ПРАКТИЧНА РОБОТА №5

Тема: Рішення логічних задач засобами алгебри логіки

Мета: Ознайомитись з функціями по роботі з матрицям та їх застосуванням при рішенні логічних задач

5.1 Теоретичні відомості

<u>Загальні відомості про матриці</u>

Значна частина математичних моделей різних об'єктів і процесів записується в досить простій і компактній матричній формі. Зокрема, при рішенні лінійних рівнянь ми маємо справу з матрицями і арифметичними діями з ними.

Матрицею розмірністю $m \times n$ називається прямокутна таблиця чисел, що містить m рядків і n стовпців. Матриці позначаються прописними (заголовними) буквами латинського алфавіту. Числа, що становлять матрицю, називаються елементами матриці і позначаються рядковими буквами з подвійною індексацією: a_{ij}, де i - номер рядка, а j - номер стовпця. Наприклад, матриця A розміром $m \times n$ може бути представлена у виді:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}),$$

де i=1,..., m; j=1,..., n.

Дві матриці A і B одного розміру називаються рівними, якщо вони співпадають поелементно, тобто $a_{ij}=b_{ij}$ для будь-яких i=1,2, ..., m; j=1, 2, ..., n.

Матриця, що складається з одного рядка, називається матрицею (вектором) - рядком:

$$A = (a_{11}, a_{12}, \dots a_{1n}),$$

а з одного стовпця - матрицею (вектором) - стовпцем:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{m1} \end{pmatrix}.$$

Якщо число рядків матриці дорівнює числу стовпців і рівне n, то таку матрицю називають квадратною n-го порядку. Наприклад, квадратна матриця 2-го порядку :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Якщо у елементу матриці a_{ij} номер стовпця дорівнює номеру рядка ($i=j$), то такий елемент називається діагональним. Діагональні елементи утворюють головну діагональ матриці.

Квадратна матриця з рівними нулю усіх недіагональних елементів називається діагональній.

Квадратна матриця називається одиничною, якщо вона діагональна, і усі діагональні елементи дорівнюють одиниці. Одинична матриця має вигляд:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Операції з матрицями

Як і над числами, над матрицями можна проводити ряд операцій, причому у випадку з матрицями деякі з операцій є специфічними.

Транспонування

Транспонованою називається матриця (A^T), у якій стовпці початкової матриці (A) замінюються рядками з відповідними номерами.

Для позначення транспонованої матриці іноді використовують символ ' (A'). Транспонуванням називається операція переходу від початкової матриці (A) до транспонованої (A^T).

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 11 \\ 18 & 19 & 39 \\ -5 & 91 & 87 \end{pmatrix}; \quad A^T = \begin{pmatrix} 3 & 18 & -5 \\ -7 & 19 & 91 \\ 11 & 39 & 87 \end{pmatrix}.$$

З визначення транспонованої матриці виходить, що якщо початкова матриця A має розмір $m \times n$, то транспонована матриця A^T має розмір $n \times m$.

Для здійснення транспонування в **MS Excel** використовується функція "***ТРАНСП***", яка дозволяє поміняти орієнтацію масиву на робочому листі з вертикальною на горизонтальну і навпаки.

Функція має вигляд "***ТРАНСП (масив)*** "**.** Тут **(*масив*)** - це масив, що транспонується, або діапазон осередків на робочому листі. Транспонування масиву полягає в тому, що перший рядок масиву стає першим стовпцем нового масиву, другий рядок масиву стає другим стовпцем нового масиву і т. д.

Обчислення визначника матриці

Важливою характеристикою квадратних матриць є їх визначник. Визначник матриці - це число, що обчислюється на основі значень елементів масиву. Визначник матриці A позначається як $|A|$ або Δ.

Визначником матриці першого порядку A, або визначником першого порядку, називається елемент a_{11}.

$$\Delta_1 = |A| = a_{11}$$

Визначником матриці другого порядку А, або визначником другого порядку, називається число, яке обчислюється за формулою:

$$\Delta_2 = |A| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

У **MS Excel** для обчислення визначника квадратної матриці використовується функція "***МОПРЕД***". Функція має вигляд

“***МОПРЕД(масив)*** **”.** Тут ***(масив)*** - це числовий масив, в якому зберігається матриця з рівною кількістю рядків і стовпців. При цьому масив може бути заданий як інтервал осередків, наприклад, A1:C3; чи як масив констант, наприклад, {1;2;3;4;5;6;7;8;9}.

Знаходження зворотної матриці

Для кожного числа $a\neq 0$ існує зворотнє число a^{-1}, і для квадратних матриць вводиться аналогічне поняття. Зворотні матриці зазвичай використовуються для вирішення систем рівнянь з декількома невідомими.

Матриця A^{-1} називається зворотною по відношенню до квадратної матриці A, якщо при множенні цієї матриці на дану як ліворуч, так і праворуч виходить одинична матриця:

$$A\times A^{-1}=A^{-1}\times A=E.$$

Як випливає з визначення, зворотна матриця є квадратною того ж порядку, що і початкова матриця.

Існують спеціальні досить складні алгоритми для ручного обчислення зворотних матриць. У **MS Excel** для знаходження зворотної матриці використовується функція “***МОБР***”, яка обчислює зворотну матрицю для матриці, що зберігається в таблиці у вигляді масиву.

Складання і віднімання матриць

Складати (віднімати) можна матриці одного розміру. Сумою матриць $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$ розміру $m\times n$ називається *матриця* $C = A + B$, елементи якої $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для $i = 1,2,..., m$; $j = 1,2,..., n$ (тобто матриця складається поелементно). Наприклад, якщо:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 7\\ 9 & -1 & 13\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}0 & -4 & -3\\ 5 & 19 & 31\end{pmatrix},$$

то $$C=\begin{pmatrix}1+0 & 2-4 & 7-3\\ 9+5 & -1+19 & 13+31\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\ 14 & 18 & 44\end{pmatrix}.$$

Аналогічно визначають різницю двох матриць $C = A - B$.

У **MS Excel** для виконання операцій підсумовування і віднімання матриць можуть бути використані формули, що вводяться у відповідні осередки.

Множення матриці на число

Добутком матриці A на число k називається матриця $B = kA$, елементи якої $b_{ij} = ka_{ij}$ для $i = 1,2,..., m$; $j = 1,2,..., n$. Інакше кажучи, при множенні матриці на постійну величину кожен елемент цієї матриці множиться на цю величину:

$$k\cdot A_{ij} = (k\cdot a_{ij}).$$

Множення матриць

Добуток матриць визначений, якщо число стовпців першої матриці дорівнює числу рядків другою.

Нехай $A = (a_{ij})$ $m\times n$, $B = (b_{ij})$ $n\times p$, тоді розмірність добутку $A\times B$

дорівнює $m \times p$. При цьому матриця C називається добутком матриць A і B, якщо кожен її елемент c_{ij} дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} {}_{ik}b_{kj}, \quad i = 1,2,\ldots,m; \quad j = 1,2,\ldots,n.$$

Таким чином, перемножування матриць здійснюється за наступним правилом:

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1стр \cdot 1стб & 1стр \cdot 2стб & \ldots & 1стр \cdot pстб \\ 2стр \cdot 1стб & 2стр \cdot 2стб & \ldots & 2стр \cdot pстб \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ mстр \cdot 1стб & mстр \cdot 2стб & \ldots & mстр \cdot pстб \end{pmatrix}.$$

Наприклад

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 10 & 0 \\ 12 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 10 + 2 \cdot 12 & 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 10 - 1 \cdot 12 & 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 - 1 \cdot 10 + 2 \cdot 12 & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 - 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 71 & 7 \\ -5 & 14 \\ 16 & -1 \end{pmatrix}.$$

Багато властивостей, властивих операціям над числами, справедливі і для операцій множення матриць.

В алгебрі матриць немає дії ділення. Вираз A/B не має сенсу. Його замінюють два різні вирази $B^{-1} \times A$ і $A \times B^{-1}$, якщо існує B^{-1}.

Для квадратних матриць можлива операція піднесення до степеня. Після визначення. вважають, що $A^0 = E$ і $A^1 = A$. Цілим позитивним ступенем $A^m (m > 1)$ квадратною матрицею A називається добутком m матриць, рівних A, тобто, :

$$A^m = A \cdot A \cdot \ldots \cdot A \quad \text{m разів.}$$

Для знаходження добутку двох матриць в **Excel** використовується функція "***МУМНОЖ***", яка обчислює добуток матриць.

<u>Рішення системи рівнянь у MS Excel</u>

Рішення системи рівнянь за допомогою знаходження зворотної матриці. Нехай дана лінійна система рівнянь.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Цю систему рівнянь можна представити в матричній формі:

$$A \times X = B,$$

де:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Матриця невідомих обчислюється за формулою $X=A^{-1}B$.

5.2 Порядок виконання роботи

При виконанні лабораторної роботи дотримуйтесь рекомендованого порядку:

- ознайомтесь з матеріалом , який наведено у підрозділі 3.1;
- отримайте від викладача варіант завдання;
- створіть новий проект в Microsoft Office Excel 2003;
- виконайте завдання згідно варіанту та прикладу, що наведений у підрозділі 3.3. Варіанти завдань наведено у підрозділі 3.5;
- оформіть звіт.

5.3 Приклад виконання завдання

Завдання.Рішити систему рівнянь, а також провести транспонування і обчислення визначника матриці.

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4=5 \\ 4x_1+5x_2+2x_3+7x_4=2 \\ 3x_1+5x_2+6x_3+4x_4=7 \\ 2x_1+6x_2+7x_3+5x_4=2 \end{cases}$$

1) Вводимо значення елементів матриць *A* і *B* рівняння у комірки рисунок 5.1.

2) Виділяємо блок комірок під зворотню матрицю.

3) Викликаємо діалогове вікно “***Мастер функций***” і в робочому полі “***Категория***” обираємо “***Математические***”, а в робочому полі “***Функция***”– ім'я функції “***МОБР***”. Після цього клацаємо по кнопці **ОК**.

4) Вводимо діапазон початкової матриці у робоче поле (“***Массив***”) і натискаємо кнопку **ОК** .

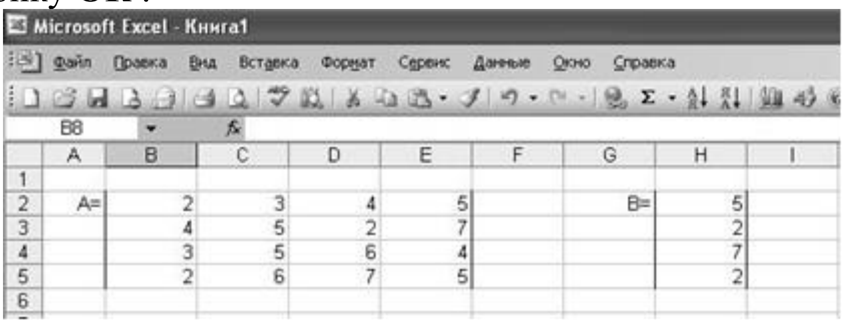

Рисунок 5.1 – Функція в табличному вигляді

5) Потім натискуємо поєднання клавіш **Ctrl+Shift+Enter**. Зворотна матриця готова.

6) Перемножуємо зворотну матрицю A^{-1} на матрицю B за допомогою матричної функції “***МУМНОЖ***” (порядок множення важливий - першою повинна йти матриця A^{-1}, а другою - B). Отриманий вектор-стовпець X є результатом рішення системи рівнянь.

7) Транспонування матриці A. Для цього виділяємо блок комірок під транспоновану матрицю.

8) Запускаємо “**Мастер функцій**” і в робочому полі “**Категория**” выбераем “**Ссылки и массивы**”, а в робочому полі “**Функция**” - ім'я функції ***ТРАНСП***, після цього клацаємо на кнопці ОК.

9) Після появи діалогового вікна ***ТРАНСП*** виділяємо матрицю і тиснемо **Enter**. Після цього натискаємо поєднання клавіш **Ctrl+Shift+Enter**.

10) Обчислимо визначник матриці A^{-1}. Для цього вибираємо комірку під визначник Δ. Запускаємо “**Мастер функцій**” і в робочому полі “**Категория**” обираємо “**Математические**”, а в робочому полі “**Функция**” - ім'я функції ***МОПРЕД***.

11) Після появи діалогового вікна ***МОПРЕД*** виділяємо матрицю і тиснемо **Enter**. Готовий приклад показана на рис. 5.2 .

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	A=	2	3	4	5		B=	5
3		4	5	2	7			2
4		3	5	6	4			7
5		2	6	7	5			2
6								
7	A-1=	0,010417	0,03125	0,6875	-0,60417		X=	3,71875
8		-0,59375	0,21875	-0,1875	0,4375			-2,96875
9		0,260417	-0,21875	0,1875	-0,10417			1,96875
10		0,34375	0,03125	-0,3125	0,0625			-0,28125
11								
12	A'=	2	4	3	2		Δ=	96
13		3	5	5	6			
14		4	2	6	7			
15		5	7	4	5			

Рисунок 5.2 – Зображення готового завдання.

5.4 Зміст звіту

Звіт з лабораторної роботи повинен містити:

- мету роботи;
- завдання на виконання роботи;
- результати виконаної роботи ;
- висновки.

5.5 Завдання на практичну роботу

Вирішити систему рівнянь, провести транспонування і обчислення визначника матриці. Варіанти завдань наведено в табл.5.1.

Таблиця 5.1 –Варіанти завдань:

Вар-т	Завдання	Вар-т	Завдання
1	*2*	*3*	*4*
1	$\begin{cases} 27x_1+3{,}3x_2+1{,}3x_3=21 \\ 3{,}5x_1-17x_2+2{,}8x_3=17 \\ 4{,}1x_1+5{,}8x_2-17x_3=8 \end{cases}$	2	$\begin{cases} 17x_1+2{,}8x_2+1{,}9x_3=7 \\ 2{,}1x_1+34x_2+1{,}8x_3=11 \\ 4{,}2x_1-1{,}7x_2+13x_3=28 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 31x_1+2{,}8x_2+1{,}9x_3=2 \\ 1{,}9x_1+31x_2+2{,}1x_3=21 \\ 7{,}5x_1+3{,}8x_2+48x_3=56 \end{cases}$	4	$\begin{cases} 91x_1+5{,}6x_2+7{,}8x_3=98 \\ 3{,}8x_1+51x_2+2{,}8x_3=67 \\ 4{,}1x_1+5{,}7x_2+12x_3=58 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 33x_1+2{,}1x_2+2{,}8x_3=8 \\ 4{,}1x_1+37x_2+4{,}8x_3=57 \\ 2{,}7x_1+1{,}8x_2+11x_3=32 \end{cases}$	6	$\begin{cases} 76x_1+5{,}6x_2+4{,}7x_3=101 \\ 3{,}8x_1+41x_2+2{,}7x_3=97 \\ 2{,}9x_1+2{,}1x_2+38x_3=78 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 32x_1-2{,}5x_2+3{,}7x_3=65 \\ 0{,}5x_1+34x_2+1{,}7x_3=-2{,}4 \\ 1{,}6x_1+2{,}3x_2-15x_3=43 \end{cases}$	8	$\begin{cases} 54x_1-2{,}3x_2+3{,}4x_3=-35 \\ 3{,}4x_1+17x_2+2{,}3x_3=27 \\ 3{,}4x_1+2{,}4x_2+74x_3=19 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 36x_1+1{,}8x_2-4{,}7x_3=38 \\ 2{,}7x_1-36x_2+1{,}9x_3=4 \\ 1{,}5x_1+4{,}5x_2+33x_3=-16 \end{cases}$	10	$\begin{cases} 56x_1+2{,}7x_2-1{,}7x_3=19 \\ 3{,}4x_1-36x_2-6{,}7x_3=-24 \\ 0{,}8x_1+1{,}3x_2+37x_3=12 \end{cases}$
11	$\begin{cases} 27x_1+0{,}9x_2-1{,}5x_3=35 \\ 4{,}5x_1-28x_2+6{,}7x_3=26 \\ 5{,}1x_1+3{,}7x_2-14x_3=-14 \end{cases}$	12	$\begin{cases} 45x_1-3{,}5x_2+7{,}4x_3=25 \\ 3{,}1x_1-6x_2-2{,}3x_3=-15 \\ 0{,}8x_1+7{,}4x_2-5x_3=64 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 38x_1+6{,}7x_2-1{,}2x_3=52 \\ 6{,}4x_1+13x_2-2{,}7x_3=38 \\ 2{,}4x_1-4{,}5x_2+35x_3=-6 \end{cases}$	14	$\begin{cases} 54x_1-6{,}2x_2-0{,}5x_3=5{,}2 \\ 3{,}4x_1+23x_2+0{,}8x_3=-8 \\ 2{,}4x_1-1{,}1x_2+38x_3=18 \end{cases}$
15	$\begin{cases} 78x_1+5.3x_2+4.8x_3=18 \\ 3{,}3x_1+11x_2+1{,}8x_3=23 \\ 4{,}5x_1+3{,}3x_2+28x_3=34 \end{cases}$	16	$\begin{cases} 38x_1+4{,}1x_2-2{,}3x_3=48 \\ -2{,}1x_1+39x_2-5{,}8x_3=33 \\ 1{,}8x_1+1{,}1x_2-21x_3=58 \end{cases}$
17	$\begin{cases} 17x_1-2{,}2x_2+30x_3=18 \\ 2{,}1x_1+19x_2-2{,}3x_3=28 \\ 4{,}2x_1+3{,}9x_2-31x_3=51 \end{cases}$	18	$\begin{cases} 28x_1+3{,}8x_2-32x_3=45 \\ 2{,}5x_1-2{,}8x_2+3{,}3x_3=71 \\ 6{,}5x_1-7{,}1x_2+48x_3=63 \end{cases}$
19	$\begin{cases} 33x_1+3{,}7x_2+4{,}2x_3=58 \\ 2{,}7x_1+23x_2-2{,}9x_3=61 \\ 4{,}1x_1+4{,}8x_2-50x_3=70 \end{cases}$	20	$\begin{cases} 71x_1+6{,}8x_2+6{,}1x_3=70 \\ 5x_1+48x_2+5{,}3x_3=61 \\ 8{,}2x_1+7{,}8x_2+71x_3=58 \end{cases}$

5.6 Контрольні питання

1. Що таке матриця? Види матриць. Розмірність матриць.
2. Методика рішення системи рівнянь у **MS Excel.**
3. Що таке зворотня матриця? Як її обчислити у **MS Excel**?