k)} + 1 - (2-k) = 0$

$(2-k)^3 + k - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (2-k)\left((2-k)^2 - 1\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 2;$

$k^2 - 4\mathrm{k} + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{2,3} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1 \quad \Rightarrow \quad k_2 = 3; \; k_3 = 1;$

а) $k_1 = 2$

$\begin{cases} 0 \cdot \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 0 \cdot \alpha_3 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_2 = \alpha_3 \\ \alpha_1 = \alpha_3 \end{cases}$

$\alpha_3 = 1, \; \alpha_2 = \alpha_1 = 1; \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$

б) $k_2 = 3$

$\begin{cases} -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = \alpha_3 \end{cases}$

$\alpha_3 = 1, \; \alpha_1 = 1; \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t};$

в) $k_2 = 1$

$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = \alpha_3 \end{cases}$

$\alpha_2 = \alpha_3 = 1; \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t};$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t},$$

$$\begin{cases} x = C_1 e^{2\mathrm{t}} + C_2 e^{3\mathrm{t}} \\ y = C_1 e^{2\mathrm{t}} + C_3 e^{t} \\ z = C_1 e^{2\mathrm{t}} + C_2 e^{3\mathrm{t}} + C_3 e^{t} \end{cases} \quad \bullet$$

3) $\begin{cases} \dot{x} = 2\mathrm{x} + y \\ \dot{y} = x + 3\mathrm{y} - z \\ \dot{z} = -x + 2y + 3\mathrm{z} \end{cases}$

• $\begin{vmatrix} 2-k & 1 & 0 \\ 1 & 3-k & -1 \\ -1 & 2 & 3-k \end{vmatrix} = 0$

$(2-k)(3-k)^2 + 4 - 2k - 3 + k + 1 = 0 \quad \Rightarrow$

$(2-k)(3-k)^2 + 2 - k = 0 \quad \Rightarrow \quad (2-k)\left(9 - 6k + k^2 + 1\right) = 0 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad k_1 = 2, \quad k^2 - 6\mathrm{k} + 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{2,3} = 3 \pm \sqrt{9-10} = 3 \pm i;$

а) $k_1 = 2$

$$\begin{cases} 0 \cdot \alpha_1 + \alpha_2 + 0 \cdot \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = \alpha_3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

б) $k = 3 - i$ (досить взяти один корінь з пари комплексно-спряжених коренів)

$$\begin{cases} (-1+i)\alpha_1 + \alpha_2 + 0 \cdot \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + i\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 + i\alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = (1-i)\alpha_1 \\ \alpha_1 + (i+1)\alpha_1 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_3 = (2+i)\alpha_1 \end{cases}$$

$\alpha_1 = 1, \ \alpha_2 = 1 - i, \ \alpha_3 = 2 + i.$

Зауваження. При претвореннях з комплексними коренями слід скористатися формулою Ейлера:

$$\boxed{e^{(\alpha\pm\beta i)t}=e^{\alpha t}(\cos\beta t\pm i\sin\beta t)}$$

$$\bar{Y}=\begin{pmatrix}1\\1-i\\2+i\end{pmatrix}e^{(3-i)t}=\begin{pmatrix}1\\1-i\\2+i\end{pmatrix}e^{3t}(\cos t-i\sin t).$$

Виділимо дійсну і уявну частини у векторі $\bar{Y}$:

$$\mathrm{Re}\,\bar{Y}=\begin{pmatrix}\cos t\\\cos t-\sin t\\2\cos t+\sin t\end{pmatrix}e^{3t};\qquad \mathrm{Im}\,\bar{Y}=\begin{pmatrix}-\sin t\\-\cos t-\sin t\\\cos t-2\sin t\end{pmatrix}e^{3t}.$$

Зауваження. Re – лат. realis; Im – лат. imaginarius.

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}e^{2t}+C_2\begin{pmatrix}\cos t\\\cos t-\sin t\\2\cos t+\sin t\end{pmatrix}e^{3t}+C_3\begin{pmatrix}-\sin t\\-\cos t-\sin t\\\cos t-2\sin t\end{pmatrix}e^{3t}.\ \bullet$$

4) $\begin{cases}\dot{x}=\mathrm{x}-y-z\\\dot{y}=x+\mathrm{y}\\\dot{z}=3x+\mathrm{z}\end{cases}$

$$\bullet\ \begin{vmatrix}1-k&-1&-1\\1&1-k&0\\3&0&1-k\end{vmatrix}=0$$

$$(1-k)^3+1-k+3(1-k)=0\ \Rightarrow\ (1-k)\left(1-2k+k^2+1+3\right)=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ k_1=1,\quad k^2-2\mathrm{k}+5=0\ \Rightarrow\ k_{2,3}=1\pm\sqrt{1-5}=1\pm 2i;$$

а) $k_1=1$

$$\begin{cases}0\cdot\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3=0\\\alpha_1+0\cdot\alpha_2+0\cdot\alpha_3=0\\3\alpha_1+0\cdot\alpha_2+0\cdot\alpha_3=0\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{cases}\alpha_1=0\\\alpha_2=-\alpha_3\end{cases}\qquad\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}e^t$$

б) $k = 1 - 2i$

$$\begin{cases} 2i\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2i\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 + 2i\alpha_3 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1 = -2i\alpha_2 \;\Rightarrow\; \alpha_2 = -\dfrac{\alpha_1}{2i} \\ \alpha_3 = -\dfrac{3\alpha_1}{2i} \end{cases}$$

$\alpha_1 = 2i, \;\; \alpha_2 = -1, \;\; \alpha_3 = -3.$

$$\overline{Y} = \begin{pmatrix} 2i \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{(1-2i)t} = \begin{pmatrix} 2i \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} e^t (\cos 2t - i \sin 2t).$$

$$\operatorname{Re}\overline{Y} = \begin{pmatrix} 2\sin 2t \\ -\cos 2t \\ -3\cos 2t \end{pmatrix} e^t; \qquad \operatorname{Im}\overline{Y} = \begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ \sin 2t \\ 3\sin 2t \end{pmatrix} e^t.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 2\sin 2t \\ -\cos 2t \\ -3\cos 2t \end{pmatrix} e^t + C_3 \begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ \sin 2t \\ 3\sin 2t \end{pmatrix} e^t. \;\bullet$$

Домашнє завдання.

1) $\begin{cases} \dot{x} = 3\mathrm{x} - y + z \\ \dot{y} = x + y + z \\ \dot{z} = 4x - y + 4z \end{cases}$ $\quad (1;\; 2;\; 5)$

2) $\begin{cases} \dot{x} = 2\mathrm{x} - y + 2z \\ \dot{y} = x + 2z \\ \dot{z} = y - 2x - z \end{cases}$ $\quad (1;\; \pm i)$