РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ ХАРАКТЕРИСТИЧНОГО РІВНЯННЯ СИСТЕМИ
(ВИПАДОК КРАТНИХ КОРЕНІВ)

1) $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y - z \\ \dot{y} = x + 2y - z \\ \dot{z} = \mathrm{x} - y + 2z \end{cases}$

- $\begin{vmatrix} 4-k & -1 & -1 \\ 1 & 2-k & -1 \\ 1 & -1 & 2-k \end{vmatrix}. = 0$

$(2-k)^2(4-k) - (4-k) + 1\underline{+2-k} + 1\underline{+2-k} = 0 \qquad \Rightarrow$

$\Rightarrow \qquad (2-k)^2(4-k) - (2-k) + 2(2-k) = 0 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \qquad (2-k)\left(8 - 2k - 4k + k^2 - 1 + 2\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad k_1 = 2,$

$k^2 - 6k + 9 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad k_{2,3} = 3 \pm \sqrt{9\text{-}9} = 3$ – кратності 2.

а) $k = 2$

$\begin{cases} 2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 0\cdot\alpha_3 = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \alpha_3 = \alpha_1 \\ \alpha_2 = \alpha_1 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$

б) $k = 3$ – кратності 2.

Розв'язок будемо шукати у вигляді:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 t \\ \alpha_2 + \beta_2 t \\ \alpha_3 + \beta_3 t \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Підставляючи розв'язок у початкову систему диференціальних рівнянь, будемо мати:

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} e^{3t} + 3\begin{pmatrix} \alpha_1+\beta_1 t \\ \alpha_2+\beta_2 t \\ \alpha_3+\beta_3 t \end{pmatrix} e^{3t} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1+\beta_1 t \\ \alpha_2+\beta_2 t \\ \alpha_3+\beta_3 t \end{pmatrix} e^{3t}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових функціях в кожному рядку, отримаємо:

$$\beta_1 + 3\alpha_1 = 4\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 \qquad (1)$$

$$3\beta_1 = 4\beta_1 - \beta_2 - \beta_3 \qquad (2)$$

$$\beta_2 + 3\alpha_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 \qquad (3)$$

$$3\beta_2 = \beta_1 + 2\beta_2 - \beta_3 \qquad (4)$$

$$\beta_3 + 3\alpha_3 = \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 \qquad (5)$$

$$3\beta_3 = \beta_1 - \beta_2 + 2\beta_3 \qquad (6)$$

Отримали лінійно-залежну систему шести алгебраїчних рівнянь з шістью невідомими. У загальному розв'язку початкової системи диференціальних рівнянь повинно міститися рівно три довільні константи. Одна из констант C_1 буде відповідати однократному кореню $k=2$, дві інші – кореню $k=3$ – кратності 2. Таким чином, виникає наступна задача: виразити чотири невідомі через довільні дві, які і приймаються потім за C_2 і C_3. При цьому, деякі константи можуть визначитися однозначно (звичайно вони виходять рівними нулю).

(2), (4), (6) $\Rightarrow \beta_1 = \beta_2 + \beta_3$

(1) $\Rightarrow \beta_1 = \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3$

(3) $\Rightarrow \beta_2 = \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 \qquad \Rightarrow \qquad \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0; \qquad \alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3$

(5) $\Rightarrow \beta_3 = \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3$

Тоді $\overline{Y} = \begin{pmatrix} C_2 + C_3 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} e^{3t}$.

Остаточно, загальний розв'язок має вигляд:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} C_2 + C_3 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} e^{3t}. \bullet$$

2) $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3z \\ \dot{z} = -x + y + 2z \end{cases}$

$\bullet$ $\begin{vmatrix} 2-k & -1 & -1 \\ 3 & -2-k & -3 \\ -1 & 1 & 2-k \end{vmatrix} = 0$

$(2-k)^2(-2-k)\underline{+3(2-k)}-3\underline{+3(2-k)}-3+2+k=0 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad (2-k)^2(-2-k)+6(2-k)-4+k=0 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad (2-k)^2(-2-k)+8-5k=0 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad (-2-k)(4-4k+k^2)+8-5k=0 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad -8+8k-2k^2-4k+4k^2-k^3+8-5k=0 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad -k^3++2k^2-k=0 \quad \Rightarrow \quad -k(k^2-2k+1)=0 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad k_1=0,\ k_{2,3}=1\pm\sqrt{1-1}=1$ – кратності 2.

а) $k=0$

$\begin{cases} 2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3=0 \\ 3\alpha_1-2\alpha_2-3\alpha_3=0 \\ -\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1=-\alpha_3 \\ \alpha_2=-3\alpha_3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

б) $k=1$ – кратності 2.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1+\beta_1 t \\ \alpha_2+\beta_2 t \\ \alpha_3+\beta_3 t \end{pmatrix} e^t .$$

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} \alpha_1+\beta_1 t \\ \alpha_2+\beta_2 t \\ \alpha_3+\beta_3 t \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1+\beta_1 t \\ \alpha_2+\beta_2 t \\ \alpha_3+\beta_3 t \end{pmatrix} e^t$$

$$\beta_1+\alpha_1=2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3 \qquad (1)$$

$$\beta_1=2\beta_1-\beta_2-\beta_3 \qquad (2)$$

$$\beta_2+\alpha_2=3\alpha_1-2\alpha_2-3\alpha_3 \qquad (3)$$

$$\beta_2=3\beta_1-2\beta_2-3\beta_3 \qquad (4)$$

$$\beta_3+\alpha_3=-\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3 \qquad (5)$$

$$\beta_3=-\beta_1+\beta_2+2\beta_3 \qquad (6)$$

(2), (4), (6) $\Rightarrow \quad \beta_1=\beta_2+\beta_3$

(1) $\Rightarrow \quad \beta_1=\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$

(3) $\Rightarrow \quad \beta_2=3\alpha_1-3\alpha_2-3\alpha_3 \qquad \Rightarrow$

(5) $\Rightarrow \quad \beta_3=-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

$$\Rightarrow \quad \begin{matrix} \beta_2=3\beta_1 \\ \beta_3=-\beta_1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \beta_1=3\beta_1-\beta_1 \;\Rightarrow\; \beta_1=0 \\ \beta_2=0,\;\; \beta_3=0 \\ \alpha_1=\alpha_2+\alpha_3 \end{matrix}$$

$$\overline{Y}=\begin{pmatrix} C_2+C_3 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} e^t . \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_2+C_3 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} e^t . \ \bullet$$

3) $\begin{cases} \dot{x}=2x+y+z \\ \dot{y}=2y+4z \\ \dot{z}=2z \end{cases}$

• $\begin{vmatrix} 2-k & 1 & 1 \\ 0 & 2-k & 4 \\ 0 & 0 & 2-k \end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad (2-k)^3=0 \quad \Rightarrow \quad k=2$ – кратності 3.

Розв’язок будемо шукати у вигляді:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1+\beta_1 t+\gamma_1 t^2 \\ \alpha_2+\beta_2 t+\gamma_2 t^2 \\ \alpha_3+\beta_3 t+\gamma_3 t^2 \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$\begin{pmatrix} \beta_1+2\gamma_1 t \\ \beta_2+2\gamma_2 t \\ \beta_3+2\gamma_3 t \end{pmatrix} e^{2t} + 2\begin{pmatrix} \alpha_1+\beta_1 t+\gamma_1 t^2 \\ \alpha_2+\beta_2 t+\gamma_2 t^2 \\ \alpha_3+\beta_3 t+\gamma_3 t^2 \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1+\beta_1 t+\gamma_1 t^2 \\ \alpha_2+\beta_2 t+\gamma_2 t^2 \\ \alpha_3+\beta_3 t+\gamma_3 t^2 \end{pmatrix} e^{2t}$$

$\beta_1+2\alpha_1=2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ (1)

$2\gamma_1+2\beta_1=2\beta_1+\beta_2+\beta_3$ (2)

$2\gamma_1=2\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3$ (3)

$\beta_2+2\alpha_2=2\alpha_2+4\alpha_3$ (4)

$2\gamma_2+2\beta_2=2\beta_2+4\beta_3$ (5)

$2\gamma_2=2\gamma_2+4\gamma_3$ (6)

$\beta_3+2\alpha_3=2\alpha_3$ (7)

$2\gamma_3 + 2\beta_3 = 2\beta_3$ (8)

$2\gamma_3 = 2\gamma_3$ (9)

Отримали лінійно-залежну систему дев’яти алгебраїчних рівнянь з дев’ятю невідомими. Необхідно виразити шість невідомих через довільні три, які і приймаються потім за C_1, C_2, C_3.

$$\left.\begin{array}{l} (3) \Rightarrow \gamma_2 + \gamma_3 = 0 \\ (6) \Rightarrow \gamma_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \gamma_2 = 0 \\ \gamma_3 = 0 \end{array}$$

$(2) \Rightarrow 2\gamma_1 = \beta_2 + \beta_3$

$(5) \Rightarrow 2\gamma_2 = 4\beta_3$

$$(8) \Rightarrow 2\gamma_3 = 0 \qquad \begin{cases} 2\gamma_1 = \beta_2 + \beta_3 \\ \gamma_2 = 0 \\ \gamma_3 = 0 \\ \beta_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2\gamma_1 = \beta_2$$

$(1) \Rightarrow \beta_1 = \alpha_2 + \alpha_3$

$(4) \Rightarrow \beta_2 = 4\alpha_3$

$$(7) \Rightarrow \beta_3 = 0 \qquad \begin{cases} \beta_1 = \alpha_2 + \alpha_3 \\ \beta_2 = 4\alpha_3 \\ \gamma_1 = 2\alpha_3 \end{cases}$$

$$\alpha_1 = C_1; \quad \alpha_2 = C_2; \quad \alpha_3 = C_3;$$

$$\beta_1 = C_2 + C_3; \quad \beta_2 = 4C_3; \quad \beta_3 = 0;$$

$$\gamma_1 = 2C_3; \quad \gamma_2 = 0; \quad \gamma_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + (C_2 + C_3)t + 2C_3 t^2 \\ C_2 + 4C_3 t \\ C_3 \end{pmatrix} e^{2t}. \quad \bullet$$

Домашнє завдання.

1) $\begin{cases} \dot{x} = -2x + y - 2z \\ \dot{y} = x - 2y + 2z \\ \dot{z} = 3x - 3y + 5z \end{cases}$ $\left(3;\ -1 - \textit{кратности}\ \ 2\right)$

2) $\begin{cases} \dot{x} = x - y - z \\ \dot{y} = x + y \\ \dot{z} = -x + z \end{cases}$ $\left(1 - \textit{кратности}\ \ 3\right)$