Задачи по линейной алгебре[1]

А. А. Гайфуллин, А. В. Пенской, С. В. Смирнов

Компиляция: 3 апреля 2012 г.

Оглавление

Глава 1

Линейные пространства

1.1 Определение линейного пространства

Задача 1. *В каких из следующих случаев указанные операции на множестве X определены и задают структуру линейного пространства над полем $\mathbb{K}$:*

1. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, X — *полуплоскость $x \geqslant 0$, операции сложения и умножения на числа стандартные (т.е. покоординатные);*
2. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, X — *множество векторов в трехмерном пространстве, выходящих из начала координат, концы которых лежат на заданной плоскости; операции стандартные;*
3. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, X — *множество векторов на плоскости, все координаты которых по модулю не превосходят единицы; операции стандартные;*
4. $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $X = \mathbb{R}$; *операции стандартные;*
5. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $X = (0, +\infty)$, *операции сложения $\hat{+}$ и умножения на числа $\hat{\cdot}$ заданы формулами*
$$u \hat{+} v = uv, \quad \lambda \hat{\cdot} u = u^{\lambda}; \tag{1.1}$$
6. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, X — *множество ненулевых комплексных чисел; операции стандартные;*
7. $\mathbb{K}$ *произвольное,* X — *множество многочленов над $\mathbb{K}$ степени n, где $n \in \mathbb{N}$ — некоторое фиксированное число; операции стандартные;*
8. $\mathbb{K}$ *произвольное,* X — *множество многочленов над $\mathbb{K}$ степени не выше некоторого фиксированного $n \in \mathbb{N}$; операции стандартные;*
9. $\mathbb{K}$ *произвольное,* X — *множество всех многочленов над $\mathbb{K}$; операции стандартные;*
10. $\mathbb{K}$ *произвольное,* X — *множество всех матриц с элементами из $\mathbb{K}$ размера $n \times m$; операции стандартные;*
11. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, X — *множество всех непрерывных функций на некотором отрезке; операции стандартные;*
12. $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $X = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}$, *операции стандартные?*

Решение.

1. Полуплоскость X не является линейным пространством относительно стандартных операций, поскольку не является даже абелевой группой по сложению: если ненулевой вектор v, не лежащий на оси ординат, содержится в X, то вектор противоположный ему вектор $-v$ не содержится в X.

2. Если плоскость X не проходит через начало координат, то она не содержит начала координат, которое является тривиальным элементом относительно покоординатно определённого сложения, и потому не является линейным пространством. Пусть теперь плоскость X проходит через начало координат; тогда она задаётся уравнением вида
$$Ax + By + Cz = 0, \tag{1.2}$$
где коэффициенты A, B и C одновременно не обращаются в нуль. Если точка $P = (x_0, y_0, z_0)$ удовлетворяет уравнению (1.2), то и обратная ей относительно сложения точка $(-x_0, -y_0, -z_0)$ тоже удовлетворяет уравнению (1.2). В силу линейности сумма любых двух решений этого уравнения тоже является его решением. Ассоциативность и коммутативность сложения вытекают из ассоциативности и коммутативности сложения действительных чисел. Поэтому X является абелевой группой относительно покоординатного сложения. Свойства ассоциативности и унитарности умножения на числа и дистрибутивность также вытекают из свойств действительных чисел, поскольку операции в X определены покоординатно. Таким образом, если плоскость X проходит через начало координат, стандартные операции превращают её в линейное пространство.

3. Множество векторов на плоскости, все координаты которых по модулю не превосходят единицы, не является линейным пространством, поскольку операция покоординатного сложения выводит за его пределы: например, $(1, 1) + (0, 1) = (1, 2)$.

4. Множество $\mathbb{R}$ является линейным пространством над полем $\mathbb{R}$ со стандартными операциями; поэтому, оно является линейным пространством и над любым его подполем (и, в частности, над $\mathbb{Q}$). Действительно, операция сложения на X не использует свойств поля, а если свойства ассоциативности и дистрибутивности выполнены для всех элементов большего поля, то они выполнены и для всех элементов любого его подмножества.

5. Рассмотрим теперь множество $X = (0, +\infty)$ с операциями, определёнными формулами (1.1). Поскольку произведение двух положительных чисел положительно и произвольная степень любого положительного числа также положительна, операции определены корректно. В силу коммутативности и ассоциативности умножения действительных чисел, операция $\hat{+}$ коммутативна и ассоциативна, а тривиальным элементом для неё является $1 \in \mathbb{R}$. Таким образом, интервал X является абелевой группой относительно $\hat{+}$. Выберем произвольные $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ и произвольную точку $u \in X$; тогда
$$\lambda \hat{\cdot} (\mu \hat{\cdot} u) = \lambda \hat{\cdot} u^\mu = (u^\mu)^\lambda = u^{\lambda\mu} = (\lambda\mu) \hat{\cdot} u,$$
т.е. умножение на числа ассоциативно. Унитарность этой операции очевидна: $1 \hat{\cdot} u = u^1 = u$. Осталось проверить дистрибутивность: пусть λ, μ — произвольные скаляры, а u, v — произвольные точки множества X. Тогда
$$(\lambda + \mu) \hat{\cdot} u = u^{\lambda+\mu} = u^\lambda u^\mu = u^\lambda \hat{+} u^\mu = \lambda \hat{\cdot} u \hat{+} \mu \hat{\cdot} u, \quad \lambda \hat{\cdot} (u \hat{+} v) = (uv)^\lambda = u^\lambda v^\lambda = \lambda \hat{\cdot} u \hat{+} \lambda \hat{\cdot} v.$$

Таким образом, полубесконечный интервал X является линейным пространством над полем $\mathbb{R}$ относительно операций (1.1).

6. Множество ненулевых комплексных чисел не является линейным пространством над полем $\mathbb{C}$, поскольку не содержит тривиального элемента относительно сложения (т.е. нуля).

7. Множество многочленов фиксированной (ненулевой) степени тоже не является линейным пространством относительно стандартных операций, поскольку, например, не содержит нуля.

8. Пусть $\mathbb{K}_n[t]$ — множество всех многочленов с коэффициентами из поля $\mathbb{K}$ степени не выше n. Тривиальным элементом относительно сложения является многочлен 0, обратным — многочлен с противоположными по знаку коэффициентами. Коммутативность, ассоциативность и дистрибутивность стандартных операций следуют из аналогичных свойств для элементов основного поля $\mathbb{K}$. Таким образом, $\mathbb{K}_n[t]$ является линейным пространством относительно стандартных операций.

9. Множество $\mathbb{K}[t]$ всех многочленов с коэффициентами из поля $\mathbb{K}$ тоже является линейным пространством относительно стандартных операций (аналогично предыдущему примеру).

10. Множество $\mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{K})$ всех матриц размера $n \times m$ с элементами из поля $\mathbb{K}$ тоже является линейным пространством относительно стандартных операций, поскольку сложение матриц и умножение матриц на скаляры покоординатно, тривиальным элементом по сложению является матрица, состоящая только из нулей, а обратным к матрице A — матрица $-A$.

11. Рассмотрим теперь множество всех вещественнозначных функций $C[a, b]$, непрерывных на некотором отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Поскольку операции сложения функций и умножения функции на число определены поточечно, выполнение свойств ассоциативности, коммутативности и дистрибутивности очевидно. Тривиальным элементом по сложению является тождественный нуль, т.е. функция, принимающая лишь нулевые значения, а обратным к функции f — функция $-f$, принимающая в каждой точке противоположное по знаку значение. Таким образом, $C[a, b]$ является линейным пространством относительно стандартных операций.

12. Поскольку множество X является подмножеством множества действительных чисел, а введённые на нем операции — стандартные, свойства ассоциативности, коммутативности и дистрибутивности выполнены автоматически. Тривиальным элементом по сложению является $0 + 0 \cdot \sqrt{2}$, а обратным к элементу $a + b\sqrt{2}$ — элемент $-a - b\sqrt{2}$. $\square$

1.2 Линейная зависимость

Задача 2. *Каким условиям должен удовлетворять скаляр x, чтобы векторы $(0, x, -1)$, $(x, 0, 1)$ и $(1, -1, x)$ из $\mathbb{R}^3$ были линейно зависимы? Каким будет ответ на этот же вопрос при замене $\mathbb{R}^3$ на $\mathbb{Q}^3$?*

Решение.

Запишем координаты трёх заданных векторов по строкам в матрицу; поскольку строки матрицы линейно зависимы тогда и только тогда, когда она вырождена, достаточно вычислить её определитель:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & x & -1 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & -1 & x \end{pmatrix} = -x^3 + 2x = x(2 - x^2).$$

Таким образом, заданные векторы линейно зависимы, если $x = 0$ или $x = \pm\sqrt{2}$.

Однако, если заменить линейное пространство $\mathbb{R}^3$ на $\mathbb{Q}^3$, ответ изменится; действительно, в этом случае нас интересуют лишь векторы с рациональными координатами, а при $x = \pm\sqrt{2}$ ни один из трёх заданных векторов не принадлежит рассматриваемому линейному пространству. Таким образом, в случае пространства $\mathbb{Q}^3$ заданные векторы линейно зависимы лишь при $x = 0$. $\square$

Задача 3. *Исследовать на линейную зависимость следующие системы вещественнозначных функций ($n > 0$):*

1. $1, x, x^2, \ldots, x^n$;

2. $1, e^x, e^{2x}, \ldots, e^{nx}$;

3. $1, \ln x, \ln 2x, \ldots, \ln nx$.

Решение.

1. Предположим, что система функций $1, x, x^2, \ldots, x^n$ линейно зависима. Это означает, что найдутся такие числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$, не все из которых нулевые, что

$$a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots + a_n \cdot x^n = 0,$$

причем в правой части последнего равенства стоит нулевая функция, т.е. функция, принимающая лишь нулевые значения. Таким образом, многочлен $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ обращается в нуль в любой точке, что невозможно в силу теоремы Безу. Значит, исходная система функций линейно независима.

2. Предположим, что система функций $1, e^x, e^{2x}, \ldots, e^{nx}$ линейно зависима, т.е. что существуют такие числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$, не все из которых нулевые, что

$$a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot e^x + a_2 \cdot e^{2x} + \cdots + a_n \cdot e^{nx} = 0.$$

Поскольку это равенство должно быть выполнено в каждой точке, в частности, оно выполнено в точках $0, 1, 2, \ldots, n$. Это означает, что имеет место следующая система равенств:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0 \\ a_0 + a_1 e + a_2 e^2 + \cdots + a_n e^n = 0 \\ a_0 + a_1 e^2 + a_2 e^4 + \cdots + a_n e^{2n} = 0 \\ \ldots \\ a_0 + a_1 e^n + a_2 e^{2n} + \cdots + a_n e^{n^2} = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

В матричном виде эту систему линейных уравнений на неизвестные $a_0, a_1, \ldots, a_n$ можно переписать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & e & e^2 & \ldots & e^n \\ 1 & e^2 & e^4 & \ldots & e^{2n} \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & e^n & e^{2n} & \ldots & e^{n^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Но, как известно, линейная однородная система имеет ненулевое решение лишь если определитель соответствующей матрицы коэффициентов равен нулю. Таким образом,

$$0 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & e & e^2 & \ldots & e^n \\ 1 & e^2 & e^4 & \ldots & e^2 n \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & e^n & e^{2n} & \ldots & e^{n^2} \end{pmatrix} = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (e^{in} - e^{jn}),$$

поскольку этот определитель является частным случаем определителя Вандермонда (см. [1], стр. 84). Легко видеть, что в подобном произведении все скобки отличны от нуля, т.е. наш определитель не равен нулю и система (1.3) не имеет нетривиальных решений. Таким образом, рассматриваемая система функций линейно независима.

3. Рассмотрим теперь систему функций $1, \ln x, \ln 2x, \ldots, \ln nx$. Поскольку

$$\ln nx = \ln n + \ln x = \ln n \cdot 1 + \ln x,$$

при любом $n > 1$, последняя из функций линейно выражается через первые две. Это означает, что вся система функций содержит линейно зависимую подсистему и потому линейно зависима. Если $n = 1$, то рассматриваемая система линейно независима, функция 1 постоянна, а функция $\ln x$ непостоянна и, следовательно, ни одна из них не может линейно выражаться через другую. □

Задача 4. *Найти ранг и какую-нибудь базу следующей системы векторов:*

$$v_1 = (1, 2, -1, 5), \quad v_2 = (2, 1, 1, 1), \quad v_3 = (0, 1, -1, 3), \quad v_4 = (1, 1, 0, 2)$$

Решение.

Для нахождения базы системы векторов необходимо выбрать какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему заданной системы векторов, т.е. линейно независимые векторы именно из числа заданных. Для этого достаточно записать их координаты в матрицу по столбцам и привести полученную матрицу к ступенчатому виду. Свободные столбцы после этого будут линейно выражаться через главные. Но при элементарных преобразованиях *строк* матрицы сохраняются линейные соотношения между её *столбцами*. Таким образом, столбцы исходной матрицы будут связаны теми же соотношениями, что и столбцы приведённой. Значит, в качестве базы можно взять векторы исходной матрицы, стоящие на местах главных столбцов приведённой матрицы.

Запишем координаты заданных векторов в матрицу по столбцам и приведём её к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -9 & 3 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

первый и второй столбцы e_1, e_2 полученной матрицы являются главными. Значит, ранг исходной системы векторов равен 2, а в качестве базы можно выбрать, например, векторы v_1 и v_2. □

1.3 Базис, размерность, координаты

Задача 5. *Проверить, что система векторов*

$$e_1 = (1, 0, 3), \quad e_2 = (-5, 3, 1), \quad e_3 = (-1, 1, 2)$$

является базисом в пространстве $\mathbb{R}^3$ *и найти координаты вектора* $v = (1, -1, 2)$ *в этом базисе.*

Решение.

Для того, чтобы проверить, что система векторов является базисом пространства, размерность которого очевидна, достаточно показать, что она имеет максимальный ранг, т.е. что матрица, составленная из координат этих векторов, невырождена. Но, поскольку наша задача состоит не только в этом, мы будем действовать по-другому, а линейную независимость проверим в ходе решения. Предположим, что вектор v представляется в виде линейной комбинации векторов e_1, e_2 и e_3: $v = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$. Это означает, что имеет место следующее векторное равенство:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

которое в матричном виде может быть переписано следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Находя обратную матрицу C^{-1}, получаем:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -9 & 2 \\ -3 & -5 & 1 \\ 9 & 16 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

Оказалось, что матрица C обратима, т.е. невырождена, что говорит о линейной независимости заданных векторов (поскольку по её столбцам записаны координаты этих векторов). Это означает, что они действительно образуют базис в $\mathbb{R}^3$. А найденные нами координаты $(8, 4, -13)$ являются координатами вектора v в этом базисе. □

Задача 6. *Доказать, что многочлены* $1, t-1, (t-1)^2, (t-1)^3$ *образуют базис в пространстве многочленов* $\mathbb{R}_3[t]$ *и найти координаты многочлена* $p(t) = t^3 - 2t^2 + 5t - 1$ *в этом базисе.*

Решение.

Покажем, что заданные многочлены линейно независимы. Предположим противное, т.е. что существует такие числа a_0, a_1, a_2, a_3, среди которых есть ненулевые, что

$$a_0 + a_1(t-1) + a_2(t-1)^2 + a_3(t-1)^3 = 0$$

(где в правой части стоит нулевой многочлен). Раскрывая скобки, получаем равенство

$$a_3t^3 + (a_2 - 3a_3)t^2 + (a_1 - 2a_2 + 3a_3)t + (a_0 - a_1 + a_2 - a_3) \equiv 0;$$

но многочлен тождественно равен нулю лишь если все его коэффициенты нулевые. Поэтому, в частности, $a_3 = 0$; отсюда и из равенства нулю коэффициента при t^2 следует, что $a_2 = 0$. Продолжая это рассуждение, получаем, что $a_1 = a_0 = 0$. Значит, заданные многочлены линейно независимы. Они образуют базис, поскольку согласно формуле Тейлора, любой многочлен степени не выше 3 можно представить в виде их линейной комбинации. Пользуясь формулой Тейлора, получаем:

$$p(t) = p(1) + p'(1)(t-1) + \frac{p''(1)}{2}(t-1)^2 + \frac{p'''(1)}{6}(t-1)^3 = 3 + 4(t-1) + (t-1)^2 + (t-1)^3,$$

т.е. многочлен p имеет координаты $(3, 4, 1, 1)$ в базисе $\{1, t-1, (t-1)^2, (t-1)^3\}$. $\square$

Задача 7. *Доказать, что матрицы*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

образуют базис в пространстве $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ *вещественных квадратных матриц порядка* 2*, и найти координаты матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

в этом базисе.

Решение.

Матрицы E_{ij}, где $1 \le i, j \le 2$, у которых на (i, j)-том месте стоит единица, а остальные элементы — нули, образуют базис в пространстве $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$. В этом базисе (расположим базисные векторы, например, в таком порядке: $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$) матрицы M, N, P, Q и A имеют наборы координат

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

соответственно. Как и при решении задачи 5, мы не будем отдельно доказывать, что заданный набор матриц образует базис в пространстве $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, а получим это попутно. Записывая наборы координат матриц M, N, P и Q по столбцам, обращая полученную 4×4 матрицу, и применяя её к набору координат матрицы A, получаем набор координат этой матрицы в новом базисе:

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 & 7 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 & 31 & -72 & -98 \\ 17 & 11 & -26 & -35 \\ 15 & 10 & -23 & -31 \\ -26 & -17 & 40 & 54 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}. \square$$

Задача 8. *Найти матрицу перехода от базиса $\{e_1', e_2', e_3'\}$ к базису $\{e_1'', e_2'', e_3''\}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$, если векторы обоих базисов заданы своими координатами в некотором базисе:*

$$e_1' := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_2' := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad e_3' := \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_1'' := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad e_2'' := \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_3'' := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Для нахождения матрицы перехода от “старого” базиса $\{e_1', e_2', e_3'\}$ к “новому” базису $\{e_1'', e_2'', e_3''\}$ необходимо определить координаты векторов нового базиса в старом; пусть C' и C'' — матрицы перехода от стандартного базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$ (т.е. базиса, координатами в котором заданы векторы) к базисам $\{e_1, e_2, e_3\}$ и $\{e_1'', e_2'', e_3''\}$ соответственно. Тогда переход от старого базиса к новому является композицией перехода от старого к базиса к стандартному и перехода от стандартного базиса к новому; старые координаты записываются через стандартные координаты с помощью матрицы $(C')^{-1}$, а координаты в стандартном базисе через новые координаты — с помощью C'':

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = (C')^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C'' \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix}.$$

Поэтому старые координаты связаны с новыми с помощью матрицы $(C')^{-1}C''$. Записывая матрицы C' и C'' и производя арифметические операции над ними, получаем требуемую матрицу перехода:

$$(C')^{-1}C'' = \begin{pmatrix} -18 & 7 & 5 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}. \square$$

Задача 9. *В пространстве многочленов степени не выше 3 найти матрицу перехода от базиса $\{1-t+t^3, t+t^2+t^3, 1+t^2+t^3, -1+t-t^2\}$ к базису $\{t+t^2-t^3, 1-t^2+t^3, -1+t-t^2, 1+t-t^3\}$.*

Решение.

В стандартном базисе $\{1, t, t^2, t^3\}$ в пространстве многочленов $\mathbb{R}_3[t]$ векторы двух данных базисов имеют координаты

$$\begin{array}{llll} (1,-1,0,1), & (0,1,1,1), & (1,0,1,1), & (-1,1,-1,0) \\ (0,1,1,-1), & (1,0,-1,1), & (-1,1,-1,0), & (1,1,0,-1) \end{array}$$

соответственно. Записывая их по столбцам, получаем матрицы перехода C' и C'' от стандартного базиса к заданным базисам:

$$C' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C'' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично решению задачи 8, искомой будет матрица

$$(C')^{-1}C'' = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \square$$

1.4 Линейные подпространства

Задача 10. *Является ли линейным подпространством в пространстве* $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ *матриц порядка n подмножество, образованное всеми:*

1. *матрицами с нулевой первой строкой;*
2. *нижнетреугольными матрицами;*
3. *невырожденными матрицами;*
4. *трёхдиагональными матрицами;*
5. *матрицами с нулевым следом.*

Решение.

1. Поскольку сумма любых двух матриц с нулевой первой строкой и произведение любой такой матрицы на произвольное число тоже будет иметь такой вид, подмножество всех матриц с нулевой первой строкой замкнуто относительно матричного сложения и относительно умножения на числа, т.е. образует линейное подпространство в пространстве $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$.

2. Множество всех нижнетреугольных матриц тоже, очевидно, замкнуто относительно операций сложения матриц и умножения матрицы на число и, потому, тоже является линейным подпространством в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$.

3. Множество всех невырожденных матриц не является линейным подпространством, поскольку не содержит нулевой матрицы (т.е. не замкнуто, например, относительно матричного сложения)

4. Множество всех трёхдиагональных матриц является линейным подпространством в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ поскольку сложение матриц и умножение на числа происходит покоординатно и потому сохраняет вид матриц.

5. Рассмотрим произвольные матрицы A и B с нулевым следом и произвольное число $\lambda \in \mathbb{R}$. Поскольку
$$\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B) = 0 \quad \text{и} \quad \mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda\,\mathrm{tr}(A) = 0,$$
множество всех бесследных матриц замкнуто относительно операций в линейном пространстве $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ и, следовательно, является его подпространством. $\square$

Задача 11. *В линейном пространстве $\mathbb{R}_n[t]$ многочленов степени не выше n заданы подмножества, состоящие из многочленов $p(t)$, для которых:*

1. $p(1) = 0$;
2. $p(1) = 1$;
3. $3p(0) = 2p(1)$;
4. $p(1-t) = p(1+t)$;
5. $p(t) \geqslant 0$ *при* $t \geqslant 2$.

Является ли каждое из этих подмножеств линейным подпространством в $\mathbb{R}_n[t]$?

Решение.

1. Легко заметить, что условие обращения в нуль многочлена в произвольной точке (и, в частности, в точке $t = 1$) линейно и поэтому сохраняется при сложении многочленов и при умножении многочленов на скаляры. Таким образом, множество всех подмногочленов, имеющих корень в точке $t = 1$, является линейным подпространством в пространстве многочленов $\mathbb{R}_n[t]$. Система многочленов
$$1,\ t-1,\ (t-1)^2, \ldots, (t-1)^n$$
является базисом в $\mathbb{R}_n[t]$; все эти многочлены, кроме первого, удовлетворяют условию $p(1) = 0$. Поэтому, рассматриваемое подпространство имеет размерность n, и в качестве его базиса можно выбрать многочлены $t-1, (t-1)^2, \ldots, (t-1)^n$.

2. Условие $p(1) = 1$ не замкнуто относительно сложения многочленов и потому не выделяет никакого линейного подпространства.

3. Запишем произвольный многочлен $p(t)$ в виде
$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n;$$
тогда условие $3p(0) = 2p(1)$ записывается в виде
$$3a_0 = 2(a_0 + a_1 + \cdots + a_n) \Longleftrightarrow -a_0 + 2a_1 + \cdots + 2a_n = 0, \tag{1.4}$$
т.е. в виде линейной однородной системы на неизвестные коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$, состоящей из одного уравнения. Таким образом, условие $3p(0) = 2p(1)$ выделяет линейное подпространство в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ наборов коэффициентов многочленов, поскольку ему удовлетворяют те и только те наборы коэффициентов, которые являются решениями

линейной однородной системы (1.4). Найдём теперь размерность и базис этого подпространства. Построим для этого фундаментальную систему решений системы (1.4); она состоит, например, из следующих векторов:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Это означает, что в качестве базиса нашего подпространства в $\mathbb{R}_n[t]$ можно взять следующий набор многочленов:

$$2+t, \quad 2+t^2, \quad 2+t^3, \dots, 2+t^n.$$

При этом размерность этого подпространства равна n.

4. Легко заметить, что условие $p(1-t) = p(1+t)$ означает симметричность многочлена относительно точки $t = 1$. Такое условие (как и симметричность относительно любой другой точки) сохраняется при сложении многочленов и при умножении их на скаляры. Поэтому подмножество в пространстве $\mathbb{R}_n[t]$, выделяемое таким условием, является линейным подпространством. Согласно формуле Тейлора, любой многочлен можно разложить по степеням $t-1$; это означает, что система многочленов

$$1, \quad t-1, \quad (t-1)^2, \quad (t-1)^n$$

образует базис в пространстве $\mathbb{R}_n[t]$. Среди векторов этого базиса нашему условию удовлетворяют те и только те многочлены вида $(t-1)^k$, для которых k чётно. Покажем, что они образуют базис рассматриваемого подпространства. Действительно, если некоторый многочлен $p(t)$ удовлетворяет условию $p(1-t) = p(t+1)$, то его первая производная (и все производные нечётного порядка) удовлетворяет условию $p'(1-t) = -p'(1+t)$. А это означает, что $p^{(k)}(1) = 0$ при всех нечётных k, т.е. в силу формулы Тейлора коэффициенты разложения по нечётным степеням $t-1$ будут нулевыми. Таким образом, произвольный многочлен, симметричный относительно точки $t = 1$, линейно выражается через многочлены вида $(t-1)^k$, где k чётно, т.е. они действительно образуют базис в нашем пространстве. Размерность этого подпространства равна целой части числа $(n+2)/2$.

5. Подмножество многочленов, выделяемое условием $p(t) \geqslant 0$ при $t \geqslant 2$, не является линейным подпространством, поскольку это условие не сохраняется при умножении многочленов на отрицательные числа. □

Задача 12. *Найти базис линейной оболочки системы векторов:*

$$v_1 = (1,0,0,-1), \quad v_2 = (2,1,1,0), \quad v_3 = (1,1,1,1), \quad v_4 = (1,2,3,4), \quad v_5 = (0,1,2,3)$$

Решение. Запишем координаты заданных векторов по строкам матрицы; приводя полученную матрицу к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

делаем вывод, что ранг исходной системы векторов равен 3. В качестве базиса можно взять, например, ненулевые векторы-строки ступенчатого вида. □

Замечание 1. Задача нахождения базиса линейной оболочки системы векторов отличается от задачи нахождения базы системы векторов тем, что в первом случае не требуется предъявлять векторы именно из числа данных $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Часто в качестве базисных бывает удобнее брать не исходные векторы, в строки ступенчатого вида, поскольку они, как правило, проще.

Задача 13. *Найти размерность и базис векторного пространства решений однородной системы линейных уравнений:*

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0 \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}.$$

Решение.

Запишем матрицу этой линейной системы и приведём её к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 \\ 6 & -4 & 4 & 3 \\ 9 & -6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Неизвестные x_2 и x_4 являются свободными; присваивая им значения $x_2 = 3$ и $x_4 = 0$, а затем выражая через них главные неизвестные, получаем первый вектор из базиса в пространстве решений. Положив $x_2 = 0$ и $x_4 = 6$, аналогично находим второй вектор из базиса пространства решений (умножив полученный вектор на 3, мы сделали все его координаты целыми). Таким образом, пространство решений рассматриваемой линейной системы двумерно, и векторы

$$(2, 3, 0, 0), \quad (1, 0, -15, 18)$$

образуют базис в пространстве её решений. □

Замечание 2. При построении базиса в пространстве решений линейной системы для упрощения вычислений удобно, чтобы координаты базисных векторов получались целыми. Этим обусловлен на первый взгляд странный выбор значений свободных неизвестных в разобранной выше задаче (если не удаётся выбрать главные неизвестные так, чтобы коэффициенты при них были равными единице, удобно полагать свободные кратными этим коэффициентам).

Прежде чем переходить к разбору следующей задачи, докажем простую теорему. Задачу 14 можно решать разными способами, но наиболее удобным нам представляется тот, который использует эту теорему.

Теорема 1. *Пусть матрица B состоит из векторов-столбцов, образующих базис в пространстве решений линейной системы $Ax = 0$ (где x — вектор). Тогда линейная система $B^T y$ задаёт линейную оболочку векторов-строк матрицы A.*

Доказательство.

Поскольку каждый столбец матрицы B является решением линейной системы $Ax = 0$, имеет место матричное равенство $AB = 0$, которое эквивалентно равенству $B^T A^T = 0$. Таким образом, если матрицу B^T интерпретировать как матрицу коэффициентов некоторой линейной системы, все столбцы матрицы A^T (т.е. строки матрицы A) будут ей удовлетворять. Допустим, что некоторый вектор-столбец, не принадлежащий линейной оболочке столбцов матрицы A^T, тоже удовлетворяет системе $B^T y = 0$. Тогда рассмотрим матрицу C^T, которая получается дописыванием к матрице A этого столбца справа; полученная матрица будет удовлетворять соотношению $B^T C^T = 0$, а, следовательно, и соотношению $CB = 0$. Это означает, что столбцы матрицы B являются решениями не только линейной системы $Ax = 0$, но и системы $Cx = 0$, отличающейся от системы $Ax = 0$ одним добавленным уравнением, которое по предположению, линейно не выражается через исходные уравнения. Это означает, что ранг матрицы C на единицу больше ранга матрицы A, т.е. количество свободных неизвестных у системы $Cx = 0$ на единицу меньше, чем у системы $Ax = 0$. Значит, все столбцы матрицы B не могут быть решениями системы $Cx = 0$ — противоречие. Таким образом, системе $B^T y = 0$ удовлетворяют все строки матрицы A и притом только они. Теорема доказана.

Задача 14. *Составить систему линейных уравнений, задающую линейную оболочку системы векторов:*

$$v_1 = (1, -1, 1, -1, 1), \quad v_2 = (1, 1, 0, 0, 3), \quad v_3 = (3, 1, 1, -1, 7), \quad v_4 = (0, 2, -1, 1, 2).$$

Решение.

Способ I.

Записывая данные векторы строками матрицы и приводя эту матрицу к ступенчатому виду, обнаруживаем, что ранг исходной системы векторов равен двум и что в качестве базиса её линейной оболочки можно взять $\{v_1, v_2\}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 4 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right). \tag{1.5}$$

Поэтому произвольный вектор $x \in \langle v_1, v_2 \rangle$ имеет вид $x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$. Пусть $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ — его координаты в стандартном базисе; тогда, приравнивая соответствующие координаты, имеем:

$$x_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad x_2 = \alpha_2 - \alpha_1, \quad x_3 = \alpha_1, \quad x_4 = -\alpha_1, \quad x_5 = \alpha_1 + 3\alpha_2.$$

Теперь, исключая неизвестные α_1 и α_2, получаем искомую линейную систему на координаты произвольного вектора x из $\langle v_1, v_2 \rangle$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2x_3 + x_2 \\ x_4 = -x_3 \\ x_5 = x_3 + 3x_2 + 3x_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_2 + 4x_3 - x_5 = 0 \end{array} \right. . \square \tag{1.6}$$

Способ II.

Запишем по столбцам матрицы базисные векторы заданного подпространства и в качестве дополнительного столбца расширенной матрицы возьмём столбец из неизвестных $(x_1, x_2, \ldots x_n)$. В нашем случае получаем матрицу

$$\left(\begin{array}{rr|l} 1 & 1 & x_1 \\ -1 & 1 & x_2 \\ 1 & 0 & x_3 \\ -1 & 0 & x_4 \\ 1 & 3 & x_5 \end{array}\right);$$

после приведения такой матрицы к ступенчатому виду в случае, когда данное подпространство не совпадает со всем объемлющим пространством, получим некоторое количество нулевых строк в нерасширенной матрице. Поэтому, в силу теоремы Кронекера–Капелли (см. [1], стр. 63), вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принадлежит рассматриваемому подпространству если и только если в этих строках за чертой также стоят нули. Это и даёт искомую линейную систему на коэффициенты вектора $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. В нашем случае это выглядит так:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 2 & x_1 + x_2 \\ \hline 0 & 0 & 2x_3 - x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & x_3 + x_4 \\ 0 & 0 & x_5 - 3x_2 - 4x_3 \end{array}\right). \ \square$$

Способ III.

Покажем теперь, как теорема 1 может быть использована для решения нашей задачи. Запишем координаты данных векторов по строкам в матрицу A и приведём её к ступенчатому виду (см. (1.5)). Тогда фундаментальная система решений для линейной системы $Ax = 0$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в силу теоремы 1, искомая система уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_4 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + x_5 = 0 \end{cases}.$$

Легко заметить, что полученная система эквивалентна системе (1.6). $\square$

1.5 Сумма и пересечение

Задача 15. *Найти размерности и базисы суммы и пересечения подпространств V_1 и V_2:*

$$V_1 = \langle (1,2,1),\ (1,1,-1),\ (1,3,3) \rangle, \quad V_2 = \langle (2,3,-1),\ (1,2,2),\ (1,1,-3) \rangle.$$

Решение.

Запишем координаты всех шести векторов в матрицу по строкам и приведём её к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку ранг этой матрицы равен трём, т.е. размерности объемлющего пространства, в качестве базиса суммы заданных подпространств можно взять любые три линейно независимых вектора, например, векторы $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ и $(0,0,1)$.

Для определения базиса в пересечении V_1 и V_2 зададим эти подпространства системами линейных уравнений. Составим матрицу A_1 из коэффициентов векторов подпространства V_1, и приведём её к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку вектор $(3,-2,1)$ образует базис в пространстве решений соответствующей линейной системы, согласно теореме 1 подпространство V_1 задаётся уравнением

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0.$$

Аналогично, подпространство V_2 задаётся уравнением

$$8x_1 - 5x_2 + x_3 = 0.$$

Пересечение заданных подпространств удовлетворяет сразу двум полученным уравнениям, т.е. их системе

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 8x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим базис в пространстве её решений, т.е. в пересечении подпространств V_1 и V_2, который состоит из одного вектора: $V_1 \cap V_2 = \langle (3,5,1) \rangle$. $\square$

Замечание 3. Отметим, что задача нахождения базиса суммы двух подпространств сводится к выбору максимальной линейно независимой подсистемы объединения базисов этих подпространств, а задача нахождения базиса пересечения двух подпространств сводится к нахождению максимальной линейно независимой подсистемы объединения систем уравнений, задающих эти подпространства. В обозначениях теоремы 1 эту двойственность можно описать так: с каждым из двух подпространств V_i можно связать свои матрицы A_i и B_i, где $i = 1, 2$. При нахождении базиса суммы мы находим базис в объединении систем строк матриц A_1 и A_2, а при нахождении системы уравнений, задающей $V_1 \cap V_2$ мы находим базис в объединении столбцов матриц B_1 и B_2.

Задача 16. *Найти размерности и базисы суммы и пересечения подпространств V_1 и V_2:*

$$V_1 = \langle (1,0,3,2,-1), (0,-4,7,4,-4), (2,4,-1,0,2) \rangle, \quad V_2 : \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 6x_2 - 7x_3 - 10x_4 + 7x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}.$$

Решение.

Запишем координаты векторов из V_1 в матрицу по строкам и приведём её к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 7 & 4 & -4 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -7 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, векторы $v_1 = (1, 0, 3, 2, -1)$ и $v_2 = (0, 4, -7, -4, 4)$ образуют базис в пространстве V_1. Для нахождения пересечения двух подпространств запишем произвольный вектор подпространства V_1 в виде $\alpha v_1 + \beta v_2$ и подставим его координаты в систему уравнений, задающую подпространство V_2. В результате получим три уравнения на неизвестные α и β, которые пропорциональны уравнению $\alpha - 3\beta = 0$. Таким образом, пересечение двух данных подпространств одномерно и является линейной оболочной вектора $3v_1 + v_2 = (3, 4, 2, 2, 1)$. Найдём теперь базис в подпространстве V_2:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & -7 & -10 & 7 \\ 1 & 1 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & -5 & -7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Строя фундаментальную систему решений, получаем базис пространства V_2:

$$V_2 = \langle (1, 1, 1, 0, 0), (8, 7, 0, 5, 0), (11, 4, 0, 0, -5) \rangle.$$

Для нахождения базиса суммы запишем координаты базисных векторов обоих подпространств по строкам в матрицу и приведём её к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -7 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & 0 & 5 & 0 \\ 11 & 4 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 43 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, сумма подпространств $V_1 + V_2$ четырёхмерна, и в качестве её базиса можно выбрать векторы

$$(1, 1, 1, 0, 0), \quad (0, 1, -2, -2, 1), \quad (0, 0, 1, 4, 0), \quad (0, 0, 0, 43, 1). \ \square$$

Задача 17. *В линейном пространстве $\mathbb{R}_7[t]$ многочленов степени не выше 7 заданы два подпространства:*

$$V_1 = \{p(t) \in \mathbb{R}_7[t] \,|\, p(-1) = p'(-1) = p''(-1) = 0\} \quad \text{и} \quad V_2 = \{p(t) \in \mathbb{R}_7[t] \,|\, p(2) = p'(2) = p''(2) = 0\}.$$

Найти базисы суммы и пересечения этих подпространств.

Решение.

Подпространство V_1 состоит из тех многочленов, которые имеют в точке $t = -1$ корень кратности не менее чем 3, а подпространство V_2 — из многочленов, имеющих в точке $t = 2$ корень кратности не менее, чем 3. Это означает, что $V_1 \cap V_2$ состоит из всех многочленов степени не более 7, имеющих по крайней мере трёхкратные корни в точках $t = -1$ и $t = 2$, т.е. из многочленов, делящихся на $(t+1)^3(t-2)^3$. Поскольку степень такого многочлена должна быть не выше семи, базис в $V_1 \cap V_2$ образуют многочлены

$$(t^2 - t - 2)^3, \quad t(t^2 - t - 2)^3.$$

Как известно (см. [1], стр. 189), размерности суммы и пересечения связаны соотношением

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2);$$

в нашем случае, поскольку каждое из заданных подпространств пятимерно, это означает, что $\dim(V_1 + V_2) = 8$, т.е. что сумма этих подпространств совпадает со всем пространством $\mathbb{R}_7[t]$. Поэтому в качестве базиса в $V_1 + V_2$ можно взять многочлены

$$1, t, t^2, \ldots, t^7. \ \square$$

Задача 18. *Пусть заданы два подпространства в* $\mathbb{R}^4$*:*

$$U := \langle (1,1,1,1), (-1,-2,0,1) \rangle, \quad \textit{и} \quad V := \langle (-1,-1,1,-1), (2,2,0,1) \rangle.$$

Показать, что $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$ *и найти проекцию вектора* $w = (4,2,4,4)$ *на подпространство* U *параллельно подпространству* V*.*

Решение.

Для проверки того, что подпространства U и V в прямой сумме дают все объемлющее пространство, нужно составить матрицу из базисных векторов этих подпространств, привести её к ступенчатому виду и убедиться, что она имеет максимальный ранг. (Этого достаточно, поскольку в данном случае сумма размерностей заданных подпространств совпадает с размерностью $\mathbb{R}^4$, откуда следует, что пересечение U и V тривиально.) Проделаем это:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$.

Найдём теперь проекцию вектора w на подпространство U параллельно V. Для этого достаточно составить систему уравнений, задающую подпространство U, записать разложение неизвестного вектора v по базису подпространства V (т.е. линейную комбинацию с неопределёнными коэффициентами) и найти эти коэффициенты из условия, что разность $w - v$ удовлетворяет системе, задающей пространство V. Тогда вектор $w - v$ будет искомым.

Пусть (x_1, x_2, x_3, x_4) — произвольный вектор подпространства U; разложим его по базису:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha - \beta \\ x_2 = \alpha - 2\beta \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \alpha + \beta \end{cases}.$$

Исключая неизвестные α и β, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 2x_3 \\ x_2 + 2x_4 = 3x_3 \end{cases}, \tag{1.7}$$

задающей подпространство U. Произвольный вектор подпространства V имеет вид

$$v = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

подставляя координаты вектора $w - v$ в систему уравнений (1.7), получаем, что $\lambda = 3$, $\mu = 4$. Таким образом, $w - v = (-1, -3, 1, 3)$ — искомый вектор. $\square$

1.6 Линейные функции и отображения

Задача 19. *Какие из следующих отображений пространства $\mathbb{R}_n[t]$ многочленов степени не выше n в себя являются линейными?*

1. $p(t) \mapsto p(0) \cdot t$;
2. $p(t) \mapsto p''(t)$;
3. $p(t) \mapsto \left(\int_0^1 p(u)du\right) \cdot t^3$, $n \geqslant 3$;
4. $p(t) \mapsto p(1)p(2) \cdot 1$;
5. $p(t) \mapsto t^n p(1/t)$?

Решение.

1. Рассмотрим произвольные многочлены $p_1(t), p_2(t) \in \mathbb{R}_n[t]$ и произвольные скаляры α, β. Тогда
$$\alpha p_1(t) + \beta p_2(t) \mapsto (\alpha p_1(0) + \beta_2(0)) \cdot t = \alpha p_1(0) \cdot t + \beta p_2(0) \cdot t,$$
т.е. заданное отображение является линейным.

2. Отображение $p(t) \mapsto p''(t)$ является линейным в силу свойства линейности операции дифференцирования.

3. Пусть $p_1(t)$ и $p_2(t)$ — произвольные многочлены, тогда для любых скаляров α и β имеем:
$$\alpha p_1(t) + \beta p_2(t) = \left(\int_0^1 (\alpha p_1(u) + \beta p_2(u))du \cdot\right) \cdot t^3 = \alpha \left(\int_0^1 p_1(u)du\right) \cdot t^3 + \beta \left(\int_0^1 p_2(u)du\right) \cdot t^3,$$
т.е. рассматриваемое отображение линейно. Условие $n \geqslant 3$ необходимо, поскольку в противном случае многочлен t^3 не принадлежит линейному подпространству $\mathbb{R}_n[t]$.

4. Отображение $p(t) \mapsto p(1)p(2) \cdot 1$ не является линейным ни при каком n, поскольку, например, $1 \mapsto 1 \cdot 1$, $2 \mapsto 4 \cdot 1$, а $1 + 2 \mapsto 9 \cdot 1$ (эти многочлены содержатся в рассматриваемом подпространстве при любом n).

5. Рассмотрим произвольные многочлены
$$p_1(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n, \quad p_2(t) = b_0 + b_1 t + \dots + b_n t^n$$
и произвольные скаляры α, β. Тогда
$$\alpha p_1(t) + \beta p_2(t) \mapsto t^n \sum_{k=0}^{n} \left(\alpha \frac{a_k}{t^k} + \beta \frac{b_k}{t^k}\right) = \alpha t^n \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{t^k} + \beta t^n \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{t^k},$$
т.е. свойство линейности выполнено. □

Задача 20. *В линейном пространстве $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ вещественных матриц порядка n заданы функции взятия следа и определителя матрицы. Являются ли они линейными?*

Решение.

Сложение матриц и умножение матрицы на число происходит поэлементно; поэтому если $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, то для произвольных чисел α и β имеем:

$$\operatorname{tr}(\alpha A + \beta B) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha a_{ii} + \beta b_{ii}) = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \beta \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \alpha \operatorname{tr}(A) + \beta \operatorname{tr}(B),$$

т.е. отображения взятия следа матрицы линейно.

Если $n > 1$, то, например, для единичной матрицы E функция взятия определителя не удовлетворяет свойству линейности:

$$\det(\alpha E + \beta E) = (\alpha + \beta)^n \neq \alpha + \beta = \alpha \det E + \beta \det E$$

(достаточно положить $\alpha = \beta = 1$). При $n = 1$ линейность очевидна, поскольку определитель матрицы порядка 1 — это единственный элемент этой матрицы. $\square$

Задача 21. *Найти базис в ядре линейного функционала $\varphi = 2x^1 - 3x^2 + x^4$, где $x^k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ — функционал взятия k-той координаты вектора в стандартном базисе.*

Решение.

Ядро линейного функционала φ состоит из тех и только тех векторов $v \in \mathbb{R}^4$, для которых $\varphi(v) = 0$, т.е.

$$2x_1 - 3x_2 + x_4 = 0.$$

Таким образом, достаточно построить какой-нибудь базис с пространстве решений этой линейной системы, состоящей из одного уравнения. Составляя фундаментальную систему решений, получаем следующую систему векторов:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}. \ \square$$

Задача 22. *В пространстве $\mathbb{R}_n[t]$ степени не выше n линейные функции l^i, где $i = 0, 1, \ldots, n$, заданы формулой $l^i(p) = p^{(i)}(t_0)$ для всех многочленов $p \in \mathbb{R}_n[t]$, где t_0 — произвольная точка числовой прямой. Доказать, что эти функции образуют базис в сопряжённом пространстве $(\mathbb{R}_n[t])^*$, и найти двойственный базис пространства $\mathbb{R}_n[t]$.*

Решение.

Вместо того, чтобы непосредственно доказывать, что система функций $l^0, l^1, \ldots, l^n$ образует базис в пространстве $(\mathbb{R}_n[t])^*$, построим двойственную ей систему многочленов и покажем, что она является базисом пространства $\mathbb{R}_n[t]$. Рассмотрим многочлены $p_0, p_1, \ldots p_n$, где $p_i(t) = \frac{(t-t_0)^i}{i!}$. Легко видеть, что при $k < i$

$$l^k(p_i) = \left(i(i-1) \cdot \cdots \cdot (i-k+1) \frac{(t-t_0)^i}{i!} \right) \Bigg|_{t=t_0} = \left(\frac{(t-t_0)^{i-k}}{(i-k)!} \right) \Bigg|_{t=t_0} = 0;$$

при $k > i$ степень многочлена меньше порядка дифференцирования и потому $l^k(p_i) = 0$, а при $p_i^{(k)}(t) \equiv 1$. Таким образом, построенная система многочленов двойственна к исходной системе линейных функций. Поскольку эта система состоит из многочленов различных степеней, она линейно независима, а, поскольку количество элементов в ней совпадает с размерностью пространства $\mathbb{R}_n[t]$, она является базисом $\mathbb{R}_n[t]$. $\square$

1.7 Аффинные пространства

Задача 23. *Определить, является ли Y аффинным подпространством аффинного пространства X, и, если является, найти линейное подпространство V, с которым Y ассоциировано, в каждом из перечисленных ниже случаев:*

1. *X — произвольное вещественное аффинное пространство, а Y — конечный набор точек из X;*
2. *X — плоскость $\mathbb{R}^2$, а Y — некоторая её полуплоскость вида $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by \geqslant 0\}$;*
3. *X — плоскость $\mathbb{R}^2$, а Y — произвольная прямая на этой плоскости;*
4. *X — пространство $\mathbb{R}[t]$ всех многочленов от одной переменной, а Y — подмножество многочленов $p(t)$, удовлетворяющих условию $p(1) + p(2) = 3$;*
5. *X — пространство $\mathbb{R}[t]$ всех многочленов от одной переменной, а Y — подмножество всех многочленов $p(t)$, удовлетворяющих условию $p(1)p(2) = 3$.*

Решение.

1. Всякое вещественное линейное пространство состоит из бесконечного количества элементов, если только оно не нульмерно (в этом случае оно состоит только из нулевого вектора). Поэтому конечный набор точек Y аффинного пространства X можно представить в виде $A + V$, где $A \in X$, V — некоторое линейное пространство, лишь если Y состоит из единственной точки (т.е. точки A), а V — нульмерное линейное пространство (иначе в силу конечности множества Y найдутся такие точки $A, B \in Y$, что векторов $v \in V$, удовлетворяющих условию $B = A + v$, бесконечно много).

2. Допустим, что Y является аффинным подпространством в X и что существует такое линейное подпространство V в линейном пространстве $\mathbb{R}^2$, что X с ним ассоциировано. Тогда для произвольной точки $A = (x_1, y_1) \in Y$ найдётся такой вектор $v \in V$, что $O + v = A$, где O — начало координат. Пусть точка B, определяемая равенством $B = O + (-v)$, тоже содержится в Y; тогда в силу правила треугольника $B = (-x_1, -y_1)$ и

$$a(-x_1) + b(-y_1) = -(ax_1 + by_1) < 0.$$

   Значит, B не принадлежит Y — противоречие. Таким образом полуплоскость Y не является аффинным подпространством в аффинном пространстве $\mathbb{R}^2$.

3. Пусть v — направляющий вектор прямой Y, а V — его линейная оболочка. Тогда для любых двух точек $A, B \in Y$ имеет место равенство $B = A + AB$, причем $AB \in V$. Таким образом, Y является аффинным подпространством в X, ассоциированным с линейным подпространством V.

4. Для любых двух многочленов p и q, принадлежащих Y, их разность $s = p - q$ удовлетворяет условию $s(1) + s(2) = 0$. Поэтому, множество Y является аффинным подпространством в X, ассоциированным с линейным пространством всех многочленов, удовлетворяющих условию $s(1) + s(2) = 0$.

5. Рассмотрим многочлены $p(t) = \sqrt{3}$ и $q(t) = 2t - 1$, принадлежащие Y и рассмотрим их разность $s = q - p$. Если предположить, что подмножество Y является аффинным подпространством в X, то, напрмер, многочлен $r = p + 2s$ должен содержаться в Y. Однако, это не так: $r(1) = 2 - \sqrt{3}$ и $r(2) = 6 - \sqrt{3}$. Таким образом, Y не является аффинным подпространством в X. □

Задача 24. *Составить параметрические уравнения плоскости*

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 6x_4 + x_5 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}.$$

Решение.

Фактически, эта задача эквивалентна задаче построения фундаментальной системы решений для неоднородной системы линейных уравнений. Действительно, запишем расширенную матрицу этой системы и приведём её к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & -2 & 4 & -6 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -11 & 1 & 3 & -5 & 1 \end{array}\right).$$

Частное решение $(0, 0, 1, 0, 0)$ получается одновременным занулением всех свободных неизвестных: $x_2 = x_4 = x_5 = 0$; фундаментальная система решений соответствующей однородной системы состоит из векторов

$$(-14, 1, 11, 0, 0), \quad (6, 0, -3, 1, 0), \quad (-7, 0, 5, 0, 1).$$

На языке аффинных подпространств это означает, что плоскость решений исходной системы трёхмерна и параметрически задаётся следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -14 \\ 1 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \ \square$$

Задача 25. *Составить параметрические уравнения двумерной плоскости, проходящей через три точки*

$$A_1(-3, 1, 2, -2, -4), \quad A_2(-1, 5, 4, 1, -4), \quad A_3(3, 5, -5, 5, -1).$$

Найти систему уравнений, задающую эту плоскость.

Решение.

Для составления параметрических уравнений заданной плоскости достаточно взять любую из данных точек в качестве базовой, а векторы, идущие из неё в две другие точки, — в качестве базиса соответствующего линейного подпространства:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -7 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Найдём теперь систему линейных уравнений, задающую эту двумерную плоскость. Сперва построим однородную систему, которой будут удовлетворять векторы A_1A_2 и A_1A_3; для этого запишем координаты этих векторов в матрицу по строкам и приведём её к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 4 & -7 & 7 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & -13 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Координаты векторов фундаментальной системы решений этой системы уравнений являются коэффициентами искомой линейной системы:

$$\begin{cases} 18x_1 - 13x_2 + 8x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 4x_4 = 0 \\ 6x_1 - 3x_2 - 8x_5 = 0 \end{cases}.$$

Теперь подставим в эту однородную систему любую из данных точек (например, точку A_1) и вычислим коэффициенты в правой части:

$$\begin{cases} 18x_1 - 13x_2 + 8x_3 = -51 \\ 4x_1 + x_2 - 4x_4 = -3 \\ 6x_1 - 3x_2 - 8x_5 = 11 \end{cases}. \ \square$$

Задача 26. *Найти аффинную оболочку системы точек*

$$(-1,1,0,1), \quad (0,0,2,0), \quad (-3,-1,5,4), \quad (2,2,-3,-3).$$

Решение.

Найдём линейную однородную систему, задающую соответствующее линейное подпространство, а затем подставим в неё любую из данных точек. В качестве базовой выберем вторую точку и будем искать однородную систему, задающую линейную оболочку векторов

$$v_1 = (-1,1,-2,1), \quad v_2 = (-3,-1,3,4), \quad v_3 = (2,2,-5,-3).$$

Запишем произвольный вектор (x_1,x_2,x_3,x_4) их линейной оболочки в виде $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$; приводя расширенную матрицу полученной системы к ступенчатому виду, имеем:

$$\left(\begin{array}{rrr|l} -1 & -3 & 2 & x_1 \\ 1 & -1 & 2 & x_2 \\ -2 & 3 & -5 & x_3 \\ 1 & 4 & -3 & x_4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & x_2 \\ 0 & 1 & -1 & x_1 + x_4 \\ 0 & -4 & 4 & x_1 + x_2 \\ 0 & 1 & -1 & 2x_2 + x_3 \end{array}\right).$$

Поэтому, соответствующая однородная система имеет вид

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 4x_4 = 0 \end{cases};$$

подстановка точки $(0,0,2,0)$ приводит к искомой неоднородной системе:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ 5x_1 + x_2 + 4x_4 = 0 \end{cases}. \ \square$$

Задача 27. *Найти аффинную оболочку объединения двух аффинных подпространств:*

$$\Pi_1: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 3 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \Pi_2: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Рассмотрим вектор $(6\frac{1}{3}, 1, 3, 6, 5)$, соединяющий точки двух данных аффинных подпространств, и базисные векторы-столбцы, задающие эти подпространства. Запишем их по столбцам в матрицу

$$\begin{pmatrix} \frac{19}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 7 \\ 6 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

и убедимся в том, что ранг полученной матрицы равен 4. Это означает, что соответствующие векторы линейно независимы, и уравнение искомой аффинной оболочки имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 3 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} \frac{19}{3} \\ 1 \\ 3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t_4 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}. \ \square$$

Задача 28. *Исследовать взаимное расположение двух трёхмерных плоскостей в пространстве $\mathbb{R}^n$ при $n \geqslant 6$.*

Решение.

Рассмотрим трёхмерные аффинные плоскости $P_1 + V_1$ и $P_2 + V_2$, где P_1 и P_2 — некоторые точки из $\mathbb{R}^n$, а V_1 и V_2 — трёхмерные линейные подпространства, и изучим всевозможные случаи.

1. Если $V_1 = V_2$ и $P_1P_2 \in V_1$, то плоскости совпадают.
2. Если $V_1 = V_2$, а $P_1P_2 \notin V_1$, то плоскости параллельны.
3. Если $\dim V_1 \cap V_2 = 2$ и $P_1P_2 \in V_1 + V_2$, то плоскости пересекаются по двумерной плоскости.
4. Если $\dim V_1 \cap V_2 = 2$, а $P_1P_2 \notin V_1 + V_2$, то плоскости скрещиваются по двумерной плоскости.
5. Если $\dim V_1 \cap V_2 = 1$ и $P_1P_2 \in V_1 + V_2$, то плоскости пересекаются по прямой.
6. Если $\dim V_1 \cap V_2 = 1$, а $P_1P_2 \notin V_1 + V_2$, то плоскости скрещиваются по прямой.
7. Если $\dim V_1 \cap V_2 = 0$ и $P_1P_2 \in V_1 + V_2$, то плоскости пересекаются по точке.
8. Если $\dim V_1 \cap V_2 = 0$ и $P_1P_2 \notin V_1 + V_2$, то плоскости скрещиваются по точке, что возможно лишь если $n > 6$. $\square$

Задача 29. *Определить взаимное расположение двух плоскостей:*

$$\Pi_1: \ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, -1, 2, 1, 0) + \langle (2, 3, -1, 0, 4), (3, -2, 1, 0, 1) \rangle$$
$$\Pi_2: \ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 1, -1, 0, 1) + \langle (4, -1, -4, 0, 7), (7, 5, 8, 0, 1) \rangle$$

Решение.

Рассмотрим линейные подпространства V_1 и V_2, соответствующие заданным аффинным плоскостям. Запишем матрицу, состоящую из координат базисных векторов подпространств, и добавим в неё столбец координат вектора, соединяющего заданные точки плоскостей Π_1 и Π_2:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 7 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & -4 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что ранг всей матрицы равен 4, а ранг матрицы, состоящей из её первых четырёх столбцов, равен 3, т.е. добавление вектора, соединяющего точки двух плоскостей к системе, состоящей из базисных векторов соответствующих линейных пространств, увеличивает её ранг. Значит, плоскости Π_1 и Π_2 не пересекаются. Поскольку подпространство $V_1 + V_2$ трёхмерно, а каждая из данных плоскостей двумерна, эти плоскости скрещиваются по прямой. Для нахождения направляющего вектора этой прямой необходимо найти пересечение подпространств V_1 и V_2. Для этого построим линейные системы, задающие эти подпространства. Они задаются линейными системами

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 - x_5 = 0 \\ 5x_2 + 11x_3 - x_5 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 4x_1 - 5x_2 - 3x_5 = 0 \\ 4x_1 - 20x_2 + 9x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

соответственно. Тогда их пересечение задаётся линейной системой

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 - x_5 = 0 \\ 5x_2 + 11x_3 - x_5 = 0 \\ 4x_1 - 5x_2 - 3x_5 = 0 \\ 4x_1 - 20x_2 + 9x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases};$$

приводя соответствующую матрицу к ступенчатому виду, обнаруживаем, что фундаментальная система решений этой системы состоит из вектора: $(5, 1, 0, 0, 5)$. Значит, заданные плоскости скрещиваются по вектору $(5, 1, 0, 0, 5)$.

Глава 2

Линейные операторы

2.1 Матрица линейного оператора

Задача 30. *Найти матрицу линейного оператора в трехмерном пространстве* $\mathbb{R}^3$ *(со стандартным скалярным произведением), заданного формулой* $x \mapsto (x,a)a$, *где* $a = (3,2,1)$, *в стандартном базисе в* $\mathbb{R}^3$ *и в базисе* $b_1 = (1,1,1)$, $b_2 = (0,1,1)$, $b_3 = (0,0,-1)$.

Решение.

Поскольку по столбцам матрицы линейного оператора стоят образы базисных векторов, найдём, куда переходят векторы стандартного базиса e_1, e_2, e_3 под действием заданного оператора:

$$e_1 \mapsto 3a, \quad e_2 \mapsto 2a, \quad e_3 \mapsto a.$$

Поэтому в стандартном базисе матрица данного оператора имеет вид

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично рассматривая базис b_1, b_2, b_3, получаем, что

$$b_1 \mapsto 6a, \quad b_2 \mapsto 3a, \quad b_3 \mapsto -a.$$

Однако, нам необходимо записать координаты образов базисных векторов именно в базисе b_1, b_2, b_3, для чего придётся разложить вектор a по этому базису. В данном случае разложение очевидно: $a = 3b_1 - b_2 + b_3$. Поэтому, искомая матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 18 & 9 & -3 \\ -6 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & -1 \end{pmatrix}. \ \square$$

Задача 31. *В пространстве многочленов* $\mathbb{R}_5[x]$ *степени не выше пятой найти матрицы оператора дифференцирования* $\frac{d}{dx}$ *и оператора сдвига* $T: \ p(x) \mapsto p(x+1)$ *в базисе* $1, x, x^2, x^3, x^4, x^5$.

Решение.

Записывая координаты образов базисных векторов, получаем матрицу оператора дифференцирования:

$$A_{\frac{d}{dx}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для получения матрицы оператора сдвига необходимо воспользоваться биномом Ньютона для выражений вида $(x+1)^k$:

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \square$$

Задача 32. *Линейный оператор в некотором базисе e_1, e_2, e_3 имеет матрицу*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найти его матрицу в базисе $f_1 = e_1 + 2e_2 + e_3,\ f_2 = -7e_1 + 4e_2 - 2e_3,\ f_3 = 3e_1 - e_2 + e_3.$

Решение.

Составим матрицу перехода, записав по столбцам координаты векторов нового базиса в старом:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда обратная матрица имеет вид

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & -7 \\ 8 & 5 & -18 \end{pmatrix},$$

а искомая матрица выражается по формуле

$$B = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 17 & -9 & 9 \\ -22 & 20 & -15 \\ -54 & 44 & -35 \end{pmatrix}. \square$$

Задача 33. *Линейный оператор f в базисе $a_1=(2,3,5)$, $a_2=(-1,0,1)$, $a_3=(3,1,-1)$ имеет матрицу*

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2\\ 3 & 11 & -1\\ -3 & 2 & 4\end{pmatrix}.$$

Найти его матрицу в базисе $b_1=(1,0,2)$, $b_2=(3,-1,5)$, $b_3=(-2,4,-1)$.

Решение.

Запишем матрицы перехода C_1 и C_2 от стандартного базиса в $\mathbb{R}^3$ к базисам a_1,a_2,a_3 и b_1,b_2,b_3 соответственно:

$$C_1=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3\\ 3 & 0 & 1\\ 5 & 1 & -1\end{pmatrix},\quad C_2=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2\\ 0 & -1 & 4\\ 2 & 5 & -1\end{pmatrix}.$$

Тогда матрица $C=C_1^{-1}C_2$ является матрицей перехода от базиса $\{a_1,a_2,a_3\}$ к базису $\{b_1,b_2,b_3\}$. Поскольку элементарным преобразованиям строк матрицы соответствует домножение её на матрицы элементарных преобразований слева, нет необходимости отдельно находить матрицу C_1^{-1}, а затем домножать её на C_2; достаточно записать матрицы C_1 и C_2 рядом и применить к матрице C_2 элементарные преобразования, приводящие её к единичной:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -1 & 3 & 1 & 3 & -2\\ 3 & 0 & 1 & 0 & -1 & 4\\ 5 & 1 & -1 & 2 & 5 & -1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 3 & 10 & -11\\ 0 & 1 & 0 & -22 & -76 & 91\\ 0 & 0 & 1 & -9 & -31 & 37\end{array}\right).$$

Таким образом,

$$C=\begin{pmatrix} 3 & 10 & -11\\ -22 & -76 & 91\\ -9 & -31 & 37\end{pmatrix}.$$

Теперь осталось, зная матрицу перехода, записать матрицу оператора f в другом базисе:

$$C^{-1}AC=\begin{pmatrix} -9 & 29 & -74\\ 5 & -12 & 31\\ 2 & -3 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2\\ 3 & 11 & -1\\ -3 & 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 10 & -11\\ -22 & -76 & 91\\ -9 & -31 & 37\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 72 & 115 & 182\\ -61 & -156 & 56\\ -36 & -111 & 101\end{pmatrix}.\ \square$$

Задача 34. *Доказать, что существует единственное линейное преобразование трёхмерного пространства, переводящее векторы a_1, a_2 и a_3 в векторы b_1, b_2 и b_3 соответственно. Найти матрицу этого преобразования в том же базисе, в котором заданы координаты векторов:*

$a_1=(4,1,-1)$ $\quad$ $a_2=(-1,4,5)$ $\quad$ $a_3=(-2,0,1)$

$b_1=(2,3,1)$ $\quad$ $b_2=(1,1,-1)$ $\quad$ $b_3=(-1,0,1)$

Решение.

Запишем координаты данных векторов в матрицы A и B по столбцам. Если такое линейное преобразование f существует и задаётся матрицей C в том же базисе, в котором заданы координаты данных векторов, то для каждого $i=1,2,3$ выполнено равенство $Ca_i=b_i$. Это означает, что имеет место матричное равенство $CA = B$, т.е. $C = BA^{-1}$ если матрица A обратима. В нашем случае обе матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

— невырожденные; поэтому искомое линейное преобразование существует, единственно и задаётся матрицей

$$C = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 9 & -8 \\ 1 & -2 & 2 \\ -9 & 19 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -11 & 25 & -22 \\ -14 & 30 & -27 \end{pmatrix}. \quad \square$$

2.2 Ядро и образ линейного оператора

Задача 35. *Найти ядро и образ линейного оператора f, заданного своей матрицей в некотором базисе:*

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 9 & 5 & 10 \\ 3 & 1 & 7 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Приведём матрицу оператора к ступенчатому виду:

$$A_f \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & -7 & -7 & 1 & -6 \\ 0 & 5 & 5 & 4 & 9 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & -8 & -8 & -2 & -10 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 22 & 22 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 3 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Поскольку элементарные преобразования над строками матрицы не нарушают линейных соотношений между её столбцами, первый, второй и четвёртый столбцы исходной матрицы являются базисными, т.е. векторы

$$(1, 2, -1, 4, 3), \quad (3, -1, 2, 1, 1), \quad (0, 1, 4, 5, -2)$$

можно взять в качестве базисных в образе оператора f. Для нахождения ядра этого оператора достаточно построить фундаментальную систему решений для линейной системы $A_f x = 0$. Легко видеть, что в данном случае она состоит из двух векторов:

$$v_1 = (-2, -1, 1, 0, 0), \quad v_2 = (-1, -1, 0, -1, 1).$$

Таким образом, $\operatorname{Ker} f = \langle v_1, v_2 \rangle$. $\square$

Задача 36. *Найти ядро и образ следующих операторов, действующих в пространстве многочленов $\mathbb{R}_n[x]$ степени не выше n:*

1. $T: p(x) \mapsto p(x+1)$;

2. $R: p(x) \mapsto p(-x)$;

3. $D: p(x) \mapsto x^2 p''(x)$;

4. $P: p(x) \mapsto p(0)x$.

Решение.

1. Поскольку оператор сдвига обратим, $T^{-1}p(x) = p(x-1)$, его образом является все пространство $\mathbb{R}_n[x]$, а ядро — нулевое.

2. Оператор R является инволюцией: $R^2 = \mathrm{id}$; поэтому его образ составляет все пространство $\mathbb{R}_n[x]$, а ядро — нулевое.

3. Легко видеть, что образ оператора D состоит из всех многочленов, делящихся на x^2, а ядро состоит из всех линейных многочленов.

4. Образ оператора R состоит из всех многочленов, пропорциональных многочлену x, т.е. $\operatorname{Im} P = \langle x \rangle$, а ядро состоит из всех многочленов, обращающихся в нуль при $x = 0$, т.е. делящихся на x. □

2.3 Собственные значения и собственные векторы

Задача 37. *Найти собственные значения и собственные векторы оператора P проектирования на подпространство V_1 параллельно подпространству V_2 и оператора R отражения относительно V_1 параллельно V_2.*

Решение.

Все пространство V раскладывается в прямую сумму: $V = V_1 \oplus V_2$, т.е. произвольный вектор $v \in V$ представляется в виде $v = v_1 + v_2$, где $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$. Поэтому, для произвольного вектора $v \in V$ имеем:

$$P(v) = v_1, \quad R(v) = v_1 - v_2.$$

Это означает, что подпространство V_1 является собственным, соответствующим собственному значению $\lambda = 1$ сразу для обоих операторов, а подпространство V_2 является собственным, соответствующим собственному значению $\lambda = 0$ для оператора P, и соответствующим собственному значению $\lambda = -1$ для оператора R. □

Задача 38. *Найти собственные значения, их кратности и собственные подпространства линейного оператора f, заданного своей матрицей в некотором базисе:*

$$A_f = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 8 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Найдём характеристический многочлен данного оператора:

$$\chi_f(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -2 & 0 \\ 4 & -1-\lambda & 0 \\ 8 & -4 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda + 3 = -(\lambda-1)^2(\lambda-3).$$

Таким образом, $\lambda = 1$ и $\lambda = 3$ являются собственными значениями оператора f кратности 2 и 1 соответственно. Найдём теперь соответствующие собственные подпространства:

$$A_f - E = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 8 & -4 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

т.е. собственное подпространство V_1, соответствующее $\lambda = 1$, двумерно: $V_1 = \langle (1,2,0), (0,0,1) \rangle$. Для другого собственного значения $\lambda = 3$ аналогично имеем:

$$A_f - 3E = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 8 & -4 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

т.е. $V_3 = \langle (1,1,2) \rangle$. $\square$

Задача 39. *Найти собственные значения, их кратности и собственные подпространства линейного оператора f, заданного своей матрицей в некотором базисе:*

$$A_f = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Матрица оператора f блочно-диагональна, поэтому её характеристический многочлен имеет вид

$$\chi_f(\lambda) = ((3-\lambda)(1-\lambda)+1)((5-\lambda)(-1-\lambda)+9) = (\lambda-2)^4,$$

т.е. $\lambda = 2$ является единственным собственным значением кратности 4. Приведём матрицу $A_f - 2E$ к ступенчатому виду (в данном случае удобнее, чтобы ступеньки шли в другую сторону):

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что собственное пространство V_2 двумерно: $V_2 = \langle (1,1,0,1), (0,0,1,1) \rangle$. $\square$

2.4 Жорданова форма

Задача 40. *Найти собственные значения и корневые подпространства линейного оператора, заданного матрицей*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Характеристический многочлен матрицы A имеет вид $\chi_A(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 4\lambda^2 = \lambda^2(\lambda-2)^2$. Поскольку оба собственных значения $\lambda = 0$ и $\lambda = 2$ двукратны, соответствующие корневые пространства V_0 и V_2 двумерны.

Рассмотрим сперва $\lambda = 0$; соответствующий собственный вектор имеет вид $(0,1,0,1)$. Возведём исходную матрицу в квадрат:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 4 \end{pmatrix};$$

легко видеть, что корневой вектор высоты 2 имеет вид $(1,0,0,0)$. Таким образом, поскольку алгебраическая кратность корня $\lambda = 0$ равна двум, корневое подпространство V_0 двумерно и имеет вид $V_0 = \langle (0,1,0,1), (1,0,0,0) \rangle$.

Рассмотрим теперь другое собственное значение $\lambda = 2$, соответствующий ему собственный вектор имеет вид $(1,0,0,1)$. Поскольку

$$(A-2E)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 & -4 \\ -4 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix},$$

корневой вектор высоты 2 имеет вид $(1,0,1,0)$. Таким образом, $V_2 = \langle (1,0,0,1), (1,0,1,0) \rangle$. $\square$

Прежде чем разбирать задачи на нахождение жордановой формы и жорданова базиса матриц линейных операторов, опишем кратко общий алгоритм. Пусть линейный оператор $f : V \to V$ задан своей матрицей A_f в некотором базисе. Прежде всего необходимо найти его характеристический многочлен $\chi_f(\lambda)$. Рассмотрим последовательно несколько случаев.

A. Нильпотентный оператор.

Если $\chi_f(\lambda) = \pm\lambda^n$, то линейный оператор f — нильпотентен. Это означает, что найдётся такое натуральное $k \leqslant n$, что $f^k = 0$. Без ограничения общности можно считать, что k — минимальная степень, в которой оператор f обращается в нуль. Это означает, что k — это максимальный размер жордановой клетки в жордановой форме оператора f. Предположим, что жорданов базис для оператора f уже найден. Тогда, если записать матрицу оператора f в этом базисе, мы получим блочно-диагональную матрицу с нулями на главной диагонали. Легко видеть, что её ранг равен $n - r$, где n — размерность матрицы, а r — количество клеток в жордановой форме. Поскольку ранг матрицы оператора не зависит от выбора базиса, это соотношение справедливо и для матрицы оператора в исходном базисе. Пусть r_j — количество жордановых клеток размера j в жордановой форме оператора f. Тогда полученное выше соотношение можно записать в виде

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n - \operatorname{rk} A_f.$$

Рассмотрим теперь матрицу A_f^2; при возведении в квадрат её жордановой формы, в каждой клетке квазидиагональ, состоящая из единиц, поднимется на один ряд выше. Это означает, что ранг каждой жордановой клетки размера 2 или больше в жордановой форме матрицы A_f^2 будет на 2 меньше её размера (жорданова клетка размера один — нулевая). Таким образом, каждая клетка размера 2 и больше вносит вклад 2 в падение ранга матрицы A_f^2 по отношению к её размеру, а каждая клетка размера 1 — вклад 1. Таким образом, получаем ещё одно уравнение:

$$r_1 + 2(r_2 + r_3 + \cdots + r_k) = n - \operatorname{rk} A_f^2.$$

Продолжая дальше, рассмотрим матрицу A_f^3. Квазидиагонали, состоящие из единиц, у всех клеток размера не меньше, чем 3, сдвинутся ещё на один ряд выше. Это означает, что каждая жорданова клетка размера 3 или больше вносит вклад 3 в падение ранга (клетки меньшего размера обнуляются). Это даёт нам ещё одно уравнение:

$$r_1 + 2r_2 + 3(r_3 + \cdots + r_k) = n - \operatorname{rk} A_f^3.$$

Продолжая процесс, получаем линейную неоднородную систему

$$\left\{\begin{array}{l} r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_k = n - \operatorname{rk} A_f \\ r_1 + 2(r_2 + r_3 + \cdots + r_k) = n - \operatorname{rk} A_f^2 \\ r_1 + 2r_2 + 3(r_3 + \cdots + r_k) = n - \operatorname{rk} A_f^3 \\ \cdots \\ r_1 + 2r_2 + 3r_3 + \cdots + kr_k = n - \operatorname{rk} A_f^k \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rr} r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_k = & n - \operatorname{rk} A_f \\ r_2 + r_3 + \cdots + r_k = & \operatorname{rk} A_f - \operatorname{rk} A_f^2 \\ r_3 + \cdots + r_k = & \operatorname{rk} A_f^2 - \operatorname{rk} A_f^3 \\ \cdots & \\ r_k = & \operatorname{rk} A_f^{k-1} - \operatorname{rk} A_f^k \end{array}\right. \quad (2.1)$$

Поскольку матрица последней линейной системы верхнетреугольна, её определитель отличен от нуля, и соответствующая система имеет единственное решение. Таким образом, *в теории* подобная процедура позволяет найти жорданову форму произвольного линейного оператора. Однако, *на практике*, как станет понятно при разборе примеров, в каждом конкретном случае нет необходимости выписывать и решать такую систему уравнений целиком, поскольку при достаточно небольшом размере матрицы вся информация о количестве клеток того или иного размера быстрее получается путём рассмотрения первых двух-трёх уравнений этой системы и перебора различных вариантов разбиения числа n в сумму $r_1 + r_2 + \cdots + r_k$. Отметим, что в случае нильпотентного оператора последнее уравнение в системах (2.1) немного упрощается, поскольку $\operatorname{rk} A_f^k = 0$; в том виде, в котором эти системы приведены, они справедливы и в более общем виде (см. ниже).

Теперь обсудим процесс построения жорданова базиса. Для начала необходимо взять какую-нибудь максимальную систему векторов $\{e_1^{(k)}, e_2^{(k)}, \ldots, e_{r_k}^{(k)}\}$, из подпространства $\operatorname{Ker} f^k$ (которое в данном случае совпадает со всем пространством V), линейно независимую *относительно подпространства* $\operatorname{Ker} f^{k-1} \subset \operatorname{Ker} f^k$. Это означает, что никакая нетривиальная линейная комбинация этих векторов не должна принадлежать подпространству $\operatorname{Ker} f^{k-1}$ (иными словами, достаточно выбрать любой базис в фактор-пространстве $\operatorname{Ker} f^k / \operatorname{Ker} f^{k-1}$ и рассмотреть произвольные прообразы выбранных векторов в $\operatorname{Ker} f^k$ при естественной проекции

$\pi : \operatorname{Ker} f^k \to \operatorname{Ker} f^k / \operatorname{Ker} f^{k-1}$). Построенные векторы являются старшими корневыми векторами и соответствуют жордановым клеткам размера k; поэтому их количество совпадает с количеством жордановых клеток максимальной размерности. Далее применим оператор f к уже построенным векторам и получим векторы

$$e_1^{(k-1)},\ e_2^{(k-1)}, \dots, e_{r_k}^{(k-1)}, \tag{2.2}$$

где $e_j^{(k-1)} = f(e_j^{(k)})$ для всех $j = 1, 2, \dots r_k$, принадлежащие подпространству $\operatorname{Ker} f^{k-1}$. Дополним их до базиса подпространства $\operatorname{Ker} f^{k-1}$ векторами $e_{r_k+1}^{(k-1)}, \dots, e_{s_{k-1}}^{(k-1)}$, где $s_{k-1} = r_k + r_{k-1}$, так, чтобы вся система

$$e_1^{(k-1)},\ e_2^{(k-1)}, \dots, e_{s_{k-1}}^{(k-1)}$$

была линейно независима относительно подпространства $\operatorname{Ker} f^{k-2}$. Векторы, которыми мы дополнили систему (2.2), являются корневыми высоты $k-1$ и соответствуют жордановым клеткам размера $k-1$. Продолжим процесс: допустим, уже построены корневые векторы

$$e_1^{(j-1)},\ e_2^{(j-1)}, \dots, e_{s_j}^{(j-1)} \tag{2.3}$$

высоты j, где $s_j = r_k + r_{k-1} + \dots + r_j$. Тогда дополняя их образы под действием оператора f до базиса в подпространстве $\operatorname{Ker} f^{j-1}$ так, чтобы полученная система была линейно независима относительно подпространства $\operatorname{Ker} f^{j-2}$, мы построим корневые векторы высоты $j-1$. Описанный процесс закончится, когда мы дойдем до корневых векторов высоты 1, т.е. до собственных векторов. Искомый жорданов базис является объединением систем векторов (2.3), построенных на j-том шагу этого процесса.

$\operatorname{Ker} f^k$	$e_1^{(k)}$	$e_2^{(k)}$	$\dots$	$e_{r_k}^{(k)}$									
	$\downarrow f$	$\downarrow f$		$\downarrow f$									
$\operatorname{Ker} f^{k-1}$	$e_1^{(k-1)}$	$e_2^{(k-1)}$	$\dots$	$e_{r_k}^{(k-1)}$	$e_{r_k+1}^{(k-1)}$	$e_{r_k+2}^{(k-1)}$	$\dots$	$e_{s_{k-1}}^{(k-1)}$					
	$\downarrow f$	$\downarrow f$		$\downarrow f$	$\downarrow f$	$\downarrow f$		$\downarrow f$					
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$					
	$\downarrow f$	$\downarrow f$		$\downarrow f$	$\downarrow f$	$\downarrow f$		$\downarrow f$					
$\operatorname{Ker} f$	$e_1^{(1)}$	$e_2^{(1)}$	$\dots$	$e_{r_k}^{(1)}$	$e_{r_k+1}^{(1)}$	$e_{r_k+2}^{(1)}$	$\dots$	$e_{s_{k-1}}^{(1)}$	$\dots$	$e_{s_2+1}^{(1)}$	$e_{s_2+2}^{(1)}$	$\dots$	$e_{s_1}^{(1)}$

Жорданова форма линейного оператора определена однозначно с точностью до порядка жордановых клеток, который мы можем выбирать произвольно. Однако, при построении жорданова базиса порядок векторов в нем должен соответствовать выбранному порядку жордановых клеток. В приведённой выше таблице каждый вертикальный столбец соответствует одной жордановой клетке, причем нумерация векторов в этом столбце (в соответствии с которой они входят в жорданов базис) идёт снизу вверх т.к. сперва должен идти собственный вектор, затем — корневой высоты 2, и т.д. Таким образом, если векторы из этой таблицы упорядочиваются в жорданов базис снизу вверх в каждом столбце, а столбцы берутся, например, слева направо, то жордановы клетки в соответствующей жордановой форме будут упорядочены по убыванию.

B. Оператор с единственным собственным значением.

Если $\chi_f(\lambda) = \pm(\lambda - \lambda_0)^n$, то линейный оператор $g = f - \lambda_0 \operatorname{Id}$ — нильпотентен. Произвольный жорданов базис для оператора g будет искомым, а жорданова форма оператора f будет отличаться от жордановой формы оператора g тем, что во втором случае на диагонали вместо нулей будет стоять λ_0. Таким образом, этот случай сводится к случаю нильпотентного оператора заменой f на $f - \lambda_0 \operatorname{Id}$.

C. Общий случай.

В общем случае, т.е. когда характеристический многочлен $\chi_f(\lambda) = \pm(\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (\lambda - \lambda_q)^{\alpha_q}$ имеет по крайней мере два различных корня, линейное пространство V раскладывается в прямую сумму корневых подпространств V_i для оператора f, соответствующих собственным значениям λ_i, каждое из которых инвариантно относительно f. Поэтому для каждого $i = 1, 2, \dots, q$ корректно определено ограничение $f|_{V_i}$ на корневое подпространство V_i, причем это ограничение является оператором с единственным собственным значением λ_i. Поэтому нахождение жордановой формы и жорданова базиса в общем случае сводится к нахождению жордановой формы и соответствующего базиса для операторов $f|_{V_i}$. На практике это означает, что для нахождения жордановой формы и жорданова базиса необходимо последовательно рассматривать все собственные значения λ_i и для каждого из них изучать вырожденный оператор $f - \lambda_i \operatorname{Id}$. Фиксируем некоторое $i = 1, 2, \dots, q$; в силу вырожденности оператора $f - \lambda_i \operatorname{Id}$ найдётся такое k, что $\operatorname{rk}(A_f - \lambda_i)^{k+1} = \operatorname{rk}(A_f - \lambda_i)^k$. Без ограничения общности можно считать, что k — наименьшее из чисел, обладающих этим свойством; легко видеть, что $0 < k < n$, поскольку λ_i — не единственное собственное значение (в случае нильпотентного оператора мы искали такую минимальную степень, что оператор в этой степени обратится в ноль; в общем случае, мы должны найти такую минимальную степень, в при возведении в которую ранг матрицы оператора стабилизируется). Тогда размеры и количество жордановых клеток, соответствующих собственному значению λ_i определяются из системы (2.1), где на место оператора f поставлен оператор $f - \lambda_i \operatorname{Id}$. Та часть жорданова базиса, которая содержится в подпространстве V_i, строится по описанной выше схеме: необходимо взять произвольную максимальную линейно независимую систему векторов из $\operatorname{Ker}(f - \lambda_i \operatorname{Id})^k$, векторы которой независимы относительно подпространства $\operatorname{Ker}(f - \lambda_i \operatorname{Id})^{k-1}$, рассмотреть их образы под действием оператора $f - \lambda_i \operatorname{Id}$, дополнить до базиса в $\operatorname{Ker}(f - \lambda_i \operatorname{Id})^{k-1}$, и т.д. Единственная разница со случаем оператора с одним собственным значением состоит в том, что в том случае подпространство $\operatorname{Ker}(f - \lambda_i \operatorname{Id})^k$ совпадает со всем пространством V, что не так, когда у оператора есть по крайней мере два различных собственных значения.

ЗАДАЧА 41. *Найти жорданову форму и жорданов базис оператора $\frac{d^3}{dx^3}$ трёхкратного дифференцирования в пространстве $\mathbb{R}_{12}[x]$ многочленов степении не выше 12.*

Решение.

Легко видеть, что оператор трёхкратного дифференцирования в любом конечномерном подпространстве линейного пространства всех многочленов нильпотентен. Таким образом, $\lambda = 0$ является его единственным собственным значением. Поскольку ядро оператора $\frac{d^3}{dx}$ трёхмерно (оно состоит из всех многочленов степени не выше 2), его жорданова форма состоит из трёх клеток. Ядро оператора $\left(\frac{d^3}{dx^3}\right)^2$ шестимерно, т.е. ранг этого оператора на 3 меньше, чем ранг оператора $\frac{d^3}{dx^3}$; это означает, что размерность всех жордановых клеток больше единицы. Далее, поскольку

$$\dim \operatorname{Ker} \left(\frac{d^3}{dx^3}\right)^3 = 9 \quad \text{и} \quad \dim \operatorname{Ker} \left(\frac{d^3}{dx^3}\right)^4 = 12,$$

жорданова форма рассматриваемого оператора не имеет клеток размера 2 и 3. Таким образом, поскольку $\dim \mathbb{R}_{12}[x] = 13$, жорданова форма оператора трёхкратного дифференцирования в этом пространстве имеет вид

$$J_{\frac{d^3}{dx^3}} = \begin{pmatrix} J_4(0) & & \\ & J_4(0) & \\ & & J_5(0) \end{pmatrix}.$$

Перейдём теперь к построению жорданова базиса $e_1, e_2, \ldots, e_{13}$. В качестве старшего корневого вектора e_{13} можно взять любой вектор из ядра оператора $\left(\frac{d^3}{dx^3}\right)^5$ (т.е. любой многочлен из $\mathbb{R}_{12}[x]$), не лежащий в ядре $\left(\frac{d^3}{dx^2}\right)^4$. Положим $e_{13} = \frac{x^{12}}{12!}$. Найдём теперь корневые векторы высоты 4, один из которых получается автоматически:

$$e_{12} = \frac{d^3}{dx^3} e_{13} = \frac{x^9}{9!};$$

необходимо дополнить его до базиса пространства $\operatorname{Ker}\left(\frac{d^3}{dx^3}\right)^4$ относительно подпространства $\operatorname{Ker}\left(\frac{d^3}{dx^3}\right)^3$, т.е. найти такие векторы e_4 и e_8 из $\operatorname{Ker}\left(\frac{d^3}{dx^3}\right)^4$, что они вместе с вектором e_{12} и произвольным базисом подпространства $\operatorname{Ker}\left(\frac{d^3}{dx^3}\right)^3$ дадут базис $\operatorname{Ker}\left(\frac{d^3}{dx^3}\right)^4$. Легко видеть, что векторы

$$e_4 = \frac{x^{11}}{11!} \quad \text{и} \quad e_8 = \frac{x^{10}}{10!}.$$

удовлетворяют этому требованию, поскольку все три построенных корневых вектора высоты 4, как многочлены, имеют различные степени. Остальные векторы жорданова базиса получаются автоматически: корневые векторы высоты 3 имеют вид

$$e_3 = \frac{d^3}{dx^3} e_4 = \frac{x^8}{8!}, \quad e_7 = \frac{d^3}{dx^3} e_8 = \frac{x^7}{7!}, \quad e_{11} = \frac{d^3}{dx^3} e_{12} = \frac{x^6}{6!}.$$

Аналогично получаем корневые векторы высоты 2

$$e_2 = \frac{d^3}{dx^3} e_3 = \frac{x^5}{5!}, \quad e_6 = \frac{d^3}{dx^3} e_7 = \frac{x^4}{4!}, \quad e_{10} = \frac{d^3}{dx^3} e_{11} = \frac{x^3}{3!}$$

и корневые векторы высоты 1 (т.е. собственные векторы)

$$e_1 = \frac{d^3}{dx^3} e_2 = \frac{x^2}{2!}, \quad e_5 = \frac{d^3}{dx^3} e_6 = \frac{x}{1!}, \quad e_9 = \frac{d^3}{dx^3} e_{10} = 1. \ \square$$

Задача 42. *Найти жорданову форму, жорданов базис и минимальный многочлен для линейного оператора*

$$A_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Данная матрица имеет блочную структуру, причем её левый нижний 3×3-блок состоит лишь из нулей. Это означает, что её характеристический многочлен является произведением характеристических многочленов диагональных блоков и, поэтому, может быть легко вычислен:

$$\begin{aligned} \det(A_f - \lambda E) &= \det \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2-\lambda & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -\lambda \end{array} \right) = \\ &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^6. \end{aligned}$$

Таким образом, характеристический многочлен оператора имеет единственный корень $\lambda = 1$ кратности 6. Запишем матрицу $A_f - E$ и приведём её к ступенчатому виду:

$$A_f - E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\mathrm{rk}(A_f - E) = 3$, а собственное подпространство, соответствующее единственному собственному значению $\lambda = 1$, задаётся линейной системой

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_4 + x_6 = 0 \\ x_5 + x_6 = 0 \end{cases}. \qquad (2.4)$$

Поскольку при вычитании $\lambda = 1$ по диагонали ранг матрицы упал на 3, жорданова форма матрицы A_f состоит из трёх клеток. Для нахождения размеров этих клеток найдём ранг матрицы $(A_f - E)^2$:

$$(A_f - E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что $\mathrm{rk}(A_f - E)^2 = 1$, а подпространство корневых векторов высоты не более 2 задаётся единственным уравнением $x_4 + x_6 = 0$. Поскольку при возведении в квадрат ранг матрицы $A_f - E$ упал на 2, жорданова форма содержит две клетки размера больше 1, а так как матрица имеет размер 6×6, единственная возможность — это три клетки размеров 1, 2 и 3. Таким образом, жорданова форма имеет вид

$$J=\begin{pmatrix} J_3(1) & & \\ & J_2(1) & \\ & & J_1(1)\end{pmatrix}.$$

Построим теперь жорданов базис $\{e_1, e_2, \dots, e_6\}$, соответствующий найденной жордановой форме. Поскольку $(A_f-E)^3=0$, все векторы являются корневыми высоты не более 3, т.е. в качестве e_3 можно взять произвольный вектор высоты 3, т.е. достаточно выбрать любой вектор, не удовлетворяющий условию $x_4+x_6=0$; для простоты дальнейших вычислений положим $e_3=(0,0,0,0,0,1)$. Тогда

$$e_2=(f-\mathrm{id})e_3=(0,0,1,1,1,-1),\quad e_1=(f-\mathrm{id})e_2=(2,2,-2,0,0,0).$$

Теперь в качестве e_5 можно выбрать любой корневой вектор высоты 2, который линейно независим с вектором e_2 относительно собственного подпространства, т.е. достаточно подобрать такое решение уравнения $x_4+x_6=0$, которое линейно независимо с e_2 и такое, что никакая нетривиальная линейная комбинация векторов e_2 и e_5 не является собственным вектором. Положим $e_5=(0,0,0,-1,0,1)$; поскольку вектор e_2 не является собственным, достаточно проверить, что вектор $e_2+\alpha e_5$ не удовлетворяет системе (2.4) ни при каком $\alpha\neq 0$. Действительно, подставляя координаты этого вектора в последнее уравнение системы (2.4), немедленно получаем, что $\alpha=0$. Тогда вектор

$$e_4=(f-\mathrm{id})e_5=(-1,0,1,0,0,0)$$

линейно независим с уже построенным вектором e_1 той же высоты 1. Таким образом, вся система $\{e_1,\dots,e_5\}$ линейно независима. Последний базисный вектор должен быть собственным (т.е. должен удовлетворять системе (2.4)) и должен быть линейно независим с векторами e_1 и e_4. Легко видеть, что вектор $e_6=(1,0,0,-1,-1,1)$ удовлетворяет этим требованиям. Таким образом, векторы $e_1,\dots e_6$ образуют жорданов базис.

Поскольку характеристический многочлен оператора f имеет единственный корень $\lambda=1$, а максимальная жорданова клетка имеет размер 3, минимальный многочлен $m_f(\lambda)$ имеет вид $m_f(\lambda)=(\lambda-1)^3$. $\square$

Задача 43. *Найти жорданову форму, жорданов базис и минимальный многочлен для линейного оператора*

$$A_f=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 & 2 & 2 & -1 & 8\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & -2 & 16\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -1 & -14\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -3 & -2 & -9\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Решение.

Поскольку данная матрица верхнетреугольна, её характеристический многочлен $\chi_f(\lambda)$ имеет два четырёхкратных корня: $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$. Нетрудно проверить, что

$$A_f^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & -1 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 7 & 1 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -6 & -4 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -4 & -4 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы A_f равен 6, а ранг матрицы A_f^2 равен 4; это означает, что жорданова форма оператора f содержит две двумерные клетки, соответствующие собственному значению $\lambda = 0$. Легко заметить, что матрица $A_f - E$ имеет ранг 7; это означает, что собственному значению $\lambda = 1$ соответствует только одна жорданова клетка. Таким образом, искомая жорданова форма имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} J_2(0) & & \\ & J_2(0) & \\ & & J_4(1) \end{pmatrix},$$

а минимальный многочлен оператора f имеет шестую степень: $m_f(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1)^4$.

Построим теперь соответствующий жорданов базис. В качестве векторов e_2 и e_4 (т.е. корневых векторов высоты 2) можно взять, например, второй и четвёртый векторы стандартного базиса в $\mathbb{R}^8$ соответственно. Действительно, в этом случае векторы

$$e_1 = f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = f(e_4) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

линейно независимы и образуют базис в корневом пространстве, соответствующем собственному значению $\lambda = 0$.

Для построения базиса во втором корневом пространстве необходимо найти какой-нибудь корневой вектор высоты 4, т.е. вектор, аннулирующий матрицу $(A_f - E)^4$, но не аннулирующий матрицу $(A_f - E)^3$. Поскольку

$$(A_f - E)^3 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 & -6 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -6 & -3 & -11 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$(A_f - E)^4 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 & 8 & 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & 5 & 15 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 & -6 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

можно положить $e_8 = (1, 5, -2, 0, 0, 0, 0, 1)$; тогда остальные векторы жорданова базиса находятся автоматически:

$$e_7 = (f - \mathrm{id})(e_8) = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ -12 \\ -9 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_6 = (f - \mathrm{id})(e_7) = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -6 \\ -4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_5 = (f - \mathrm{id})(e_6) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \ \square$$

2.5 Функции от матриц

Задача 44. *Вычислить A^{50}, где*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Поскольку непосредственное возведение матрицы в большую степень не представляется разумным, приведём данную матрицу к жордановой форме. Нетрудно проверить, что матрица A имеет единственное собственное значение $\lambda = 2$; поскольку $\mathrm{rk}(A - 2E) = 1$, жорданова форма J матрицы A состоит из единственной жордановой клетки ранга 2. В качестве корневого вектора возьмём вектор $e_2 = (1, 0)$ (можно взять любой вектор, не являющийся собственным); тогда собственный вектор

$$e_1 = (A - 2E)e_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

дополняет вектор e_1 до жорданова базиса. Матрица перехода к жорданову базису имеет следующий вид:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Имеет место матричное равенство $J = C^{-1}AC$, откуда $A = CJC^{-1}$; поэтому

$$A^{50} = (CJC^{-1})^{50} = CJC^{-1} \cdot CJC^{-1} \cdot \dots \cdot CJC^{-1} = CJ^{50}C^{-1}.$$

Легко заметить, что

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{50} = \begin{pmatrix} 2^{50} & 50 \cdot 2^{49} \\ 0 & 2^{50} \end{pmatrix};$$

поэтому,

$$A^{50} = CJ^{50}C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{50} & 50 \cdot 2^{49} \\ 0 & 2^{50} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2^{50} \begin{pmatrix} -24 & 25 \\ -25 & 26 \end{pmatrix}. \square$$

Задача 45. *Вычислить* $\cos A$, *где*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Приведём сперва данную матрицу к жорданову виду. Нетрудно проверить, что её характеристический многочлен имеет вид $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3$. Это означает, что $\lambda = 0$ является единственным собственным значением матрицы A. Поскольку матрица

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

имеет ранг 1, жорданова форма исходной матрицы состоит из единственной трёхмерной клетки:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения соответствующего жорданова базиса найдём корневой вектор высоты 3: поскольку $\lambda = 0$ является единственным собственным значением, в качестве корневого вектора высоты 3 можно взять любой вектор, не аннулирующий матрицу A^2. Положим $e_3 = (1, 0, 0)$; тогда

$$e_2 := Ae_3 = (3, 1, 0), \quad e_1 = Ae_2 = (1, 0, -1).$$

Таким образом, матрица перехода к жорданову базису и обратная ей имеют вид

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

соответственно.

Требуется найти cos исходной матрицы; поскольку $\cos' = -\sin$ и $\cos'' = -\cos$, согласно общей формуле

$$\cos J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому,

$$\cos A = C \cdot \cos J \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}. \ \square$$

Задача 46. *Вычислить* $\exp A$*, где*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Найдём экспоненту от данной матрицы методом неопределённых коэффициентов. Для любой матрицы A второго порядка $\exp A = \alpha E + \beta A$ для некоторых скаляров α, β, причем многочлен $\alpha + \beta t$ должен совпадать с функцией e^t на спектре матрицы A. Легко заметить, что собственными значениями матрицы A являются $\lambda = \pm 2i$. Таким образом, неопределённые коэффициенты α и β должны удовлетворять следующей системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} \alpha + 2i\beta = e^{2i} \\ \alpha - 2i\beta = e^{-2i} \end{cases}.$$

Решая эту систему и пользуясь формулой Эйлера $e^{2i} = \cos 2 + i \sin 2$, получаем, что $\alpha = \cos 2$, $\beta = \frac{1}{2}\sin 2$. Таким образом,

$$\exp A = \begin{pmatrix} \cos 2 & \sin 2 \\ -\sin 2 & \cos 2 \end{pmatrix}. \ \square$$

2.6 Инвариантные подпространства

Задача 47. *Найти все нетривиальные инвариантные подпространства для линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей*

$$A_f = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 4 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Одномерные инвариантные подпространства — суть линейные оболочки собственных векторов линейного оператора. Характеристический многочлен данного оператора f имеет вид $\chi_f(\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 15\lambda - 9 = -(\lambda - 1)(\lambda - 3)^2$. Нетрудно проверить, что собственное пространство, соответствующее $\lambda = 1$, одномерно и является линейной оболочкой вектора $e_1 = (2, 2, -1)$, а собственное подпространство, соответствующее $\lambda = 3$, является линейной оболочкой векторов $e_2 = (1, 1, 0)$ и $e_3 = (-1, 0, 1)$. Таким образом, одномерные инвариантные подпространства оператора f — это l прямая с направляющим вектором e_1, исходящая из начала координат, и все прямые, проходящие через начало координат и лежащие в плоскости $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ (т.е. прямые, содержащиеся в собственном подпространстве).

Опишем теперь двумерные инвариантные подпространства оператора f. Пусть W — некоторое двумерное инвариантное подпространство. Если оно не является собственным подпространством, то в нем можно выбрать базис $\{u, v\}$ вида

$$u = e_1 + ae_2 + be_3, \quad v = ce_2 + de_3,$$

где a, b, c, d — некоторые скаляры. Подпространство W является инвариантным для f тогда и только тогда, когда существуют такие коэффициенты x_1, x_2, y_1, y_2, что выполнены равенства

$$f(u) = x_1 u + x_2 v, \quad f(v) = y_1 u + y_2 v.$$

Второе из этих равенств тривиально, поскольку вектор v по построению принадлежит собственному подпространству с собственным значением $\lambda = 3$ и, соответственно для него $y_1 = 0$, $y_2 = 3$. Далее, переписывая первое векторное равенство в координатах, получаем линейную систему:

$$\begin{cases} 1 = x_1 \\ 3a = ax_1 + cx_2 \\ 3b = bx_1 + dx_2 \end{cases}$$

Для нахождения необходимых и достаточных условий существования решений этой системы воспользуемся леммой Кронекера-Капелли. Расширенная матрица этой системы имеет вид

$$B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ a & c & 3a \\ b & d & 3b \end{array}\right).$$

Легко заметить, что поскольку первые 2 столбца матрицы B линейно независимы, условием существования решения является вырожденность этой матрицы. Поскольку $\det B = 2(ad - bc)$, необходимое и достаточное условие существования решения — пропорциональность строк (a, b) и (c, d). А это означает, что вместо базиса $\{u, v\}$ в пространстве W можно выбрать базис $\{e_1, v\}$, т.е. в качестве W можно взять любую плоскость, проходящую через прямую l. □

Задача 48. *Найти все инвариантные подпространства оператора дифференцирования $\frac{d}{dx}$ в пространстве $\mathbb{R}_n[x]$ многочленов степени не выше n с вещественными коэффициентами.*

Решение.

Рассмотрим произвольный многочлен $p \in \mathbb{R}_n[x]$ степени $k \leqslant n$ и предположим, что он содержится в некотором инвариантном подпространстве U. Тогда

$$\frac{d}{dx}(p), \frac{d^2}{dx^2}(p), \ldots \frac{d^k}{dx^k} \in U,$$

причем степень многочлена $\frac{d^m}{dx^m}(p)$ равна $k - m$. Это означает, что

$$\left\langle p, \frac{d}{dx}(p), \frac{d^2}{dx^2}(p), \ldots \frac{d^k}{dx^k} \right\rangle = \langle 1, x, x^2, \ldots, x^k \rangle.$$

Таким образом, если в качестве многочлена p взять произвольный многочлен максимальной степени из U, мы получим, что $U = \langle 1, x, x^2, \ldots, x^k \rangle$, т.е. все инвариантные подпространства для $\frac{d}{dx}$ исчерпываются подпространствами такого вида. □

Пример задачи 47 показывает, что нахождение всех инвариантных подпространств линейного оператора, вообще говоря, требует довольно неуклюжего рассмотрения подпространства общего вида. Однако, изучение сопряжённого оператора даёт простой способ нахождения $(n-1)$-мерных инвариантных подпространств, где n — размерность пространства. Пусть $f : V \to V$

— некоторый линейный оператор; *сопряжённым оператором* называется линейный оператор $f^* : V^* \to V^*$, действующий на сопряжённом пространстве и определяемый равенством

$$f^*(l)(v) = l(f(v))$$

для произвольных $l \in V^*$, $v \in V$. Нам потребуется следующая

Лемма 1. *Пусть линейный оператор $f : V \to V$ имеет матрицу A_f в некотором базисе $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ пространства V. Тогда сопряжённый оператор f^* в двойственном базисе $\{e^1, e^2, \ldots, e^n\}$ имеет матрицу A_f^T.*

Доказательство.

Пусть $A_f = (a_{ij})$, а $B = (b_{ij})$ — матрица оператора f^* в двойственном базисе. Тогда для любых $i, j = 1, \ldots, n$ имеем:

$$f^*(e^j)(e_i) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} e^k(e_i) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} \delta_i^k = b_{ij};$$

с другой стороны, по определению сопряжённого оператора

$$f^*(e^j)(e_i) = e^j(f(e_i)) = e^j \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k \right) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \delta_k^j = a_{ji}.$$

Значит, $B = A_f^T$. □

Для нахождения $(n-1)$-мерных инвариантных подпространств мы будем использовать следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть V — линейное пространство размерности n, а $f : V \to V$ — некоторый линейный оператор. Тогда все $(n-1)$-мерные инвариантные подпространства для f имеют вид $\operatorname{Ker} l$ для некоторого собственного вектора l оператора f^*. Любое подпространство вида $\operatorname{Ker} l$, где l — некоторый собственный вектор оператора f^*, инвариантно относительно f.*

Доказательство.

Пусть U — произвольное $(n-1)$-мерное инвариантное подпространство для оператора f. Тогда оно задаётся линейным уравнением $l = 0$ для некоторого ненулевого линейного функционала $l \in V^*$. Возьмём произвольный вектор $v \in U$, тогда в силу инвариантности U имеем: $f(v) \in U$. Это означает, что

$$f^*(l)(v) = l(f(v)) = 0,$$

поскольку U задаётся уравнением $l = 0$. Таким образом, в силу произвольности вектора v, ядра линейных функционалов l и $f^*(l)$ совпадают, что означает, что эти функционалы пропорциональны, т.е. существует такой скаляр λ, что $f^*(l) = \lambda l$. Значит, l — собственный вектор оператора f^*.

Пусть теперь l — произвольный собственный вектор оператора f^* с собственным значением λ. Рассмотрим $(n-1)$-мерное подпространство U, задаваемое уравнением $l = 0$. Тогда для любого $v \in U$ имеем:

$$l(f(v)) = f^*(l)(v) = \lambda l(v) = 0,$$

т.е. $f(v) \in U$. Таким образом, подпространство U инвариантно относительно f. □

Задача 49. *Найти все $(n-1)$-мерные инвариантные подпространства для вещественного линейного оператора заданного в некотором базисе $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ матрицей*

$$A_f = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Найдём собственные векторы матрицы A_f^T сопряжённого оператора в двойственном базисе, соответствующие действительным собственным значениям. Характеристический многочлен $\chi_f(\lambda)$ оператора f имеет вид

$$\chi_f(\lambda) = \lambda^4 + 4\lambda^3 - 2\lambda^2 - 12\lambda - 16 = (\lambda - 2)(\lambda + 4)(\lambda^2 + 2\lambda + 2),$$

т.е. у оператора f^* есть два действительных собственных значения $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = -4$. Поскольку векторы $(1,1,1,1)$ и $(1,-1,1,-1)$ являются собственными, соответствующими этим собственным значениям, линейные функционалы $l_1 = e^1 + e^2 + e^3 + e^4$ и $l_2 = e^1 - e^2 + e^3 - e^4$ являются собственными векторами для сопряжённого оператора f^*. Таким образом, линейный оператор f имеет два трёхмерных инвариантных подпространства, задаваемых уравнениями

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \quad \text{и} \quad x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \quad \square$$

Глава 3

Билинейные и квадратичные функции

3.1 Элементарные свойства билинейных и квадратичных функций

Задача 50. *Найти базисы левого и правого ядер билинейной функции*

$$\varphi(x,y) = x^1y^1 + 2x^1y^2 + 2x^1y^3 - 2x^2y^1 + 3x^2y^2 + x^2y^3 + x^3y^1 - 5x^3y^2 - 3x^3y^3.$$

Решение.
Матрица билинейной функции φ имеет вид

$$B_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & -3 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Имеем,

$$\varphi(x,y) = X^T B_\varphi Y,$$

где X и Y — столбцы координат векторов x и y соответственно.

Правое ядро R_φ билинейной функции φ состоит из всех векторов y таких, что $\varphi(x,y) = 0$ для всех x. Значит, оно состоит из всех векторов y, столбцы координат которых удовлетворяют уравнению $B_\varphi Y = 0$. Таким образом, чтобы найти базис подпространства R_φ, нам нужно решить систему однородных линейных уравнений с матрицей B_φ. Решаем её:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & -7 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 7 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{3.2}$$

Фундаментальная система решений этой системы, а значит, и базис правого ядра R_φ состоят из одного вектора $(4, 5, -7)$.

Левое ядро L_φ билинейной функции φ состоит из всех векторов x таких, что $\varphi(x,y) = 0$ для всех y. Значит, оно состоит из всех векторов x, столбцы координат которых удовлетворяют уравнению $X^T B_\varphi = 0$ или, что эквивалентно, уравнению $B_\varphi^T X = 0$. Таким образом, чтобы найти базис подпространства L_φ, нам нужно решить систему однородных линейных уравнений с матрицей B_φ^T. Решаем её:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{3.3}$$

Фундаментальная система решений этой системы, а значит, и базис левого ядра L_φ состоят из одного вектора $(1, 1, 1)$. □

Задача 51. *Найти все значения параметра α, при которых данная квадратичная функция Q положительно определена:*

$$Q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2\alpha x_1 x_2 - 2x_1 x_3 + 4x_2 x_3.$$

Решение. Согласно критерию Сильвестра, квадратичная функция положительно определена тогда и только тогда, когда все угловые миноры её матрицы положительны. Выпишем матрицу квадратичной функции Q и вычислим её угловые миноры.

$$B_Q = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ \alpha & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \Delta_1 = 1; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 2 \end{vmatrix} = 2 - \alpha^2; \quad \Delta_3 = |B_Q| = -4\alpha - 3\alpha^2.$$

Таким образом, условия $\Delta_2 > 0$ и $\Delta_3 > 0$ записываются в виде системы неравенств

$$\begin{cases} 2 - \alpha^2 > 0; \\ -4\alpha - 3\alpha^2 > 0. \end{cases}$$

Решением первого неравенства является интервал $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, решением второго — интервал $(-\frac{4}{3}, 0)$. Так как второй интервал содержится в первом, то он и является решением системы. Значит, квадратичная функция Q положительно определена тогда и только тогда, когда $-\frac{4}{3} < \alpha < 0$. □

3.2 Приведение квадратичной формы к нормальному виду невырожденными преобразованиями

Задача 52 (№1175 из [2]). *Найти нормальный вид в области вещественных чисел квадратичной формы*

$$x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + 2x_2 x_3.$$

Решение. Применим метод Лагранжа — метод выделения полных квадратов.

Посмотрим сначала на все члены, содержащие x_1 и дополним их до полного квадрата:

$$x_1^2 + 4x_1 x_2 + 2x_1 x_3 = (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 4x_2^2 - x_3^2 - 4x_2 x_3.$$

Получаем, что наша исходная квадратичная форма равна

$$(x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2 x_3.$$

Выпишем теперь все члены, не вошедшие в первую скобку и содержащие x_2, и дополним их до полного квадрата:

$$-3x_2^2 - 2x_2x_3 = -\left(\sqrt{3}x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_3\right)^2 + \frac{1}{3}x_3^2.$$

В результате получаем, что исходная квадратичная форма равна

$$(x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - \left(\sqrt{3}x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_3\right)^2 + \frac{7}{3}x_3^2.$$

Линейная невырожденная замена координат

$$\tilde{x}_1 = x_1 + 2x_2 + x_3, \quad \tilde{x}_2 = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}x_3, \quad \tilde{x}_3 = \sqrt{3}x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_3$$

переводит исходную квадратичную форму в её нормальный вид

$$\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 - \tilde{x}_3^2.$$

□

Задача 53 (№1182 из [2]). *Найти нормальный вид и невырожденное линейное преобразование, приводящее к этому виду, для квадратичной формы*

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

Решение. Если мы попробуем использовать то же метод, что и в задаче 52, то наткнёмся на препятствие: члена с x_1^2 нет и не ясно, как можно выделить полный квадрат. Так как у нас есть слагаемое x_1x_2, сделаем невырожденную линейную замену координат

$$x_1 = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2, \quad x_2 = \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2, \quad x_3 = \tilde{x}_3$$

и получим квадратичную форму

$$\tilde{x}_1^2 - \tilde{x}_2^2 + 2\tilde{x}_1\tilde{x}_3.$$

Как и в задаче 52, выделим последовательно полные квадраты:

$$\tilde{x}_1^2 - \tilde{x}_2^2 + 2\tilde{x}_1\tilde{x}_3 = (\tilde{x}_1 + \tilde{x}_3)^2 - \tilde{x}_2^2 - \tilde{x}_3^2.$$

Тогда линейная замена координат

$$\bar{x}_1 = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_3, \quad \bar{x}_2 = \tilde{x}_2, \quad \bar{x}_3 = \tilde{x}_3 \tag{3.4}$$

переводит исходную квадратичную форму в нормальный вид

$$\bar{x}_1^2 - \bar{x}_2^2 - \bar{x}_3^3.$$

Остаётся выразить конечные координаты через исходные. Подставляя

$$\tilde{x}_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2, \quad \tilde{x}_2 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2, \quad \tilde{x}_3 = x_3$$

в (3.4), получаем замену

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3, \quad \bar{x}_2 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2, \quad \bar{x}_3 = x_3.$$

□

Задача 54 (№1257 из [3]). *Для квадратичных функций f и g выяснить, существует ли линейное преобразование, переводящее функцию f в функцию g (для удобства индексы у координат пишутся снизу).*

1) $f = 2x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_2x_3,$

$g = 5y_1^2 + 6y_2^2 + 12y_1y_2;$

2) $f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3,$

$g = 4y_1^2 + y_2^2 + 9y_3^2 - 12y_1y_3;$

Решение. Приведём указанные квадратичные формы к нормальному виду. Мы уже обсуждали, как это делать, в задачах 52 и 53. В результате мы получим, что

1) $f = \tilde{x}_1^2 - \tilde{x}_2^2$, где, например, $\tilde{x}_1 = \sqrt{2}x_1 + \sqrt{2}x_2 - \sqrt{2}x_3$, $\tilde{x}_2 = x_2 - x_3$;

$g = \tilde{y}_1^2 - \tilde{y}_2^2$, где, например, $\tilde{y}_1 = \sqrt{6}y_1 + \sqrt{6}y_2$, $\tilde{y}_2 = y_1$;

2) $f = \tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2$, где, например, $\tilde{x}_1 = \sqrt{2}x_1 - \sqrt{2}x_2 - \sqrt{2}x_3$, $\tilde{x}_2 = x_2 + 2x_3$;

$g = \tilde{y}_1^2 + \tilde{y}_2^2 - \tilde{y}_3^2$, где, например, $\tilde{y}_1 = 2y_1 - 3y_2$, $\tilde{y}_2 = 3y_3$, $\tilde{y}_3 = \sqrt{8}y_2$.

Так как нормальный вид квадратичной формы единственен, то в случае 2) квадратичные формы f и g не могут быть переведены друг в друга линейным преобразованием, потому что нормальный вид квадратичных форм f и g разный.

В случае 1) квадратичные формы имеют одинаковый нормальный вид, а это значит, что f можно перевести линейным преобразованием в g.

В самом деле, пусть A обозначает линейное преобразование, переводящее квадратичную форму f к нормальному виду, а B обозначает линейное преобразование, переводящее квадратичную форму g к нормальному виду. Так как у f и g нормальный вид одинаков, то линейное преобразование $B^{-1} \circ A$ переводит квадратичную форму f в g.

□

Задача 55. *Существует ли линейное преобразование, переводящее квадратичную функцию Q_1 в квадратичную функцию Q_2:*

$$Q_1(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 - x_4^2;$$
$$Q_2(x) = x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_1x_4 + 4x_2x_3 + 4x_2x_4?$$

Решение.

I способ. Квадратичную функцию Q_1 можно перевести линейным преобразованием в квадратичную функцию Q_2 тогда и только тогда, когда у функций Q_1 и Q_2 совпадают положительные и отрицательные индексы инерции, то есть количества положительных и отрицательных коэффициентов при квадратах в их нормальных видах. Найдём нормальные виды квадратичных функций Q_1 и Q_2 при помощи метода Лагранжа и сравним их индексы инерции.

Вначале находим нормальный вид функции Q_1:

$$Q_1(x) = (x_1+x_2)^2 - 2x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 - x_4^2 = (x_1+x_2)^2 + (x_3-x_2)^2 - 3x_2^2 - x_4^2 = \\ = \tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 - \tilde{x}_3^2 - \tilde{x}_4^2,$$

где сделана замена

$$\tilde{x}_1 = x_1 + x_2; \quad \tilde{x}_2 = x_3 - x_2; \quad \tilde{x}_3 = \sqrt{3}\,x_3; \quad \tilde{x}_4 = x_4.$$

Значит, и положительный, и отрицательный индексы инерции квадратичной функции Q_1 равны 2.

Так как в квадратичной форме Q_2 коэффициенты при всех квадратах координат нулевые, прежде всего сделаем замену

$$x_1 = x_1' + x_2'; \quad x_2 = x_1' - x_2'; \quad x_3 = x_3'; \quad x_4 = x_4'.$$

Далее применяем метод Лагранжа:

$$\begin{aligned} f &= {x_1'}^2 + 6x_1'x_3' + 10x_1'x_4' - {x_2'}^2 - 2x_2'x_3' + 2x_2'x_4' = \\ &= {x_1'}^2 + 2x_1'(3x_3' + 5x_4') - {x_2'}^2 - 2x_2'x_3' + 2x_2'x_4' = \\ &= \Big({x_1'}^2 + 2x_1'(3x_3'+5x_4') + (3x_3'+5x_4')^2\Big) - (3x_3'+5x_4')^2 - {x_2'}^2 - 2x_2'x_3' + 2x_2'x_4' = \\ &= (x_1' + 3x_3' + 5x_4')^2 - {x_2'}^2 - 2x_2'x_3' + 2x_2'x_4' - 9{x_3'}^2 - 30x_3'x_4' - 25{x_4'}^2 = \\ &= x_1''^2 - x_2''^2 - 2x_2''x_3'' + 2x_2''x_4'' - 9x_3''^2 - 30x_3''x_4'' - 25x_4''^2 = \\ &= x_1''^2 - \Big(x_2''^2 + 2x_2''(x_3'' - x_4'') + (x_3''-x_4'')^2\Big) + (x_3''-x_4'')^2 - 9x_3''^2 - 30x_3''x_4'' - 25x_4''^2 = \\ &= x_1'''^2 - x_2'''^2 - 8x_3'''^2 - 32x_3'''x_4'' - 24x_4'''^2 = x_1'''^2 - x_2'''^2 - \Big(8x_3'''^2 + 32x_3'''x_4'' + 32x_4'''^2\Big) + 8x_4'''^2 = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 + y_4^2, \end{aligned}$$

где сделаны замены

$$\begin{cases} x_1'' = x_1' + 3x_3' + 5x_4'; \\ x_2'' = x_2'; \\ x_3'' = x_3'; \\ x_4'' = x_4'. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1''' = x_1''; \\ x_2''' = x_2'' + x_3'' - x_4''; \\ x_3''' = x_3''; \\ x_4''' = x_4''; \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = x_1'''; \\ y_2 = x_2'''; \\ y_3 = 2\sqrt{2}x_3''' + 4\sqrt{2}x_4'''; \\ y_4 = 2\sqrt{2}x_4'''. \end{cases}$$

Таким образом, и положительный, и отрицательный индексы инерции квадратичной функции Q_2 равны 2, то есть такие же, как у квадратичной функции Q_1. Следовательно, существует линейное преобразование, переводящее квадратичную функцию Q_1 в квадратичную функцию Q_2. $\square$

II способ. Так же, как в предыдущем способе, мы выясним совпадают ли положительный и отрицательный индексы инерции функции Q_1 с положительным и отрицательным индексами инерции функции Q_2, но сделаем это по-другому, воспользовавшись теоремой Якоби.

Матрицы квадратичных функций Q_1 и Q_2 равны

$$B_{Q_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B_{Q_2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим их угловые главные миноры, $\Delta_1, \ldots, \Delta_4$ для матрицы B_{Q_1} и $\Delta_1', \ldots, \Delta_4'$ для матрицы B_{Q_2}:

$$\Delta_1 = 1; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3; \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3;$$

$$\Delta_1' = 0; \quad \Delta_2' = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}; \quad \Delta_3' = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2; \quad \Delta_4' = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 16.$$

Так как ни одна из последовательностей $1, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ и $1, \Delta_1', \Delta_2', \Delta_3', \Delta_4'$ не содержит двух нулей подряд, мы можем применить теорему Якоби, утверждающую, что отрицательный индекс инерции квадратичной функции равен количеству перемен знака в последовательности угловых миноров её матрицы. В нашем случае последовательности угловых миноров $1, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ и $1, \Delta_1', \Delta_2', \Delta_3', \Delta_4'$ имеют вид $1, 1, -2, -3, 3$ и $1, 0, -\frac{1}{4}, 2, 16$. Количество перемен знака в каждой из них равно 2. Значит, отрицательные индексы инерции квадратичных функций Q_1 и Q_2 равны 2. Теперь из того, что $\Delta_4 \neq 0$ и $\Delta_4' \neq 0$, следует, что квадратичные функции Q_1 и Q_2 невырождены. Значит, для каждой из них сумма положительного и отрицательного индексов инерции равна 4. Следовательно, положительные индексы инерции квадратичных функций Q_1 и Q_2 также равны 2. Поэтому квадратичная функция Q_1 может быть переведена в квадратичную функцию Q_2 при помощи некоторого линейного преобразования. $\square$

3.3 Кососимметрические билинейные и эрмитовы полуторалинейные функции

Задача 56. *Привести кососимметрическую билинейную форму*

$$\varphi(x, y) = x^1y^2 - x^2y^1 + 2x^1y^3 - 2x^3y^1 + 2x^1y^4 - 2x^4y^1 + x^2y^3 - x^3y^2 + x^3y^4 - x^4y^3$$

к каноническому виду аффинной заменой координат; найти эту замену.

Решение.

Пусть V — линейное пространство с базисом $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Напомним, что двойственное пространство V^* есть пространство линейных функций на V. Двойственный базис $e^1, e^2, \ldots, e^n$ пространства V^* состоит из функций e^i таких, что $e^i(x) = x^i$, где $x^1, \ldots, x^n$ — координаты вектора x в базисе $e_1, \ldots, e_n$. Для любых двух линейных функций $\xi, \eta \in V^*$ определено их *внешнее произведение* $\xi \wedge \eta$, являющееся кососимметрической билинейной функцией на V:

$$(\xi \wedge \eta)(x, y) = \xi(x)\eta(y) - \eta(x)\xi(y).$$

Очевидно, что $\eta \wedge \xi = -\xi \wedge \eta$ и $\xi \wedge \xi = 0$. Базис в пространстве всех кососимметрических билинейных функций на V состоит из функций $e^i \wedge e^j$, $i < j$. При этом

$$(e^i \wedge e^j)(x, y) = x^iy^j - x^jy^i.$$

В нашем случае

$$\varphi = e^1 \wedge e^2 + 2e^1 \wedge e^3 + 2e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3 + e^3 \wedge e^4.$$

Приведение этой функции к каноническому виду осуществляется следующим образом. На первом шаге мы сгруппируем все слагаемые, содержащие e^1:

$$\varphi = e^1 \wedge (e^2 + 2e^3 + 2e^4) + e^2 \wedge e^3 + e^3 \wedge e^4.$$

Сделаем замену координат

$$\begin{cases} \tilde{e}^1 = e^1; \\ \tilde{e}^2 = e^2 + 2e^3 + 2e^4; \\ \tilde{e}^3 = e^3; \\ \tilde{e}^4 = e^4; \end{cases} \iff \begin{cases} e^1 = \tilde{e}^1; \\ e^2 = \tilde{e}^2 - 2\tilde{e}^3 - 2\tilde{e}^4; \\ e^3 = \tilde{e}^3; \\ e^4 = \tilde{e}^4. \end{cases}$$

Переписывая φ в новой системе координат, получаем

$$\varphi = \tilde{e}^1 \wedge \tilde{e}^2 + (\tilde{e}^2 - 2\tilde{e}^3 - 2\tilde{e}^4) \wedge \tilde{e}^3 + \tilde{e}^3 \wedge \tilde{e}^4 = \tilde{e}^1 \wedge \tilde{e}^2 + \tilde{e}^2 \wedge \tilde{e}^3 + 3\,\tilde{e}^3 \wedge \tilde{e}^4.$$

Теперь сгруппируем вместе все слагаемые, содержащие $\tilde{e}^2$:

$$\varphi = (\tilde{e}^1 - \tilde{e}^3) \wedge \tilde{e}^2 + 3\,\tilde{e}^3 \wedge \tilde{e}^4$$

и сделаем замену координат

$$\begin{cases} \hat{e}^1 = \tilde{e}^1 - \tilde{e}^3; \\ \hat{e}^2 = \tilde{e}^2; \\ \hat{e}^3 = \tilde{e}^3; \\ \hat{e}^4 = \tilde{e}^4; \end{cases} \iff \begin{cases} \tilde{e}^1 = \hat{e}^1 + \hat{e}^3; \\ \tilde{e}^2 = \hat{e}^2; \\ \tilde{e}^3 = \hat{e}^3; \\ \tilde{e}^4 = \hat{e}^4. \end{cases}$$

Получим,

$$\varphi = \hat{e}^1 \wedge \hat{e}^2 + 3\,\hat{e}^3 \wedge \hat{e}^4.$$

Таким образом, мы добились того, что выражение для φ содержит слагаемое $\hat{e}^1 \wedge \hat{e}^2$, а остальные слагаемые не содержат ни $\hat{e}^1$, ни $\hat{e}^2$. В общем случае далее применяется тот же метод к оставшейся части выражения для φ. В нашем случае для получения канонического вида достаточно сделать простую замену

$$\hat{e}^1 = \hat{\hat{e}}^1; \quad \hat{e}^2 = \hat{\hat{e}}^2; \quad \hat{e}^3 = \hat{\hat{e}}^3; \quad \hat{e}^4 = \frac{1}{3}\,\hat{\hat{e}}^4.$$

Получим,

$$\varphi = \hat{\hat{e}}^1 \wedge \hat{\hat{e}}^2 + \hat{\hat{e}}^3 \wedge \hat{\hat{e}}^4,$$

значит,

$$\varphi(x, y) = \hat{\hat{x}}^1\hat{\hat{y}}^2 - \hat{\hat{x}}^2\hat{\hat{y}}^1 + \hat{\hat{x}}^3\hat{\hat{y}}^4 - \hat{\hat{x}}^4\hat{\hat{y}}^3.$$

Собирая вместе все сделанные замены координат, получим,

$$\begin{cases} e^1 = \hat{\hat{e}}^1 + \hat{\hat{e}}^3; \\ e^2 = \hat{\hat{e}}^2 - 2\hat{\hat{e}}^3 - \dfrac{2}{3}\,\hat{\hat{e}}^4; \\ e^3 = \hat{\hat{e}}^3; \\ e^4 = \dfrac{1}{3}\,\hat{\hat{e}}^4. \end{cases}$$

Вспомним теперь, что линейные функции e^i и $\hat{\hat{e}}^i$ сопоставляют каждому вектору x его координаты x^i и $\hat{\hat{x}}^i$ соответственно. Следовательно, искомая замена координат имеет вид

$$\begin{cases} x^1 = \hat{\hat{x}}^1 + \hat{\hat{x}}^3; \\ x^2 = \hat{\hat{x}}^2 - 2\hat{\hat{x}}^3 - \dfrac{2}{3}\,\hat{\hat{x}}^4; \\ x^3 = \hat{\hat{x}}^3; \\ x^4 = \dfrac{1}{3}\,\hat{\hat{x}}^4. \qquad \square \end{cases}$$

Задача 57. *Привести к нормальному виду эрмитову полуторалинейную функцию*

$$\varphi(x,y) = \bar{x}^1y^1 + i\bar{x}^1y^2 - i\bar{x}^2y^1 + 2\bar{x}^1\bar{y}^3 + 2\bar{x}^3y^1 - 2\bar{x}^2y^2 + \bar{x}^3y^3$$

(с нахождением замены координат).

Решение.

Метод приведения к нормальному виду эрмитовой полуторалинейной функции очень похож на метод Лагранжа. Мы выделяем все слагаемые, содержащие x^1 и y^1 и дополняем их до произведения вида $\overline{l(x)}l(y)$, где l — линейная функция:

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) &= \bar{x}^1y^1 + \bar{x}^1(iy^2 + 2y^3) + \overline{(ix^2 + 2x^3)}y^1 - 2\bar{x}^2y^2 + \bar{x}^3y^3 = \\ &= \overline{(x^1 + ix^2 + 2x^3)}(y^1 + iy^2 + 2y^3) - \overline{(ix^2 + 2x^3)}(iy^2 + 2y^3) - 2\bar{x}^2y^2 + \bar{x}^3y^3 = \\ &= \overline{(x^1 + ix^2 + 2x^3)}(y^1 + iy^2 + 2y^3) - \bar{x}^2y^2 + 2i\bar{x}^2y^3 - 2i\bar{x}^3y^2 + \bar{x}^3y^3. \end{aligned}$$

Делаем замену

$$\begin{cases} x'^1 = x^1 + ix^2 + 2x^3; \\ x'^2 = x^2; \\ x'^3 = x^3; \end{cases} \iff \begin{cases} x^1 = x'^1 - ix'^2 - 2x'^3; \\ x^2 = x'^2; \\ x^3 = x'^3. \end{cases}$$

Обратите внимание, что конечно же *координаты вектора y преобразуются по тем же формулам, что и координаты вектора x*. Получаем:

$$\varphi(x,y) = \bar{x}'^1y'^1 - \bar{x}'^2y'^2 + 2i\bar{x}'^2y'^3 - 2i\bar{x}'^3y'^2 + \bar{x}'^3y'^3.$$

Таким образом, мы выделили слагаемое $\bar{x}'^1 y'^1$ так, что остальные слагаемые не содержат ни x^1, ни y^1. Теперь повторяем ту же процедуру для оставшихся слагаемых:

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) &= \bar{x}'^1 y'^1 - \bar{x}'^2 y'^2 + \bar{x}'^2(2iy'^3) + \overline{(2ix'^3)}y'^2 + \bar{x}'^3 y'^3 = \\ &= \bar{x}'^1 y'^1 - \overline{(x'^2 - 2ix'^3)}(y'^2 - 2iy'^3) + \overline{(2ix'^3)}(2iy'^3) + \bar{x}'^3 y'^3 = \\ &= \bar{x}'^1 y'^1 - \overline{(x'^2 - 2ix'^3)}(y'^2 - 2iy'^3) + 5\bar{x}'^3 y'^3 = \bar{x}'^1 y'^1 - \overline{(x'^2 - 2ix'^3)}(y'^2 - 2iy'^3) + \overline{(\sqrt{5}x'^3)}(\sqrt{5}y'^3).\end{aligned}$$

После замены

$$\begin{cases} x''^1 = x'^1; \\ x''^2 = x'^2 - 2ix'^3; \\ x''^3 = \sqrt{5}x'^3; \end{cases} \iff \begin{cases} x'^1 = x''^1; \\ x'^2 = x''^2 + \dfrac{2i}{\sqrt{5}}\,x''^3; \\ x'^3 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\,x''^3 \end{cases}$$

получаем нормальный вид эрмитовой полуторалинейной функции φ:

$$\varphi(x,y) = \bar{x}''^1 y''^1 - \bar{x}''^2 y''^2 + \bar{x}''^3 y''^3.$$

Чтобы получить замену координат, приводящую функцию φ к этому виду, выразим координаты x^1, x^2, x^3 через координаты x''^1, x''^2, x''^3:

$$\begin{cases} x^1 = x''^1 - ix''^2; \\ x^2 = x''^2 + \dfrac{2i}{\sqrt{5}}\,x''^3; \\ x^3 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\,x''^3. \qquad \square \end{cases}$$

Глава 4

Евклидовы и эрмитовы пространства

4.1 Элементарные свойства скалярного произведения

Задача 58. *Показать, что функция φ от векторов x и y действительной плоскости, заданная формулой*

$$\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} x^1 & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}, \quad \text{где } x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix},$$

определяет евклидово скалярное произведение на плоскости. Найти длины векторов $(1,0)$ и $(0,1)$ и угол между ними по отношению к этому скалярному произведению.

Решение.

Очевидно, что функция φ, определённая по указанной формуле, является билинейной и симметрической. Значит, нам достаточно доказать, что $\varphi(x,x) > 0$ для любого ненулевого вектора x. Имеем,

$$\varphi(x,x) = \left(x^1\right)^2 + 4x^1x^2 + 5\left(x^2\right)^2 = \left(x^1 + 2x^2\right)^2 + \left(x^2\right)^2 \geqslant 0.$$

При этом равенство $\varphi(x,x) = 0$ может выполняться только если одновременно $x^1 + 2x^2 = 0$ и $x^2 = 0$, то есть только при $x = 0$. Следовательно, φ — евклидово скалярное произведение.

Вычислим теперь длины векторов $x = (1,0)$, $y = (0,1)$ и угол α между ними относительно этого скалярного произведения. Имеем,

$$\varphi(x,x) = (1\ \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1;$$

$$\varphi(x,y) = (1\ \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2;$$

$$\varphi(y,y) = (0\ \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 5.$$

Значит,

$$|x| = \sqrt{f(x,x)} = 1, \qquad |y| = \sqrt{f(y,y)} = \sqrt{5},$$

$$\cos\alpha = \frac{f(x,y)}{|x||y|} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Таким образом, $\alpha = \arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$. $\square$

Задача 59. *Показать, что функция* $(A,B)=\operatorname{tr}\bigl(A^TB\bigr)$ *является евклидовым скалярным произведением в пространстве* $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ *вещественных квадратных матриц порядка 2; вычислить длины матриц*

$$A_1=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\quad \text{и}\quad A_2=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

и угол α *между ними.*

Решение.

Очевидно, что функция (A,B) является билинейной и $(B,A)=(A,B)$. Нам достаточно проверить, что $(A,A)>0$ для любой ненулевой матрицы A. Пусть $A=(a_{ij})$. Тогда

$$A^TA=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}^2+a_{21}^2 & a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}\\ a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22} & a_{12}^2+a_{22}^2\end{pmatrix}.$$

Значит,

$$\operatorname{tr}\bigl(A^TA\bigr)=a_{11}^2+a_{21}^2+a_{12}^2+a_{22}^2\geqslant 0,$$

причём равенство $\operatorname{tr}\bigl(A^TA\bigr)=0$ достигается только при $A=0$. Следовательно, $(A,B)=\operatorname{tr}\bigl(A^TB\bigr)$ — евклидово скалярное произведение.

Вычислим теперь скалярные произведения (A_1,A_1), (A_1,A_2) и (A_2,A_2):

$$\begin{aligned}
(A_1,A_1)&=\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)=\operatorname{tr}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=2;\\
(A_1,A_2)&=\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=\operatorname{tr}\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 2\end{pmatrix}=3;\\
(A_2,A_2)&=\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=\operatorname{tr}\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 5\end{pmatrix}=6.
\end{aligned}$$

Значит,

$$\|A_1\|=\sqrt{(A_1,A_1)}=\sqrt{2},\qquad \|A_2\|=\sqrt{(A_2,A_2)}=\sqrt{6},$$
$$\cos\alpha=\frac{(A_1,A_2)}{\|A_1\|\|A_2\|}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Значит, $\alpha=\frac{\pi}{6}$. $\square$

Замечание 4. *В этом решении длина матрицы* A *обозначается через* $\|A\|$*, а не через* $|A|$*, так как обозначение* $|A|$ *зарезервировано для определителя матрицы* A.

4.2 Ортогональные системы векторов

Задача 60. *Дополнить векторы* $e_1=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)$ *и* $e_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)$ *до ортонормированного базиса пространства* $\mathbb{R}^3$.

Решение.

Непосредственное вычисление показывает, что векторы e_1 и e_2 единичные и ортогональны друг другу. В качестве вектора, дополняющего их до ортонормированного базиса пространства $\mathbb{R}^3$, можно взять их векторное произведение

$$[e_1, e_2] = \frac{1}{3\sqrt{2}} \left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right).$$

Вместо вектора $[e_1, e_2]$ можно было бы взять вектор $-[e_1, e_2]$; других вариантов нет — с точностью до знака вектор, дополняющий векторы e_1 и e_2 до ортонормированного базиса пространства $\mathbb{R}^3$, определён однозначно. $\square$

Задача 61. *Дополнить векторы* $e_1 = \frac{1}{4}(1, 2, -1, 3, 1)$ *и* $e_2 = \frac{1}{2}(-1, 0, 1, 1, -1)$ *до ортонормированного базиса пространства* $\mathbb{R}^5$.

Решение.

Непосредственное вычисление показывает, что векторы e_1 и e_2 единичные и ортогональны друг другу. Обозначим через U подпространство, натянутое на векторы e_1 и e_2. Набор векторов, дополняющий вектора e_1 и e_2 до ортонормированного базиса пространства $\mathbb{R}^5$, — это ортонормированный базис подпространства $U^\perp$. Найдём вначале какой-нибудь базис подпространства $U^\perp$. Подпространство $U^\perp$ задаётся двумя линейными уравнениями, коэффициентами которых являются координаты векторов e_1 и e_2 соответственно; приведём матрицу этой системы из двух уравнений к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

В качестве главных переменных можно выбрать переменные x^1 и x^2, в качестве свободных — x^3, x^4 и x^5. Получаем фундаментальную систему решений $a_1 = (1, 0, 1, 0, 0)$, $a_2 = (1, -2, 0, 1, 0)$, $a_3 = (-1, 0, 0, 0, 1)$. Эти вектора образуют базис подпространства $U^\perp$. Ортогонализуем их при помощи метода Грама–Шмидта. Положим, $b_1 = a_1$. Второй вектор вычисляется по формуле

$$b_2 = a_2 - \frac{(b_1, a_2)}{(b_1, b_1)} b_1.$$

Имеем, $(b_1, b_1) = 2$, $(b_1, a_2) = 1$, значит,

$$b_2 = a_2 - \frac{1}{2} b_1 = \left(\frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{2}, 1, 0 \right).$$

Вычисляем: $(b_1, a_3) = -1$, $(b_2, a_3) = -\frac{1}{2}$, $(b_2, b_2) = \frac{11}{2}$, значит,

$$b_3 = a_3 - \frac{(b_1, a_3)}{(b_1, b_1)} b_1 - \frac{(b_2, a_3)}{(b_2, b_2)} b_2 = a_3 + \frac{1}{2} b_1 + \frac{1}{11} b_2 = \frac{1}{11}(-5, -2, 5, 1, 11).$$

Векторы b_1, b_2 и b_3 образуют ортогональный, но не ортонормированный, базис подпространства $U^\perp$. Чтобы получить ортонормированный базис, нам нужно разделить каждый из этих векторов на его длину. Мы уже вычислили скалярные квадраты (b_1, b_1) и (b_2, b_2); имеем, $b_1 = \sqrt{2}$, $|b_2| = \sqrt{\frac{11}{2}}$. Непосредственное вычисление даёт $|b_3| = \frac{4}{\sqrt{11}}$. Таким образом, в качестве векторов, дополняющих векторы e_1 и e_2 до ортонормированного базиса пространства $\mathbb{R}^5$, можно взять векторы

$$e_3 = \frac{b_1}{|b_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0,0), \ e_4 = \frac{b_2}{|b_2|} = \frac{1}{\sqrt{22}}(1,-4,-1,2,0), \ e_5 = \frac{b_3}{|b_3|} = \frac{1}{4\sqrt{11}}(-5,-2,5,1,11). \square$$

Задача 62. *Дополнить векторы* $e_1 = (i,i,1,-1)$ *и* $e_2 = (1+i, 1-i, 1+i, 1-i)$ *до ортогонального базиса эрмитова пространства* $\mathbb{C}^4$.

Решение.

Прежде всего проверим, что векторы e_1 и e_2 ортогональны:

$$(e_1, e_2) = \bar{i}(1+i) + \bar{i}(1-i) + (1+i) - (1-i) = 0.$$

Обозначим через U подпространство, натянутое на векторы e_1 и e_2. Так как скалярное произведение *эрмитово*, подпространство $U^\perp$ задаётся двумя уравнениями, коэффициенты которых *сопряжёны* координатам векторов e_1 и e_2 соответственно. Таким образом, подпространство $U^\perp$ задаётся системой уравнений

$$\begin{cases} -iz^1 - iz^2 + z^3 - z^4 = 0; \\ (1-i)z^1 + (1+i)z^2 + (1-i)z^3 + (1+i)z^4 = 0. \end{cases}$$

Производя элементарные преобразования со строками матрицы этой системы, приведём её к ступенчатому виду (удобно, чтобы ступенька была справа):

$$\begin{pmatrix} -i & -i & 1 & -1 \\ 1-i & 1+i & 1-i & 1+i \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} i & i & -1 & 1 \\ 1-i & 1 & -i & 0 \end{pmatrix}.$$

(Мы умножили первую строку на -1, после этого вычли из второй строки первую, умноженную на $1+i$ и разделили получившуюся вторую строку на 2.) Удобно выбрать переменные z^2 и z^4 в качестве главных, переменные z^1 и z^3 — в качестве свободных. Получим фундаментальную систему решений системы, то есть базис подпространства $U^\perp$: $a_1 = (1, i-1, 0, 1)$, $a_2 = (0, i, 1, 2)$. Применим к этому базису процесс ортогонализации Грама–Шмидта (относительно *эрмитова* скалярного произведения): $b_1 = a_1$,

$$b_2 = a_2 - \frac{(b_1, a_2)}{(b_1, b_1)} b_1 = a_2 - \frac{3-i}{4} a_1 = \frac{1}{4}(i-3, 3, 4, i+5).$$

В качестве векторов, дополняющих векторы e_1 и e_2 до ортогонального базиса пространства $\mathbb{C}^4$ можно взять векторы b_1 и b_2.

Отметим, что так как скалярное произведение эрмитово, а не евклидово, в формуле для вектора b_2 *важно*, в каком порядке мы берём скалярное произведение векторов b_1 и a_2: если бы вместо скалярного произведения (b_1, a_2) мы написали бы (a_2, b_1), мы получили бы неверный результат. $\square$

Задача 63. *В пространстве* $\mathbb{R}_2[t]$ *многочленов степени не выше* 2 *задано скалярное произведение*

$$(p, q) = \int_0^1 p(t)q(t)\,dt.$$

Дополнить многочлен t^2 *до ортогонального базиса пространства* $\mathbb{R}_2[t]$.

Решение.

Дополним вначале многочлен $p_1(x) = t^2$ до какого-нибудь базиса пространства $\mathbb{R}_2[x]$: можно взять, например, многочлены $p_2(x) = x$, $p_3(x) = 1$. Теперь ортогонализуем базис (p_1, p_2, p_3) при помощи процесса Грама–Шмидта:

$$q_1 = p_1;$$

$$q_2 = p_2 - \frac{(q_1, p_2)}{(q_1, q_1)} q_1; \tag{4.1}$$

$$q_3 = p_3 - \frac{(q_1, p_3)}{(q_1, q_1)} q_1 - \frac{(q_2, p_3)}{(q_2, q_2)} q_2. \tag{4.2}$$

Вычислим входящие в эти формулы скалярные произведения:

$$(q_1, p_2) = \int_0^1 t^2 \cdot t\, dt = \int_0^1 t^3\, dt = \frac{1}{4};$$

$$(q_1, q_1) = \int_0^1 t^2 \cdot t^2\, dt = \int_0^1 t^4\, dt = \frac{1}{5}.$$

Подставляя эти значения в формулу (4.1), находим

$$q_2(t) = p_2(t) - \frac{5}{4} q_1(t) = -\frac{5}{4} t^2 + t.$$

Продолжим вычисление скалярных произведений:

$$(q_1, p_3) = \int_0^1 t^2\, dt = \frac{1}{3};$$

$$(q_2, p_3) = \int_0^1 \left(-\frac{5}{4} t^2 + t\right) dt = \left(-\frac{5}{12} t^3 + \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{12};$$

$$(q_2, q_2) = \int_0^1 \left(-\frac{5}{4} t^2 + t\right)^2 dt = \int_0^1 \left(\frac{25}{16} t^4 - \frac{5}{2} t^3 + t^2\right) dt =$$

$$= \left(\frac{5}{16} t^5 - \frac{5}{8} t^4 + \frac{1}{3} t^3\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{48}.$$

Подставляя эти значения в формулу (4.2), находим

$$q_3(t) = p_3(t) - \frac{5}{3} q_1(t) - 4 q_2(t) = 1 - \frac{5}{3} t^2 - 4\left(-\frac{5}{4} t^2 + t\right) = \frac{10}{3} t^2 - 4t + 1.$$

Итак, многочлен $p_1(t) = q_1(t) = t^2$ дополняется до ортогонального базиса пространства $\mathbb{R}_2[t]$ при помощи многочленов $q_2(t) = -\frac{5}{4} t^2 + t$ и $q_3(t) = \frac{10}{3} t^2 - 4t + 1$. □

Задача 64. *Представить матрицу*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

в виде произведения ортогональной матрицы U на верхнетреугольную R с положительными числами на диагонали.

Решение.

Для того, чтобы представить матрицу A в указанном виде, нужно применить процесс ортогонализации Грама–Шмидта к её столбцам. При этом на каждом шаге мы будем нормировать получаемые векторы. Столбцы матрицы A — это векторы $a_1 = (2, 2, -1)^T$, $a_2 = (0, 4, 2)^T$, $a_3 = (1, -1, 3)^T$. Применяем процесс Грама–Шмидта, нормируя получаемые векторы:

$$b_1 = \frac{a_1}{|a_1|} = \frac{1}{3}a_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

На втором шаге процесс Грама–Шмидта даёт вектор

$$\tilde{b}_2 = a_2 - (b_1, a_2)b_1 = a_2 - 2b_1 = \begin{pmatrix} -4/3 \\ 8/3 \\ 8/3 \end{pmatrix}.$$

Нормируя вектор $\tilde{b}_2$, получим вектор

$$b_2 = \frac{1}{4}\tilde{b}_2 = \frac{1}{4}a_2 - \frac{1}{2}b_1 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

Третий шаг процесса Грамма–Шмидта полностью аналогичен:

$$\tilde{b}_3 = a_3 - (b_1, a_3)b_1 - (b_2, a_3)b_2 = a_2 + b_1 - b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$b_3 = \frac{1}{3}\tilde{b}_3 = \frac{1}{3}a_3 + \frac{1}{3}b_1 - \frac{1}{3}b_2 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Выражая векторы a_1, a_2 и a_3 из равенств (4.3), (4.4) и (4.5) соответственно, получим

$$\begin{aligned} a_1 &= 3b_1; \\ a_2 &= 2b_1 + 4b_2; \\ a_3 &= -b_1 + b_2 + 3b_3. \end{aligned}$$

В матричном виде эти равенства записываются так:

$$(a_1, a_2, a_3) = (b_1, b_2, b_3)\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

В этом равенстве слева стоит матрица A, а справа — произведение двух матриц, первая из которых ортогональна, так как её столбцы образуют ортонормированный базис $\mathbb{R}^3$, а вторая — верхнетреугольна с положительными числами на диагонали. Таким образом, это — искомое разложение матрицы A. Подставляя вычисленные выше вектора b_1, b_2 и b_3, окончательно получаем $A = UR$, где

$$U = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \qquad R = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \ \square$$

4.3 Матрица Грама; n-мерный объём

Задача 65. *Найти объём трёхмерного параллелепипеда, натянутого на векторы*

$$a_1 = (1, 0, 1, 0), \qquad a_2 = (1, 2, 0, -1), \qquad a_3 = (-3, 2, 4, -1).$$

Решение.

I способ. Объём параллелепипеда, натянутого на векторы a_1, a_2 и a_3, равен квадратному корню из определителя матрицы Грама этих векторов. Вычислим их матрицу Грама:

$$(a_1, a_1) = 2; \qquad (a_1, a_2) = 1; \qquad (a_1, a_3) = 1;$$
$$(a_2, a_2) = 6; \qquad (a_2, a_3) = 2; \qquad (a_3, a_3) = 30.$$

Таким образом,

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 30 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы не изменяется при прибавлении к одной из её строк другой строки, умноженной на произвольное число. Значит,

$$|G| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 30 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -11 & -3 \\ 1 & 6 & 2 \\ 0 & -4 & 28 \end{vmatrix} = 11 \cdot 28 + 3 \cdot 4 = 320.$$

Следовательно, искомый объём параллелепипеда равен $V = \sqrt{320} = 8\sqrt{5}$. $\square$

II способ. Объём параллелепипеда, натянутого на систему векторов, не изменяется при применении к этой системе векторов процесса ортогонализации Грама–Шмидта. Применим этот процесс к данным векторам:

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 = (1, 0, 1, 0); \\ b_2 &= a_2 - \frac{(b_1, a_2)}{(b_1, b_1)} b_1 = (1, 2, 0, -1) - \frac{1}{2}(1, 0, 1, 0) = \left(\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}, -1\right); \\ b_3 &= a_3 - \frac{(b_1, a_3)}{(b_1, b_1)} b_1 - \frac{(b_2, a_3)}{(b_2, b_2)} b_2 = (-3, 2, 4, -1) - \frac{1}{2}(1, 0, 1, 0) - \frac{3}{11}\left(\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}, -1\right) = \\ &= \frac{8}{11}(-5, 2, 5, -1). \end{aligned}$$

Векторы b_1, b_2, b_3 попарно ортогональны, поэтому объём натянутого на них параллелепипеда равен произведению их длин:

$$V = |b_1||b_2||b_3| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{11}{2}} \cdot \frac{8\sqrt{5}}{\sqrt{11}} = 8\sqrt{5}. \qquad \square$$

Задача 66. *В пространстве* $\mathbb{R}_3[t]$ *многочленов степени не выше* 3 *задано скалярное произведение*

$$(p, q) = \int_{-1}^{1} p(t) q(t)\, dt.$$

Найти базис, взаимный к базису $1, t, t^2, t^3$.

Решение.

Обозначим многочлены $1, t, t^2, t^3$ через e_0, e_1, e_2, e_3 соответственно (нам удобно начинать нумерацию с нуля, а не с единицы). Пусть $C = (c^{ij})$ — матрица перехода от базиса e_0, e_1, e_2, e_3 к взаимному базису e^0, e^1, e^2, e^3, то есть такая матрица, что $e^j = c^{ij} e_i$. (В данном случае удобно оба индекса у матрицы перехода писать сверху, так как номера векторов e^j пишутся сверху.) Докажем, что $C = G^{-1}$, где $G = (g_{ij})$ — матрица Грама базиса e_0, e_1, e_2, e_3. Действительно, согласно определению взаимного базиса имеет место равенство

$$\delta_k^j = (e^j, e_k) = (c^{ij} e_i, e_k) = c^{ij}(e_i, e_k) = c^{ij} g_{ik},$$

где δ_k^j — символ Кронеккера. Из полученного равенства следует, что $C = \left(G^T\right)^{-1}$, но матрица G симметрична, значит, $C = G^{-1}$.

Найдём теперь матрицу G. Вычисляем скалярные произведения:

$$(x^m, x^n) = \int_{-1}^{1} x^m \cdot x^n \, dx = \int_{-1}^{1} x^{m+n} \, dx = \begin{cases} \dfrac{2}{m+n+1}, & \text{если } m+n \text{ чётно;} \\ 0, & \text{если } m+n \text{ нечётно.} \end{cases}$$

Значит,

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

Нам нужно найти матрицу $C = G^{-1}$. Матрица G по сути является блочно диагональной: она становится блочно диагональной с двумя блоками 2×2, если одновременно поменять местами второй и третий столбцы и вторую и третью строки. Таким образом, обращение матрицы G сводится к обращению двух матриц 2×2:

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 9 & -15 \\ -15 & 45 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 75 & -105 \\ -105 & 175 \end{pmatrix};$$

$$C = G^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 9 & 0 & -15 & 0 \\ 0 & 75 & 0 & -105 \\ -15 & 0 & 45 & 0 \\ 0 & -105 & 0 & 175 \end{pmatrix}.$$

Столбцы матрицы C суть столбцы координат векторов e^i в базисе e_0, e_1, e_2, e_3. Таким образом,

$$e^0(t) = \frac{9}{8} - \frac{15}{8} t^2; \qquad e^1(t) = \frac{75}{8} t - \frac{105}{8} t^3;$$

$$e^2(t) = -\frac{15}{8} + \frac{45}{8} t^2; \qquad e^3(t) = -\frac{105}{8} t + \frac{175}{8} t^3. \qquad \square$$

Замечание 5. *На самом деле можно было сразу заметить, что подпространства чётных и нечётных многочленов ортогональны друг другу относительно указанного скалярного произведения. Поэтому многочлены e^0 и e^2 составляют базис пространства чётных многочленов, дуальный базису $1, t^2$, а многочлены e^1 и e^3 — базис в пространстве нечётных многочленов, дуальный базису t, t^3. После этого нужно отдельно найти каждый из этих двух дуальных базисов.*

4.4 Ортогональные проекции, расстояния и углы

Задача 67. *Найти ортогональную проекцию $x^{\parallel}$ и ортогональную составляющую $x^{\perp}$ вектора $x = (2, -5, 4, -3)$ при проекции на подпространство $U = \langle(1, 2, 1, 0), (2, 1, 4, -5)\rangle$.*

Решение.

Мы приведём 3 способа решения этой задачи. Первые два способа отличаются практически только по форме изложения, а по своему математическому содержанию совпадают; третий способ основан на принципиально другой идее.

I способ. Введём обозначения $a_1 = (1, 2, 1, 0)$, $a_2 = (2, 1, 4, -5)$. Вектор $x^{\parallel}$ лежит в подпространстве U, значит, он имеет вид

$$x^{\parallel} = \lambda a_1 + \mu a_2$$

для некоторых вещественных λ и μ. Тогда

$$x^{\perp} = x - x^{\parallel} = x - \lambda a_1 - \mu a_2 = (2 - \lambda - 2\mu, -5 - 2\lambda - \mu, 4 - \lambda - 4\mu, -3 + 5\mu).$$

Коэффициенты λ и μ находятся из условий того, что вектор $x^{\perp}$ перпендикулярен подпространству U и, значит, имеет нулевые скалярные произведения с векторами a_1 и a_2. Вычисляем:

$$(x^{\perp}, a_1) = (2 - \lambda - 2\mu) + 2(-5 - 2\lambda - \mu) + (4 - \lambda - 4\mu) = -6\lambda - 8\mu - 4;$$
$$(x^{\perp}, a_2) = 2(2 - \lambda - 2\mu) + (-5 - 2\lambda - \mu) + 4(4 - \lambda - 4\mu) - 5(-3 + 5\mu) = -8\lambda - 46\mu + 30.$$

Получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 6\lambda + 8\mu + 4 = 0, \\ 8\lambda + 46\mu - 30 = 0, \end{cases} \tag{4.6}$$

которая имеет единственное решение $\lambda = -2$, $\mu = 1$. Значит,

$$x^{\parallel} = -2a_1 + a_2 = (0, -3, 2, -5);$$
$$x^{\perp} = x - x^{\parallel} = (2, -2, 2, 2). \qquad \square$$

II способ. Так же, как в предыдущем способе решения, мы ищем векторы $x^{\parallel}$ и $x^{\perp}$ в виде

$$x^{\parallel} = \lambda a_1 + \mu a_2; \qquad x^{\perp} = x - \lambda a_1 - \mu a_2$$

и коэффициенты λ и μ находятся из условий $(x^{\perp}, a_1) = (x^{\perp}, a_2) = 0$. Имеем,

$$(x^{\perp}, a_i) = (x, a_i) - \lambda(a_1, a_i) - \mu(a_2, a_i), \qquad i = 1, 2.$$

Таким образом, система уравнений на λ и μ имеет вид

$$\begin{cases} (a_1, a_1)\lambda + (a_1, a_2)\mu = (x, a_1); \\ (a_2, a_1)\lambda + (a_2, a_2)\mu = (x, a_2), \end{cases} \tag{4.7}$$

то есть

$$G \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x, a_1) \\ (x, a_2) \end{pmatrix},$$

где G — матрица Грама системы векторов a_1, a_2. Вычисляем: $(a_1, a_1) = 6$, $(a_1, a_2) = 8$, $(a_2, a_2) = 46$, $(x, a_1) = -4$, $(x, a_2) = 30$. Значит, система уравнений (4.7) совпадает с системой уравнений (4.6). Далее всё делается точно так же, как в первом способе решения. □

III способ. Векторы $a_1 = (1, 2, 1, 0)$ и $a_2 = (2, 1, 4, -5)$ линейно независимы, значит, они образуют базис подпространства U. Этот базис не является ортогональным. Найдём ортогональный базис подпространства U при помощи процесса ортогонализации Грама–Шмидта. Первый вектор остаётся без изменений, $b_1 = a_1 = (1, 2, 1, 0)$, второй вектор находится по формуле

$$b_2 = a_2 - \frac{(b_1, a_2)}{(b_1, b_1)} b_1 = a_2 - \frac{4}{3} b_1 = \frac{1}{3}(2, -5, 8, -15).$$

Так как b_1, b_2 — ортогональный базис подпространства U, ортогональная проекция вектора x на это подпространство находится по формуле

$$x^{\parallel} = \frac{(b_1, x)}{(b_1, b_1)} b_1 + \frac{(b_2, x)}{(b_2, b_2)} b_2.$$

Вычисляем: $(b_1, b_1) = 6$, $(b_1, x) = -4$, $(b_2, b_2) = \frac{106}{3}$, $(b_2, x) = \frac{106}{3}$. Значит,

$$\begin{aligned} x^{\parallel} &= -\frac{2}{3} b_1 + b_2 = (0, -3, 2, -5); \\ x^{\perp} &= x - x^{\parallel} = (2, -2, 2, 2). \qquad \square \end{aligned}$$

Задача 68. *Найти ортогональную проекцию $x^{\parallel}$ и ортогональную составляющую $x^{\perp}$ вектора $x = (1, 5, 2, 5)$ при проекции на подпространство*

$$U = \langle (1, 1, 2, -1), (1, 3, -1, -13), (2, -1, 0, -1), (1, -3, 1, 9) \rangle.$$

Решение.

Выясним вначале, какую размерность имеет подпространство U; для этого запишем координаты порождающих его векторов в матрицу по строкам и приведём эту матрицу к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & -13 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -12 \\ 0 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 10 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{4.8}$$

Таким образом, подпространство U имеет размерность 3, что больше, чем половина размерности всего пространства. Поэтому нам будет удобнее вместо ортогональной проекции и ортогональной составляющей вектора x при проекции на подпространство U искать его ортогональную проекцию и ортогональную составляющую при проекции ортогональное дополнение $U^{\perp}$. При этом ортогональная проекция вектора x на подпространство U совпадает с ортогональной составляющей вектора x при проекции на подпространство $U^{\perp}$ и наоборот.

Подпространство U имеет базис, состоящий из трёх векторов, координаты которых записаны по строкам матрицы (4.8) выше горизонтальной черты. Поэтому подпространство $U^{\perp}$ задаётся системой однородных линейных уравнений с матрицей (4.8). Эта система линейных уравнений имеет единственное с точности до пропорциональности решение $a = (2, 3, -2, 1)$, которое и порождает одномерное подпространство $U^\perp$. Ортогональная проекция вектора x на одномерное подпространство, порождённое вектором a находится по формуле

$$x^{\|}_{U^\perp} = \frac{(a,x)}{(a,a)}a = a = (2,3,-2,1).$$

Ортогональная проекция вектора x на подпространство $U^\perp$ есть ортогональная составляющая вектора x при проектировании на подпространство U. Таким образом,

$$x^\perp = x^{\|}_{U^\perp} = (2,3,-2,1); \qquad x^{\|} = x - x^\perp = (-1,2,4,4). \qquad \square$$

Задача 69. *В пространстве* $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ *вещественных матриц* 2×2 *задано скалярное произведение* $(A,B) = \mathrm{tr}\big(A^T B\big)$. *Найти ортогональную проекцию* $X^{\|}$ *и ортогональную составляющую* $X^\perp$ *матрицы* $X = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ *при проекции на подпространство* U, *заданное системой линейных уравнений*

$$\begin{cases} \mathrm{tr}(A) = 0, \\ \mathrm{tr}(JA) = 0, \end{cases}$$

где $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Тогда система уравнений, задающая подпространство U, переписывается в виде

$$\begin{cases} a_{11} + a_{22} = 0, \\ a_{21} - a_{12} = 0. \end{cases}$$

Значит, U — двумерное подпространство с базисом $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Легко проверить, что матрицы A_1 и A_2 ортогональны относительно заданного скалярного произведения, значит, ортогональная проекция матрицы X на подпространство U вычисляется по формуле

$$X^{\|} = \frac{(A_1,X)}{(A_1,A_1)}A_1 + \frac{(A_2,X)}{(A_2,A_2)}A_2.$$

Вычисляем скалярные произведения:

$$(A_1,A_1) = \mathrm{tr}\big(A_1^T A_1\big) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

$$(A_1,X) = \mathrm{tr}\big(A_1^T X\big) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = -2,$$

$$(A_2,A_2) = \mathrm{tr}\big(A_2^T A_2\big) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

$$(A_2,X) = \mathrm{tr}\big(A_2^T X\big) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 2.$$

Значит,

$$X^{\|} = -A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad X^\perp = X - X^{\|} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Задача 70. *Найти расстояние от вектора $v = (1,1,3,1)$ до линейного подпространства $U = \langle(1,0,1,-2),(1,1,1,3)\rangle$.*

Решение.

I способ.

Пусть $e_1 = (1,0,1,-2)$ и $e_2 = (1,1,1,3)$; эти векторы образуют базис подпространства U. Расстояние h от вектора v до подпространства U равно длине высоты параллелепипеда, натянутого на векторы v, e_1 и e_2, опущенной на его грань, натянутую на векторы e_1 и e_2. Значит, расстояние h равно отношению трёхмерного объёма параллелепипеда, натянутого на векторы v, e_1 и e_2, к двумерному объёму (площади) параллелограмма, натянутого на векторы e_1 и e_2. Объём параллелепипеда, натянутого на систему векторов, равен квадратному корню из определителя матрицы Грама этой системы векторов, значит,

$$h = \sqrt{\frac{g_3(v,e_1,e_2)}{g_2(e_1,e_2)}},$$

где $g_3(v,e_1,e_2)$ и $g_2(e_1,e_2)$ — определители матриц Грама систем векторов v, e_1, e_2 и e_1, e_2 соответственно. Вычисляем:

$$(v,v) = 12; \qquad (v,e_1) = 2; \qquad (v,e_2) = 8;$$
$$(e_1,e_1) = 6; \qquad (e_1,e_2) = -4; \qquad (e_2,e_2) = 12.$$

Значит,

$$g_3(v,e_1,e_2) = \begin{vmatrix} 12 & 2 & 8 \\ 2 & 6 & -4 \\ 8 & -4 & 12 \end{vmatrix} = 112; \qquad g_2(e_1,e_2) = \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 56.$$

Следовательно, $h = \sqrt{\frac{g_3(v,e_1,e_2)}{g_2(e_1,e_2)}} = \sqrt{2}$. □

II способ.

Найдём ортогональную проекцию вектора v на подпространство U. Так как векторы $e_1 = (1,0,1,-2)$ и $e_2 = (1,1,1,3)$ образуют базис подпространства U, эта ортогональная проекция имеет вид

$$v^{\|} = \lambda e_1 + \mu e_2 = (\lambda+\mu, \mu, \lambda+\mu, -2\lambda+3\mu)$$

для некоторых λ и μ. Тогда ортогональная составляющая вектора v по отношению к подпространству U равна

$$v^{\perp} = v - v^{\|} = (1-\lambda-\mu, 1-\mu, 3-\lambda-\mu, 1+2\lambda-3\mu).$$

Запишем условия того, что вектор $v^{\perp}$ ортогонален векторам e_1 и e_2:

$$(v^{\perp}, e_1) = 2 - 6\lambda + 4\mu = 0;$$
$$(v^{\perp}, e_2) = 8 + 4\lambda - 12\mu = 0.$$

Эта система линейных уравнений имеет единственное решение $\lambda = 1$, $\mu = 1$. Подставляя эти значения в выражения для вектора $v^{\perp}$, получаем $v^{\perp} = (-1,0,1,0)$. Значит, расстояние от вектора v до подпространства U равно $|v^{\perp}| = \sqrt{2}$. □

Задача 71. *Найти угол между вектором $v = (1,0,1,0)$ и линейным подпространством U, задаваемым системой уравнений*

$$\begin{cases} x^1 - 2x^2 - 2x^3 + x^4 = 0; \\ 2x^1 - x^2 - 3x^3 + 2x^4 = 0. \end{cases}$$

Решение.

Косинус искомого угла α вычисляется по формуле $\cos\alpha = \frac{|v^{\|}|}{|v|}$, где $v^{\|}$ — ортогональная проекция вектора v на подпространство U. Длина вектора $v^{\|}$ равна расстоянию h от вектора v до линейного подпространства $U^{\perp}$. Подпространство $U^{\perp}$ натянуто на векторы векторами, координаты которых суть коэффициенты линейных уравнений, задающих подпространство U, то есть на векторы $e_1 = (1,-2,-2,1)$ и $e_2 = (2,-1,-3,2)$. Значит, квадрат расстояния от вектора v до подпространства $U^{\perp}$ равно отношение определителей $g_3(v,e_1,e_2)$ и $g_2(e_1,e_2)$ матриц Грама систем векторов v,e_1,e_2 и e_1,e_2 соответственно. Вычисляем,

$$\begin{array}{ccc} (v,v) = 2; & (v,e_1) = -1; & (v,e_2) = -1; \\ (e_1,e_1) = 10; & (e_1,e_2) = 12; & (e_2,e_2) = 18. \end{array}$$

Значит,

$$g_3(v,e_1,e_2) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 10 & 12 \\ -1 & 12 & 18 \end{vmatrix} = 68; \qquad g_2(e_1,e_2) = \begin{vmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 18 \end{vmatrix} = 36.$$

Следовательно,

$$h = \sqrt{\frac{g_3(v,e_1,e_2)}{g_2(e_1,e_2)}} = \frac{\sqrt{17}}{3}$$

Таким образом,

$$\alpha = \arccos\frac{h}{|v|} = \arccos\frac{\sqrt{17}}{3\sqrt{2}} \qquad \square$$

4.5 Геометрия аффинных евклидовых пространств

Задача 72. *Найти длину и основание перпендикуляра, опущенного из точки $M(-6,1,2,-4,-1)$ на плоскость, проходящую через три точки $A(4,-2,3,6,0)$, $B(6,0,1,3,3)$, $C(8,-4,3,4,0)$.*

Решение.

Базис направляющего линейного подпространства для плоскости Π, проходящей через точки A, B и C, составляют векторы $a_1 = \overrightarrow{AB} = (2,2,-2,-3,3)$, $a_2 = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = (2,-1,0,-1,0)$. Значит, параметрическое уравнение плоскости Π имеет вид

$$\begin{cases} x^1 = 4 + 2s + 2t; \\ x^2 = -2 + 2s - t; \\ x^3 = 3 - 2s; \\ x^4 = 6 - 3s - t; \\ x^5 = 3s. \end{cases}$$

Выясним, каким значениям параметров s и t соответствует основание N перпендикуляра, опущенного на плоскость Π из точки M. Вектор $\overrightarrow{MN}$ перпендикулярен векторам a_1 и a_2. Имеем,

$$\overrightarrow{MN} = (10 + 2s + 2t, -3 + 2s - t, 1 - 2s, 10 - 3s - t, 1 + 3s).$$

Поэтому условия $\left(\overrightarrow{MN}, a_1\right) = 0$ и $\left(\overrightarrow{MN}, a_2\right) = 0$ переписываются в виде системы линейных уравнений

$$\begin{cases} -15 + 30s + 5t = 0; \\ \quad 13 + 5s + 6t = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему линейных уравнений, получаем $s = 1$, $t = -3$. Координаты точки N — искомого основания перпендикуляра — получаются подстановкой этих значений s и t в параметрическое уравнений плоскости Π. Имеем, $N = (0, 3, 1, 6, 3)$. Длина перпендикуляра равна

$$|MN| = \sqrt{6^2 + 2^2 + (-1)^2 + 10^2 + 4^2} = \sqrt{157}$$

Задача 73. *Найти угол между прямой* $\frac{x^1-5}{1} = \frac{x^2+6}{-1} = \frac{x^3-1}{2} = \frac{x^4+2}{0}$ *и плоскостью, проходящей через точки* $A(3, 2, 1, 4)$, $B(5, 1, -2, 6)$ *и* $C(4, 3, 0, 5)$.

Решение.

Угол между прямой и плоскостью равен углу между направляющим вектором прямой и направляющим линейным подпространством плоскости. Направляющий вектор данной прямой равен $a = (1, -1, 2, 0)$, а направляющее линейное подпространство U данной плоскости натянуто на векторы $e_1 = \overrightarrow{AB} = (2, -1, -3, 2)$ и $e_2 = \overrightarrow{AC} = (1, 1, -1, 1)$. Квадрат расстояния от вектора a до линейного подпространства U вычисляется по формуле

$$h^2 = \frac{g(a, e_1, e_2)}{g(e_1, e_2)},$$

где $g(a, e_1, e_2)$ и $g(e_1, e_2)$ — определители матриц Грама систем векторов a, e_1, e_2 и e_1, e_2 соответственно. Вычисляем,

$$g(a, e_1, e_2) = \begin{vmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -3 & 18 & 6 \\ -2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 180, \qquad g(e_1, e_2) = \begin{vmatrix} 18 & 6 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 36,$$

откуда $h = \sqrt{5}$. Значит, синус искомого угла между вектором a и подпространством U вычисляется по формуле

$$\sin\alpha = \frac{h}{|a|} = \sqrt{\frac{5}{6}}; \qquad \alpha = \arcsin\sqrt{\frac{5}{6}} \qquad \square$$

Задача 74. *Найти расстояние между прямой* ℓ*, проходящей через две точки* $A(1, 4, -2, 4)$ *и* $B(2, 1, -1, 5)$*, и плоскостью* Π*, проходящей через три точки* $C(-4, 2, 0, 1)$*,* $D(-4, 1, -1, 1)$ *и* $E(-4, 1, 1, 2)$.

Решение.

Направляющим вектором прямой ℓ является вектор $\overrightarrow{AB} = (1, -3, 1, 1)$. Базис направляющего линейного подпространства для плоскости Π составляют векторы $\overrightarrow{CD} = (0, -1, -1, 0)$ и

$\overrightarrow{CE} = (0, -1, 1, 1)$. Расстояние ρ от прямой ℓ до плоскости Π равно длине ортогональной составляющей вектора $\overrightarrow{AC} = (-5, -2, 2, -3)$ по отношению к линейному подпространству, порождённому векторами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{CE}$. Рассмотрим параллелепипед P, натянутый на векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CE}$ и $\overrightarrow{AC}$. Искомая длина ортогональной составляющей вектора $\overrightarrow{AC}$ равна длине высоты параллелепипеда P, опущенной на гипергрань (3-мерную грань), натянутую на векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{CE}$. Значит,

$$\rho = \frac{V_4\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CE}, \overrightarrow{AC}\right)}{V_3\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CE}\right)},$$

где V_4 и V_3 — соответственно четырёхмерный и трёхмерный объёмы параллелепипедов, натянутых на указанные векторы. Объём $V_4\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CE}, \overrightarrow{AC}\right)$ равен модулю определителя, составленного из координат векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CE}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$V_4\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CE}, \overrightarrow{AC}\right) = \left|\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -5 & -2 & 2 & -3 \end{vmatrix}\right| = 20.$$

Объём $V_3\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CE}\right)$ равен квадратному корню из определителя матрицы Грама векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{CE}$:

$$V_3\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CE}\right) = \sqrt{\begin{vmatrix} 12 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix}} = \sqrt{10}.$$

Значит, $\rho = \frac{20}{\sqrt{10}} = 2\sqrt{10}$. $\square$

Задача 75. *Найти расстояние между прямой ℓ и плоскостью Π:*

$$\ell = (5, 0, -2, 4) + \langle(0, 1, 3, 2)\rangle;$$
$$\Pi : \begin{cases} x^1 - 2x^2 - 3x^3 + 4x^4 = 3; \\ x^1 - 4x^2 - 2x^3 + 4x^4 = 5. \end{cases}$$

Решение.

На прямой ℓ лежит точка $A = (5, 0, -2, 4)$; в качестве точки, лежащей в плоскости Π можно взять, например, точку $B = (9, 0, 2, 0)$. Имеем, $\overrightarrow{AB} = (4, 0, 4, 4)$. Пусть U и V — направляющие линейные подпространства прямой ℓ и плоскости Π соответственно. Тогда расстояние от прямой ℓ до плоскости Π равно длине ортогональной составляющей вектора $\overrightarrow{AB}$ по отношению к подпространству $U + V$, то есть, длине ортогональной проекции вектора $\overrightarrow{AB}$ при проекции на подпространство $(U + V)^{\perp}$.

Найдём базис подпространства $(U + V)^{\perp} = U^{\perp} \cap V^{\perp}$. Подпространство $V^{\perp}$ натянуто на векторы, составленные из коэффициентов линейных уравнений, задающих плоскость Π, то есть на векторы $v_1 = (1, -2, -3, 4)$ и $v_2 = (1, -4, -2, 4)$. Значит, произвольный вектор подпространства $V^\perp$ имеет вид

$$v = \lambda v_1 + \mu v_2 = (\lambda + \mu, -2\lambda - 4\mu, -3\lambda - 2\mu, 4\lambda + 4\mu).$$

Выясним, какие из таких векторов v лежат в подпространстве $U^\perp$, то есть перпендикулярны вектору $a = (0, 1, 3, 2)$:

$$0 = (v, a) = -2\lambda - 4\mu + 3(-3\lambda - 2\mu) + 2(4\lambda + 4\mu) = -3\lambda - 2\mu.$$

Это уравнение имеет с точностью до пропорциональности единственное решение $\lambda = -2$, $\mu = 3$. Значит, подпространство $(U + V)^\perp$ порождено вектором $v = -2v_1 + 3v_2 = (1, -8, 0, 4)$. Таким образом, расстояние от прямой ℓ до плоскости Π равно длине ортогональной проекции вектора $\overrightarrow{AB}$ на направление вектора v:

$$\rho = \frac{\left|(\overrightarrow{AB}, v)\right|}{|v|} = \frac{20}{9}. \qquad \square$$

Задача 76. *Прямая ℓ проходит через две точки $A(3, 1, 2, 4)$ и $B(4, 2, 3, 6)$, а плоскость Π — через три точки $C(2, 1, 3, -1)$, $D(6, 1, 0, 2)$ и $E(3, 0, 2, 0)$. Написать уравнение общего перпендикуляра к прямой ℓ и плоскости Π и найти его длину.*

Решение.

Направляющим вектором прямой ℓ является вектор $a = \overrightarrow{AB} = (1, 1, 1, 2)$; базис направляющего линейного подпространства плоскости Π составляют векторы $b_1 = \overrightarrow{CD} = (4, 0, -3, 3)$ и $b_2 = \overrightarrow{CE} = (1, -1, -1, 1)$. Значит, прямая ℓ и плоскость Π задаются следующими параметрическими уравнениями:

$$\ell : \begin{cases} x^1 = 3 + r; \\ x^2 = 1 + r; \\ x^3 = 2 + r; \\ x^4 = 4 + 2r; \end{cases} \qquad P : \begin{cases} x^1 = 2 + 4s + t; \\ x^2 = 1 - t; \\ x^3 = 3 - 3s - t; \\ x^4 = -1 + 3s + t. \end{cases}$$

Следовательно, вектор $\overrightarrow{MN}$ для точек $M \in \ell$ и $N \in \Pi$, отвечающих значению параметра r и значениям параметров s и t соответственно, равен

$$\overrightarrow{MN} = (-1 - r + 4s + t, -r - t, 1 - r - 3s - t, -5 - 2r + 3s + t).$$

Точки M и N являются основаниями общего перпендикуляра к прямой ℓ и плоскости P тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{MN}$ перпендикулярен векторам a, b_1 и b_2. Это условие даёт систему линейных уравнений

$$\begin{cases} -7r + 7s + t = 10; \\ -7r + 34s + 10t = 22; \\ -r + 10s + 4t = 7, \end{cases}$$

которая имеет единственное решение $r = -\frac{4}{3}$, $s = -\frac{1}{6}$, $t = \frac{11}{6}$. Значит, основания общего перпендикуляра к прямой ℓ и плоскости Π суть точка $M \in \ell$, отвечающая значению параметра $r = -\frac{4}{3}$, и точка $N \in \Pi$, отвечающая значениям параметров $s = -\frac{1}{6}$, $t = \frac{11}{6}$. Вычисляем:

$M = \left(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$, $N = \left(\frac{19}{6}, -\frac{5}{6}, \frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -1\right)$. Уравнение искомого общего перпендикуляра— прямой MN — имеет вид

$$\frac{x^1 - \frac{5}{3}}{3} = \frac{x^2 + \frac{1}{3}}{-1} = \frac{x^3 - \frac{2}{3}}{2} = \frac{x^4 - \frac{4}{3}}{-2},$$

а длина общего перпендикуляра равна

$$MN = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{4} + 1 + 1} = \frac{3}{\sqrt{2}}. \qquad \square$$

Задача 77. *Найти расстояние между плоскостью, проходящей через точки $A_1(-2, 4, 5, 1)$, $B_1(-1, 6, 6, 2)$ и $C_1(2, 9, 4, 3)$, и плоскостью, проходящей через точки $A_2(8, 4, 20, -10)$, $B_2(7, 5, 28, -11)$ и $C_2(13, 4, 19, -17)$.*

Решение.

Пусть Π_1 и Π_2 — две данные плоскости, U_1 и U_2 — направляющие линейные подпространства для плоскостей Π_1 и Π_2 соответственно. Тогда искомое расстояние ρ между плоскостями Π_1 и Π_2 равно длине ортогональной составляющей вектора $\overrightarrow{A_1A_2} = (10, 0, 15, -11)$ по отношению к линейному подпространству $U = U_1 + U_2$. Подпространство U порождается векторами $\overrightarrow{A_1B_1} = (1, 2, 1, 1)$, $\overrightarrow{A_1C_1} = (4, 5, -1, 2)$, $\overrightarrow{A_2B_2} = (-1, 1, 8, -1)$ и $\overrightarrow{A_2C_2} = (5, 0, -1, -7)$. Найдём базис подпространства U:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 8 & -1 \\ 5 & 0 & -1 & -7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -5 & -2 \\ 0 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & -10 & -6 & -12 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{4.9}$$

Таким образом, подпространство U трёхмерно и его базис составляют векторы $(1, 2, 1, 1)$, $(0, 1, 3, 0)$ и $(0, 0, 2, -1)$. Ортогональная составляющая вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$ по отношению к подпространству L совпадает с ортогональной проекцией вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$ на одномерное подпространство $U^\perp$. Подпространство $U^\perp$ задаётся системой однородных линейных уравнений с матрицей (4.9) (по строкам которой выписаны координаты векторов базиса подпространства U). Единственным с точностью до пропорциональности решением этой системы линейных уравнений является вектор $n = (3, -3, 1, 2)$. Значит, $U^\perp$ — линейное подпространство, порождённое вектором n. Следовательно, искомое расстояние ρ между плоскостями Π_1 и Π_2 равно длине ортогональной проекции вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$ на направление вектора n, откуда

$$\rho = \frac{\left|\left(\overrightarrow{A_1A_2}, n\right)\right|}{|n|} = \frac{23}{\sqrt{23}} = \sqrt{23}. \qquad \square$$

Задача 78. *В пространстве $\mathbb{R}_3[t]$ задано скалярное произведение*

$$(p, q) = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\, dt.$$

Найти расстояние между прямой ℓ, состоящей из всех многочленов вида $t^3 + at + a$, и плоскостью Π, состоящей из всех многочленов вида $bt^2 + 2t + c$.

Решение.

Многочлен t^3 лежит в прямой ℓ, а многочлен $2t$ — в плоскости Π. Направляющим вектором прямой ℓ служит многочлен $t+1$; направляющее линейное подпространство плоскости Π натянуто на векторы 1 и t^2. Поэтому искомое расстояние ρ от прямой ℓ до плоскости Π равно длине ортогональной составляющей многочлена t^3-2t по отношению к линейному подпространству U, натянутому на многочлены $1+t$, 1 и t^2. Заметим, что U — подпространство всех многочленов степени не выше 2. В частности, многочлен $2t$ лежит в подпространстве U, следовательно, ортогональная составляющая многочлена t^3-2t по отношению к U совпадает с ортогональной составляющей многочлена t^3 по отношению к U. Заметим теперь, что подпространства чётных и нечётных многочленов ортогональны относительно заданного скалярного произведения. Поэтому ортогональная составляющая многочлена t^3 по отношению к подпространству $U=\langle 1,t,t^2\rangle$ совпадает с ортогональной составляющей многочлена t^3 по отношению к одномерному подпространству $\langle t\rangle$. Эта ортогональная составляющая f может быть найдена при помощи формулы процесса ортогонализации Грама–Шмидта для пары векторов t, t^3: $f(t)=t^3-\lambda t$, где $\lambda=\frac{(t,t^3)}{(t,t)}$. Имеем,

$$(t,t^3)=\int_{-1}^{1} t^4\,dt=\frac{2}{5},\qquad (t,t)=\int_{-1}^{1} t^2\,dt=\frac{2}{3},$$

значит, $f(t)=t^3-\frac{5}{3}t$. Вычисляем,

$$(f,f)=\int_{-1}^{1}\left(t^3-\frac{5}{3}\,x\right)^2 dt=\int_{-1}^{1}\left(t^6-\frac{10}{3}\,t^4+\frac{25}{9}\,t^2\right)dt=\frac{2}{7}-\frac{10}{3}\cdot\frac{2}{5}+\frac{25}{9}\cdot\frac{2}{3}=\frac{152}{189}$$

Таким образом,

$$\rho=\sqrt{(f,f)}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{38}{21}}\qquad\square$$

4.6 Симплекс

Задача 79. *Для правильного n-мерного симплекса с ребром 1 найти его радиус описанной окружности R_n, радиус вписанной окружности r_n и двугранный угол α_n между двумя его $(n-1)$-мерными гранями.*

Решение.

Правильный n-мерный симплекс удобно реализовать в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ с вершинами $A_1=(1,0,0,\ldots,0)$, $A_2=(0,1,0,\ldots,0)$, $A_3=(0,0,1,\ldots,0)$, …, $A_{n+1}=(0,0,0,\ldots,1)$. Правда, ребро полученного таким образом правильного симплекса Δ^n равно не 1, а $\sqrt{2}$. Поэтому величина двугранного угла для него будет совпадать с искомой (она не меняется при преобразовании подобия), а радиусы вписанной и описанной окружности надо будет потом разделить на $\sqrt{2}$.

Напомним, что центром масс точек $X_1,X_2,\ldots,X_k$ с массами $m_1,m_2,\ldots,m_k$ соответственно (такими, что суммарная масса $m_1+m_2+\ldots+m_k\neq 0$) называется точка X с радиус-вектором

$$\overrightarrow{OX}=\frac{m_1\overrightarrow{OX_1}+m_2\overrightarrow{OX_2}+\ldots+m_k\overrightarrow{OX_k}}{m_1+m_2+\ldots+m_k};$$

эта точка не зависит от выбора начала координат O.

Центр I симплекса Δ^n есть центр масс его вершин (с массами по 1), значит, радиус-вектор точки I вычисляется по формуле

$$\overrightarrow{OI} = \frac{\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA}_{n+1}}{n+1} = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}, \ldots, \frac{1}{n+1}\right).$$

(В качестве O мы берём стандартное начало координат в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$.)

Радиус описанной окружности равен расстоянию от его центра I до любой из его вершин, например, до A_1. Вычисляем:

$$\overrightarrow{IA_1} = \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OI} = \left(\frac{n}{n+1}, -\frac{1}{n+1}, \ldots, -\frac{1}{n+1}\right);$$

$$\left|\overrightarrow{IA_1}\right|^2 = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 + \underbrace{\frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^2}}_{n \text{ слагаемых}} = \frac{n^2+n}{(n+1)^2} = \frac{n}{n+1}$$

Значит, радиус описанной окружности симплекса Δ^n равен $\sqrt{\frac{n}{n+1}}$. Чтобы получить радиус описанной окружности правильного n-мерного симплекса с ребром 1, это число нужно разделить на $\sqrt{2}$; таким образом, $R_n = \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}$.

Симплекс Δ^n имеет $n+1$ гипергрань, то есть грань размерности $n-1$; каждая из гиперграней есть правильный $(n-1)$-мерный симплекс, вершинами которого являются все точки $A_1, \ldots, A_{n+1}$, кроме какой-нибудь одной A_i. Центр I_i гиперграни, противолежащей вершине A_i, является центром масс всех точек $A_1, \ldots, A_{n+1}$, кроме точки A_i, значит,

$$\overrightarrow{OI_i} = \frac{1}{n}\left(\sum_{j \neq i} \overrightarrow{OA_j}\right) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right),$$

где 0 стоит на i-ом месте. Тогда

$$\overrightarrow{II_i} = \overrightarrow{OI_i} - \overrightarrow{OI} = \left(\frac{1}{n(n+1)}, \frac{1}{n(n+1)}, \ldots, \frac{1}{n(n+1)}, -\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n(n+1)}, \ldots, \frac{1}{n(n+1)}\right).$$

Радиус вписанной окружности симплекса Δ^n равен длине отрезка II_i. Вычисляем:

$$\left|II_i\right| = \frac{1}{(n+1)^2} + n \cdot \frac{1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n(n+1)}$$

Значит, радиус вписанной окружности симплекса Δ^n равен $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$, а радиус вписанной окружности правильного n-мерного симплекса с ребром 1 равен $r_n = \frac{1}{\sqrt{2n(n+1)}}$.

Вектор $\overrightarrow{II_i}$ является вектором внешней нормали к гиперграни F_i симплекса Δ^n, противолежащей вершине A_i. Значит, двугранный угол α_n между двумя гипергранями F_i и F_j равен $\pi - \beta$, где β — угол между векторами $\overrightarrow{II_i}$ и $\overrightarrow{II_j}$. Вычисляя скалярное произведение векторов $\overrightarrow{II_i}$ и $\overrightarrow{II_j}$, мы получаем сумму $n+1$ слагаемых, из которых $n-1$ слагаемых равны $\frac{1}{n^2(n+1)^2}$, а два слагаемых — i-ое и j-ое — равны $-\frac{1}{n(n+1)^2}$. Значит,

$$\left(\overrightarrow{II_i}, \overrightarrow{II_j}\right) = \frac{n-1}{n^2(n+1)^2} - \frac{2}{n(n+1)^2} = -\frac{1}{n^2(n+1)}$$

Следовательно,

$$\cos\beta = \frac{\left(\overrightarrow{II_i}, \overrightarrow{II_j}\right)}{\left|\overrightarrow{II_i}\right| \left|\overrightarrow{II_j}\right|} = -\frac{1}{n}$$

Таким образом,

$$\alpha_n = \pi - \beta = \arccos\frac{1}{n} \qquad \square$$

4.7 Метод наименьших квадратов и интерполяция функций

Задача 80. *Методом наименьших квадратов найти псевдорешение несовместной системы линейных уравнений*

$$\begin{cases} x^1 + x^2 + x^3 = 2, \\ x^1 - x^2 - x^3 = 2, \\ x^3 = 0, \\ x^2 + x^3 = -1, \\ -x^1 - x^2 = 1. \end{cases}$$

Решение.

Данная система линейных уравнений имеет вид $Ax = b$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Псевдорешением несовместной системы $Ax = b$ является тот вектор $x \in \mathbb{R}^5$, для которого квадрат длины $|Ax - b|^2$ принимает наименьшее возможное значение. Тогда Ax — ортогональная проекция вектора b на линейное подпространство $\mathrm{Im}(A)$, состоящее из всех векторов Ay, $y \in \mathbb{R}^3$. Следовательно, вектор $Ax - b$ ортогонален всем векторам вида Ay, где $y \in \mathbb{R}^5$:

$$0 = (Ay, Ax - b) = (Ay)^T (Ax - b) = y^T (A^T A x - A^T b).$$

Так как это равенство имеет место для всех $y \in \mathbb{R}^5$, мы получаем, что псевдорешение x является решением системы линейных уравнений $A^T A x = A^T b$. (Отметим, что матрица $A^T A$ есть матрица Грама столбцов матрицы A.) Вычисляем:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \qquad A^T b = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Решаем систему линейных уравнений $A^T A x = A^T b$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & -11 & -9 & 9 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 17 & 16 \end{array}\right)$$

Значит, $x^3 = \frac{16}{17}$, $x^2 = 5 - 7x^3 = -\frac{27}{17}$, $x^1 = -2 - 4x^2 - 3x^3 = \frac{26}{17}$. Таким образом, искомым псевдорешением является вектор $x = \left(\frac{26}{17}, -\frac{27}{17}, \frac{16}{17}\right)$. $\square$

Задача 81. *Методом наименьших квадратов найти в евклидовом пространстве непрерывных функций на отрезке $[-1, 1]$ со скалярным произведением $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$ интерполяцию (наилучшее среднеквадратичное приближение) функции e^t при помощи системы функций $\varphi_1(t) = 1$, $\varphi_2(t) = t$, $\varphi_3(t) = t^3$.*

Решение.

Интерполяционная функция для функции $f(t) = e^t$ имеет вид

$$L(t) = a_1\varphi_1(t) + a_2\varphi_2(t) + a_3\varphi_3(t) = a_1 + a_2 t + a_3 t^3 \tag{4.10}$$

для некоторых a_1, a_2 и a_3. Коэффициенты a_1, a_2 и a_3 находятся из условий $(L - f, \varphi_i) = 0$, $i = 1, 2, 3$. Из равенства (4.10) получаем, что

$$(L, \varphi_i) = a_1(\varphi_1, \varphi_i) + a_2(\varphi_2, \varphi_i) + a_3(\varphi_3, \varphi_i).$$

Поэтому условия $(L - f, \varphi_i) = 0$ переписываются в виде системы линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} (\varphi_1,\varphi_1) & (\varphi_1,\varphi_2) & (\varphi_1,\varphi_3) \\ (\varphi_2,\varphi_1) & (\varphi_2,\varphi_2) & (\varphi_2,\varphi_3) \\ (\varphi_3,\varphi_1) & (\varphi_3,\varphi_2) & (\varphi_3,\varphi_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f,\varphi_1) \\ (f,\varphi_2) \\ (f,\varphi_3) \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

Вычисляем (для $k, l \geq 0$):

$$(t^k, t^l) = \int_{-1}^{1} t^{k+l}\,dt = \begin{cases} \dfrac{2}{k+l+1}, & \text{если } k+l \text{ чётно;} \\ 0, & \text{если } k+l \text{ нечётно.} \end{cases}$$

Значит, матрица Грама системы функций $1, t, t^3$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

Вычислим теперь скалярные произведения функции e^t с функциями 1, t и t^3:

$$\begin{aligned} (e^t, 1) &= \int_{-1}^{1} e^t\,dt = e - e^{-1}; \\ (e^t, t) &= \int_{-1}^{1} te^t\,dt = (te^t)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^t\,dt = (e + e^{-1}) - (e + e^{-1}) = 2e^{-1}; \\ (e^t, t^3) &= \int_{-1}^{1} t^3e^t\,dt = (t^3e^t)\Big|_{-1}^{1} - 3\int_{-1}^{1} t^2e^t\,dt = (e + e^{-1}) - 3\,(t^2e^t)\Big|_{-1}^{1} + 6\int_{-1}^{1} te^t\,dt = \\ &= (e + e^{-1}) - 3(e - e^{-1}) + 12e^{-1} = -2e + 16e^{-1}. \end{aligned}$$

Значит, система (4.11) переписывается в виде

$$\begin{cases} 2a_1 = e - e^{-1}; \\ \dfrac{2}{3}a_2 + \dfrac{2}{5}a_3 = 2e^{-1}; \\ \dfrac{2}{5}a_2 + \dfrac{2}{7}a_3 = -2e + 16e^{-1}. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим

$$a_1 = \frac{e - e^{-1}}{2}, \qquad a_2 = \frac{105e - 765e^{-1}}{4} \qquad a_3 = \frac{1295e^{-1} - 175e}{4}.$$

Значит, искомая интерполяционная функция равна

$$L(t) = \frac{e - e^{-1}}{2} + \frac{105e - 765e^{-1}}{4}\,t + \frac{1295e^{-1} - 175e}{4}\,t^3. \quad \square$$

Глава 5

Линейные операторы в евклидовых и эрмитовых пространствах

5.1 Сопряжённые операторы

Задача 82. *Оператор L имеет в ортонормированном базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ двумерного евклидова пространства матрицу*

$$A_L = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу A_{L^*} сопряжённого оператора L^* в том же базисе.

Решение. Как известно, операторы L и L^* связаны соотношением

$$(Lv, w) = (v, L^* w), \tag{5.1}$$

где $(\cdot\,,\cdot)$ — евклидово скалярное произведение, а v и w произвольные векторы. Запишем это соотношение в координатах. Пусть вектор v имеет координаты (v_1, v_2), вектор w имеет координаты (w_1, w_2), тогда евклидово скалярное произведение в координатах имеет вид

$$(v, w) = v_1 w_1 + v_2 w_2 = (v_1 \quad v_2) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}.$$

Соотношение (5.1) принимает тогда вид

$$\left[A_L \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right]^T \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}^T A_{L^*} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix},$$

что эквивалентно соотношению

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}^T A_L^T \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}^T A_{L^*} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

Так как векторы v и w произвольны, соотношение (5.2) эквивалентно соотношению $A_{L^*} = A_L^T$. Таким образом,

$$A_{L^*} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Задача 83. *Пусть в некотором ортонормированном базисе трёхмерного евклидова пространства заданы векторы*

$$\mathbf{f}_1 = (0,1,1), \quad \mathbf{f}_2 = (-1,1,1), \quad \mathbf{f}_3 = (1,0,1).$$

Пусть оператор L задан своей матрицей

$$A_L = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ -3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

в базисе $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$. Найти матрицу A_{L^*} сопряжённого оператора L^* в том же базисе.

Решение. Как и в задаче 82 операторы L и L^* связаны соотношением (5.1), но теперь у нас дана матрица A_L оператора L в базисе $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$, который не является ортонормированным.

Пусть G — матрица Грама этого базиса, то есть

$$G = \begin{pmatrix} (\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_1) & (\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2) & (\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_3) \\ (\mathbf{f}_2,\mathbf{f}_1) & (\mathbf{f}_2,\mathbf{f}_2) & (\mathbf{f}_2,\mathbf{f}_3) \\ (\mathbf{f}_3,\mathbf{f}_1) & (\mathbf{f}_3,\mathbf{f}_2) & (\mathbf{f}_3,\mathbf{f}_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Пусть координаты векторов v и w в базисе $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$, имеют вид (v_1, v_2, v_3) и (w_1, w_2, w_3). Тогда скалярное произведение в координатах принимает вид

$$(v,w) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}^T G \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

и соотношение (5.1) принимает в матричной форме вид

$$\left[A_L \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right]^T G \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}^T G\, A_{L^*} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix},$$

что эквивалентно соотношению

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}^T A_L^T\, G \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}^T G\, A_{L^*} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

Векторы v и w произвольны, поэтому равенство (5.3) эквивалентно равенству $GA_{L^*} = A_L^T G$, откуда получаем формулу

$$A_{L^*} = G^{-1} A_L^T\, G.$$

Остаётся найти ответ прямым вычислением по этой формуле:

$$A_{L^*} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ -3 & 2 & 7 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 16 & -21 \\ -2 & -15 & 27 \\ -1 & -13 & 23 \end{pmatrix}.$$

□

5.2 Самосопряжённые операторы

Задача 84 (№1585 из [2]). *Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу B в этом базисе линейного оператора, заданного в некотором ортономированном базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ матрицей*

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Заметим, что оператор, заданный матрицей A, является самосопряжённым, а потому ортогональным преобразованием может быть диагонализирован, то есть существует базис из собственных векторов, и в этом базисе матрица оператора диагональна.

Начнём с поиска собственных чисел матрицы A. Характеристический многочлен равен

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 11-\lambda & 2 & -8 \\ 2 & 2-\lambda & 10 \\ -8 & 10 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 18\lambda^2 + 81\lambda - 1458.$$

Как известно, если у $P(\lambda)$ есть рациональный корень, то он должен быть делителем числа 1458. Заметим, что $1458 = 2 \cdot 3^6$. Перебирая делители, находим, что 9 является корнем $P(\lambda)$. Разделив $P(\lambda)$ столбиком на $\lambda - 9$, получаем

$$P(\lambda) = (\lambda - 9)(-\lambda^2 + 9\lambda + 162).$$

Корни квадратного многочлена $-\lambda^2 + 9\lambda + 162$ суть -9 и 18. Таким образом, собственными числами матрицы A являются $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = -9$ и $\lambda_3 = 18$. Нумерация собственных чисел выбрана нами произвольно, но этой нумерации, раз выбранной, следует придерживаться в дальнейшем.

Найдём теперь базис из собственных векторов. К счастью, в данном случае *все собственные числа матрицы различны,* и это сильно облегчает работу. Случай, когда среди собственных чисел есть совпадающие, рассмотрен в задаче 85.

Пусть $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ и $\mathbf{f}_3$ искомые собственные векторы. Если вектор $\mathbf{f}_1$ имеет координаты (x_1, x_2, x_3) в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, то имеет место соотношение

$$(A - \lambda_1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Так как $\lambda_1 = 9$, то это соотношение принимает вид

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -8 \\ 2 & -7 & 10 \\ -8 & 10 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Это система однородных линейных уравнений, которую легко решить. Общее решение имеет вид $x_1 = 2x_3$, $x_2 = 2x_3, x_3 = x_3$, то есть в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, вектор $\mathbf{f}_1$ имеет вид $(2x_3, 2x_3, x_3)$. Так как мы ищем *ортонормированный* базис, то это вектор должен иметь единичную длину, поэтому

$$\sqrt{(2x_3)^2 + (2x_3)^2 + x_3^2} = 1,$$

откуда $x_3 = \pm\frac{1}{3}$. Знак можно выбрать произвольным образом. Выбрав, например, $x_3 = \frac{1}{3}$, получаем, что вектор $\mathbf{f}_1$ имеет в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, координаты $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. Так как мы используем только координаты в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, то будем записывать это просто как

$$\mathbf{f}_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Аналогично мы находим, что

$$\mathbf{f}_2 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad \mathbf{f}_3 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

В базисе $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ наш линейный оператор будет иметь диагональную матрицу B, у которой на диагонали стоят собственные числа в том порядке, в котором мы их занумеровали:

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}.$$

Составим теперь из координат векторов $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ матрицу C следующим образом: в первый столбец запишем координаты вектора $\mathbf{f}_1$ в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, во второй столбец запишем координаты вектора $\mathbf{f}_2$ в том же базисе, а в третий столбец — координаты вектора $\mathbf{f}_3$ в том же базисе:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Тогда имеет место равенство

$$B = C^T A C,$$

то есть C и есть ортогональная матрица перехода от ортонормального базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, к ортонормальному базису $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$.

Заметим, что $\det C = -1$, то есть эта замена координат меняет ориентацию. Если бы мы хотели, чтобы замена базиса сохраняла ориентацию, то мы бы изменили знак у одного из базисных векторов: например, мы могли бы взять $\mathbf{f}_3 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. $\square$

Задача 85 (№1586 из [2]). *Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу B в этом базисе линейного оператора, заданного в некотором ортономированном базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ матрицей*

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}.$$

Решение. Оператор, заданный матрицей A, является самосопряжённым, поэтому существует базис из собственных векторов, и в этом базисе матрица оператора диагональна.

Как и в задаче 84 начнём с поиска собственных чисел матрицы A. Характеристический многочлен равен

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 17-\lambda & -8 & 4 \\ -8 & 17-\lambda & -4 \\ 4 & -4 & 11-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 45\lambda^2 - 567\lambda + 2187.$$

Чтобы найти корни характеристического многочлена, сначала подбираем один корень, подставляя делители свободного коэффициента $2187 = 3^7$. Например, можно обнаружить, что корнем является 9. Разделив столбиком $P(\lambda)$ на $\lambda - 9$ получаем

$$P(\lambda) = (\lambda - 9)(-\lambda^2 + 36\lambda - 243).$$

Корни квадратного многочлена $-\lambda^2 + 36\lambda - 243$ найти уже легко: это 9 и 27.

В результате мы видим, что собственные числа матрицы A суть $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 9$ и $\lambda_3 = 27$. В отличие от задачи 84 *среди собственных чисел есть кратные,* что усложняет решение.

Начнём с собственного числа $\lambda_3 = 27$ кратности 1. Тут всё как в задаче 84. Если вектор $\mathbf{f}_3$ имеет координаты (x_1, x_2, x_3) в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, то имеет место соотношение

$$(A - \lambda_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

то есть

$$\begin{pmatrix} -10 & -8 & 4 \\ -8 & -10 & -4 \\ 4 & -4 & -16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Общее решение этой системы линейных уравнений имеет вид $x_1 = 2x_3$, $x_2 = -2x_3, x_3 = x_3$, то есть в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, вектор $\mathbf{f}_1$ имеет вид $(2x_3, -2x_3, x_3)$. Так как нам нужен вектор единичной длины, то $x_3 = \pm\frac{1}{3}$. Выбрав, например, $x_3 = \frac{1}{3}$, получаем

$$\mathbf{f}_3 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Рассмотрим теперь собственные значения $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$. Матрица

$$A - 9E = \begin{pmatrix} 8 & -8 & 4 \\ -8 & 8 & -4 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

не просто вырождена, а имеет ранг 1, что видно из того, что все её строки пропорциональны. Поэтому система линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} 8 & -8 & 4 \\ -8 & 8 & -4 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \tag{5.4}$$

имеет *двумерное* пространство решений. В качестве $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$ нам нужны два таких решения, что соответствующие векторы имеют длину 1 и ортогональны друг другу. Чтобы этого добиться, поступим таким образом. Сначала решим возьмём произвольное ненулевое решение линейной системы (5.4), например $(1, 1, 0)$. Так как нам нужен вектор единичной длины, то отнормируем его и возьмём в качестве $\mathbf{f}_1$,

$$\mathbf{f}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

Чтобы найти $\mathbf{f}_2$ есть разные способы. Разберём два из них.

Первый способ основан на том, что мы находимся в трёхмерном пространстве, поэтому если мы знаем два базисных вектора $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_3$ из ортонормированного базиса, то остающийся вектор можно найти через векторное произведение:

$$\mathbf{f}_2 = [\mathbf{f}_3, \mathbf{f}_1] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3\sqrt{2}}\right).$$

Второй способ не использует трёхмерность пространства (а потому годится в случае произвольной размерности) и основан на том, что в качестве $\mathbf{f}_2$ можно выбрать решение системы линейных уравнений (5.4), ортогональное вектору $\mathbf{f}_1$. Это условие ортогональности тоже является линейным уравнением и мы получаем систему (из трёх пропорциональных уравнений в (5.4) мы оставили только третье)

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Общее решение этой системы имеет вид $\left(-\frac{1}{4}x_3, \frac{1}{4}x_3, x_3\right)$. Условие единичной длины даёт нам $x_3 = \pm\frac{4}{3\sqrt{2}}$. Выбрав, например, $x_3 = \frac{4}{3\sqrt{2}}$, получаем

$$\mathbf{f}_2 = \left(-\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3\sqrt{2}}\right),$$

что совпадает с ответом, полученным предыдущим способом. Если бы мы выбрали другой знак у x_3, то ответы различались бы знаком.

Теперь можно как и в решении задачи 84 построить ортогональную матрицу C перехода от ортонормального базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, к ортонормальному базису $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$, записав по столбцам координаты векторов $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Тогда имеет место равенство

$$B = C^T A C = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix},$$

как и должно быть.

Заметим, что $\det C = 1$, то есть это ортогональное преобразование, сохраняющее ориентацию. Если бы это было не так, а нужно было бы именно такое преобразование, то достаточно было бы умножить на -1 один из базисных векторов. $\square$

5.3 Ортогональные и унитарные операторы

Задача 86 (№1578 из [2]). *Для данной унитарной матрицы*

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4+3i & 4i & -6-2i \\ -4i & 4-3i & -2-6i \\ 6+2i & -2-6i & 1 \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

найти диагональную матрицу B и унитарную матрицу Q такие, что

$$B = Q^{-1}AQ.$$

Решение. Как известно, для любого унитарного оператора существует такой ортонормированный базис, что матрица оператора в этом базисе диагональна и на диагонали стоят числа, по модулю равные единице. Поэтому решение похоже на решение задач диагонализации самосопряжённых операторов, см. задачи 84 и 85.

Начнём с поиска собственных чисел. Характеристический многочлен матрицы A равен (не забудем про множитель $\frac{1}{9}$ перед матрицей в формуле (5.5)!)

$$P(\lambda) = \det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} \frac{4+3i}{9}-\lambda & \frac{4i}{9} & \frac{-6-2i}{9} \\ \frac{-4i}{9} & \frac{4-3i}{9}-\lambda & \frac{-2-6i}{9} \\ \frac{6+2i}{9} & \frac{-2-6i}{9} & \frac{1}{9}-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+\lambda^2-\lambda+1.$$

Нам пришлось проделать сложные вычисления, чтобы найти характеристический многочлен, но мы вознаграждены за труды: сам характеристический многочлен $P(\lambda)$ достаточно прост. Сразу видно, что у него один из корней равен 1. Разделив столбиком $P(\lambda)$ на $\lambda-1$, получим

$$P(\lambda) = (\lambda-1)(-\lambda^2-1).$$

Очевидно, что корнями многочлена $-\lambda^2-1$ являются i и $-i$. Таким образом, собственные числа матрицы A суть $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i$ и $\lambda_3 = -i$. Выбранная нами нумерация собственных чисел произвольна, но раз выбрав её, мы должны придерживаться её до конца решения задачи.

Заметим, что все собственные числа получились по модулю равные единице, как и должно быть. Если бы это было не так, то это бы значило, что мы ошиблись в предыдущих вычислениях.

Нам повезло в том, что *все собственные числа разные,* это упрощает дальнейшую работу. Если бы были кратные собственные числа, то мы бы в дальнейшем поступали бы аналогично задаче 85. Найдём теперь ортонормированный базис из собственных векторов $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$, в котором матрица оператора будет диагональной.

Если вектор $\mathbf{f}_1$ имеет координаты (x_1, x_2, x_3), то имеет место соотношение

$$(A-\lambda_1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

то есть

$$\begin{pmatrix} \frac{4+3i}{9}-1 & \frac{4i}{9} & \frac{-6-2i}{9} \\ \frac{-4i}{9} & \frac{4-3i}{9}-1 & \frac{-2-6i}{9} \\ \frac{6+2i}{9} & \frac{-2-6i}{9} & \frac{1}{9}-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Общее решение имеет вид $(-2ix_3, -2x_3, x_3)$. Нам нужно решение единичной длины, причём у нас не евклидово, а эрмитово скалярное произведение, поэтому получаем условие

$$\sqrt{(-2ix_3)\overline{(-2ix_3)} + (-2x_3)\overline{(-2x_3)} + x_3\overline{x_3}} = 1,$$

то есть

$$|x_3|\sqrt{4+4+1} = 1,$$

откуда $x_3 = \frac{1}{3}e^{i\varphi}$. Возьмём, например, значение $x_3 = \frac{1}{3}$, откуда получаем

$$\mathbf{f}_1 = \left(-\frac{2}{3}i, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Аналогичными вычислениями получим (ответы могут отличаться умножением на любое комплексное число, по модулю равное 1)

$$\mathbf{f}_2 = \left(\frac{2}{3}i, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad \mathbf{f}_3 = \left(-\frac{1}{3}i, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Тогда искомая матрица Q пишется как матрица перехода к базису $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$, то есть в первом столбце пишутся координаты вектора $\mathbf{f}_1$, во втором — вектора $\mathbf{f}_2$, а в третьем — вектора $\mathbf{f}_3$:

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}i & \frac{2}{3}i & -\frac{1}{3}i \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Непосредственным вычислением можно проверить, что $Q\overline{Q^T} = E$, то есть это и в самом деле унитарная матрица. Тогда

$$B = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix},$$

то есть B — диагональная матрица, на диагонали которой стоят собственные числа в том порядке, в котором мы из занумеровали. □

Задача 87 (№1571 из [2]). *Для ортогонального преобразования φ, заданного в ортонормированном базисе матрицей*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

найти ортонормированный базис, в котором матрица B этого оператора имеет канонический вид. Найти этот канонический вид.

Решение. Начнём с поиска собственных чисел матрицы A. Характеристический многочлен имеет вид

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} \frac{2}{3}-\lambda & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}-\lambda & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1.$$

Сразу видно, что 1 является корнем $P(\lambda)$. Разделив $P(\lambda)$ столбиком на $\lambda - 1$, получаем

$$P(\lambda) = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 1).$$

Корнями квадратного многочлена $-\lambda^2 + 1$ являются 1 и -1. В результате мы видим, что собственные числа суть $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ и $\lambda_3 = -1$. Выбранная нами нумерация собственных чисел произвольна, но, выбрав её, мы должны придерживаться её до конца решения задачи.

К счастью, *все собственные числа вещественные,* что упрощает нашу задачу. В данном случае искомый ортонормированный базис $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ будет состоять из собственных векторов, а каноническим видом будет диагональная матрица с собственными числами на диагонали. Случай, когда среди собственных чисел есть комплексные, рассмотрен в задаче 88.

Проще всего найти базисный вектор $\mathbf{f}_3$, отвечающий собственному значению $\lambda_3 = -1$ кратности 1. Если вектор $\mathbf{f}_3$ имеет координаты (x_1, x_2, x_3), то имеет место соотношение

$$(A - \lambda_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

то есть

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Общим решением этой системы линейных уравнений является $(x_3, -2x_3, x_3)$. Так как нам нужно решение единичной длины, то $x_3 = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$. Выбрав, например, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}$, получаем

$$\mathbf{f}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Сложнее обстоит дело с собственными векторами $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$, отвечающими собственному значению $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ кратности 2. Соответствующая система линейных уравнений имеет вид

$$(A - 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

то есть

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0, \tag{5.6}$$

и пространство её решений двумерно (это легко видеть — все строки матрицы пропорциональны). Общее решение этой системы линейных уравнений имеет вид $(2x_2 - x_3, x_2, x_3)$. Выберем произвольное ненулевое решение, например $(-1, 0, 1)$. Отнормируем его так, чтобы получившийся вектор имел единичную длину, и возьмём его в качестве $\mathbf{f}_1$,

$$\mathbf{f}_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Мы знаем, что $\mathbf{f}_2$ должен быть решением системы (5.6), ортогональным вектору $\mathbf{f}_1$, откуда получаем систему уравнений (мы оставили только первое уравнение в системе (5.6), так как все уравнения в (5.6) пропорциональны)

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Общее решение этой системы имеет вид (x_3, x_3, x_3). Отнормировав его, получаем

$$\mathbf{f}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

В найденном нами базисе оператор φ имеет матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

так как в этом базисе матрицей должна быть диагональная матрица, на диагонали которой должны располагаться собственные числа в том порядке, в котором они были занумерованы нами.

При желании можно дополнительно выписать ортогональную матрицу C перехода к базису $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$, записав в столбцах этой матрицы координаты соответствующих базисных векторов,

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

и убедиться, что $B = C^{-1}AC$. □

Задача 88 (№1574 из [2]). *Найти канонический вид B ортогональной матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

и ортогональную матрицу Q такую, что $B = Q^{-1}AQ$.

Решение. Как и в задаче 87 мы начнём с нахождения собственных чисел матрицы A. Характеристический многочлен равен

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} - \lambda & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} - \lambda & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1.$$

Легко проверить непосредственной подстановкой, что 1 является корнем $P(\lambda)$. Разделив $P(\lambda)$ столбиком на $\lambda - 1$, получаем

$$P(\lambda) = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + \lambda - 1).$$

Корнями квадратного многочлена $-\lambda^2+\lambda-1$ являются $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ и $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$. В результате мы видим, что собственные числа суть $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ и $\lambda_3=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Выбранная нами нумерация собственных чисел произвольна, но, выбрав её, мы должны придерживаться её до конца решения задачи.

В отличие от задачи 87 в этой задаче *есть комплексные собственные числа,* и это усложняет задачу. Построение ортогонального базиса, в котором матрица оператора, заданного матрицей A, будет иметь канонический вид, начнём с нахождения $\mathbf{f}_1$ — собственного вектора единичной длины матрицы A с собственным числом $\lambda_1=1$. Если вектор $\mathbf{f}_1$ имеет координаты (x_1,x_2,x_3), то имеет место соотношение

$$(A-\lambda_1)\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0,$$

то есть

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0.$$

Общее решение этой системы линейных уравнений имеет вид (x_3,x_3,x_3). Так как $\mathbf{f}_1$ должен быть единичной длины, то $x_3=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Взяв, например, $x_3=\frac{1}{\sqrt{3}}$, получаем

$$\mathbf{f}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Найдём теперь собственный вектор $\mathbf{v}$, отвечающий собственному числу $\lambda_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Если этот вектор имеет координаты (x_1,x_2,x_3), то имеет место соотношение

$$(A-\lambda_2)\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0,$$

то есть

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид $\left((-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)x_3,(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)x_3,x_3\right)$. Как мы видим, какое бы значение x_3 мы ни взяли, результат не будет вещественным. Что же делать? Давайте возьмём $x_3=1$, тогда $\mathbf{v}=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,1\right)$. Применив комплексное сопряжение к равенству $A\mathbf{v}=\lambda_2\mathbf{v}$, мы получим $\overline{A}\overline{\mathbf{v}}=\overline{\lambda_2}\overline{\mathbf{v}}$. Так как A вещественно, а $\overline{\lambda_2}=\lambda_3$, мы получаем

$$A\overline{\mathbf{v}}=\lambda_3\overline{\mathbf{v}},$$

то есть $\overline{\mathbf{v}}$ является собственным вектором с собственным числом λ_3. Это тоже комплексный вектор.

Заметим теперь, что вектор

$$\operatorname{Re}\mathbf{v}=\frac{1}{2}(\mathbf{v}+\overline{\mathbf{v}})=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$$

и вектор

$$\operatorname{Im}\mathbf{v} = \frac{1}{2i}(\mathbf{v} - \overline{\mathbf{v}}) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$$

являются вещественным базисом в подпространстве, порождённом собственными векторами, отвечающим λ_2 и λ_2. Эти векторы уже ортогональны, нам осталось только отнормировать их и взять в качестве $\mathbf{f}_2$ и $\mathbf{f}_3$:

$$\mathbf{f}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right), \quad \mathbf{f}_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

Найдём теперь матрицу Q перехода к базису $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$, записав координаты этих векторов в соответствующие столбцы:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$B = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

и это и есть искомая каноническая форма — матрица в базисе $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$, оператора, заданного матрицей A в стандартном базисе. $\square$

5.4 Полярное разложение

Задача 89 (№1600 из [2]). *Матрицу*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

представить в виде произведения симметрической матрицы с положительными собственными числами на ортогональную матрицу.

Решение. Допустим, что мы нашли искомое разложение

$$A = SO,$$

где S — симметрическая матрица с положительными собственными числами, а O — ортогональная матрица. Тогда

$$AA^T = SOO^TS^T = SES = S^2.$$

Таким образом, S является корнем квадратным из AA^T. Наоборот, пусть S является некоторым корнем квадратным из AA^T, то есть пусть S удовлетворяет соотношению

$$AA^T = S^2.$$

Определим матрицу O формулой
$$O = S^{-1}A.$$

Тогда мы получаем искомые S и O так как матрица O ортогональна:

$$OO^T = S^{-1}AA^TS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = E.$$

Прямое вычисление даёт формулу

$$AA^T = \begin{pmatrix} 24 & 6 & 12 \\ 6 & 33 & 6 \\ -12 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица симметрична, а потому может быть представлена в виде CBC^T, где C подходящая ортогональная матрица, а B — диагональная матрица, см. задачи 84 и 85. Найдём это представление. Характеристический многочлен матрицы AA^T равен

$$P(\lambda) = \det(AA^T - \lambda E) = -\lambda^3 + 81\lambda^2 - 1944\lambda + 11664.$$

Перебирая делители числа $11664 = 2^4 \cdot 3^6$, находим корень 9. Деля $P(\lambda)$ столбиком на $\lambda - 9$ получаем
$$P(\lambda) = (\lambda - 9)(-\lambda^2 + 72\lambda - 1296).$$

Корнями квадратного многочлена $-\lambda^2+72\lambda-1296$ являются 36 и 36. Таким образом, собственные числа матрицы AA^T суть $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 36$.

Так как у нас есть собственные числа кратности большей чем 1, то ищем ортонормированный базис из собственных векторов как в задаче 84. В результате получим, например, базис (могут быть и другие ответы)

$$\mathbf{f}_1 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad \mathbf{f}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right), \quad \mathbf{f}_3 = \left(-\frac{4\sqrt{5}}{15}, \frac{2\sqrt{5}}{15}, \frac{5\sqrt{5}}{15}\right).$$

Записывая координаты векторов $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$, по столбцам, получаем матрицу C перехода к ортонормальному базису $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$:
$$C = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4\sqrt{5}}{15} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2\sqrt{5}}{15} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5\sqrt{5}}{15} \end{pmatrix}.$$

Тогда верно равенство $B = C^TAA^TC$, где B — диагональная матрица с собственными числами на диагонали,
$$B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix}.$$

Тогда $AA^T = CBC^T$ и легко извлечь квадратный корень. Пусть $\sqrt{B}$ — квадратный корень из B,
$$\sqrt{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Тогда $S = C\sqrt{B}C^T$ — квадратный корень из AA^T. В самом деле,

$$S^2 = C\sqrt{B}C^T C\sqrt{B}C^T = C\sqrt{B}\sqrt{B}C^T = CBC^T = AA^T.$$

Прямое вычисление даёт

$$S = \begin{pmatrix} \frac{14}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{17}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{14}{3} \end{pmatrix}.$$

Это симметрическая матрица с положительными собственными числами 3, 6 и 6.

Тогда мы знаем и искомую ортогональную матрицу

$$O = S^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

В результате получаем искомое представление $A = SO$,

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{17}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{14}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

□

Глава 6

Квадратичные формы в евклидовом пространстве

6.1 Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональными преобразованиями

Задача 90 (№1243 из [2]). *Найти канонический вид, к которому приводится квадратичная форма*

$$3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3 \tag{6.1}$$

посредством ортогонального преобразования, не находя самого этого преобразования.

Решение. Запишем сначала матрицу, соответствующую рассматриваемой нами квадратичной форме:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Как известно, ортогональные преобразования по-одинаковому преобразуют матрицы операторов и квадратичных форм. Поэтому задача сводится к задаче диагонализации самосопряжённого оператора, см. задачи 84 и 85. Нам не нужно само преобразование, а только итоговая матрица. Мы уже знаем, что у оператора после диагонализации в получившейся матрице на диагонали стоят собственные числа. Найдём их в нашем случае.

Характеристический многочлен матрицы A равен

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 32.$$

Перебирая делители свободного члена $32 = 2^5$, находим корень -2 характеристического многочлена. Разделив $P(\lambda)$ столбиком на $\lambda + 2$, получаем равенство

$$P(\lambda) = (\lambda + 2)(-\lambda^2 + 8\lambda - 16).$$

Корнями квадратного многочлена $-\lambda^2 + 8\lambda - 16$ являются 4 и 4. В результате, собственными числами матрицы A являются $\lambda_1 = -2$ и $\lambda_2 = \lambda_3 = 4$. Поэтому в ортонормированном базисе из собственных векторов матрица квадратичной формы (6.1) будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

откуда получаем канонический вид

$$-2\tilde{x}_1^2 + 4\tilde{x}_2^2 + 4\tilde{x}_3^2$$

или, расположив сперва положительные собственные числа, а потом отрицательные,

$$4\bar{x}_1^2 + 4\bar{x}_2^2 - 2\bar{x}_3^2.$$

□

Задача 91 (№1248 из [2]). *Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму*

$$6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 \tag{6.2}$$

к каноническому виду и написать этот канонический вид.

Решение. Запишем сперва матрицу, соответствующую рассматриваемой нами квадратичной форме:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Как мы уже отмечали в решении задачи 90, ортогональные преобразования по-одинаковому преобразуют матрицы операторов и квадратичных форм. Поэтому задача сводится к задаче диагонализации самосопряжённого оператора, см. задачи 84 и 85.

Характеристический многочлен матрицы A равен

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 18\lambda^2 - 99\lambda + 162.$$

Перебирая делители свободного члена $162 = 2 \cdot 3^4$, находим корень 3 характеристического многочлена. Разделив $P(\lambda)$ столбиком на $\lambda - 3$, получаем равенство

$$P(\lambda) = (\lambda - 3)(-\lambda^2 + 15\lambda - 54).$$

Корнями квадратного многочлена $-\lambda^2 + 15\lambda - 54$ являются 6 и 9. В результате, собственными числами матрицы A являются $\lambda_1 = 3$ и $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$. Поэтому в ортонормированном базисе из собственных векторов матрица квадратичной формы (6.2) будет иметь вид

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix},$$

откуда получаем канонический вид

$$3\tilde{x}_1^2 + 6\tilde{x}_2^2 + 9\tilde{x}_3^2. \qquad (6.3)$$

Однако, нам в данной задаче надо найти и ортогональное линейное преобразование, переводящее квадратичную форму (6.2) в канонический вид (6.3). Для этого надо найти ортонормированный базис $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ из собственных векторов симметрической матрицы A. Мы это делали уже в задачах 84 и 85, поэтому приводить все детали не будем.

Собственные числа у нас все разные как в задаче 84. Если вектор $\mathbf{f}_1$ имеет координаты (x_1, x_2, x_3), то имеет место соотношение

$$(A - \lambda_1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Так как $\lambda_1 = 3$, то это соотношение принимает вид

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Это система однородных линейных уравнений, которую легко решить. Общее решение имеет вид $(-2x_3, -2x_3, x_3)$. Так как мы ищем ортонормированный базис, то этот вектор должен иметь единичную длину, поэтому $x_3 = \pm\frac{1}{3}$. Знак можно выбрать произвольным образом. Выберем $x_3 = \frac{1}{3}$, тогда получаем

$$\mathbf{f}_1 = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Рассуждая аналогичным образом, мы получаем

$$\mathbf{f}_2 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad \mathbf{f}_3 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Матрица C перехода от исходного базиса к базису $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ состоит из координат векторов $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$, записанных в соответствующих столбцах:

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Можно проверить, что

$$B = C^T AC.$$

Записать замену координат в терминах x_i и $\tilde{x}_i$ тоже просто:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix},$$

то есть

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{2}{3}\tilde{x}_1 - \frac{1}{3}\tilde{x}_2 + \frac{2}{3}\tilde{x}_3, \\ x_2 &= -\frac{2}{3}\tilde{x}_1 + \frac{2}{3}\tilde{x}_2 - \frac{1}{3}\tilde{x}_3, \\ x_3 &= \ \ \frac{1}{3}\tilde{x}_1 + \frac{2}{3}\tilde{x}_2 + \frac{2}{3}\tilde{x}_3. \end{aligned}$$

Можно непосредственной подстановкой убедиться, что это ортогональное преобразование переводит квадратичную форму (6.2) в квадратичную форму (6.3). □

6.2 Приведение пары квадратичных форм к каноническому виду

Задача 92 (№1226 из [2]). *Выяснить, что в паре квадратичных форм*

$$f = 8x_1^2 - 28x_2^2 + 14x_3^2 + 16x_1x_2 + 14x_1x_3 + 32x_2x_3, \quad g = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3$$

одна форма является положительно определённой. Найти невырожденное линейное преобразование, приводящее эту форму к нормальному, а другую форму той же пары к каноническому виду, и написать этот канонический вид.

Решение. Начнём с того, что запишем матрицы, отвечающие нашим квадратичным формам. Квадратичной форме f отвечает матрица

$$F = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 7 \\ 8 & -28 & 16 \\ 7 & 16 & 14 \end{pmatrix},$$

квадратичной форме g отвечает матрица

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Как мы знаем из критерия Сильвестра, квадратичная форма является положительно определённой тогда и только тогда, когда все главные миноры положительны. Квадратичная форма f не является положительно определённой, так как

$$\begin{vmatrix} 8 & 8 \\ 8 & -28 \end{vmatrix} = -288 < 0.$$

А квадратичная форма g является положительно определённой, так как

$$1 > 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 > 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0.$$

Найдём тогда совместные собственные числа пары матриц F и G, то есть корни многочлена

$$P(\lambda) = \det(F - \lambda G) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & 8 & 7-\lambda \\ 8 & -28-4\lambda & 16 \\ 7-\lambda & 16 & 14-2\lambda \end{vmatrix} = -4\lambda^3 + 36\lambda^2 + 324\lambda - 2916.$$

Как известно, если у этого многочлена есть некий рациональный корень $\frac{p}{q}$, то p — делитель $2916 = 2^2 \cdot 3^6$, а q — делитель $4 = 2^2$. Перебирая конечное количество вариантов, найдём, например, корень 9. Разделив $P(\lambda)$ столбиком на $\lambda - 9$, получаем равенство

$$P(\lambda) = (\lambda - 9)(-4\lambda^2 + 324).$$

Корнями квадратного многочлена $-4\lambda^2 + 324$ являются 9 и -9. В результате, совместными собственными числами матриц F и G являются $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = -9$.

Теперь нам надо найти базис $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$, обладающий следующими свойствами.

1. Верно равенство $(F - \lambda_i G)\mathbf{f}_i = 0$,

2. Векторы $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$, образуют ортонормированный базис относительно скалярного произведения, заданного симметрической матрицей G.

При этом если $\lambda_i \neq \lambda_j$, то заведомо решения $\mathbf{f}_i$ и $\mathbf{f}_j$ уравнений $(F - \lambda_i G)\mathbf{f}_i = 0$ и $(F - \lambda_j G)\mathbf{f}_j = 0$ ортогональны друг другу относительно скалярного произведения, заданного симметрической матрицей G.

Рассмотрим для начала собственное значение $\lambda_3 = -9$ кратности 1. Если вектор $\mathbf{f}_3$ имеет координаты (x_1, x_2, x_3), то имеет место соотношение

$$(F - \lambda_3 G)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Так как $\lambda_3 = -9$, то это соотношение принимает вид

$$\begin{pmatrix} 17 & 8 & 16 \\ 8 & 8 & 16 \\ 16 & 16 & 32 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Общее решение этой системы линейных уравнений имеет вид $(0, -2x_3, x_3)$. Условие того, что этот вектор имеет длину 1 относительно скалярного произведения, заданного симметрической матрицей G, имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & -2x_3 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1.$$

Преобразуя, получаем

$$18x_3^2 = 1,$$

откуда $x_3 = \pm\frac{1}{3\sqrt{2}}$. Выбрав, например, $x_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}}$, получаем

$$\mathbf{f}_3 = \left(0, -\frac{2}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\right).$$

Случай собственных чисел $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$ кратности 2 более сложен. Мы имеем

$$F - 9G = \begin{pmatrix} -1 & 8 & -2 \\ 8 & -64 & 16 \\ -2 & 16 & -4 \end{pmatrix}.$$

Все строки пропорциональны, поэтому координаты векторов $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$ удовлетворяют уравнению

$$-x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 0. \tag{6.4}$$

Выберем любое решение этого уравнения, например $(-2, 0, 1)$. Квадрат длины этого вектора относительно скалярного произведения, заданного симметрической матрицей G, имеет вид

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2.$$

Чтобы получить вектор длины 1, разделим на $\sqrt{2}$ и получим

$$\mathbf{f}_1 = \left(-\sqrt{2}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Координаты вектора $\mathbf{f}_2$ должны удовлетворять уравнению (6.4), но также и условию ортогональности вектору $\mathbf{f}_1$ относительно скалярного произведения, заданного симметрической матрицей G, а это линейное уравнение

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

то есть

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} x_1 = 0. \tag{6.5}$$

В результате мы имеем систему линейных уравнений (6.4) и (6.5). Общее решение этой системы имеет вид $(0, \frac{1}{4}x_3, x_3)$. Условие того, что этот вектор имеет длину 1 относительно скалярного произведения, заданного симметрической матрицей G, имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4}x_3 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1.$$

Преобразовав, получаем уравнение

$$\frac{9}{4} x_3^2 = 1,$$

Откуда $x_3 = \pm\frac{2}{3}$. Выбирая, например, $x_3 = \frac{2}{3}$, получаем

$$\mathbf{f}_2 = \left(0, \frac{1}{6}, \frac{2}{3} \right).$$

Матрица C перехода к базису $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ состоит из координат этих векторов, записанных по столбцам:

$$C = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{2}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Можно непосредственно проверить, что

$$C^T F C = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}, \quad C^T G C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Записать замену координат в терминах x_i и новых координат $\tilde{x}_i$ тоже просто:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix},$$

то есть

$$\begin{aligned} x_1 &= -\sqrt{2}\tilde{x}_1, \\ x_2 &= \frac{1}{6}\tilde{x}_2 - \frac{2}{3\sqrt{2}}\tilde{x}_3, \\ x_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{x}_1 + \frac{2}{3}\tilde{x}_2 + \frac{1}{3\sqrt{2}}\tilde{x}_3. \end{aligned}$$

Непосредственным вычислением можно убедиться, что

$$f = 9\tilde{x}_1^2 + 9\tilde{x}_2^2 - 9\tilde{x}_3, \quad g = \tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 + \tilde{x}_3^2.$$

□

Глава 7

Тензоры

7.1 Определение тензора

Задача 93. *Пусть* $[\cdot,\cdot]:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ *— векторное произведение, а* $\{e_1,e_2,e_3\}$ *— некоторый базис в* $\mathbb{R}^3$. *Доказать, что набор коэффициентов* a_{ij}^k, *определенных равенствами* $[e_i,e_j]=a_{ij}^k e_k$, *образует тензор.*

Решение.

Пусть $\{\tilde e_1,\tilde e_2,\tilde e_3\}$ — некоторый другой базис в пространстве $\mathbb{R}^3$ и $\tilde a_{ij}^k$ — коэффициенты разложения векторных произведений в этом базисе. Пусть $C=(c_j^i)$ — соответствующая матрица перехода, а $D=C^{-1}=(d_j^i)$ — матрица обратного перехода. Тогда имеют место следующие равенства:

$$[\tilde e_\alpha,\tilde e_\beta]=c_\alpha^i c_\beta^j[e_i,e_j]=c_\alpha^i c_\beta^j a_{ij}^k e_k=c_\alpha^i c_\beta^j a_{ij}^k d_k^\gamma \tilde e_\gamma.$$

С другой стороны, $[\tilde e_\alpha,\tilde e_\beta]=\tilde a_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma$. Таким образом, $\tilde a_{\alpha\beta}^\gamma=c_\alpha^i c_\beta^j d_k^\gamma a_{ij}^k$, т.е. рассматриваемый набор коэффициентов преобразуется по тензорному закону и представляет собой тензор из пространства $\Theta_2^1(\mathbb{R}^3)$. $\square$

Задача 94. *Показать, что набор чисел*

$$\varepsilon_{i_1 i_2\dots i_n}=\begin{cases}0, & \text{если среди индексов } i_1,i_2,\dots,i_n \text{ есть повторяющиеся}\\ \operatorname{sgn}(i_1 i_2\dots i_n), & \text{все индексы } i_1,i_2,\dots,i_n \text{ различны}\end{cases}$$

не образует тензора.

Решение.

Для того, чтобы показать, что некоторый набор чисел не образует тензора, достаточно предъявить такую замену базиса, при который тензорный закон преобразования координат нарушается. Рассмотрим, например, два базиса $\{e_1,e_1,\dots,e_n\}$ и $\{\tilde e_1,\tilde e_1,\dots,\tilde e_n\}$, которые связаны следующим образом:

$$\tilde e_1=2e_1,\quad \tilde e_2=e_2,\dots,\tilde e_n=e_n.$$

Тогда соответствующая матрица перехода $C=(c_j^i)$ диагональна, причем $c_1^1=2$, а $c_i^i=1$ при $i>1$. Если предположить, что набор чисел $\varepsilon_{i_1 i_2\dots i_n}$ образует тензор, то тогда, в частности, должны быть выполнены равенство

$$\tilde\varepsilon_{12\dots n}=c_1^{i_1}c_2^{i_2}\dots c_n^{i_n}\varepsilon_{i_1 i_2\dots i_n}=2\varepsilon_{12\dots n}.$$

Однако, по определению $\tilde{\varepsilon}_{12\ldots n} = \varepsilon_{12\ldots n} = 1$ — противоречие. Таким образом, набор чисел $\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ не образует тензора. $\square$

Задача 95. *Пусть $\{e_1, e_2, e_3\}$ — базис в линейном пространстве V. Найти разложение тензора*

$$T = (e_1 + e_2 - 3e_3) \otimes (2e_1 - e_2 + e_3) - (3e_1 - 2e_2 + e_3) \otimes (e_1 - e_2 - e_3)$$

по базису $\{e_j \otimes e_j\}$ в пространстве тензоров $\Theta_0^2(V)$.

Решение.

Раскрывая скобки и пользуясь линейность тензорного произведения, получаем:

$$T = 2e_1 \otimes e_1 - e_1 \otimes e_2 + e_1 \otimes e_3 + 2e_2 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_3 - 6e_3 \otimes e_1 + 3e_3 \otimes e_2 - 3e_3 \otimes e_3 -$$
$$- 3e_1 \otimes e_1 + 3e_1 \otimes e_2 + 3e_1 \otimes e_3 + 2e_2 \otimes e_1 - 2e_2 \otimes e_2 + 2e_2 \otimes e_3 - e_3 \otimes e_1 + e_3 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_3 =$$
$$- e_1 \otimes e_1 + 2e_1 \otimes e_2 + 4e_1 \otimes e_3 + 4e_2 \otimes e_1 - 3e_2 \otimes e_2 + 3e_2 \otimes e_3 - 7e_3 \otimes e_1 + 4e_3 \otimes e_2 - 2e_3 \otimes e_3. \square$$

Задача 96. *Пусть $u, v \in V$ — векторы, а $\xi, \eta \in V^*$ — ковекторы, и полилинейная функция T определена равенством:*

$$T(u, v, \xi, \eta) = \det \begin{pmatrix} \xi(u) & \eta(u) \\ \xi(v) & \eta(v) \end{pmatrix}.$$

Найти разложение тензора T по базису $\{e^i \otimes e^j \otimes e_k \otimes e_l\}$ в пространстве тензоров $\Theta_2^2(V)$.

Решение.

Поскольку $T = T_{ij}^{kl} e^i \otimes e^j \otimes e_k \otimes e_l$, где $T_{ij}^{kl} = T(e_i, e_j, e^k, e^l)$ для всех i, j, k, l, для разложения по базису достаточно найти значения полилинейной функции T на всевозможных наборах базисных векторов и ковекторов. Имеем:

$$T_{ij}^{kl} = T(e_i, e_j, e^k, e^l) = \det \begin{pmatrix} e^k(e_i) & e^l(e_j) \\ e^k(e_j) & e^l(e_j) \end{pmatrix} = \delta_i^k \delta_j^l - \delta_i^l \delta_j^k,$$

где δ_j^i — символ Кронекера. Таким образом, $T = (\delta_i^k \delta_j^l - \delta_i^l \delta_j^k) e^i \otimes e^j \otimes e_k \otimes e_l$. $\square$

7.2 Преобразование компонент тензора при замене базиса

Задача 97. *Пусть в базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$ компоненты тензора $T \in \Theta_2^3(V)$ имеют вид $T_{lm}^{ijk} = 3m$. Найти компоненту $\tilde{T}_{31}^{123}$ этого тензора в базисе $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$, если*

$$\tilde{e}_1 = e_1 + 3e_2 - 2e_3, \quad \tilde{e}_2 = e_2 + 4e_3, \quad \tilde{e}_3 = -e_3.$$

Решение.

Запишем матрицу перехода C от базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$ к базису $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix};$$

обратная матрица $D = C^{-1}$ имеет следующий вид:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -14 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Запишем тензорный закон преобразования для интересующей нас компоненты тензора T:

$$\tilde{T}^{123}_{31} = T^{ijk}_{lm} c^l_3 c^m_1 d^1_i d^2_j d^3_k, \tag{7.1}$$

где $C = (c^i_j)$, $D = (d^i_j)$. Заметим, что поскольку матрицы C и D — нижнетреугольные, $i = 1$ и $l = 3$ в формуле (7.1). Аналогично, индекс j может принимать лишь значения 1 и 2. Таким образом, пользуясь определением тензора T, получаем:

$$\tilde{T}^{123}_{31} = c^3_3 d^1_1 T^{1jk}_{3m} c^m_1 d^2_j d^3_k = -T^{1jk}_{3m} c^m_1 (d^2_1 d^3_1 + d^2_2 d^3_1 + d^2_1 d^3_2 + d^2_2 d^3_2 + d^2_1 d^3_3 + d^2_2 d^3_3) =$$
$$= -3(c^1_1 + 2c^2_1 + 3c^3_1)(d^2_1 + d^2_2)(d^3_1 + d^3_2 + d^3_3) = -198, \ \square$$

Задача 98. *Найти общий вид ненулевого тензора валентности 2, инвариантного относительно произвольной замены координат.*

Решение.

Покажем сперва, что тензор валентности 2, инвариантный относительно произвольной замены координат, должен иметь по одному верхнему и нижнему индексу. Предположим противное: пусть, например, инвариантный тензор T имеет два нижних индекса. Тогда, в силу его инвариантности, тензорный закон преобразования принимает вид $T_{\alpha\beta} = c^i_\alpha c^j_\beta T_{ij}$, где $C = (c^i_j)$ — матрица перехода. Рассмотрим, например преобразование гомотетии с коэффициентом 2; матрица C при этом скалярна, т.е. тензорный закон преобразования принимает вид:

$$T_{\alpha\beta} = c^\alpha_\alpha c^\beta_\beta T_{\alpha\beta} = 2^{2n} T_{\alpha\beta},$$

где $n = \dim V$. Таким образом, $T_{\alpha\beta} = 0$, т.е. в силу произвольности выбора индексов тензор T — нулевой. Аналогично доказывается, что инвариантный тензор не может иметь два верхних индекса.

Пусть теперь $T \in \Theta^1_1(V)$. Фиксируем произвольное $\alpha = 1, 2, \ldots, n$ и сделаем замену

$$\tilde{e}_\alpha = 2e_\alpha, \quad \tilde{e}_\beta = e_\beta \quad \text{при } \beta \neq \alpha.$$

Пусть $D = (d^i_j) = C^{-1}$; тогда из тензорного закона преобразования получаем:

$$T^\alpha_\beta = c^j_\beta d^\alpha_i T^i_j = c^\beta_\beta d^\alpha_\alpha T^\alpha_\beta,$$

т.е. $T^\alpha_\beta = 0$ при $\alpha \neq \beta$.

Далее для произвольных $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n$ сделаем замену

$$\tilde{e}_\alpha = e_\beta, \quad \tilde{e}_\beta = e_\alpha, \quad \tilde{e}_\gamma = e_\gamma \quad \text{при } \gamma \neq \alpha, \beta.$$

Из тензорного закона получаем:

$$T^\alpha_\alpha = c^\beta_\alpha d^\alpha_\beta T^\beta_\beta = T^\beta_\beta.$$

Это означает, что тензор T пропорционален символу Кронекера δ^i_j, а все тензоры такого вида, очевидно, инвариантны относительно всевозможных замен координат. Таким образом, тензор T имеет вид $T^i_j = c \cdot \delta^i_j$, где $c = \text{const}$. $\square$

7.3 Операции над тензорами

Задача 99. *Пусть $\{e_1, e_2, e_3\}$ — базис в пространстве V, а $\{e^1, e^2, e^3\}$ — соответствующий двойственный базис. Рассмотрим тензор*

$$T = e^1 \otimes e_3 - 2e^2 \otimes e_1 + e^3 \otimes e_2$$

и определим трилинейное отображение F равенством $F(v_1, v_2, v_3) = \det(v_j^i)$, где v_j^i — j-тая координата вектора v_i в базисе $\{v_1, v_2, v_3\}$. Вычислить $(T \otimes F)^1_{3212}$ и $(F \otimes T)^1_{3212}$.

Решение.

Согласно определению тензорного произведения

$$(T \otimes F)^1_{3212} = T(e_1 \otimes e^3) \cdot F(e_2, e_1, e_2) = 1 \cdot 0 = 0,$$

поскольку функция F обращается в нуль на наборе из линейно зависимых векторов. Аналогично, имеем:

$$(F \otimes T)^1_{3212} = F(e_3, e_2, e_1) \cdot T(e_2 \otimes e^1) = -1 \cdot (-2) = 2. \ \square$$

Замечание 6. Последняя задача, в частности, демонстрирует некоммутативность операции тензорного произведения: при изменении порядка сомножителей тензоры применяются к различным наборам векторов или ковекторов.

Задача 100. *Пусть $\{e_1, e_2, e_3\}$ — базис в пространстве V, а $\{e^1, e^2, e^3\}$ — соответствующий двойственный базис. Найти значение внешней формы*

$$\omega = (e^1 - 2e^2 + 5e^3) \wedge (4e^2 - 2e^3) \wedge (e^3 - 7e^2)$$

на векторах v_1, v_2, v_3, заданных своими координатами в базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$:

$$v_1 = (1, -2, 4), \quad v_2 = (0, 1, 3), \quad v_3 = (-1, 2, 1).$$

Решение.

Воспользуемся линейностью и кососимметричностью операции внешнего умножения:

$$\omega = 4e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 + 14e^1 \wedge e^3 \wedge e^2 = -10e^1 \wedge e^2 \wedge e^3.$$

Поскольку

$$e^1 \wedge e^2 \wedge e^3(v_1, v_2, v_3) = \frac{1}{3!} \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{5}{6},$$

получаем ответ: $\omega(v_1, v_2, v_3) = -\frac{25}{3}$. $\square$

Задача 101. *Пусть в некотором базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$ линейного пространства V задан тензор T задан условием $T_{ijk} = i - 3j + 2k$, а скалярное произведение задано матрицей Грама*

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -4 \\ -3 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найти R^1_{32}, где тензор R получается из T поднятием первого индекса.

Решение.

По определению операции поднятия индекса, $R^k_{ij} = g^{ks}T_{sij}$, где (g^{ks}) — матрица, обратная матрице Грама. Поскольку

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

интересующая нас компонента тензора R находится следующим образом:

$$R^1_{23} = g^{11}T_{123} + g^{12}T_{223} + g^{13}T_{323} = -\frac{3}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 2 - \frac{1}{2}\cdot 3 = -2. \ \square$$

Задача 102. *Пусть V — двумерное линейное пространство, и тензоры $T \in \Theta^2_0(V)$ и $R \in \Theta^0_4(V)$ имеют следующие координаты:*

$$T^{11} = 1,\ T^{12} = 2,\ T^{21} = 1,\ T^{22} = 3,\ R_{1121} = 1,\ R_{1222} = -1,\ R_{2211} = 2,\ R_{2111} = -2$$

(остальные координаты тензора R — нулевые). Найти компоненты свертки тензора $R \otimes T$ по двум парам индексов сразу: по первым верхнему и первому нижнему индексам и по вторым верхнему и нижнему индексам.

Решение.

Пусть $S \in \Theta^2_0(V)$ — искомый тензор. Тогда

$$S_{kl} = R11lkT^{11} + R_{21kl}T^{21} + R_{12kl}T^{12} + R_{22kl}T^{kl}$$

для всех k, l. Подставляя теперь координаты тензоров R и T, получаем:

$$S_{11} = -2\cdot 1 + 2\cdot 3 = 4, \quad S_{12} = 0, \quad S_{21} = 1\cdot 1 = 1, \quad S_{22} = -1\cdot 2 = -2. \ \square$$

Задача 103. *Пусть $\{e_1, e_2, e_3\}$ — базис в пространстве V, а $\{e^1, e^2, e^3\}$ — соответствующий двойственный базис. Найти свертку тензора*

$$T = (e^1 - 2e^2 + e^3) \otimes (2e_1 + e_2 - 3e_3) - (4e^1 + e^2 + e^3) \otimes (e_1 - e_2 - e_3).$$

Решение.

Поскольку тензор T имеет по одному верхнему и нижнему индексу, его свертка $s(T)$ — полная, т.е. является числом, равным $T^1_1 + T^2_2 + T^3_3$. Вычисляя соответствующие коэффициенты по формуле $T^i_j = T(e_j, e^i)$, получаем:

$$T^1_1 = 2 - 4 = -2, \quad T^2_2 = -2 + 1 = -1, \quad T^3_3 = -3 + 1 = -2.$$

Таким образом, $s(T) = -5$, $\square$

Задача 104. *Пусть $u, v \in V$ — векторы, $\xi, \eta \in V^*$ — ковекторы, полилинейная функция T определена равенством:*

$$T(u, v, \xi, \eta) = \det\begin{pmatrix} \xi(u) & \eta(u) \\ \xi(v) & \eta(v) \end{pmatrix}$$

и размерность пространства V равна n. Найти полную свертку тензора T.

Решение.

Рассматриваемый тензор принадлежит пространству $\Theta_2^2(V)$, поэтому его полная свертка — это свертка по двум парам индексов одновременно: по первым верхнему и нижнему индексам и по вторым верхнему и нижнему индексам: $s(T) = T_{ij}^{ij}$. При решении Задачи 96 мы уже сталкивались с этим тензором и выяснили, что

$$T_{ij}^{kl} = T(e_i, e_j, e^k, e^l) = \delta_i^k \delta_j^l - \delta_i^l \delta_j^k;$$

поэтому, $T_{ij}^{ij} = \delta_i^i \delta_j^j - \delta_i^j \delta_j^i$. Легко видеть, что $T_{ij}^{ij} = 1$ при $i \neq j$ и что $T_{ii}^{ii} = 0$. Это означает, что свертка $s(T)$ равна количеству неупорядоченных пар индексов (i, j), где $i \neq j$. Таким образом, $s(T) = n^2 - n$, $\square$

Литература

[1] Э. Б. Винберг. Курс алгебры. М., Факториал, 1999.

[2] И. В. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре. М., ???, ???.

[3] Ю. М. Смирнов, под редакцией. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. М., Логос, 2005.