Державний вищий навчальний заклад
«Запорізький національний університет»
Міністерства освіти і науки України

І.В. Зіновєєв, Н.І.–В. Манько, О.Г. Спиця

АЛГЕБРА ТА ГЕОМЕТРІЯ: АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Навчально-методичний посібник
для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр»
напряму підготовки «Інформатика»

Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол від

Запоріжжя
2014

УДК 512 : 514 (075.8)
ББК В14 + В15 я 73

Зіновєєв І. В., Манько Н. І.–В., Спиця О. Г. Алгебра та геометрія: аналітична геометрія: навчально-методичний посібник для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр» напряму підготовки «Інформатика». – Запоріжжя: ЗНУ, 2014.– 116 с.

Навчально-методичне видання містить стислі теоретичні відомості з тем аналітичної геометрії: «Вектори. Операції над векторами», «Скалярний добуток двох векторів», «Векторний добуток двох векторів», «Мішаний та подвійний векторний добутки трьох векторів», «Пряма на площині», «Пряма та площина у просторі», «Криві другого порядку», «Поверхні другого порядку» та докладну розробку практичних занять, що відповідають цим темам. У посібнику наведено приклади розв'язань основних типів задач та задач, що відносяться до самостійної роботи студентів.

Видання призначене для студентів І курсу математичного факультету напряму підготовки «Інформатика» денної та заочної форм навчання.

Рецензент *С.М. Гребенюк*
Відповідальний за випуск *А.К. Приварников*

ЗМІСТ

ВСТУП

В основу даного посібника покладено практичні вимоги до курсу «Алгебра та геометрія», що відповідають навчальному плану ОКР «бакалавр» напряму підготовки «Інформатика».

Запропоноване видання призначене для проведення практичних робіт, самостійного опрацювання студентами розділів аналітичної геометрії та виконання індивідуальних завдань із названої дисципліни.

Дисципліна «Алгебра та геометрія» відноситься до загально професійних дисциплін фундаментальної науково-математичної підготовки. Вона забезпечує рівень знань і вмінь відповідно до державного стандарту, відповідає фундаменталізації освіти, сприяє формуванню світогляду і розвитку логічного мислення студентів. Дисципліна «Алгебра та геометрія» є однією з найважливіших розділів математики. Її матеріал є основою для вивчення цілого ряду дисциплін: математичного аналізу, фізики, методів обчислень, математичного моделювання. Зокрема матеріал розглянутих тем найбільш тісно пов'язаний з диференціальною геометрією, математичним моделюванням.

У зв'язку зі сказаним вище, **метою** даного посібника є забезпечення високого рівня теоретичних і практичних знань з розділів курсу аналітичної геометрії: «Вектори. Операції над векторами», «Скалярний добуток двох векторів», «Векторний добуток двох векторів», «Мішаний та подвійний векторний добутки трьох векторів», «Пряма на площині», «Пряма та площина у просторі», «Криві другого порядку», «Поверхні другого порядку».

Основне завдання видання – навчити студентів вільно користуватися поняттями та методами аналітичної геометрії (лінійні операції над векторами; добутки векторів; дослідження та побудова кривих на площині, поверхонь у просторі тощо).

У результаті вивчення матеріалу аналітичної геометрії студент **повинен:**

ЗНАТИ:

–основні поняття, факти та теореми аналітичної геометрії;
–теоретичні основи і суть геометричних методів;

ВМІТИ:

–застосовувати основні поняття, твердження та теореми до розв'язання задач;
–наводити приклади, які демонструють суть методів аналітичної геометрії.

1 ОПЕРАЦІЇ НАД ВЕКТОРАМИ. ЛІНІЙНА ЗАЛЕЖНІСТЬ ВЕКТОРІВ. РАДІУС-ВЕКТОР. ДІЛЕННЯ ВІДРІЗКА В ДАНОМУ ВІДНОШЕННІ

Вектор – напрямлений відрізок прямої. Позначення: $\overline{a}$ або $\vec{a}$. Якщо A – початок вектора, а B – кінець, то тоді вектор можна позначити так: $\overline{AB}$ або $\overrightarrow{AB}$.

Відстань між кінцем і початком вектора $\overline{a}$ будемо називати *довжиною* або *модулем вектора* й позначати одним із символів: $\left|\overline{a}\right|$ або a.

Два або більше векторів називають *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Три або більше векторів називають *компланарними*, якщо всі вони паралельні деякій площині або лежать в одній площині.

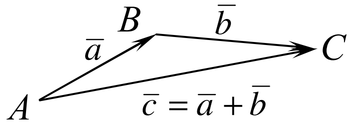
Якщо довжина вектора $\overline{a}$ дорівнює нулю, то вектор $\overline{a}$ називають *нульовим* і пишуть $\overline{a} = \overline{0}$.

Якщо положення початкової точки вектора в просторі значення не має, такі вектори називають *вільними*. Два вільні вектори мають *однаковий напрямок* ($\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$), якщо вони колінеарні та їх кінці лежать по одну сторону від прямої, що проходить через їх початки. Якщо по різні сторони, то вектори називають *протилежно спрямованими* ($\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$). Два вільних вектори вважаються *рівними*, якщо вони мають однакові довжини й однакові напрямки.

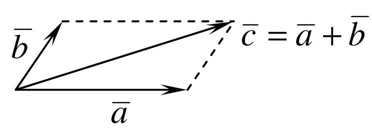
Невільні вектори поділяють на *ковзні* й *зв'язані*.

Надалі будемо розглядати тільки вільні вектори.

Під *лінійними операціями* над векторами розуміють операції додавання векторів і множення вектора на число. *Сумою* векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називають вектор $\overline{c}$, який можна отримати в результаті таких дій: з довільної точки A простору відкладаємо вектор $\overline{a}$, а з кінця B цього вектора відкладаємо вектор $\overline{b}$, будемо вважати при цьому, що кінець вектора $\overline{b}$ розташовано в точці C, тоді вектор $\overline{AC}$ і є сума векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ (рис 1.1а). У деяких випадках зручніше користуватися правилом паралелограма (рис. 1.1б): якщо вектори відкласти від однієї точки, то вектор-сума – це діагональ паралелограма, що виходить з початку векторів-доданків.



а) правило трикутника



б) правило паралелограма

Рисунок 1.1 – Правила суми двох векторів

За правилом трикутника поняття суми легко узагальнюється на випадок будь-якого скінченого числа векторів.

Вектор $\overline{b}$ будемо називати *протилежним* вектору $\overline{a}$, якщо $\overline{a} = -\overline{b}$. Вектор, протилежний вектору $\overline{a}$, позначають так: $-\overline{a}$. Напрямки векторів $\overline{a}$ й $-\overline{a}$ протилежні, а модулі однакові.

Під *різницею* векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ розуміють вектор $\overline{a} + \left(-\overline{b}\right)$. Різницю векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ будемо позначати так: $\overline{a} - \overline{b}$.

Добутком вектора $\overline{a}$ на число α називають вектор, який має довжину

$|\alpha|\cdot|\overline{a}|$; напрямок вектора $\alpha\overline{a}$ збігається з напрямком вектора $\overline{a}$, якщо $\alpha>0$, і протилежний йому, якщо $\alpha<0$. Якщо $\alpha=0$, то $0\cdot\overline{a}=\overline{0}$.

Операції додавання векторів і множення їх на числа мають наступні **властивості**. Для будь-яких векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ та будь-яких дійсних чисел α і β:

1. Додавання векторів *комутативне*: $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$.
2. Додавання векторів *асоціативне*: $(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$.
3. Додавання нульового вектора до будь-якого вектора $\overline{a}$ не змінює останнього: $\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$.
4. $(-1)\cdot\overline{a}=-\overline{a}$, $-1\in R$.
5. Множення вектора на число *асоціативне*: $(\alpha\beta)\overline{a}=\alpha(\beta\overline{a})$.
6. Множення вектора на число *дистрибутивне відносно додавання чисел*: $(\alpha+\beta)\overline{a}=\alpha\overline{a}+\beta\overline{a}$.
7. Множення вектора на число *дистрибутивне відносно додавання векторів*: $\alpha(\overline{a}+\overline{b})=\alpha\overline{a}+\alpha\overline{b}$.
8. Множення вектора на одиницю не змінює останнього $1\cdot\overline{a}=\overline{a}$, $1\in R$.

Використовуючи лінійні операції над векторами, можна формувати суми такого виду $\alpha_1\overline{a}_1+\alpha_2\overline{a}_2+...+\alpha_n\overline{a}_n$, які називаються *лінійними комбінаціями векторів* $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ з коефіцієнтами $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in R$

Нехай на площині або в просторі зафіксована точка O (*полюс*). Вектор $\overline{OM}$ з початком у точці O та кінцем у деякій точці M площини або простору називається *радіус-вектором* точки M: $\overline{r}_M$.

Нехай дано три точки A, B, C, що лежать на одній прямій. Говорять, що точка C ділить напрямлений відрізок AB у відношенні λ, якщо $\overline{AC}=\lambda\overline{CB}$.

Теорема 1.1 Якщо точка C ділить відрізок AB у відношенні $\lambda\neq-1$, то радіус вектор $\overline{r}_C$ точки C виражається через радіус-вектори $\overline{r}_A$ і $\overline{r}_B$ точок A й B наступним чином:

$$\overline{r}_C=\frac{\overline{r}_A+\lambda\overline{r}_B}{1+\lambda},\ \lambda\neq-1$$

– формула ділення відрізка в даному відношенні.

Лінійна комбінація $\alpha_1\overline{a}_1+\alpha_2\overline{a}_2+...+\alpha_n\overline{a}_n$ векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ називається тривіальною, якщо $\forall i=\overline{1,n}\ \alpha_i=0$.

Лінійна комбінація $\alpha_1\overline{a}_1+\alpha_2\overline{a}_2+...+\alpha_n\overline{a}_n$ векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ називається нульовою, якщо $\alpha_1\overline{a}_1+\alpha_2\overline{a}_2+...+\alpha_n\overline{a}_n=\overline{0}$.

Вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ називаються лінійно незалежними, якщо вони утворюють тільки тривіальну нульову лінійну комбінацію. Якщо ж для векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ існують такі дійсні числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, серед яких хоча б одне відмінне від нуля та $\alpha_1\overline{a}_1+\alpha_2\overline{a}_2+...+\alpha_n\overline{a}_n=\overline{0}$, то вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ називаються лінійно залежними.

Умовимося вектор $\overline{b}=\alpha_1\overline{a}_1+\alpha_2\overline{a}_2+...+\alpha_n\overline{a}_n$ називати лінійною комбінацією векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in R)$.

Теорема 1.2 Для того, щоб система векторів була лінійно залежною, необхідно й достатньо, щоб один з векторів був лінійною комбінацією інших.

Теорема 1.3 Два вектори лінійно залежні тоді й тільки тоді, коли вони колінеарні.

Наслідок. Два не колінеарних вектори лінійно незалежні.

Теорема 1.4 Три вектори лінійно залежні тоді й тільки тоді, коли вони компланарні.

Наслідок. Три не компланарних вектори лінійно незалежні.

Теорема 1.5 Будь-які чотири вектори у просторі геометричних векторів лінійно залежні.

Множину векторів будемо називати *векторним простором*, якщо лінійні операції над будь-якими векторами цієї множини, тобто додавання двох векторів і множення вектора на число, дають вектори тієї ж множини (властивості див. вище).

Базисом векторного простору називається така впорядкована сукупність векторів цього простору, яка є лінійно незалежною і максимальною (додавання до цієї системи хоча б одного вектора робить її лінійно залежною). З максимальності системи базисних векторів безпосередньо виходить, що будь-який вектор $\overline{d}$ тривимірного простору є лінійною комбінацією трьох базисних векторів: $\overline{d} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c}$, де $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – вектори базису. Числа α, β, γ називають *координатами вектора* $\overline{d}$ в базисі $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$. Позначення: $\overline{d}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Теорема 1.6 Будь-які два базиси одного векторного простору мають однакову кількість векторів.

Теорема 1.7 Координати вектора у заданому базисі єдині.

Число векторів базису називається *розмірністю* даного векторного простору. Позначення: $\dim V$.

Теорема 1.8 Будь-яка координата суми скінченого числа векторів дорівнює сумі відповідних координат доданків:

$$\overline{d}_1 + \overline{d}_2 + ... + \overline{d}_n = (\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n;\ \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_n;\ \gamma_1 + \gamma_2 + ... + \gamma_n).$$

При множенні вектора на число, його координати множаться на це число, тобто

$$\lambda\overline{d}_1 = (\lambda\alpha_1, \lambda\beta_1, \lambda\gamma_1),\ \lambda \in R.$$

Теорема 1.9 Якщо точка C ділить відрізок AB у відношенні $\lambda \neq -1$ і $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, то координати (x_C, y_C, z_C) точки C можна знайти за формулами:

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda},\ y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda},\ z_C = \frac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda}.$$

Тест для самоконтролю

1. $ABCD$ – квадрат. Сума яких із зазначених векторів є нульовим вектором?

А. $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ **Б.** $\overline{DC}$ і $\overline{AB}$ **В.** $\overline{AC}$ і $\overline{DA}$ **Г.** $\overline{BC}$ і $\overline{AD}$

2. Виберіть правильне твердження:

А. якщо точка M ділить відрізок AB у відношенні λ, то точка M ділить відрізок BA у відношенні $(-\lambda)$;

Б. точка M, що належить прямій M_1M_2, може ділити відрізок M_1M_2 у відношенні $\lambda < 0$;

В. якщо точка M – середина відрізка AB, то точка M ділить відрізок AB у відношенні $\lambda = \frac{1}{2}$;

Г. якщо точка M ділить відрізок AB у відношенні λ, то $\frac{BM}{MA} = \lambda$.

3. $ABCD$ – квадрат. Укажіть пари рівних векторів.

А. $\overline{AB}$ і $\overline{DC}$ **Б.** $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ **В.** $\overline{BC}$ і $\overline{DA}$ **Г.** $\overline{BC}$ і $\overline{AC}$

4. Точка M – середина відрізка AB, тоді точка M ділить відрізок AB у відношенні:

А. $\lambda = -\frac{1}{2}$ **Б.** $\lambda = \frac{1}{2}$ **В.** $\lambda = 1$ **Г.** $\lambda = 2$

5. $ABCD$ – паралелограм. Укажіть пари колінеарних векторів.

А. $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$ **Б.** $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ **В.** $\overline{AB}$ і $\overline{BC}$ **Г.** $\overline{DA}$ і $\overline{BD}$

6. Точка M – середина відрізка AB. Укажіть вірну векторну рівність.

А. $\bar{r}_M = \frac{1}{2}(\bar{r}_A - \bar{r}_B)$ **Б.** $\bar{r}_M = \bar{r}_A - \bar{r}_B$ **В.** $\bar{r}_M = \frac{1}{2}(\bar{r}_A + \bar{r}_B)$ **Г.** $\bar{r}_M = \bar{r}_A + \bar{r}_B$

7. $ABCD$ – паралелограм. Укажіть пари не колінеарних векторів.

А. $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ **Б.** $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$ **В.** $\overline{AB}$ і $\overline{DC}$ **Г.** $\overline{DA}$ і $\overline{BC}$

8. Точка M ділить відрізок AB у відношенні $\lambda = -\frac{1}{2}$. Укажіть вірну векторну рівність.

А. $\bar{r}_M = 2\bar{r}_A - \bar{r}_B$ **Б.** $\bar{r}_M = \frac{1}{2}(\bar{r}_A + \bar{r}_B)$ **В.** $\bar{r}_M = \frac{1}{2}(\bar{r}_A - \bar{r}_B)$ **Г.** $\bar{r}_M = 2\bar{r}_A + \bar{r}_B$

9. Точка M ділить відрізок AB у відношенні $\lambda = \frac{3}{2}$. Укажіть вірну векторну рівність.

А. $\bar{r}_M = \frac{1}{5}(2\bar{r}_A - 3\bar{r}_B)$ **Б.** $\bar{r}_M = \frac{1}{5}(2\bar{r}_A + 3\bar{r}_B)$ **В.** $\bar{r}_M = \frac{3}{2}(\bar{r}_A - \bar{r}_B)$ **Г.** $\bar{r}_M = \frac{3}{2}(\bar{r}_A + \bar{r}_B)$

10. Виберіть неправильне твердження:

А. якщо точка M ділить відрізок AB у відношенні λ, то $\frac{BM}{MA} = \lambda$;

Б. точка M, що лежить на прямій M_1M_2, може ділити відрізок M_1M_2 у відношенні $\lambda < 0$;

В. якщо точка M – середина відрізка AB, то точка M ділить відрізок AB у відношенні $\lambda = 1$;

Г. якщо точка M ділить відрізок AB у відношенні λ, то точка M ділить відрізок BA у відношенні $\frac{1}{\lambda}$.

11. Відомо, що $\bar{r}_M = -2\bar{r}_A + 3\bar{r}_B$. У якому відношенні точка M ділить відрізок

AB?

А. $\frac{3}{2}$ **Б.** $-\frac{2}{3}$ **В.** $-\frac{3}{2}$ **Г.** $\frac{2}{3}$

12. Відомо, що точка *M* ділить відрізок *AB* у відношенні λ. У якому відношенні ця точка ділить відрізок *BA*?

А. $-\lambda$ **Б.** $\lambda+1$ **В.** $1-\lambda$ **Г.** $\frac{1}{\lambda}$

13. *ABCD* – паралелограм. Точки *M* і *N* ділять навпіл сторони *AB* і *BC* відповідно. Скільки із зазначених систем векторів є лінійно залежними: $\{\overline{AM}, \overline{AN}\}$, $\{\overline{AN}, \overline{AC}\}$, $\{\overline{AM}, \overline{AB}\}$, $\{\overline{AB}, \overline{CD}\}$?

А. 1 **Б.** 2 **В.** 3 **Г.** 4

14. *ABCD* – паралелограм. Координатами вектора $\overline{AB}$ в базисі $\{\overline{AD}, \overline{DC}\}$ будуть:

А. $(1,0)$ **Б.** $(-1,0)$ **В.** $(0,-1)$ **Г.** $(0,1)$

15. Вершину *A* тетраедра *OABC* прийнято за полюс, вектори $\overline{AO}$, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ – за базис. Координатами радіус-вектора центру ваги грані *OAB* тетраедра будуть:

А. $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},0\right)$ **Б.** $\left(\frac{1}{3},0,\frac{1}{3}\right)$ **В.** $\left(0,\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ **Г.** $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

16. При яких значеннях λ і μ вектори $\overline{a}(-1,2\mu,3)$ і $\overline{b}(\lambda,3,-2)$ будуть колінеарні?

А. $\lambda=\frac{3}{2}$, $\mu=-\frac{9}{4}$ **Б.** $\lambda=-\frac{2}{3}$, $\mu=-\frac{9}{4}$ **В.** $\lambda=\frac{2}{3}$, $\mu=\frac{9}{4}$ **Г.** $\lambda=\frac{2}{3}$, $\mu=-\frac{9}{4}$

17. *ABCD* – паралелограм. Точки *M* і *N* ділять навпіл сторони *AB* і *BC* відповідно. Скільки із зазначених систем векторів є лінійно незалежними: $\{\overline{AM}, \overline{AN}\}$, $\{\overline{AN}, \overline{AC}\}$, $\{\overline{AM}, \overline{AB}\}$, $\{\overline{AB}, \overline{CD}\}$?

А. 1 **Б.** 2 **В.** 3 **Г.** 4

18. Лінійно незалежною є система векторів ($\overline{a}\neq\overline{0}$) …

А. $\{\overline{d}_1=\overline{a}, \overline{d}_2=\overline{0}\}$ **Б.** $\{\overline{d}_1=\overline{a}, \overline{d}_2=-\overline{a}\}$ **В.** $\{\overline{d}_1=\overline{a}\}$ **Г.** $\{\overline{d}_1=\overline{0}, \overline{d}_2=-\overline{a}\}$

19. Точка *M* ділить відрізок *AB* у відношенні $\lambda=-\frac{1}{2}$. Укажіть координати точки *M*, якщо $A(1;2;3)$, $B(-1;-2;-3)$.

А. $(0;0;0)$ **Б.** $(-3;-6;-9)$ **В.** $(1;2;3)$ **Г.** $(3;6;9)$

20. Точка *M* ділить відрізок *AB* у відношенні $\lambda=\frac{3}{2}$. Укажіть координати точки *A*, якщо $M(1;2;3)$, $B(-1;-2;-3)$.

А. $(-4;-8;-12)$ **Б.** $(1;2;3)$ **В.** $(4;8;12)$ **Г.** $(-2;-4;-6)$

21. Точка *M* ділить відрізок *AB* у відношенні $\lambda=-\frac{2}{3}$. Укажіть координати точки *B*, якщо $A(1;2;3)$, $M(-1;-2;-3)$.

А. $(-2; -4; -6)$ **Б.** $(1; 2; 3)$ **В.** $(4; 8; 12)$ **Г.** $(2; 4; 6)$

22. На матеріальну точку діють дві сили $\overline{F_1} = -2\overline{a}$ і $\overline{F_2} = 3\overline{b}$, де $\overline{a}(5; -2; 3)$, $\overline{b}(1; 0; -4)$. Координатами їх рівнодійної будуть

А. $(-7; 7; -18)$ **Б.** $(-7; 4; 6)$ **В.** $(-13; 4; 6)$ **Г.** $(-7; 4; -18)$

23. Дано вектори $\overline{a}(-1; 3; 2)$, $\overline{b}(0; 1; 4)$. Координатами вектора $\dfrac{3\overline{a} - 2\overline{b}}{4}$ будуть

А. $\left(-\dfrac{3}{4}; \dfrac{7}{4}; -\dfrac{1}{2}\right)$ **Б.** $\left(-\dfrac{3}{4}; 2; -\dfrac{1}{2}\right)$ **В.** $\left(\dfrac{3}{4}; \dfrac{7}{4}; -\dfrac{1}{2}\right)$ **Г.** $\left(-\dfrac{3}{4}; \dfrac{7}{4}; -\dfrac{1}{4}\right)$

24. Відомо, що $\dim V = 3$. Яку максимальну кількість лінійно незалежних векторів можна указати в цьому просторі?

А. 0 **Б.** 1 **В.** 2 **Г.** 3

Відповіді: 1. А. 2. Г. 3. А. 4. В. 5. Б. 6. В. 7. Б. 8. А. 9. Б. 10. Б. 11. В. 12. Г. 13. Б. 14. Г. 15. А. 16. Г. 17. Б. 18. В. 19. Г. 20. В. 21. Г. 22. Г. 23. А. 24. Г.

Приклади розв'язування задач

1. У трикутнику ABC пряма AM – бісектриса кута BAC, причому точка M належить стороні BC. Виразіть вектор $\overline{AM}$ через $\overline{AB} = \overline{b}$, $\overline{AC} = \overline{c}$.

Розв'язання:

Вектор $\overline{BC} = \overline{c} - \overline{b}$. За властивістю бісектриси внутрішнього кута трикутника маємо $\left|\overline{BM}\right| : \left|\overline{MC}\right| = \left|\overline{b}\right| : \left|\overline{c}\right|$, $\left|\overline{BM}\right| : \left|\overline{BC}\right| = \left|\overline{b}\right| : \left(\left|\overline{b}\right| + \left|\overline{c}\right|\right)$.

Отже, $\overline{BM} = \dfrac{\left|\overline{b}\right|}{\left|\overline{b}\right| + \left|\overline{c}\right|}\left(\overline{c} - \overline{b}\right)$. Оскільки $\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{BM}$, то

$$\overline{AM} = \overline{b} + \frac{\left|\overline{b}\right|}{\left|\overline{b}\right| + \left|\overline{c}\right|}\left(\overline{c} - \overline{b}\right) = \frac{\overline{b}\left|\overline{c}\right| + \overline{c}\left|\overline{b}\right|}{\left|\overline{b}\right| + \left|\overline{c}\right|}.$$

2. Радіус-векторами вершин A, B, C трикутника ABC є $\overline{r_1}$, $\overline{r_2}$, $\overline{r_3}$ відповідно. Знайдіть радіус-вектор точки M – перетину медіан трикутника.

Розв'язання:

Оскільки $\overline{BC} = \overline{r_3} - \overline{r_2}$, $\overline{BD} = \dfrac{\overline{r_3} - \overline{r_2}}{2}$ (D – середина сторони BC), $\overline{AB} = \overline{r_2} - \overline{r_1}$, $\overline{AD} = \overline{BD} + \overline{AB} = \dfrac{\overline{r_3} - \overline{r_2}}{2} + \overline{r_2} - \overline{r_1} = \dfrac{\overline{r_3} + \overline{r_2} - 2\overline{r_1}}{2}$, $\overline{AM} = \dfrac{2}{3}\overline{AD}$, тому $\overline{AM} = \dfrac{\overline{r_3} + \overline{r_2} - 2\overline{r_1}}{3}$. Отже, $\overline{r_M} = \overline{r_1} + \overline{AM} = \dfrac{\overline{r_1} + \overline{r_2} + \overline{r_3}}{3}$.

3. У трикутнику ABC сторона AB точками M і N поділена на три рівні частини: $\left|\overline{AM}\right| = \left|\overline{MN}\right| = \left|\overline{NB}\right|$. Виразіть вектор $\overline{CM}$ через $\overline{CA} = \overline{a}$, $\overline{CB} = \overline{b}$.

Розв'язання:

Оскільки $\overline{AB} = \overline{b} - \overline{a}$, то $\overline{AM} = \dfrac{\overline{b} - \overline{a}}{3}$. Враховуючи, що $\overline{CM} = \overline{CA} + \overline{AM}$, маємо:

$$\overline{CM}=\overline{a}+\frac{\overline{b}-\overline{a}}{3}=\frac{2\overline{a}+\overline{b}}{3}.$$

4. Система векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ містить нульовий вектор. З'ясуйте, чи є вектори цієї системи лінійно залежними або лінійно незалежними?

Розв'язання:

Без обмеження загальності міркувань можна припустити, що $\overline{a}_1=\overline{0}$, тоді, $1\cdot\overline{a}_1+0\cdot\overline{a}_2+...+0\cdot\overline{a}_n=\overline{0}$. У цій лінійній комбінації векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ коефіцієнт при першому векторі відмінний від нуля. Отже, розглянуті вектори лінійно залежні. Таким чином, система лінійно незалежних векторів не може містити нульовий вектор.

Висновок: система, що містить нульовий вектор, лінійно залежна.

5. В паралелограмі $ABCD$ точка M – середина DC, N – середина BC. Знайдіть лінійну залежність векторів $\overline{AM}$, $\overline{AN}$, $\overline{CB}$.

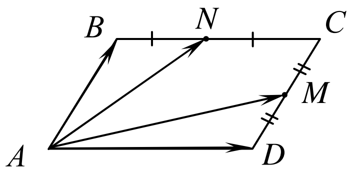


Рисунок 1.2 – Рисунок до прикладу 5

Розв'язання:

Виходячи з геометричного змісту лінійної залежності трьох векторів, зрозуміло, що вектори $\overline{AM}$, $\overline{AN}$, $\overline{CB}$ лінійно залежні. Знайдемо яку-небудь нульову, але нетривіальну лінійну комбінацію цих векторів.

Виберемо базис $\{\overline{AB}, \overline{AD}\}$. Розкладемо вектори $\overline{AM}$, $\overline{AN}$, $\overline{CB}$ за базисом, отримаємо

$$\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{AB}+\overline{AD},\ \overline{AN}=\frac{1}{2}\overline{AD}+\overline{AB},\ \overline{CB}=-\overline{AD}.$$

Складемо нульову лінійну комбінацію векторів $\overline{AM}$, $\overline{AN}$, $\overline{CB}$ з коефіцієнтами α, β, γ

$$\alpha\overline{AM}+\beta\overline{AN}+\gamma\overline{CB}=\overline{0}.$$

Підставимо в цю комбінацію знайдені розклади цих векторів за базисом та зберемо коефіцієнти при базисних векторах, отримаємо

$$\left(\frac{1}{2}\alpha+\beta\right)\overline{AB}+\left(\alpha+\frac{1}{2}\beta-\gamma\right)\overline{AD}=\overline{0}.$$

Так як вектори $\overline{AB}$ і $\overline{AD}$ лінійно незалежні, то будь-яка їх нульова лінійна комбінація повинна бути тривіальною. Тому маємо

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\alpha+\beta=0,\\ \alpha+\frac{1}{2}\beta-\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-2\beta,\\ \alpha=\gamma-\frac{1}{2}\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-2\beta,\\ \gamma=-\frac{3}{2}\beta.\end{cases}$$

Нас цікавить який-небудь ненульовий набір чисел α, β, γ, що задовольняє системі, тому покладемо $\beta=-2$. Тоді $\alpha=4$, $\gamma=3$. Таким чином, знайдено нетривіальну нульову комбінацію векторів $\overline{AM}$, $\overline{AN}$, $\overline{CB}$: $4\overline{AM}-2\overline{AN}+3\overline{CB}=\overline{0}$.

6. Вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ не компланарні. Чи будуть компланарними вектори

$\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$: $\bar{l} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$, $\bar{m} = \bar{a} - \bar{b}$, $\bar{n} = 3\bar{a} - \bar{b} + \bar{c}$. Якщо так, то знайдіть їх лінійну залежність.

Розв'язання:

Виходячи з геометричного змісту лінійної залежності трьох векторів, зрозуміло, що вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ лінійно незалежні. Складемо нульову лінійну комбінацію векторів $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$ з коефіцієнтами α, β, γ

$$\alpha\bar{l} + \beta\bar{m} + \gamma\bar{n} = \bar{0}.$$

Підставимо в цю комбінацію їх розклади і зберемо коефіцієнти при векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$:

$$(\alpha + \beta + 3\gamma)\bar{a} + (\alpha - \beta - \gamma)\bar{b} + (\alpha + \gamma)\bar{c} = \bar{0}.$$

Так як вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ лінійно незалежні, то будь-яка їх нульова лінійна комбінація повинна бути тривіальною. Тому маємо

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 3\gamma = 0, \\ \alpha - \beta - \gamma = 0, \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2\alpha, \\ \gamma = -\alpha. \end{cases}$$

Нас цікавить який-небудь ненульовий набір чисел α, β, γ, тому покладемо $\alpha = 1$. Тоді $\beta = 2$, $\gamma = -1$. Таким чином, вектори $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$ компланарні та їх лінійну залежність можна записати у вигляді

$$\bar{l} + 2\bar{m} - \bar{n} = \bar{0}.$$

7. Знайдіть вектор $\bar{a} = \overline{AB}$, якщо $A(1; 3; 2)$ і $B(5;8; -1)$.

Розв'язання:

Координати точки співпадають з координатами її радіус-вектора, тому можемо записати: $\bar{r}_A(1; 3; 2)$, $\bar{r}_B(5;8; -1)$. Знайдемо координати шуканого вектора:

$$\bar{a} = \overline{AB} = \bar{r}_B - \bar{r}_A = (4; 5; -3).$$

8. Знайдіть координати *P* – центру ваги трикутника *ABC*, якщо відомі координати його вершин: *A*(–4; 2), *B*(2; 0), *C*(1; 3).

Розв'язання:

Центр ваги трикутника – це точка перетину його медіан. Тому спочатку знайдемо координати другого кінця однієї з медіан, наприклад *CD*:

$$x_D = \frac{x_A + x_B}{2} = -1,\ y_D = \frac{y_A + y_B}{2} = 1,\ D(-1; 1).$$

Центр ваги ділить кожну медіану у відношенні 2:1, рахуючи від вершини трикутника:

$$x_P = \frac{x_C + 2x_D}{1+2} = \frac{1 + 2\cdot(-1)}{3} = -\frac{1}{3},\ y_P = \frac{y_C + 2y_D}{1+2} = \frac{3 + 2\cdot 1}{3} = \frac{5}{3}.$$

Отже, $P\left(-\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Дано правильний шестикутник $ABCDEF$, точка O – його центр. Виразіть вектори $\overline{OC}, \overline{OB}, \overline{AB}, \overline{BC}, \overline{DA}, \overline{CA}, \overline{CE}, \overline{AE}, \overline{FD}, \overline{FB}$ через вектори $\overline{OA} = \overline{a}, \overline{OB} = \overline{b}$.

2. Точка O – центр тяжіння трикутника ABC. Виразіть вектори $\overline{AC}, \overline{CB}, \overline{BO}, \overline{AO}, \overline{CO}$ через вектори $\overline{AB} = \overline{a}, \overline{BC} = \overline{b}$.

3. Виразіть вектори-медіани трикутника ABC через вектори $\overline{AB} = \overline{b}, \overline{AC} = \overline{c}$.

4. У тетраедрі $ABCD$ точки M і N є серединами ребер DA і BC відповідно, а точки P, Q поділяють сторону DC на три рівні частини. Виразіть вектори $\overline{CP}, \overline{MB}, \overline{PA}, \overline{QB}, \overline{NQ}, \overline{MN}, \overline{PN}, \overline{QA}$ через вектори $\overline{BA}, \overline{BC}, \overline{BD}$.

5. Діагоналі паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перетинаються в точці O, точка M – середина ребра AA_1, точка P – середина ребра CC_1. Доведіть, що $\overline{MO} = \overline{OP}$.

6. Точки C_1, C_2 поділяють сторону AB трикутника ABC на три рівні частини, а точка A_1 – сторону BC навпіл, а точки B_1, B_2, B_3 – сторону AC на чотири рівні частини. Виразіть вектори $\overline{AA_1}, \overline{BB_2}, \overline{CC_2}, \overline{B_1C_2}, \overline{B_3A_1}, \overline{BB_3}$ через $\overline{BC_2} = \overline{a}, \overline{BA_1} = \overline{b}$.

7. Доведіть, що середини основ трапеції та точка перетину продовжень її бокових сторін належать одній прямій.

8. Дано паралелограм $ABCD$. O – точка перетину діагоналей, K – середина сторони BC, L – середина сторони DC. Виразіть вектори $\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{CA}, \overline{LK}, \overline{LB}, \overline{KD}, \overline{BD}, \overline{OB}, \overline{OA}, \overline{OL}$ через вектори $\overline{AK}$ і $\overline{AL}$.

9. Точки A_1, B_1, C_1 – середини сторін BC, CA, AB трикутника ABC. Доведіть, що $\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = \overline{0}$.

10. Точка M_1 – середина відрізка A_1B_1, точка M_2 – середина відрізка A_2B_2. Доведіть векторну рівність $\overline{M_1M_2} = \frac{1}{2}\left(\overline{A_1A_2} + \overline{B_1B_2}\right)$.

11. На сторонах AB, BC, AD, DC паралелограма $ABCD$ обрано відповідно точки A_1, B_1, C_1, D_1 так, що $AA_1 = \frac{4}{9}AB,\ BB_1 = \frac{4}{13}BC,\ AD_1 = \frac{9}{13}AD,$ $DC_1 = \frac{5}{9}DC$. Доведіть, що $A_1B_1C_1D_1$ – паралелограм.

12. На стороні AD та діагоналі AC паралелограма $ABCD$ задано відповідно точки M та N так, що $AM = \frac{1}{5}AD,\ AN = \frac{1}{6}AC$. Доведіть, що точки M, N, B лежать на одній прямій.

13. Дано чотирикутник $KLMN$. Знайдіть у площині цього трикутника таку точку O, щоб виконувалась векторна рівність $\overline{OK} + \overline{OL} + \overline{OM} + \overline{ON} = \overline{0}$.

14. Дано тетраедр $ABCD$, точки M та N є серединами ребер AB та CD. Доведіть, що середини відрізків MC, MD, NA, NB є вершинами паралелограма.

15. На ребрах чотирикутної призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ задано точки: K, L, M, N, P, Q, R так, що $AK:KD = 1:3$, $DL:LC = 2:1$, $C_1M:MC = 5:3$, $B_1N:NC_1 = 2:7$, $A_1P:PB_1 = 3:1$, $D_1Q:QC_1 = 1:1$, $AR:RA_1 = 1:3$; O – точка перетину його діагоналей. Через вектори а) $\overline{AD}, \overline{AB}, \overline{AA_1}$; б) $\overline{CB}, \overline{CD}, \overline{CC_1}$ виразіть вектори $\overline{KL}, \overline{AK}, \overline{LM}, \overline{B_1M}$, $\overline{MN}, \overline{CN}, \overline{NP}, \overline{A_1P}, \overline{PQ}, \overline{QR}, \overline{ON}, \overline{OR}$, $\overline{CO}, \overline{BO}$.

16. Виразіть радіус-вектор $\bar{r}_D$ вершини D паралелограма $ABCD$ через радіус-вектори $\bar{r}_A, \bar{r}_B, \bar{r}_C$ вершин A, B, C.

17. Як записати умову колінеарності трьох точок A, B, C через радіус-вектори $\bar{r}_A, \bar{r}_B, \bar{r}_C$ цих точок? Перевірте, чи лежать точки A, B, C на одній прямій, якщо відомі радіус-вектори цих точок: $\bar{r}_A = 2\bar{i} + 4\bar{j} + \bar{k}$, $\bar{r}_B = 3\bar{i} + 7\bar{j} + 5\bar{k}$, $\bar{r}_C = 4\bar{i} + 10\bar{j} + 9\bar{k}$.

18. Доведіть, що відрізки, що сполучають середини протилежних ребер тетраедра, проходять через одну точку та поділяються в ній навпіл.

19. Як розташовані точки A, B, C, якщо їх радіус-вектори $\bar{r}_A, \bar{r}_B, \bar{r}_C$ пов'язані співвідношенням $\alpha\bar{r}_A + \beta\bar{r}_B + \gamma\bar{r}_C = \bar{0}$, причому $\alpha + \beta + \gamma = 0$ та $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$?

20. Точки M та M_1 – центри тяжіння трикутників ABC та $A_1B_1C_1$ відповідно. Доведіть векторну рівність $\overline{MM_1} = \frac{1}{3}\left(\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1}\right)$.

21. На сторонах CA і CB (або на їх продовженнях) трикутника ABC дано відповідно точки B_1 і A_1, які поділяють ці сторони у відношеннях $\overline{CB_1} : \overline{B_1A} = \lambda$, $\overline{CA_1} : \overline{A_1B} = \mu$. Доведіть, що при довільному виборі полюсу O у просторі радіус-вектор $\bar{r}$ точки перетину прямих AA_1 і BB_1 має вид $\bar{r} = \dfrac{\lambda\bar{r}_A + \mu\bar{r}_B + \bar{r}_C}{\lambda + \mu + 1}$, де $\bar{r}_A, \bar{r}_B, \bar{r}_C$ радіус-вектори точок A, B, C.

22. Дано довільний трикутник ABC зі сторонами $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Доведіть, що радіус-вектор $\bar{r}$ точки перетину бісектрис трикутника ABC можна виразити через радіус-вектори $\bar{r}_A, \bar{r}_B, \bar{r}_C$ вершин A, B, C таким чином: $\bar{r} = \dfrac{a\bar{r}_A + b\bar{r}_B + c\bar{r}_C}{a + b + c}$.

23. Виразіть вектор $\overline{CD}$ висоти прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$) через вектори $\overline{CA}$ і $\overline{CB}$ та їх довжини a і b.

24. Два подібних трикутника мають спільну вершину $A(3;-6)$ та при ній спільний кут. Знайдіть дві інші вершини більшого трикутника, якщо відомі вершини меншого $B(6,2;-3,6)$ та $C(5;1)$, а відношення відповідних сторін дорівнює $5:2$.

25. Три вершини A_1, B_1, C_1 паралелограма $A_1B_1C_1D_1$ належать відповідно сторонам AB, BC, AC трикутника ABC, причому $AA_1 = 0{,}3AB$, $BB_1 = 0{,}6BC$, $AC_1 = 0{,}5AC$. Виразіть радіус-вектор $\overline{r}_{D_1}$ вершини D_1 через радіус-вектори $\overline{r}_A, \overline{r}_B, \overline{r}_C$.

26. На прямій AB знайдіть всі точки M, для яких:
а) $\overline{AM} : \overline{MB} = \overline{BM} : \overline{MA}$, б) $\overline{AM} : \overline{MB} = \left(\overline{BM} : \overline{MA}\right)^{-1}$.

27. Дано відрізки AC і CB. Точки $M \in AB, N \in CD$ ділять їх у відношенні k. Виразіть вектор $\overline{MN}$ через вектори $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$.

28. У трикутнику ABC бісектриса AD ділить сторону BC у відношенні $\lambda = \dfrac{1}{2}$. У якому відношенні медіана CE ділить цю бісектрису?

29. Точки D, E, F, що лежать на сторонах трикутника ABC, поділяють відповідно сторони BC, CA, AB у відношеннях $\lambda_D = 3,\ \lambda_E = \dfrac{2}{3},\ \lambda_F = \dfrac{1}{2}$. Доведіть, що прямі $AD,\ BE,\ CF$ перетинаються в одній точці.

30. Спираючись на розв'язок задачі 1, знайдіть лінійну залежність векторів:
а) $\overline{CE},\ \overline{AE},\ \overline{FB}$; б) $\overline{DA},\ \overline{CA},\ \overline{FB}$.

31. Спираючись на розв'язок задачі 4, знайдіть лінійну залежність векторів:
а) $\overline{PA},\ \overline{QB},\ \overline{NQ},\ \overline{MB}$; б) $\overline{MN},\ \overline{PN},\ \overline{QA},\ \overline{CP}$.

32. Спираючись на розв'язок задачі 8, знайдіть лінійну залежність векторів:
а) $\overline{AB},\ \overline{AD},\ \overline{CA}$; б) $\overline{BD},\ \overline{OB},\ \overline{OA},\ \overline{OL}$; в) $\overline{LK},\ \overline{LB},\ \overline{KD}$.

33. Знайдіть, якщо вона існує лінійну залежність векторів:
а) $\overline{l} = 2\overline{a} - \overline{b} - \overline{c}$, $\overline{m} = -\overline{a} + 2\overline{b} - \overline{c}$, $\overline{n} = -\overline{a} - \overline{b} + 2\overline{c}$;
б) $\overline{l} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$, $\overline{m} = \overline{a} - \overline{b}$, $\overline{n} = 3\overline{a} - \overline{b} + \overline{c}$;
в) $\overline{l} = 2\overline{a} - \overline{b} + \overline{c}$, $\overline{m} = \overline{a} + \overline{b} - 2\overline{c}$, $\overline{n} = \overline{a} - 2\overline{b} + 3\overline{c}$,
де вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ не компланарні.

34. Знайдіть лінійну залежність векторів $\overline{a}(1,3,5)$, $\overline{b}(0,4,5)$, $\overline{c}(7,-8,4)$, $\overline{d}(2,-1,3)$.

35. Дано правильний шестикутник $ABCDEF$, точка O – його центр – прийнята за початок координат, а вектори $\overline{OA}, \overline{OB}$ – за базис. Знайдіть у цьому репері координати всіх вершин шестикутника.

36. У тетраедрі $ABCD$ точки M і N є серединами ребер DA і BC відповідно, а точки P, Q поділяють сторону DC на три рівні частини. Приймемо за початок координат точку B, а вектори $\overline{BM},\ \overline{BP},\ \overline{BC}$ – за базис. Знайдіть у цьому репері координати всіх вершин тетраедра.

37. Дано паралелограм $ABCD$. O – точка перетину діагоналей, K – середина сторони BC, L – середина сторони DC. Приймемо за початок координат точку B, а вектори $\overline{BK}$, $\overline{BO}$ – за базис. Знайдіть у цьому репері координати всіх вершин паралелограму, точок O та L.

38. На прямій, що визначається точками $A(1,0,4)$ та $B(3,-1,2)$, знайдіть таку точку C, щоб:
а) точка A лежала між C і B, причому $AC = 3AB$;
б) точка B лежала між A і C, причому $AC = 3AB$.

39. У якому відношенні площина Oxz ділить відрізок AB, якщо $A(2,-7,1)$, $B(4,5,-2)$.

40. Знайдіть координати точки B, якщо відомо відношення λ, у якому площина Oxz ділить відрізок AB: $\lambda = \frac{1}{2}$, $A(2,-7,1)$.

41. Чи лежать точки $A(4,-1)$, $B(6,-7)$, $C(3,2)$ на одній прямій?

42. Доведіть, що вектори $\overline{a}(1,-1,2)$, $\overline{b}(2,2,-1)$, $\overline{c}(3,7,-7)$ утворюють базис. Знайдіть координати вектора $\overline{d}(2,1,0)$ у цьому базисі.

43. Дано три вектори $\overline{a}(3,-1)$, $\overline{b}(1,-2)$, $\overline{c}(-1,7)$. Визначте коефіцієнти розкладу вектора $\overline{p} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$ за базисом $\{\overline{a}, \overline{b}\}$.

44. Знайдіть розклад вектора $\overline{c}(11,-6,5)$ за базисом $\overline{p}(3,-2,1)$, $\overline{q}(-1,1,-2)$, $\overline{r}(2,1,-3)$. Які координати має вектор $\overline{c}$ у базисі $\{\overline{q}, \overline{r}, \overline{p}\}$?

45. Дано вектори $\overline{a}(2,3)$, $\overline{b}(1,-3)$, $\overline{c}(-1,3)$. При якому значенні α вектори $\overline{p} = \overline{a} + \alpha\overline{b}$ та $\overline{q} = \overline{a} + \alpha\overline{c}$ колінеарні?

46. Знайдіть числа α, β, γ, для яких вектори $\alpha\overline{a}, \beta\overline{b}, \gamma\overline{c}, \overline{d}$ утворюють замкнену ламану лінію, де $\overline{a}(3,-2,1)$, $\overline{b}(-1,1,-2)$, $\overline{c}(2,1,-3)$, $\overline{d}(11,-6,5)$.

2 СКАЛЯРНИЙ ТА ВЕКТОРНИЙ ДОБУТКИ ДВОХ ВЕКТОРІВ. МІШАНИЙ ТА ПОДВІЙНИЙ ВЕКТОРНИЙ ДОБУТКИ ТРЬОХ ВЕКТОРІВ

Пряма l із заданим на ній напрямком, прийнятим за додатний, називається *віссю.*

Проекцією вектора $\overline{a}$ на вісь l називається число, яке позначається $\text{пр}_l\overline{a}$ і дорівнює $|\overline{a}|\cos\varphi$, де φ $(0 \le \varphi \le \pi)$ – кут між додатним напрямком осі l та напрямком вектора $\overline{a}$, тобто $np_l\overline{a} = |\overline{a}|\cos\varphi$.

Координати складових на осях, тобто координати вектора, називають *скалярними проекціями,* або, коротко, *проекціями вектора на осі координат,* і позначають $np_x\overline{a}$, $np_y\overline{a}$, $np_z\overline{a}$. При використанні векторів у фізиці складові вектора на осях координат називають *векторними проекціями на осі координат:* $\overline{np}_x\overline{a}$, $\overline{np}_y\overline{a}$, $\overline{np}_z\overline{a}$.

У прикладних питаннях вектор нерідко задають модулем і кутами, які вектор утворює з осями координат (точніше з ортами на цих осях). У цьому випадку координати (проекції) вектора $\overline{a}$ на площині обчислюються за формулами:

$$x = np_x\overline{a} = |\overline{a}|\cos\alpha;\; y = np_y\overline{a} = |\overline{a}|\sin\alpha,$$

де α – кут між вектором $\overline{a}$ і віссю *Ox.* У просторі мають місце аналогічні формули:

$$x = np_x\overline{a} = |\overline{a}|\cos\alpha;\; y = np_y\overline{a} = |\overline{a}|cos\,\beta;\; z = np_z\overline{a} = |\overline{a}|\cos\gamma,$$

де α, β, γ – кути між вектором $\overline{a}$ і відповідними осями координат; *x*, *y*, *z* – координати вектора $\overline{a}$. Величини $cos\,\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ називають *напрямними косинусами* вектора $\overline{a}$. Для них має місце співвідношення:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Скалярним добутком $(\overline{a}, \overline{b})$ (або $\overline{a}\cdot\overline{b}$) двох ненульових векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називається число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута φ між ними: $(\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cos\varphi$. Якщо хоча б один з векторів $\overline{a}$ або $\overline{b}$ є нульовим, то вважають $(\overline{a}, \overline{b}) = 0$.

Властивості скалярного добутку:

Властивість 1 Для будь-яких векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ скалярний добуток $(\overline{a}, \overline{b})$ комутативний: $(\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{b}, \overline{a})$.

Властивість 2 Для будь-якого вектора $\overline{a}$ скалярний добуток вектора $\overline{a}$ на себе дорівнює квадрату довжини цього вектора: $(\overline{a}, \overline{a}) = |\overline{a}|^2$.

Зауважимо, що скалярний добуток $(\overline{a}, \overline{a})$ прийнято називати *скалярним квадратом* вектора $\overline{a}$ й позначати так: $\overline{a}^2$. Згідно властивості 2 довжина вектора $\overline{a}$ буде: $|\overline{a}| = \sqrt{\overline{a}^2}$.

Властивість 3 Для будь-яких векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ і будь-якого дійсного числа α вірні рівності: $(\alpha\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{a}, \alpha\bar{b}) = \alpha(\bar{a}, \bar{b})$.

Властивість 4 Якщо $\bar{a} \neq \bar{0}$ і $\bar{b} \neq \bar{0}$, а $(\bar{a}, \bar{b}) = 0$, то $\bar{a}$ і $\bar{b}$ ортогональні.

Властивість 5 Для будь-яких векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$

$$(\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{c}) + (\bar{b}, \bar{c}).$$

Наслідок Для будь-яких векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ і $\bar{d}$

$$(\bar{a} + \bar{b}, \bar{c} + \bar{d}) = (\bar{a}, \bar{c}) + (\bar{a}, \bar{d}) + (\bar{b}, \bar{c}) + (\bar{b}, \bar{d}).$$

Легко переконатися в тому, що базис $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ ортонормований тоді й тільки тоді, коли мають місце рівності:

$$(\bar{i}, \bar{i}) = 1,\ (\bar{j}, \bar{j}) = 1,\ (\bar{k}, \bar{k}) = 1,\ (\bar{i}, \bar{j}) = 0,\ (\bar{i}, \bar{k}) = 0,\ (\bar{j}, \bar{k}) = 0. \qquad (2.1)$$

Ортом ненульового вектора $\bar{a}$ називають вектор $\bar{a}_0$, який має одиничну довжину, а його напрямок збігається з напрямком вектора $\bar{a}$, тобто $\bar{a}_0 = \dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$.

Теорема 2.1 Скалярний добуток двох векторів, заданих в ортонормованому базисі своїми координатами, дорівнює сумі добутків відповідних координат співмножників, тобто для $\bar{a}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ і $\bar{b}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$

$$(\bar{a}, \bar{b}) = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2. \qquad (2.2)$$

Наслідок 1 Довжина вектора $\bar{a}(\alpha, \beta, \gamma)$ в ортонормованому базисі обчислюється за формулою

$$|\bar{a}| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}. \qquad (2.3)$$

Наслідок 2 Необхідною й достатньою умовою ортогональності ненульових векторів $\bar{a}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ і $\bar{b}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, заданих в ортонормованому базисі своїми координатами є рівність

$$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0. \qquad (2.4)$$

Наслідок 3 В ортонормованому базисі кут між двома векторами $\bar{a}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ і $\bar{b}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ визначається за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2} \cdot \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2}},\ \bar{a} \neq \bar{0},\ \bar{b} \neq \bar{0}. \qquad (2.5)$$

Наслідок 4 Декартові координати вектора $\bar{a}(\alpha, \beta, \gamma)$ дорівнюють проекціям цього вектора на осі декартової системи координат:

$$\alpha = np_{\bar{i}}\bar{a},\ \beta = np_{\bar{j}}\bar{a},\ \gamma = np_{\bar{k}}\bar{a}.$$

Наслідок 5 Напрямні косинуси вектора $\bar{a}(\alpha, \beta, \gamma)$ в ортонормованому базисі визначаються формулами:

$$\cos(\bar{a},\wedge\ \bar{i}) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}, \quad \cos(\bar{a},\wedge\ \bar{j}) = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}},$$

$$\cos(\bar{a},\wedge\ \bar{k}) = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}.$$

Теорема 2.2 $(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| \cdot np_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{b}| \cdot np_{\bar{b}}\bar{a}$.

Теорема 2.3 Якщо вектор зображує силу, прикладену до якої-небудь точки *M*, а вектор $\overline{a}$ йде з деякої точки *O* в точку *M*, то робота цієї сили визначається формулою $A = \overline{F} \cdot \overline{MO}$.

Трійка векторів $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ називається правою, якщо найменший поворот від вектору $\overline{a}$ до вектору $\overline{b}$, який видно з кінця вектору $\overline{c}$, виконується проти годинникової стрілки. Якщо за годинниковою, то трійка векторів – ліва.

Векторним *добутком* $\left[\overline{a}, \overline{b}\right]$ (або $\overline{a} \times \overline{b}$) двох ненульових векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називається вектор $\overline{c}$, перпендикулярний векторам $\overline{a}$ і $\overline{b}$; спрямований так, щоб трійка векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ виявилася правою; довжина якого дорівнює $|\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \sin\varphi$, де φ – кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$. Якщо $\overline{a} = \overline{0}$ або $\overline{b} = \overline{0}$, то вважають $\left[\overline{a}, \overline{b}\right] = \overline{0}$.

Нехай $\{\overline{i},\ \overline{j},\ \overline{k}\}$ – ортонормований базис. Визначимо векторні добутки цих векторів:

$$\left[\overline{i}, \overline{i}\right] = \overline{0},\ \left[\overline{i}, \overline{j}\right] = \overline{k},\ \left[\overline{i}, \overline{k}\right] = -\overline{j},\ \left[\overline{j}, \overline{i}\right] = -\overline{k},\ \left[\overline{j}, \overline{j}\right] = \overline{0},\ \left[\overline{j}, \overline{k}\right] = \overline{i},$$
$$\left[\overline{k}, \overline{i}\right] = \overline{j},\ \left[\overline{k}, \overline{j}\right] = -\overline{i},\ \left[\overline{k}, \overline{k}\right] = \overline{0}. \qquad (2.6)$$

Властивості векторного добутку:

Властивість 1 Векторний добуток $\left[\overline{a}, \overline{b}\right] = \overline{0}$ тоді й тільки тоді, коли вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ колінеарні.

Властивість 2 Для будь-яких векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ векторний добуток $\left[\overline{a}, \overline{b}\right]$ антикомутативний, тобто $\left[\overline{a}, \overline{b}\right] = -\left[\overline{b}, \overline{a}\right]$.

Властивість 3 Для будь-яких векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ і будь-якого дійсного числа α:

$$\lambda\left[\overline{a}, \overline{b}\right] = \left[\lambda\overline{a}, \overline{b}\right] = \left[\overline{a}, \lambda\overline{b}\right].$$

Властивість 4 Для будь-яких векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$

$$\left[\overline{a} + \overline{b}, \overline{c}\right] = \left[\overline{a}, \overline{c}\right] + \left[\overline{b}, \overline{c}\right]; \qquad \left[\overline{a}, \overline{b} + \overline{c}\right] = \left[\overline{a}, \overline{b}\right] + \left[\overline{a}, \overline{c}\right].$$

Відзначимо, що модуль векторного добутку $\left[\overline{a}, \overline{b}\right]$ має простий *геометричний зміст*: він дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$ як на сторонах.

Нехай $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ – правий ортонормований базис і нехай в цьому базисі відомі координати двох векторів $\overline{a}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ і $\overline{b}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$. Тоді координати вектора $\left[\overline{a}, \overline{b}\right]$ можна обчислити за формулою:

$$\left[\overline{a}, \overline{b}\right] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}. \qquad (2.7)$$

Теорема 2.4 Якщо вектор зображує силу, прикладену до якої-небудь точки *M*, а вектор $\overline{a}$ йде з деякої точки *O* в точку *M*, то вектор $\overline{M_O} = \overline{a} \times \overline{F}$ являє собою момент сили *F* відносно точки *O*.

Мішаним добутком векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ називають число

$\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right) = \left(\bar{a}, \left[\bar{b}, \bar{c}\right]\right)$.

Теорема 2.5 Мішаний добуток дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли один з векторів є нульовим або всі три вектори паралельні одній площині, тобто компланарні.

З означення мішаного добутку $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ випливають наступні його властивості.

Властивість 1 Мішаний добуток відмінних від нуля трьох не компланарних векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ за абсолютним значенням дорівнює об'єму V паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. При цьому, якщо трійка векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ права, то $\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right) = V$, якщо ж ліва, то $\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right) = -V$. Вірне й обернене твердження.

Властивість 2 При циклічній перестановці не компланарних векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ у мішаному добутку $\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right)$ останнє не змінюється, тобто $\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right) = \left(\bar{c}, \bar{a}, \bar{b}\right) = \left(\bar{b}, \bar{c}, \bar{a}\right)$. При перестановці будь-яких двох векторів у мішаному добутку $\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right)$ останнє змінює знак, тобто

$$\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right) = -\left(\bar{b}, \bar{a}, \bar{c}\right) = -\left(\bar{a}, \bar{c}, \bar{b}\right) = -\left(\bar{c}, \bar{b}, \bar{a}\right).$$

Властивість 3 Для будь-яких векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ і $\bar{d}$ та будь-яких дійсних чисел λ і μ

$$\left(\lambda\bar{a} + \mu\bar{b}, \bar{c}, \bar{d}\right) = \lambda\left(\bar{a}, \bar{c}, \bar{d}\right) + \mu\left(\bar{b}, \bar{c}, \bar{d}\right).$$

Мішаний добуток векторів $\bar{a}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $\bar{b}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $\bar{c}(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$, заданих своїми координатами в ортонормованому базисі $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, можна обчислити за формулою

$$\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}. \qquad (2.8)$$

Знайдемо векторний добуток векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$, після чого отриманий вектор $\bar{a} \times \bar{b}$ помножимо векторно на вектор $\bar{c}$. В результаті отримаємо вектор – *подвійний векторний добуток* $\left(\bar{a} \times \bar{b}\right) \times \bar{c}$. Помножуючи вектор $\bar{a}$ векторно на $\bar{b} \times \bar{c}$, отримаємо подвійний векторний добуток $\bar{a} \times \left(\bar{b} \times \bar{c}\right)$.

В загальному випадку $\left(\bar{a} \times \bar{b}\right) \times \bar{c} \neq \bar{a} \times \left(\bar{b} \times \bar{c}\right)$.

Мають місце тотожності:

$$\left(\bar{a} \times \bar{b}\right) \times \bar{c} = \bar{b}\left(\bar{a}, \bar{c}\right) - \bar{a}\left(\bar{b}, \bar{c}\right),$$
$$\bar{a} \times \left(\bar{b} \times \bar{c}\right) = \bar{b}\left(\bar{a}, \bar{c}\right) - \bar{c}\left(\bar{a}, \bar{b}\right).$$

Тест для самоконтролю

1. При яких значеннях числа k вектор $k\bar{c} + \bar{c}$ $\left(\bar{c} \neq \bar{0}\right)$ протилежно спрямовано по відношенню до вектора $\bar{c}$?

А. $k < 0$ **Б.** $k > -1$ **В.** $k < -1$ **Г.** $k > 0$

2. $SABC$ – правильний тетраедр із ребром 1. Скалярний добуток $\overline{SA} \cdot \overline{SB}$ дорівнює:

А. 1 **Б.** 2 **В.** $\frac{1}{2}$ **Г.** $-\frac{1}{2}$

3. З рівності $\bar{a}\cdot\bar{c}=\bar{b}\cdot\bar{c}$ $(\bar{c}\neq\bar{0})$ випливає:

А. $\bar{a}=\bar{b}$ **Б.** $(\bar{a}-\bar{b})\perp\bar{c}$, $\bar{a}\neq\bar{b}$ **В.** $(\bar{a}-\bar{b})\parallel\bar{c}$ **Г.** $\bar{a}=\bar{b}$ чи $(\bar{a}-\bar{b})\perp\bar{c}$

4. Скільки існує векторів $\bar{a}$ у просторі таких, що $\bar{a}^2=\log_{0,3}2$?

А. жодного **Б.** один **В.** два **Г.** безліч

5. Дано ненульовий вектор $\bar{a}$ простору. Скільки існує векторів $\bar{x}$ таких, що $\bar{a}\cdot\bar{x}=-1$?

А. жодного **Б.** один **В.** два **Г.** нескінченно багато

6. Якщо для трьох ненульових векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ у просторі виконується рівність $\bar{a}\times\bar{c}=\bar{b}\times\bar{c}$, то...

А. $\bar{a}\parallel\bar{b}$ **Б.** $\bar{a}=\bar{b}$ **В.** $\bar{a}\perp\bar{b}$ **Г.** $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ – компланарні

7. Спростіть вираз $(\bar{i}\times(\bar{j}\times\bar{k}))\cdot\bar{i}$, де $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ – ортонормований базис.

А. 1 **Б.** 0 **В.** $\bar{i}^2$ **Г.** –1

8. Дано точки $A(-2;\ -3;\ -6)$, $B(3;\ 2;\ 5)$, $C(1;\ -1;\ 2)$, $D(3;\ -2;\ 4)$. Знайдіть $\text{пр}_{\overline{CD}}\overline{AB}$.

А. 9 **Б.** –3 **В.** $\sqrt{3}$ **Г.** 3

9. При яких значеннях p вектор $\bar{a}=\bar{i}+p\bar{j}+\bar{k}$ ортогональний до вектора $\bar{b}(-2;1;0)$?

А. –2 **Б.** 2 **В.** 1 **Г.** 0

10. Одиничний вектор, протилежний вектору (2; –1; 0), дорівнює:

А. (–2; 1; 0) **Б.** $\left(\frac{2}{\sqrt{5}};-\frac{1}{\sqrt{5}};0\right)$ **В.** $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}};0\right)$ **Г.** (–1; 1; 0)

11. Укажіть всі значення p і q при яких вектори $\bar{a}(1;0;p)$ і $\bar{b}(2;q;1)$ колінеарні?

А. $p=\frac{1}{2}$, $q=2$ **Б.** $p=2$, $q=\frac{1}{2}$ **В.** $p=\frac{1}{2}$, $q=0$ **Г.** $p=2$, $q=0$

12. Вектори простору $\bar{a}$ і $\bar{b}$ не колінеарні. Укажіть усі значення параметрів λ і μ, при яких компланарні вектори $\bar{a}$, $\bar{a}+\lambda\bar{b}$, $\mu\bar{a}-\bar{b}$.

А. $\lambda>0,\ \mu>0$ **Б.** $\lambda=0,\ \mu\in R$ **В.** $\lambda\in R$, $\mu=0$ **Г.** $\lambda\in R$, $\mu\in R$

13. Вектори простору $\bar{a}$ і $\bar{b}$ не колінеарні. При якому значенні параметру α вектори $\bar{p}=\alpha\bar{a}+5\bar{b}$ і $\bar{q}=3\bar{a}-\bar{b}$ будуть колінеарні?

А. 0 **Б.** –13 **В.** –15 **Г.** 1

14. Дано вектори $\overline{AB}(1;0;-2)$ і $\overline{AC}(-1;0;1)$. Площа трикутника ABC дорівнює:

А. 1 **Б.** $\frac{1}{2}$ **В.** $\sqrt{3}$ **Г.** 2

15. Як розміщені прямі AB і AC, якщо виконується рівність $(\overline{AB}+\overline{AC})^2=(\overline{AB}-\overline{AC})^2$?

А. паралельні **Б.** перпендикулярні

В. перетинаються **Г.** визначити неможливо

Відповіді: 1. В. 2. В. 3. Г. 4. А. 5. Г. 6. Б. 7. Б. 8. А. 9. Б. 10. В. 11. В. 12. Г. 13. В. 14. Б. 15. Б.

Приклади розв'язування задач

1. Задано вектори $\bar{a} = m\bar{i} + 8\bar{j} + 4\bar{k}$ і $\bar{b} = 4\bar{i} + m\bar{j} - 7\bar{k}$, де $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – ортонормований базис. При якому значенні m ці вектори перпендикулярні?

Розв'язання:

Скористаємось формулою (2.4):

$$4m + 8m - 28 = 0,\ m = \frac{7}{3}.$$

Відповідь: $m = \frac{7}{3}$.

2. Знайдіть кут між векторами $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$ і $\bar{b} = 6\bar{i} + 4\bar{j} - 2\bar{k}$, де $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – ортонормований базис.

Розв'язання:

Скористаємось формулою (2.5):

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 6 + 2\cdot 4 + 3\cdot(-2)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}\cdot\sqrt{6^2 + 4^2 + (-2)^2}} = \frac{8}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{56}} = \frac{2}{7},\ \varphi = \arccos\frac{2}{7}.$$

Відповідь: $\varphi = \arccos\frac{2}{7}$.

3. Знайдіть орт вектора $\bar{a} = 2\bar{i} + 4\bar{j} + 4\bar{k}$.

Розв'язання:

Знайдемо довжину вектора $\bar{a}$: $|\bar{a}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = 6$. Оскільки орт вектора $\bar{a}_0 = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$, то $\bar{a}_0 = \frac{1}{3}\bar{i} + \frac{2}{3}\bar{j} + \frac{2}{3}\bar{k}$.

Відповідь: $\bar{a}_0\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

4. До точки прикладені дві сили $\bar{P}$ і $\bar{Q}$, які діють під кутом 120°, причому $|\bar{P}| = 7$, $|\bar{Q}| = 4$. Знайдіть величину рівнодійної сили $\bar{R}$.

Розв'язання:

Оскільки $\bar{R} = \bar{P} + \bar{Q}$, то

$$|\bar{R}| = \sqrt{\bar{R}^2} = \sqrt{(\bar{P} + \bar{Q})^2} = \sqrt{\bar{P}^2 + 2\bar{P}\bar{Q} + \bar{Q}^2} =$$

$$= \sqrt{|\bar{P}|^2 + 2|\bar{P}|\cdot|\bar{Q}|\cdot\cos 120^\circ + |\bar{Q}|^2} = \sqrt{37}.$$

Відповідь: $|\bar{R}| = \sqrt{37}$.

5. Обчисліть площу паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}(1; 1; 1)$, $\bar{b}(3; 2; 1)$, якщо координати векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ задано в правому ортонормованому базисі $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

Розв'язання:

У випадку правого ортонормованого базису $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ має місце формула (2.7), згідно з якою:

$$\left[\bar{a}, \bar{b}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}.$$

Таким чином, $\left[\bar{a}, \bar{b}\right] = (-1;\, 2;\, -1)$. Визначимо модуль вектора $\left[\bar{a}, \bar{b}\right]$ або, що теж саме, шукану площу паралелограма

$$S = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6} \text{ (кв. од).}$$

Відповідь: $S = \sqrt{6}$ кв. од.

6. В ортонормованому базисі $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ задано вектори $\bar{a}(1;\, 2;\, 3)$, $\bar{b}(3;\, 2;\, 1)$, $\bar{c}(3;\, 2;\, 1)$. З'ясуйте, чи є трійка векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ правою. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах.

Розв'язання:

Обчислимо мішаний добуток векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ за формулою (2.8):

$$\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 12.$$

Оскільки $\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right) > 0$, то за властивістю 1 мішаного добутку векторів, трійка векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – права й об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, дорівнює $V = 12$ (куб. од.).

Відповідь: трійка векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – права і $V = 12$ куб. од.

7. Обчисліть роботу, що виконується силою $\bar{F} = (3;\, -5;\, 2)$, коли точка прикладання переміщується із початку в кінець вектора $\bar{S}(2,\, -5,\, 7)$.

Розв'язування:

Якщо вектор зображає силу $\bar{F}$, точка прикладання якої переміщується із початку в кінець вектора $\bar{S}$, то робота A цієї сили визначається рівністю

$$A = \left(\bar{F}, \bar{S}\right) = 3 \cdot 2 + (-5) \cdot (-5) + 2 \cdot 7 = 45.$$

Відповідь: $A = 45$.

8. Сила $\bar{P} = (2;\, -4;\, 5)$ прикладена до точки $A(2;\, -1;\, 1)$. Визначте момент цієї сили відносно початку координат.

Розв'язання:

Якщо вектор $\bar{f}$ зображає силу, що прикладена в деякій точці M, а вектор $\bar{S}$ виходить з деякої точки B в точку M, то вектор $\left[\bar{S}, \bar{f}\right] = \overline{M}_B$ є моментом сили $\bar{f}$ відносно точки B, тут $\left[\bar{S}, \bar{f}\right]$ – векторний добуток векторів $\bar{S}$ і $\bar{f}$.

Оскільки вектор $\overline{OA}(2;-1;2)$, тоді момент сили $\overline{P}$ відносно початку координат буде:

$$\overline{M}_O=\left[\overline{OA},\ \overline{P}\right]=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 2 & -1 & 2\\ 2 & -4 & 5\end{vmatrix}=3\overline{i}-6\overline{j}-6\overline{k}.$$

Відповідь: $\overline{M}_O(3,-6,-6)$.

9. Знайдіть об'єм трикутної піраміди з вершинами $A(2;2;2)$, $B(4;3;3)$, $C(4;5;4)$ і $D(5;5;6)$.

Розв'язання:

Знаходимо координати векторів $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{AD}$, які збігаються з ребрами піраміди, що виходять з вершини A: $\overline{AB}(2;1;1)$, $\overline{AC}(2;3;2)$, $\overline{AD}(3;3;4)$. Знайдемо мішаний добуток цих векторів за формулою (2.8):

$$\left(\overline{AB},\ \overline{AC},\ \overline{AD}\right)=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 3 & 4\end{vmatrix}=24+6+6-9-12-8=7.$$

Оскільки об'єм піраміди дорівнює $\dfrac{1}{6}$ частині об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{AD}$, то $V=\dfrac{7}{6}$ (куб. од.).

Відповідь: $V=\dfrac{7}{6}$ куб. од.

10. Обчисліть площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}+3\overline{b}$ і $3\overline{a}+\overline{b}$, якщо $|\overline{a}|=|\overline{b}|=1$, $\angle(\overline{a},\overline{b})=30^\circ$.

Розв'язання:

За властивостями 1–4 векторного добутку:

$$\left(\overline{a}+3\overline{b}\right)\times\left(3\overline{a}+\overline{b}\right)=\overline{a}\times(3\overline{a})+\left(3\overline{b}\right)\times(3\overline{a})+\overline{a}\times\overline{b}+\left(3\overline{b}\right)\times\overline{b}=$$
$$=3\cdot\overline{0}-9\overline{a}\times\overline{b}+\overline{a}\times\overline{b}+3\cdot\overline{0}=-8\overline{a}\times\overline{b}.$$

Отже,

$$S=\left|-8\overline{a}\times\overline{b}\right|=8\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|=8\cdot1\cdot1\cdot\sin30^\circ=4\ \text{(кв. од.)}.$$

Відповідь: $S=4$ кв. од.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ утворюють кут $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$. Знаючи, що $|\overline{a}|=3$, $|\overline{b}|=4$, обчисліть: 1) $\overline{a}\cdot\overline{b}$; 2) $\overline{a}^2$; 3) $\overline{b}^2$; 4) $(\overline{a}+\overline{b})^2$; 5) $(3\overline{a}-2\overline{b})\cdot(\overline{a}+2\overline{b})$; 6) $(\overline{a}-\overline{b})^2$; 7) $(3\overline{a}+2\overline{b})^2$.

2. Дано, що $|\overline{a}|=3$, $|\overline{b}|=5$. Визначте, при якому значенні α вектори $\overline{a}+\alpha\overline{b}$ і $\overline{a}-\alpha\overline{b}$ будуть взаємно перпендикулярні.

3. Вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ взаємно перпендикулярні, вектор $\bar{c}$ утворює з ними кути, рівні $\dfrac{\pi}{3}$. Знаючи, що $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=5$, $|\bar{c}|=8$, обчисліть: 1) $(3\bar{a}-2\bar{b})\cdot(\bar{b}+3\bar{c})$; 2) $(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})^2$; 3) $(\bar{a}+2\bar{b}-3\bar{c})^2$.

4. Вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ утворюють кут $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$. Знаючи, що $|\bar{a}|=\sqrt{3}$, $|\bar{b}|=1$, обчисліть кут між векторами $\bar{p}=\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{q}=\bar{a}-\bar{b}$.

5. Знайдіть кут між векторами $\bar{a}=2\bar{e}_1-\bar{e}_2+2\bar{e}_3$ та $\bar{b}=4\bar{e}_1+\bar{e}_2-3\bar{e}_3$, якщо $|\bar{e}_1|=1, |\bar{e}_2|=2, |\bar{e}_3|=3, \angle(\bar{e}_1,\bar{e}_2)=\angle(\bar{e}_1,\bar{e}_3)=60^\circ$, $\angle(\bar{e}_2,\bar{e}_2)=90^\circ$.

6. Дано вектори $\bar{a}(4;\,-2;\,-4)$, $\bar{b}(6;\,-3;\,2)$. Обчисліть: 1) $\bar{a}\cdot\bar{b}$; 2) $\sqrt{\bar{a}^2}$; 3) $\sqrt{\bar{b}^2}$; 4) $(2\bar{a}-3\bar{b})(\bar{a}+2\bar{b})$; 5) $(\bar{a}+\bar{b})^2$; 6) $(\bar{a}-\bar{b})^2$.

7. Дано точки $A(-1;\,3;\,-7)$, $B(2;\,-1;\,5)$ і $C(0;\,1;\,-5)$. Обчисліть:
1) $(2\overline{AB}-\overline{CB})\cdot(2\overline{BC}+\overline{BA})$; 2) $\sqrt{\overline{AB}^2}$; 3) $\sqrt{\overline{AC}^2}$.

8. Який кут утворюють одиничні вектори $\bar{s}$ та $\bar{t}$, якщо відомо, що вектори $\bar{p}=\bar{s}+2\bar{t}$ та $\bar{q}=5\bar{s}-4\bar{t}$ взаємно перпендикулярні?

9. Чи рівносильні рівняння $\bar{a}=\bar{b}$ та $\bar{a}\cdot\bar{c}=\bar{b}\cdot\bar{c}$?

10. При якому взаємному розташуванні ненульових векторів $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ справедлива рівність $(\bar{a}\cdot\bar{b})\cdot\bar{c}=(\bar{b}\cdot\bar{c})\cdot\bar{a}$?

11. Якій умові повинні задовольняти вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$, щоб мала місце рівність $|\bar{a}+\bar{b}|=|\bar{a}-\bar{b}|$?

12. Довжина гіпотенузи AB прямокутного трикутника ABC дорівнює c. Обчисліть суму $\overline{AB}\cdot\overline{AC}+\overline{BC}\cdot\overline{BA}+\overline{CA}\cdot\overline{CB}$.

13. У трикутнику ABC проведено медіани AD, BE, CF. Обчисліть $\overline{BC}\cdot\overline{AD}+\overline{CA}\cdot\overline{BE}+\overline{AB}\cdot\overline{CF}$.

14. Доведіть, що у трапеції сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів бічних сторін та подвоєного добутку основ.

15. Знайдіть суму квадратів медіан трикутника, якщо сума квадратів його сторін дорівнює k.

16. Знайдіть кути, що утворює діагональ куба з діагоналями якої-небудь його грані.

17. Знайдіть кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}(2;\,1;\,0)$ і $\bar{b}(0;\,-2;\,1)$.

18. Знайдіть таке число λ, щоб вектори $\bar{a}=\bar{i}+5\bar{j}-6\bar{k}, \bar{b}=2\bar{i}-\bar{j}+\lambda\bar{k}$ були ортогональні.

19. Знайдіть $np_{\bar{b}}\bar{a}$ та $np_{\bar{a}}\bar{b}$, якщо:
1) $\bar{a}(2,1), \bar{b}(1,1)$; 2) $\bar{a}=2\bar{i}-\bar{j}, \bar{b}=\bar{i}+2\bar{j}$; 3) $\bar{a}(4,-3,2), \bar{b}(1,1,1)$;
4) $\bar{a}=-4\bar{i}+\bar{j}-4\bar{k}, \bar{b}=2\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}$.

20. Дано два вектори $\bar{a}=2\bar{i}-\bar{j}+5\bar{k}, \bar{b}=3\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$. Знайдіть вектор $\bar{x}$, що задовольняє умовам: $\bar{x}\cdot\bar{k}=0$, $\bar{x}\cdot\bar{a}=1$, $\bar{x}\cdot\bar{b}=4$.

21. Знайдіть вектор $\bar{x}$, який колінеарний вектору $\bar{a}=\bar{i}+\bar{j}-2\bar{k}$ та задовольняє умову $\bar{x}\cdot\bar{a}=3$.

22. Дано три вектори $\bar{a}(1,2,-3)$, $\bar{b}(5,1,2)$, $\bar{c}(-3,0,1)$. Знайдіть вектор $\bar{x}$, що задовольняє одночасно трьом умовам: $\bar{x}\cdot\bar{a}=-4$, $\bar{x}\cdot\bar{b}=5$, $\bar{x}\cdot\bar{c}=2$.

23. Дано два вектори $\bar{a}(8,4,1)$, $\bar{b}(2,-2,1)$. Знайдіть вектор $\bar{x}$, компланарний векторам $\bar{a}$ і $\bar{b}$, ортогональний вектору $\bar{a}$, рівний йому за довжиною та такий, що утворює з вектором $\bar{b}$ тупий кут.

24. Промінь утворює з векторами $\bar{i}$ та $\bar{j}$ кути, що дорівнюють відповідно $\dfrac{\pi}{4}$ та $\dfrac{\pi}{3}$, а з вектором $\bar{k}$ – тупий кут. Знайдіть цей кут.

25. Обчисліть координати вектора, довжина якого дорівнює 8, знаючи, що він утворює з вектором $\bar{i}$ кут $\dfrac{\pi}{4}$, а з вектором $\bar{k}$ – кут $\dfrac{\pi}{3}$, а з вектором $\bar{j}$ – гострий кут.

26. Спростіть вираз:

1) $(2\bar{i}+3\bar{j}-\bar{k})\cdot(\bar{i}-\bar{j}+4\bar{k})$; 2) $(\bar{a}+\bar{b})\cdot(\bar{a}-\bar{b})$; 3) $(\bar{a}\times\bar{b})^2+(\bar{a}\cdot\bar{b})^2$;

4) $\bar{i}\times\bar{j}+\bar{i}\times\bar{k}-\bar{j}\times\bar{k}$; 5) $\bar{i}\times\bar{j}\times\bar{k}$; 6) $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot(\bar{c}+\lambda\bar{a}+\mu\bar{b})$;

7) $(\bar{a}+\bar{b})\cdot(\bar{b}+\bar{c})\cdot(\bar{c}+\bar{a})$; 8) $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})$, якщо $\bar{a}\perp\bar{c}$ і $\bar{a}\perp\bar{b}$;

9) $(\bar{i}-3\bar{j}+\bar{k})\cdot(2\bar{i}+\bar{j}-3\bar{k})\cdot(\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k})$;

10) $(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})\cdot(\bar{a}+\bar{b}-\bar{c})\cdot(\bar{a}-\bar{b}+\bar{c})$;

11) $(\bar{a}-2\bar{b}+\bar{c})\cdot(3\bar{a}+\bar{b}-2\bar{c})\cdot(7\bar{a}+14\bar{b}-13\bar{c})$, якщо $\bar{a}^2=\bar{b}^2=\bar{c}^2=1$, $\bar{a}\times\bar{b}=\bar{b}\times\bar{c}=\bar{a}\times\bar{c}=\bar{0}$.

27. Дано вектори $\bar{a}(2;\,3;\,0)$, $\bar{b}(-1;\,2;\,2)$, $\bar{c}(3;\,1;\,0)$. Знайдіть:

1) $(3\bar{a}-4\bar{b})+(\bar{b}-3\bar{c})+(2\bar{c}-\bar{a})$; 2) $(\bar{a}+\bar{b}-\bar{c})(-2\bar{a}-3\bar{b})$; 3) $|\bar{a}+\bar{b}-\bar{c}|$;

4) $\angle(\bar{a},\bar{i})$; 5) $\angle(\bar{a}+\bar{b}-\bar{c},\,-2\bar{a}-3\bar{b})$; 6) $\bar{a}\times\bar{b}$;

7) $\bar{a}\times(17\bar{a}+3\bar{b})$; 8) $\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}$; 9) $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})-(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}$;

10) одиничні вектори, які колінеарні вектору $\bar{b}+\bar{c}$;

11) одиничні вектори, які перпендикулярні векторам $\bar{b}$ і $\bar{c}$;

12) $\bar{x}$, якщо $\bar{a}=\bar{c}\times\bar{x}$; 13) $\bar{d}$, якщо $\bar{d}\perp(\bar{a}+\bar{b}-\bar{c})$, $\bar{d}\perp(-2\bar{a}-3\bar{b})$, $|\bar{d}|=1$.

28. Обчисліть проекцію вектора $\bar{a}=5\bar{i}+2\bar{j}+5\bar{k}$ на вісь, що визначається вектором $\bar{b}=2\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$.

29. Дано три вектори $\bar{a}(7,-6,1)$, $\bar{b}(2,-3,-6)$ і $\bar{c}(3,-4,12)$. Обчисліть $np_{\bar{b}}(\bar{a}+\bar{c})$ та знайдіть $\overline{np_{\bar{b}}(\bar{a}+\bar{c})}$.

30. До однієї і тієї ж точки прикладені дві сили $\bar{f}_1$ та $\bar{f}_2$, кут між якими α. Знайдіть величину рівнодійної.

31. Дано точки $A(3,\,1,\,2)$, $B(4,\,0,\,1)$, $C(4,\,5,\,7)$. Обчисліть площу трикутника

ABC.

32. Знайдіть орт вектора, перпендикулярного до векторів $\overline{a} = 2\overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k}$ та $\overline{b} = 4\overline{i} + 5\overline{j} + 3\overline{k}$.

33. Обчисліть площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a} = \overline{m} + \overline{n}$ і $\overline{b} = 3\overline{m} + 2\overline{n}$, якщо $|\overline{m}| = |\overline{n}| = 1$, $\angle(\overline{m}, \overline{n}) = \dfrac{\pi}{6}$.

34. Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ утворюють кут $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$. Знаючи, що $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{b}| = 2$, обчисліть: 1) $(\overline{a} \times \overline{b})^2$; 2) $((2\overline{a} + \overline{b}) \times (\overline{a} + 2\overline{b}))^2$; 3) $((\overline{a} + 3\overline{b}) \times (3\overline{a} - \overline{b}))^2$.

35. Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ взаємно перпендикулярні. Знаючи, що $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 4$, обчисліть: 1) $|(\overline{a} + \overline{b}) \times (\overline{a} - \overline{b})|$; 2) $|(3\overline{a} - \overline{b}) \times (\overline{a} - 2\overline{b})|$.

36. Знаючи вектори $\overline{AB}(-3; -2; 6)$ та $\overline{BC}(-2; 4; 4)$, обчисліть довжину висоти $\overline{AD}$ трикутника ABC.

37. Обчисліть відстань між паралельними сторонами паралелограма $ABCD$, побудованого на векторах $\overline{AB}(6; 0; 2)$ та $\overline{AC}(1{,}5; 2; 1)$.

38. Переконайтеся, що вектори $\overline{a} = 2\overline{i} + \overline{j} + 2\overline{k}$ та $\overline{b} = -2\overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k}$, відкладені від однієї точки, можна взяти у якості ребер куба, та знайдіть третє ребро, що виходить з тієї ж вершини.

39. Дано два вектори $\overline{a}(2, 3, -1)$, $\overline{b}(1, -1, 3)$. Знайдіть вектор $\overline{x}$, знаючи, що він ортогональний цим векторам та задовольняє умову: $\overline{x} \cdot (2\overline{i} - 3\overline{j} + 4\overline{k}) = 51$.

40. Вектор $\overline{x}$ ортогональний векторам $\overline{a}(2, 3, -1)$, $\overline{b}(1, -1, 3)$, утворює з вектором $\overline{i}$ тупий кут. Знайдіть координати вектора $\overline{x}$, якщо $|\overline{x}| = \sqrt{138}$

41. Дано точки $A(2; -1; 2)$, $B(1\ 2; -1)$ і $C(3; 2; 1)$. Знайдіть координати векторних добутків: 1) $\overline{AB} \times \overline{BC}$; 2) $(\overline{BC} - 2\overline{CA}) \times \overline{CB}$.

42. Обчисліть площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB} = 6\overline{a} - 3\overline{b}$ та $\overline{AD} = 3\overline{a} + 2\overline{b}$, якщо $|\overline{a}| = 4$, $|\overline{b}| = 5$, $\angle(\overline{a}, \overline{b}) = 30^\circ$.

43. Доведіть, що якщо $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{c} \times \overline{d}$, $\overline{a} \times \overline{c} = \overline{b} \times \overline{d}$, то вектори $\overline{a} - \overline{d}$ та $\overline{b} - \overline{c}$ колінеарні.

44. З'ясуйте, праву чи ліву трійку утворюють вектори:
1) $\overline{a}(2, 1, 2)$, $\overline{b}(3, -2, 1)$ і $\overline{c}(3, -1, -2)$;
2) $\overline{a}(2, -2, -3)$, $\overline{b}(2, 0, 3)$ і $\overline{c}(1, 1, 1)$.

45. Знайдіть висоту, проведену з вершини A тетраедра $ABCD$, заданого координатами вершин $A(-5; -4; 8)$, $B(2; 3; 1)$, $C(4; 1; -2)$, $D(6; 3; 7)$.

46. Дано три вектори $\overline{a}(8, 4, 1)$, $\overline{b}(2, 2, 1)$ і $\overline{c}(1, 1, 1)$. Знайдіть одиничний вектор $\overline{d}$, що утворює з векторами $\overline{a}$ та $\overline{b}$ однакові кути, перпендикулярний до вектору $\overline{c}$ та спрямований так, що впорядковані трійки $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ та $\overline{a}, \overline{b}, \overline{d}$ мали однакову орієнтацію.

47. Дано три вектори $\overline{a}(8, 4, 1)$, $\overline{b}(2, -2, 1)$ і $\overline{c}(1, 1, 1)$. Знайдіть одиничний вектор $\overline{d}$, що компланарний векторам $\overline{a}$ та $\overline{b}$, ортогональний вектору $\overline{c}$ та спрямований так, що впорядковані трійки $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ та $\overline{a}, \overline{d}, \overline{c}$ мали протилежну орієнтацію.

48. Обчисліть $(\overline{a} \times \overline{b}) \times \overline{c}$, якщо

1) $\overline{a}(1, 2, -1)$, $\overline{b}(2, 1, -2)$, $\overline{c}(3, 1, -1)$; 2) $\overline{a}(3, 2, 1)$, $\overline{b}(0, 1, -1)$, $\overline{c}(-1, 1, 1)$.

49. Обчисліть $(\overline{a} \times \overline{b}) \times \overline{c} - \overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c})$, якщо $\overline{a}(1, -1, 3)$, $\overline{b}(-2, 2, 1)$, $\overline{c}(3, -2, 5)$.

50. Доведіть, що вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ компланарні, якщо виконується умова $\overline{a} \times \overline{b} + \overline{b} \times \overline{c} + \overline{c} \times \overline{a} = \overline{0}$.

51. Доведіть, що:

1) якщо вектори $\overline{a} \times \overline{b}$, $\overline{b} \times \overline{c}$, $\overline{c} \times \overline{a}$ компланарні, то вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ компланарні;

2) якщо вектори $\overline{a} \times \overline{b}$, $\overline{b} \times \overline{c}$, $\overline{c} \times \overline{a}$ компланарні, то вони колінеарні.

52. Точка M належить ребру BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, причому $BM : MB_1 = 2:1$. Довжина ребра куба дорівнює a. Знайдіть відстань між прямими CD_1 та MD.

53. У трикутнику ABC через точку H на стороні AC проведено пряму, паралельну BC до перетину зі стороною AB у точці M. Площа трикутника BHM у 4,5 рази менша площі трикутника ABC. Знайдіть відношення $AM : MB$.

54. Площа трапеції $ABCD$ дорівнює S, відношення довжин основ $AD : BC = 3:1$. Відрізок MN паралельний стороні CD та перетинає сторону AB. При цьому $AM : BN = 3:2$, $MN : CD = 1:3$, відрізок AM паралельний BN. Знайдіть площу трикутника BNC.

55. Знайдіть вектор $\overline{x}$ з рівняння $\overline{a} \times \overline{x} = \overline{b}$, де $\overline{a}$ та $\overline{b}$ – відомі взаємо ортогональні вектори.

56. Дано неколінеарні вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ та скаляр p.

1) Знайдіть який-небудь вектор $\overline{x}$, що задовольняє рівнянню $(\overline{x} \cdot \overline{a} \cdot \overline{b}) = p$.

2) Поясніть геометричний зміст всіх розв'язків рівняння $(\overline{x} \cdot \overline{a} \cdot \overline{b}) = p$, а також його частинного розв'язку, ортогонального векторам $\overline{a}$ і $\overline{b}$.

57. Вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ некомпланарні. При яких значеннях скаляра λ компланарні вектори $\overline{a} + 2\overline{b} + \lambda\overline{c}$, $4\overline{a} + 5\overline{b} + 6\overline{c}$, $7\overline{a} + 8\overline{b} + \lambda^2\overline{c}$?

58. З однієї точки відкладені чотири вектори $\overline{a}(-1, 1, -1)$, $\overline{b}(-1, 1, 1)$, $\overline{c}(5, -1, -1)$ та $\overline{d}$. Вектор $\overline{d}$ має довжину 1 і утворює з векторами $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ рівні гострі кути. Обчисліть координати вектора $\overline{d}$.

59. Доведіть тотожності:

1) $(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot (\overline{c} \times \overline{d}) = (\overline{a} \cdot \overline{c}) \cdot (\overline{b} \cdot \overline{d}) - (\overline{a} \cdot \overline{d}) \cdot (\overline{b} \cdot \overline{c})$;

2) $(\overline{a} \times \overline{b}) \times (\overline{c} \times \overline{d}) = (\overline{a} \cdot \overline{c} \cdot \overline{d}) \cdot \overline{b} - (\overline{b} \cdot \overline{c} \cdot \overline{d}) \cdot \overline{a}$;

3) $(\overline{a} \times \overline{b}) \times (\overline{c} \times \overline{d}) = \overline{c}(\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{d}) - \overline{d}(\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c})$;

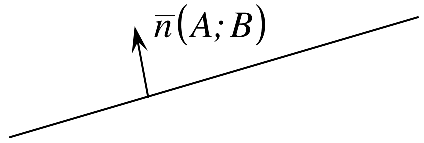
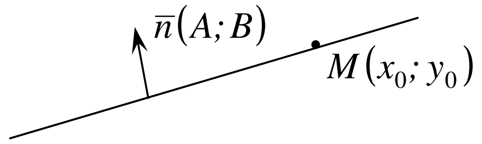
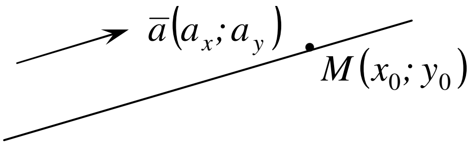
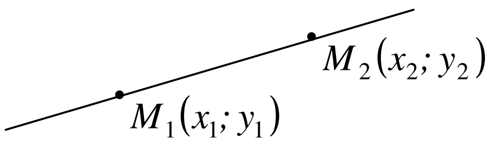
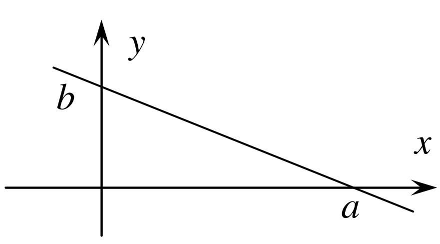
4) $(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot (\overline{b} \times \overline{c}) \cdot (\overline{c} \times \overline{a}) = (\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c})^2$;

5) $\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\left(\overline{c}\times\overline{d}\right)+\left(\overline{a}\times\overline{c}\right)\cdot\left(\overline{d}\times\overline{b}\right)+\left(\overline{a}\times\overline{d}\right)\cdot\left(\overline{b}\times\overline{c}\right)=0$;

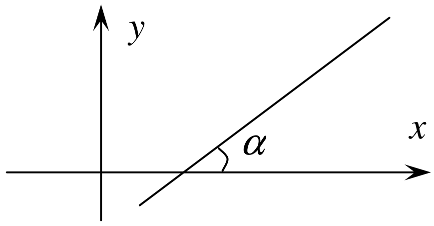
6) $\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}\right)^2+\left|\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\times\overline{c}\right|^2=\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|^2\cdot\left|\overline{c}\right|^2$.

3 РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ НА ПЛОЩИНІ

Таблиця 3.1 – Основні види рівнянь прямої на площині

Назва рівняння	Рівняння
1	2
Загальне рівняння прямої ($\overline{n}(A,B)$ вектор-нормаль – вектор, перпендикулярний прямій) 	$Ax+By+C=0$
Рівняння прямої, що проходить через точку $M(x_0,y_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{n}(A,B)$ 	$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$
Канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $M(x_0,y_0)$ паралельно вектору $\overline{a}(a_x,a_y)$ ($\overline{a}(a_x,a_y)$– напрямний вектор прямої) 	$\dfrac{x-x_0}{a_x}=\dfrac{y-y_0}{a_y}$
Параметричні рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0,y_0)$ паралельно вектору $\overline{a}(a_x,a_y)$	$\begin{cases} x-x_0=a_xt, \\ y-y_0=a_yt \end{cases}$
Канонічне рівняння прямої, що проходить через дві точки $M_1(x_1,y_1)$ і $M_2(x_2,y_2)$ 	$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$
Рівняння прямої *у відрізках на осях* (пряма проходить через точки $(a,0)$ та $(0,b)$) 	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$
Нормальне рівняння прямої ($n=\sqrt{A^2+B^2}$ – довжина нормалі $\overline{n}$)	$\dfrac{A}{n}x+\dfrac{B}{n}y+\dfrac{C}{n}=0$

Продовження таблиці 3.1

1	2
Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k ($k = tg\alpha$, де α – кут між прямою та додатним напрямом осі Ox; $b = y(0)$) 	$y = kx + b$

Таблиця 3.2 – Формули для обчислення кута між двома прямими й умов взаємного розташування двох прямих

Назва формули (умови)	**Види рівнянь прямих**		
	Загальний: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$	**Канонічний:** $\dfrac{x - x_1}{a_x} = \dfrac{y - y_1}{a_y}$ і $\dfrac{x - x_2}{b_x} = \dfrac{y - y_2}{b_y}$	**З кутовим коефіцієнтом:** $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$
Кут θ між двома прямими	$cos\,\theta = \dfrac{\lvert A_1A_2 + B_1B_2\rvert}{\sqrt{(A_1^2 + B_1^2)(A_2^2 + B_2^2)}}$	$cos\,\theta = \dfrac{\lvert a_xb_x + a_yb_y\rvert}{\sqrt{(a_x^2 + b_x^2)(a_y^2 + b_y^2)}}$	$tg\,\theta = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$
Умова перпендикулярності	$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$	$a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y = 0$	$k_1 \cdot k_2 = -1$
Умова паралельності	$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$	$\dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y}$, $\dfrac{x_1 - x_2}{b_x} \neq \dfrac{y_1 - y_2}{b_y}$	$k_1 = k_2$, $b_1 \neq b_2$
Умова співпадіння	$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$	$\dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y}$, $\dfrac{x_1 - x_2}{b_x} = \dfrac{y_1 - y_2}{b_y}$	$k_1 = k_2$, $b_1 = b_2$

Формула відстані від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{\lvert Ax_0 + By_0 + C\rvert}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Сукупність всіх прямих, що проходять через одну і ту саму точку, називають пучком прямих, а їх спільну точку – центром пучка. Якщо (x_0, y_0) – центр пучка, то рівняння $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ визначає довільну пряму пучка. Якщо дані дві прямі $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то всяка пряма, що проходить через точку їх перетину, зобразиться рівнянням:

$$A_1x+B_1y+C_1+q\left(A_2x+B_2y+C_2\right)=0.$$

Кожному значенню параметра q пучка відповідає визначена пряма пучка.

Приклади розв'язування задач

1. Напишіть рівняння прямої:

а) яка має кутовий коефіцієнт $k=-3$ і такої, що проходить через точку $A(1,-2)$;

б) що проходить через дві точки $A(1;5)$ і $B(2;3)$.

*Розв'язання***:**

а) Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k має вигляд:

$$y=kx+b. \tag{3.1}$$

Підставивши $k=-3$ в рівняння (3.1), одержуємо $y=-3x+b$. Вільний член b знайдемо, підставивши в рівняння координати точки A:

$$-2=-3\cdot 1+b,\ b=1.$$

Тоді рівняння прямої запишемо так $y=-3x+1$.

б) Рівняння прямої за двома точками має вигляд:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}, \tag{3.2}$$

де $(x_1;y_1)$ – координати першої точки та $(x_2;y_2)$ координати другої.

Підставивши в рівняння (3.2) координати точок $A(1;5)$ та $B(2;3)$, одержуємо:

$$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-5}{3-5}\Rightarrow\frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{-2}\ \Rightarrow\ -2(x-1)=1(y-5)\ \Rightarrow\ -2x-y+8=0.$$

2. Через точку перетину прямих $2x-y-8=0$ і $4x+3y+4=0$ проведіть пряму, яка проходить через точку $A(4;3)$.

*Розв'язання***:**

Цю задачу розв'яжемо двома способами.

I спосіб. Знайдемо координати точки B – точки перетину прямих $2x-y-8=0$ і $4x+3y+4=0$. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases}2x-y-8=0,\\4x+3y+4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=2x-8,\\y=-\dfrac{4}{3}x-\dfrac{4}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2,\\y=-4\end{cases}\Rightarrow B(2;-4).$$

Маємо дві точки: $A(4;3)$ і $B(2;-4)$. Підставивши їх координати у формулу (3.2), одержимо шукане рівняння:

$$\frac{x-4}{2-4}=\frac{y-3}{-4-3}\ \Rightarrow\ -7x+2y+22=0.$$

II спосіб. Усяка пряма, що проходить через точку перетину двох даних прямих, задається рівнянням пучка прямих:

$$A_1x+B_1y+C_1+q(A_2x+B_2y+C_2)=0. \tag{3.3}$$

У нашому випадку: $2x - y - 8 + q(4x + 3y + 4) = 0$. Потрібно тільки підібрати значення параметра q так, щоб пряма пройшла через точку $A(4;3)$, тобто щоб координати цієї точки задовольняли рівнянню прямої. Підставляючи їх у рівняння пучка, одержимо:

$$2 \cdot 4 - 1 \cdot 3 - 8 + q(4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 4) = 0 \Rightarrow q = \frac{3}{29}.$$

Отже, рівняння прямої буде мати вигляд:

$$2x - y - 8 + \frac{3}{29}(4x + 3y + 4) = 0 \Rightarrow 7x - 2y - 22 = 0.$$

3. Складіть загальне рівняння прямої, перпендикулярної вектору $\overline{a}(-4;4)$ й такої, що проходить:

а) через початок координат;

б) через точку $A(-1;7)$.

*Розв'язання***:**

Загальне рівняння прямої має вигляд:

$$Ax + By + C = 0. \qquad (3.4)$$

Якщо пряма перпендикулярна вектору, то його координати можна підставити замість коефіцієнтів при відповідних змінних у загальне рівняння прямої. Підставивши координати вектора $\overline{a}$ в (3.4), одержуємо:

$$4x - 4y + C = 0.$$

а) Використовуючи умову проходження шуканої прямої через початок координат, одержимо, що коефіцієнт $C = 0$, тобто рівняння прямої буде мати вигляд:

$$4x - 4y = 0 \Rightarrow x - y = 0.$$

б) Підставивши координати точки $A(-1;7)$ в рівняння $4x - 4y + C = 0$, одержимо:

$$4 \cdot (-1) - 4 \cdot 7 + C = 0 \ \Rightarrow \ C = 32,$$

$$4x - 4y + 32 = 0 \ \Rightarrow \ x - y + 8 = 0.$$

4. Дано вершини трикутника $A(4;6)$, $B(-4;0)$ і $C(-1;0)$. Складіть рівняння:

а) його сторін;

б) медіани, проведеної з вершини C;

в) бісектриси кута B;

г) висоти, опущеної з вершини B на сторону AC.

*Розв'язання***:**

а) Складемо рівняння сторін трикутника за двома точкам, використовуючи формулу (3.2).

$$AB: \ \frac{x-4}{-8} = \frac{y-6}{-6} \ \Rightarrow \ 3x - 4y + 12 = 0, \quad BC: \ \frac{x+4}{3} = \frac{y}{0} \ \Rightarrow \ y = 0,$$

$$AC: \ \frac{x-4}{-5} = \frac{y-6}{-6} \ \Rightarrow \ -6x + 5y - 6 = 0.$$

б) Знайдемо рівняння медіани CM. Точка M – середина сторони AB. Її координати знайдемо за формулами:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \; y_M = \frac{y_A + y_B}{2}. \tag{3.5}$$

$$x_M = \frac{4+(-4)}{2} = 0, \; y_M = \frac{6+0}{2}.$$

Отже, $M(0,3)$.

Складемо рівняння медіани за двома точками C та M:

$$\frac{x+1}{0+1} = \frac{y-0}{3-0} \Rightarrow 3x - y + 3 = 0.$$

в) Складемо рівняння бісектриси кута B. Для цього знайдемо координати точки P – точки перетину бісектриси із протилежною стороною за формулами:

$$x_P = \frac{m \cdot x_1 + n \cdot x_2}{m+n}, y_P = \frac{m \cdot y_1 + n \cdot y_2}{m+n}, \tag{3.6}$$

де $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ – координати кінців протилежної сторони, а m і n – довжини сторін, прилеглих до кута.

Обчислимо довжини сторін AB і BC:

$$m = |AB| = \sqrt{(-1-4)^2 + (0-6)^2} = 10, \; n = |BC| = \sqrt{(-1+4)^2 + (0-0)^2} = 3.$$

Підставивши ці результати в (3.6), одержимо

$$x_P = \frac{10 \cdot 4 + 3 \cdot (-1)}{10+3} = \frac{37}{13}, \; y_P = \frac{10 \cdot 6 + 3 \cdot 0}{10+3} = \frac{60}{13}.$$

Точка P має координати $\left(\frac{37}{13}; \frac{60}{13}\right)$.

Координати точок B і P підставимо у формулу (3.2):

$$BP: \; \frac{x+4}{\frac{37}{13}+4} = \frac{y}{\frac{60}{13}} \quad \Rightarrow \quad 60x - 89y + 240 = 0.$$

г) Знайдемо рівняння висоти, опущеної з вершини B на сторону AC.

Приведемо рівняння сторони AC до виду:

$$y = kx + b, \tag{3.7}$$

$$y = \frac{6}{5}x + \frac{6}{5}.$$

Умова перпендикулярності двох прямих, заданих рівнянням (3.7):

$$1 + k_1 k_2 = 0,$$

де k_1, k_2 – кутові коефіцієнти цих прямих. Замість k_1 підставимо кутовий коефіцієнт прямої AC та знайдемо k_2:

$$1 + \frac{6}{5}k_2 = 0, \quad k_2 = -\frac{5}{6}.$$

Рівняння висоти h_B буде мати вигляд:

$$y=-\frac{5}{6}x+b.$$

Вільний член знайдемо, підставивши в це рівняння координати точки B:

$$b=-\frac{10}{3} \text{ та } y=-\frac{5}{6}x-\frac{10}{3}.$$

5. Доведіть, що опуклий чотирикутник $PQRS$, де $P(0;-6)$, $Q(-6;0)$, $R(0;12)$ і $S(12;0)$ – трапеція. Знайдіть її висоту, складіть рівняння середньої лінії й з'ясуєте, чи будуть діагоналі трапеції перпендикулярними.

Розв'язання:

Трапеція – це чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші непаралельні. Для того, щоб визначити чи є наш чотирикутник трапецією, складемо рівняння його сторін. Скористаємося формулою (3.2):

$$PQ\text{:}\ \frac{x-0}{-6}=\frac{y+6}{6}\Rightarrow x+y+6=0,$$

$$RS:\ \frac{x-0}{12}=\frac{y-12}{-12}\Rightarrow x+y-12=0.$$

Так як виконуються умови $\frac{1}{1}=\frac{1}{1}\neq\frac{6}{-12}$ (див. табл. 3.2), то $PQ \parallel RS$. Складемо рівняння двох інших сторін.

$$QR:\ \frac{x+6}{6}=\frac{y}{12}\Rightarrow 2x-y+12=0,\quad PS:\ \frac{x}{12}=\frac{y+6}{6}\Rightarrow x-2y-12=0.$$

З рівнянь видно, що ці дві прямі не будуть паралельними. Отже, даний чотирикутник є трапецією.

Складемо рівняння прямої MK – середньої лінії трапеції. Для цього знайдемо середини сторін QR і PS за формулами (3.5):

$$x_M=\frac{x_Q+x_R}{2}=-3,\ y_M=\frac{y_Q+y_R}{2}=6\ \Rightarrow\ M(-3;6),$$

$$x_K=\frac{x_P+x_S}{2}=6,\ y_K=\frac{y_P+y_S}{2}=-3\ \Rightarrow\ K(6;-3),$$

$$MK\text{:}\ \frac{x+3}{9}=\frac{y-6}{-9}\ \Rightarrow\ x+y-3=0.$$

Складемо рівняння діагоналей PR і QS:

$$PR:\ \frac{x-0}{0}=\frac{y+6}{6}\Rightarrow x=0,\ QS:\ \frac{x+6}{6}=\frac{y-0}{0}\Rightarrow y=0.$$

З рівнянь бачимо, що діагоналі трапеції перпендикулярні.

Довжину висоти h знайдемо як відстань від точки (x_0, y_0) до прямої $Ax+By+C=0$ за формулою:

$$h=\frac{|\,Ax_0+By_0+C\,|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{3.8}$$

Підставимо координати точки P, та коефіцієнти рівняння сторони RS у формулу (3.8). Отримаємо:

$$h_P = \frac{|1\cdot 0 + 1(-6) - 12|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 9\sqrt{2}.$$

6. Обчисліть кут між двома прямими:

1) $y = \frac{1}{2}x + 1$ і $y = -3x + 2$;

2) $y = -\frac{3}{4}x - 4$ і $\begin{cases} x = 4 + 7t, \\ y = -3 + 2t; \end{cases}$

3) $y = \frac{2}{5}x + 3$ і $-8x + 3y - 12 = 0$;

4) $2x + 20y - 3 = 0$ і $x - \frac{2}{3}y - 6 = 0$;

5) $\begin{cases} x = 3t, \\ y = -1 + 2t \end{cases}$ і $\begin{cases} x = 1 - 2t', \\ y = -5 + t'. \end{cases}$

Розв'язання:

1) Кут між цими прямими будемо шукати за формулою:

$$tg\varphi = \frac{|k_2 - k_1|}{1 + k_1 k_2}, \tag{3.9}$$

де k_1, k_2 – кутові коефіцієнти прямих, заданих рівнянням типу (3.1). У рівняннях $y = \frac{1}{2}x + 1$ і $y = -3x + 2$: $k_1 = \frac{1}{2}$ і $k_2 = -3$. Підставимо їх в (3.9):

$$tg\varphi = \left| \frac{-3 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}\cdot(-3)} \right| = 7 \Rightarrow \varphi = arctg7.$$

2) Приведемо рівняння $\begin{cases} x = 4 + 7t, \\ y = -3 + 2t \end{cases}$ до виду (3.1):

$$\begin{cases} x = 4 + 7t, \\ y = -3 + 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{x-4}{7}, \\ t = \frac{y+3}{2} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{2}{7}x - \frac{29}{7}.$$

Користуючись формулою (3.9), одержимо кут між прямими:

$$tg\varphi = \left| \frac{-\frac{3}{4} - \frac{2}{7}}{1 + \frac{3}{4}\cdot(-\frac{2}{7})} \right| = \frac{29}{22} \Rightarrow \varphi = arctg\frac{29}{22}.$$

3) Приведемо друге рівняння до виду (3.1):

$$-8x + 3y - 12 = 0 \Rightarrow y = \frac{8}{3}x + 4.$$

Користуючись формулою (3.9), одержимо кут між прямими:

$$tg\varphi = \left| \frac{\frac{8}{3} - \frac{2}{5}}{1 + \frac{8}{3} \cdot \frac{2}{5}} \right| = \frac{36}{31} \Rightarrow \varphi = arctg\frac{36}{31}.$$

4) Обидва рівняння мають загальний вигляд (3.4): $2x + 20y - 3 = 0$ і $x - \frac{2}{3}y - 6 = 0$;

Кут між цими прямими знайдемо за формулою:

$$tg\varphi = \frac{A \cdot B' - A' \cdot B}{A \cdot A' + B \cdot B'}, \tag{3.10}$$

де A, B й A', B' – коефіцієнти при невідомих у першому й другому рівняннях відповідно.

$$tg\varphi = \frac{2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 1 \cdot 20}{2 \cdot 1 + 20 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{16}{9} \Rightarrow \varphi = arctg\frac{16}{9}.$$

5) Перетворимо систему параметричних рівнянь прямої l_1 так, щоб утворювалося рівняння, не залежне від t.

$$\begin{cases} x = 3t, \\ y = -1 + 2t \end{cases} \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - 1.$$

Аналогічно перетворюємо друге:

$$\begin{cases} x = 1 - 2t', \\ y = -5 + t' \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{9}{2}.$$

Тоді тангенс кута між прямими дорівнює:

$$tg\varphi = \frac{\left| -\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \right|}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{7}{4} \Rightarrow \varphi = arctg\frac{7}{4}.$$

Задачі для самостійного розв'язування

1. Визначте, які з точок $A_1(1; -2)$, $A_2(1; 1)$ та $A_3(3; -4)$ належать прямій $x + 2y - 3 = 0$.

2. Дано точки $A(-3;6)$, $B(4;-1)$, $C(-3,-5)$, $D(-1,2)$. Складіть рівняння:

1) прямої, що проходить через точки B і C;
2) прямої, що проходить через точку A й утворює кут $135°$ з віссю x;
3) прямої, що проходить через точку D перпендикулярно до прямої BC;
4) прямої, що проходить через точку A паралельно прямій BC;
5) прямої, яка проходить через точку B і точку, що поділяє відрізок AD у відношенні 1:3, рухаючись від точки A.

3. Напишіть рівняння прямої, що:

1) має кутовий коефіцієнт $k=-5$ і такої, що проходить через точку $A(1,-2)$;

2) має кутовий коефіцієнт $k=8$ та відтинає на осі Oy відрізок довжини 2;

3) проходить через дві точки $B(1,5)$ й $C(2,3)$;

4) проходить через точку $D(-2,3)$ й складає з віссю Ox кут 60°;

5) проходить через точку $E(1,7)$ ортогонально вектору $\overline{n}(4,3)$;

6) проходить через точку $F(-2,5)$ та відтинає на координатних осях відрізки рівної довжини;

7) проходить через точку $K(12,6)$ так, щоб площа трикутника, утвореного нею й координатними осями, дорівнювала 150 кв. од.

4. Знайдіть відрізки, що відтинає пряма $x-3y+6=0$ на осях координат.

5. Складіть рівняння прямої, що проходить під кутом $\varphi=150^\circ$ до осі Ox і відтинає на осі Oy відрізок довжини 3.

6. Під яким кутом до осі Ox нахилена пряма, що проходить через точки $A(-1;\,3)$ та $B(4;-2)$?

7. Силу прикладено в початку координат. Складові її на координатних осях відповідно дорівнюють 5 і –2. Знайдіть рівняння прямої, вздовж якої напрямлена сила.

8. Через точку $P(-1;3)$ проведіть пряму, перпендикулярну до прямої $4x-2y+3=0$.

9. Обчисліть відстань від точки *P* до прямої:

1) $P(-2;1)$, $4x-3y-2=0$;

2) $P(3;-2)$, $12x+5y-3=0$;

3) $P(0;1)$, $x-2y+1=0$.

10. Через точку $P(1;2)$ проведіть пряму, паралельну до прямої $5x+2y-11=0$.

11. Знайдіть проекцію точки $P(1;-2)$ на пряму $3x-y-9=0$.

12. Промінь світла, що має напрямок прямої $x+5y=0$, падає на дзеркало, що визначається рівнянням $2x-y+5=0$. Напишіть рівняння відбитого променя.

13. Через точку перетину прямих $x+2y-1=0$ і $2x+y-4=0$ проведіть пряму, яка:

1) проходить через точку $M(-1;3)$;

2) паралельна осі *Oy*;

3) перпендикулярна до прямої $x-2y+11=0$.

14. Зведіть до нормального вигляду такі рівняння:

1) $4x+3y+11=0$; 2) $x+2y-1=0$; 3) $x+2=0$.

15. Дано прямі $l_1: 2x-3y+1=0$, $l_2: 3x-y-4=0$. Знайдіть:

1) відстань від точки $A(2;\,-1)$ до прямої l_1;

2) кут між прямими l_1 і l_2;

3) значення параметра m, при яких пряма $2x+my+4=0$ перпендикулярна до прямої l_2;

4) значення параметра p, при яких пряма $px-y-p=0$ збігається з прямою l_2.

16. Дано дві прямі $Ax+By+C=0$ й $x=x_0+lt,\ y=y_0+mt$. Знайдіть необхідні й достатні умови, при яких прямі:
а) перетинаються;
б) паралельні;
в) збігаються.

17. Установіть, які з пар прямих паралельні, перетинаються, збігаються; у випадку перетину знайдіть спільну точку:
а) $2x+3y=0$ і $x=3+t,\ y=2-t$;
б) $x+2y-15=0$ і $x=5+4t,\ y=-2-2t$;
в) $3x+4y-20=0$ і $x=4-8t,\ y=2+6t$;
г) $x-2y+4=0$ і $-3x+6y+12=0$;
д) $x-5y=0$ і $2x-10y=0$;
е) $2x+3y-8=0$ і $x+y-3=0$.

18. Дано рівняння $x+y-2=0,\ \ 2x-y+5=0$ двох сторін паралелограма й точка $M(3,1)$ перетину його діагоналей. Напишіть рівняння двох інших сторін паралелограма.

19. Складіть рівняння сторін паралелограма, знаючи координати точки перетину його діагоналей $M(1,6)$, а сторони AB, BC, CD, DA проходять через точки $P(3,0)$, $Q(6,6)$, $R(5,9)$, $S(-5,4)$.

20. Знайдіть координати точки, симетричної точці $P(10,10)$ відносно прямої $3x+4y-20=0$.

21. Дано дві вершини трикутника $A(-6,2)$, $B(-2,2)$ і точка $H(1,-2)$ перетину його висот. Знайдіть координати третьої вершини C.

22. Знайдіть рівняння прямих, що містять катети прямокутного трикутника, площа якого 20 кв. од., якщо відомо, що його гіпотенуза лежить на осі Ox, а вершина прямого кута збігається із точкою $C(1,-4)$.

23. Складіть рівняння прямих, що проходять через точку $A(3,1)$ й нахилені до прямої $2x+3y-1=0$ під кутом 45°.

24. Складіть рівняння бісектрис кутів, утворених при перетині прямих $x=3t,\ y=-t$ і $x-y+8=0$.

25. Складіть рівняння катетів прямокутного рівнобедреного трикутника, знаючи рівняння гіпотенузи $y=3x+5$ й однієї його вершини $(4,-1)$.

26. Знаючи рівняння бічних сторін рівнобедреного трикутника $6x-2y+5=0$ й $x+3y-1=0$, знайдіть рівняння його третьої сторони за умови, що вона проходить через точку $A(1,1)$.

27. Складіть рівняння сторін квадрата, знаючи координати однієї з його вершин $A(-4{,}5)$ і рівняння діагоналі $7x - y + 8 = 0$.

28. Знайдіть відстань між паралельними прямими:

а) $x - 2y + 3 = 0$ і $2x - 4y + 7 = 0$;

б) $3x - 4y + 1 = 0$ і $x = 1 + 4t,\ y = 3t$.

29. Із точок перетину прямої $3x + 5y - 15 = 0$ з осями координат відновлені перпендикуляри. Знайдіть їх рівняння.

30. Складіть рівняння сторін ромба, знаючи координати його протилежних вершин $A(-3{,}1)$, $C(5{,}7)$. Площа ромба $S = 25$ кв. од.

31. Трикутник заданий своїми сторонами $x + 2y + 3 = 0$, $3x - 7y + 9 = 0$ і $5x - 3y - 11 = 0$. Перевірте, що його висоти перетинаються в одній точці.

32. Обчисліть площу ромба, знаючи одну його вершину $A(0{,}-1)$, точку перетину діагоналей $M(4{,}4)$ і точку $(2{,}0)$ на стороні AB.

33. У прямокутній декартовій системі координат дано вершини трикутника $A(-6,-3)$, $B(-4{,}3)$, $C(9{,}2)$. На внутрішній бісектрисі кута A знайдіть таку точку M, щоб чотирикутник $ABMC$ виявився трапецією.

34. Знаючи рівняння $3x - 2y + 6 = 0$ однієї зі сторін кута й рівняння його бісектриси $x - 3y + 5 = 0$ складіть рівняння другої сторони.

35. При яких значеннях a і b прямі $ax + by + 1 = 0$, $2x + 3y - 5 = 0$ і $x - 1 = 0$ проходять через ту саму точку?

36. У трикутнику ABC відомі: сторона AB: $4x + y - 12 = 0$, висота BH: $5x - 4y - 15 = 0$ і висота AH: $2x + 2y - 9 = 0$. Запишіть рівняння двох інших сторін і висоти.

37. Через точку перетину прямих $2x + 5y - 8 = 0$ і $x - 3y + 4 = 0$ проведіть пряму, яка:

а) проходить через початок координат;

б) паралельна осі абсцис;

в) паралельна осі ординат;

г) проходить через точку $(4{,}3)$.

38. Не обчислюючи координат вершин трикутника, напишіть рівняння прямих, що проходять через ці вершини паралельно протилежним сторонам. Сторони трикутника задано рівняннями: $5x - 2y + 6 = 0$, $4x - y + 3 = 0$, $x + 3y - 7 = 0$.

39. Знайдіть рівняння прямих, що належать пучку $(x + 2y - 7) + q(3x - y + 5) = 0$ й перпендикулярних до кожної з основних прямих пучка.

40. Знайдіть пряму, яка належить одночасно двом пучкам $\alpha_1(x + y - 1) + \beta_1(x - 1) = 0$ і $\alpha_2(2x - 3y) + \beta_2(y + 1) = 0$.

41. Знайдіть рівняння прямої, знаючи, що осі координат відтинають від неї у першому квадранті відрізок, удвічі більше її відстані від початку координат, а площа утвореного таким чином трикутника дорівнює 4,5 кв. одиниць.

42. Знайдіть центр вписаного кола й центр ваги рівнобедреного трикутника, якщо відомі рівняння бічних сторін трикутника $7x - y - 9 = 0$ і $x + y - 7 = 0$ та точка $M(3, -8)$, що лежить на його основі.

43. У рівнобедреному трикутнику відомі рівняння основи $x - 2y + 3 = 0$, однієї бічної сторони $4x - y + 5 = 0$ та точка $P(1{,}2;\ 5{,}6)$ на іншій бічній стороні. Обчисліть:

а) відстань бічної сторони від протилежної вершини;

б) координати центру ваги трикутника;

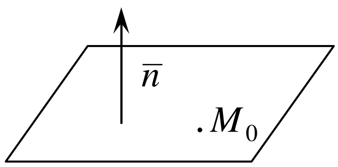
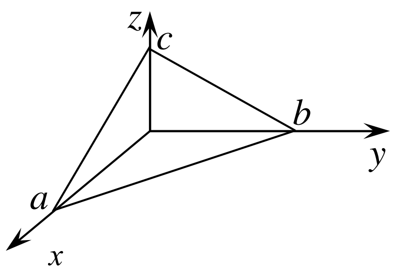
в) площу трикутника.

44. Прямі $3x + 4y - 30 = 0$ й $3x - 4y + 12 = 0$ дотикаються кола радіуса $R = 5$. Обчисліть площу чотирикутника, утвореного цими прямими й радіусами кола, проведеними в точки торкання.

45. Дано координати вершин трикутника ABC: $A(3,-2)$, $B(1,5)$ і $C(-4,3)$. Знайдіть площу трикутника, вершинами якого є основи висот трикутника ABC.

4 РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ У ПРОСТОРІ

Таблиця 4.3 – Основні види рівнянь площини

Назва рівняння, необхідні компоненти	Рівняння
Загальне рівняння площини ($\overline{n}(A,B,C)$ – нормальний вектор)	$Ax+By+Cz+D=0$
Рівняння площини, що проходить через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{n}(A,B,C)$ 	$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$
Детермінантне рівняння площини, що проходить через три точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$	$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$
Нормальне рівняння площини	$\dfrac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0$
Рівняння площини *у відрізках на осях* (площина проходить через точки $(a,0,0)$, $(0,b,0)$, $(0,0,c)$) 	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

Відстань від точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до площини $Ax+By+Cz+D=0$ можна обчислити за формулою:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Нехай дано дві площини: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

Таблиця 4.4 – Формули для обчислення кута між двома площинами, взаємного розташування двох площин у просторі

Назва формули (умови)	**Формула**
Величина двогранного кута θ між двома площинами	$cos\,\theta=\dfrac{\lvert A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2\rvert}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$
Умова перпендикулярності	$A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2=0$
Умова паралельності	$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$

Жмутком площин називається множина площин, що проходять через пряму перетину основних площин $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$. Рівнянням жмутка є рівняння:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+k\left(A_2x+B_2y+C_2z+D_2\right)=0,\ k\in R.$$

В'язкою площин називається множина площин, що проходять через точку перетину трьох основних площин: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ та $A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$. Рівнянням в'язки є рівняння:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+k\left(A_2x+B_2y+C_2z+D_2\right)+$$
$$+l\left(A_3x+B_3y+C_3z+D_3\right)=0.$$

В'язка площин, що проходять через точку $\left(x_0,y_0,z_0\right)$ також може бути задана рівнянням:

$$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C\left(z-z_0\right)=0,\ \ A,B,C\in R.$$

Пряма у просторі

Таблиця 4.5 – Основні види рівнянь прямої у просторі

Назва рівняння, необхідні компоненти	**Рівняння**
Загальне рівняння прямої як перетину двох площин; напрямний вектор прямої має координати $\overline{a}\left(\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}C_1 & A_1\\ C_2 & A_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}\right)$	$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$
Канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ паралельно вектору $\overline{a}\left(a_x,a_y,a_z\right)$ – напрямний вектор прямої	$\dfrac{x-x_0}{a_x}=\dfrac{y-y_0}{a_y}=\dfrac{z-z_0}{a_z}$
Канонічне рівняння прямої, що проходить через дві точки $M_1\left(x_1,y_1,z_1\right)$ і $M_2\left(x_2,y_2,z_2\right)$	$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$
Параметричні рівняння прямої, що проходить через точку $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ паралельно вектору $\overline{a}\left(a_x,a_y,a_z\right)$	$\begin{cases}x-x_0=a_xt,\\ y-y_0=a_yt,\ t\in R\\ z-z_0=a_zt,\end{cases}$

Формула відстані від точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямої $\frac{x-x_0}{a_x}=\frac{y-y_0}{a_y}=\frac{z-z_0}{a_z}$: $d=\frac{\left|\overline{M_0M_1}\times\overline{a}\right|}{|\,\overline{a}\,|}$.

Нехай задано дві прямі $l_1:\frac{x-x_1}{a_x}=\frac{y-y_1}{a_y}=\frac{z-z_1}{a_z}$ і $l_2:\frac{x-x_2}{b_x}=\frac{y-y_2}{b_y}=\frac{z-z_2}{b_z}$; $\overline{a}(a_x, a_y, a_z)$, $\overline{b}(b_x, b_y, b_z)$ – їх напрямні вектори; точки $M_1\in l_1$, $M_2\in l_2$.

Таблиця 4.6 – Формули для обчислення відстані й кута між двома прямими, взаємного розташування двох прямих у просторі

Назва формули	**Формула**
Відстань ρ між двома прямими	$\rho=\frac{\left|\left(\overline{M_1M_2},\overline{a},\overline{b}\right)\right|}{\left|\,\overline{a}\times\overline{b}\,\right|}$
Кут θ між двома прямими в просторі	$cos\,\theta=\frac{\left|a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\right|}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$
Умова перпендикулярності прямих	$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$
Умова паралельності прямих	$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$, $M_1\notin l_2$
Умова перетину прямих у просторі	$\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=0$

Пряма і площина в просторі

Нехай дано пряму в канонічному виді

$$l:\frac{x-x_1}{a_x}=\frac{y-y_1}{a_y}=\frac{z-z_1}{a_z}$$

і площину в загальному виді

$$\alpha: Ax+By+Cz+D=0.$$

Таблиця 4.7 – Формули для обчислення кута між прямою і площиною в просторі, взаємного розташування прямої і площини в просторі

Назва формули	Формула
Кут θ між прямою і площиною в просторі	$sin\,\theta=\dfrac{\left\|A\cdot a_x+B\cdot a_y+C\cdot a_z\right\|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$
Умова перпендикулярності прямої і площини	$\dfrac{A}{a_x}=\dfrac{B}{a_y}=\dfrac{C}{a_z}$
Умова паралельності прямої і площини	$\begin{cases}A\cdot a_x+B\cdot a_y+C\cdot a_z=0,\\ A\cdot x_1+B\cdot y_1+C\cdot z_1\neq 0\end{cases},$
Умова приналежності прямої площині	$\begin{cases}A\cdot a_x+B\cdot a_y+C\cdot a_z=0,\\ A\cdot x_1+B\cdot y_1+C\cdot z_1=0\end{cases},$

Тест для самоконтролю

1. Рівняння прямої, яка проходить через точку *A*(2; –3) і перпендикулярна до прямої $x-4y+7=0$, має вигляд

А. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{-4}$ **Б.** $\dfrac{x-2}{-4}=\dfrac{y+3}{1}$ **В.** $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{-4}$ **Г.** $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-3}{-4}$

2. Рівняння прямої, яка проходить через точку *A*(–1; 4; –2) і перпендикулярна до площини $2x-y+3z-7=0$, має вигляд

А. $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$ **Б.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+4}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$

В. $\dfrac{x+1}{-3}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z+2}{2}$ **Г.** $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z+2}{3}$

3. Рівняння прямої, яка симетрична прямій $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}$ відносно точки $(3;\,-1)$, має вигляд

А. $\dfrac{x+5}{2}=\dfrac{y-1}{1}$ **Б.** $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{1}$ **В.** $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+1}{1}$ **Г.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}$

4. Рівняння площини, симетричної площині $x-y+2z=1$ відносно початку координат, має вигляд

А. $x-y-2z=1$ **Б.** $x-y+2z=1$

В. $x-y+2z=-1$ **Г.** відмінне від наведених

5. Яка з наступних площин паралельна векторам $\overline{a}(-1;\,0;\,1)$ і $\overline{b}(0;\,-1;\,2)$?

А. $x+3y+z-1=0$ **Б.** $x-2y+z-1=0$

В. $x+2y+z-1=0$ **Г.** $x-2y-z-1=0$

6. Як розміщені прямі *AB* та *CD*, якщо *A*(1; 2; 3), *B*(3; 2; 1), *C*(–1; 2; –3), $D(-5;\,2;\,-7)$?

А. перетинаються **Б.** паралельні **В.** збігаються **Г.** мимобіжні

7. Прямі, які задані рівняннями $\frac{x}{4}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{0}$ та $\frac{x}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-4}{0}$

А. паралельні **Б.** перетинаються **В.** мимобіжні **Г.** перпендикулярні

8. Прямі, які задані рівняннями $\frac{x}{4}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{0}$ та $\frac{x}{2}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-4}{1}$

А. перетинаються **Б.** паралельні **В.** мимобіжні **Г.** перпендикулярні

9. Встановіть взаємне розміщення площин $2x-y+3z-2=0$ і $x+y-z+2=0$.

А. паралельні **Б.** співпадають **В.** перетинаються **Г.** перпендикулярні

10. Встановіть взаємне розміщення площин $2x+3y-z+7=0$ і $4x+6y-2z+9=0$.

А. паралельні **Б.** співпадають **В.** перетинаються **Г.** перпендикулярні

11. Вкажіть усі значення параметра *p*, при яких прямі $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{p}=\frac{z+1}{2}$ і $\frac{x+2}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-1}$ паралельні.

А. 4 **Б.** –4 **В.** 2 **Г.** –2

12. Вкажіть усі значення параметра *p*, при яких прямі $\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{p}=\frac{z+1}{3}$ і $\frac{x+2}{-2}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-1}{-6}$ перпендикулярні.

А. 4 **Б.** –4 **В.** 3 **Г.** –3

13. Вкажіть усі значення параметра *a*, при яких пряма $\frac{x}{1}=\frac{y}{a}=\frac{z-2}{-1}$ паралельна площині $3ax+ay+4z-4=0$.

А. 0 **Б.** –4, 1 **В.** –4 **Г.** 1

14. Вкажіть усі значення параметра *a*, при яких пряма $\frac{x-1}{a}=\frac{y+1}{a^2}=\frac{z}{3}$ перпендикулярна до площини $5a^2x-2ay-z+5=0$.

А. 0 **Б.** –1, 1 **В.** –1 **Г.** 1

15. Відстань між точками перетину прямої $\frac{x}{4}-\frac{y}{3}=1$ з осями координат дорівнює

А. 5 **Б.** 25 **В.** 12 **Г.** $\sqrt{5}$

16. Відстань між прямими $5(x-2)-12(y-3)=0$ і $5x-12y-13=0$ дорівнює

А. 1 **Б.** 3 **В.** 4 **Г.** $\sqrt{2}$

17. Кут між прямими $5(x-2)-12(y-3)=0$ і $5x-12y-13=0$ дорівнює

А. $90°$ **Б.** $0°$ **В.** $arctg\frac{5}{12}$ **Г.** $arctg\frac{12}{5}$

18. Відстань між прямою $\frac{x}{4}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+5}{0}$ та площиною $x+3y-7z+2=0$

дорівнює

А. $\sqrt{59}$ **Б.** $\sqrt{17}$ **В.** $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$ **Г.** 0

19. Кут між прямою $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z+2}{2}$ та площиною $2x-y+z+3=0$ дорівнює

А. $0°$ **Б.** $arcsin\dfrac{5}{3\sqrt{6}}$ **В.** $90°$ **Г.** $arccos\dfrac{5}{3\sqrt{6}}$

20. Відстань між прямою $\dfrac{x-7}{5}=\dfrac{y-4}{7}=\dfrac{z-5}{-4}$ та площиною $3x-y+2z-5=0$ дорівнює

А. $\dfrac{22}{\sqrt{14}}$ **Б.** $\dfrac{27}{\sqrt{14}}$ **В.** $\dfrac{22}{\sqrt{42}}$ **Г.** 0

21. Відстань між площинами $(x-1)+2(y-2)-2(z+1)=0$ і $x-2y-2z-6=0$ дорівнює

А. $\dfrac{1}{3}$ **Б.** 0 **В.** 13 **Г.** 1

22. Кут між площинами $(x+1)+3(y-1)-(z+5)=0$ і $x+3y-z+3=0$ дорівнює

А. $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{11}}$ **Б.** $90°$ **В.** $0°$ **Г.** $60°$

23. Укажіть усі значення параметра p, при яких точки $A(-2;\,3;\,p)$ і $B(-1;\,-3;\,2)$ розміщені на однаковій відстані від площини xOz.

А. $p=2$ **Б.** $p=-2$ **В.** $p\in R$ **Г.** не існує

Відповіді: 1. В. 2. Г. 3. В. 4. В. 5. Г. 6. Б. 7. А. 8. В. 9. В. 10. А. 11. Б. 12. А. 13. Б. 14. А. 15. А. 16. Б. 17. Б. 18. Г. 19. Б. 20. А. 21. В. 22. В.

Приклади розв'язування задач

1. Трикутна піраміда задана вершинами $A_1(-1,0,1)$, $A_2(1,-1,1)$, $A_3(-1,-2,0)$, $A_4(5,2,10)$. Знайдіть: 1) рівняння грані $A_1A_2A_3$; 2) рівняння висоти піраміди, яка проходить через вершину A_4; 3) довжину цієї висоти; 4) кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$ в градусах.

Розв'язання:

1) Складемо детермінантне рівняння грані $A_1A_2A_3$:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-0 & z-1 \\ 1+1 & -1-0 & 1-1 \\ -1+1 & -2-0 & 0-1 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}=0,$$

Розкриємо визначник та зведемо подібні доданки в лівій частині рівняння. Отримаємо $x+2y-4z+5=0$ – рівняння грані $A_1A_2A_3$.

2) Висота піраміди, що виходить з вершин A_4, це перпендикуляр до грані $A_1A_2A_3$, тому її напрямний вектор колінеарний до нормального вектора грані $A_1A_2A_3$, тобто $\overline{a}_{A_4D}(1,2,-4)$. Складемо рівняння висоти A_4D за точкою та напрямним вектором:

$$A_4D:\ \frac{x-5}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-10}{-4}.$$

3) Довжину висоти A_4D знайдемо як відстань від вершини A_4 до грані $A_1A_2A_3$ за формулою відстані від точки до площини. Будемо мати:

$$d=\frac{\left|1\cdot 5+2\cdot 2-4\cdot 10+5\right|}{\sqrt{1^2+2^2+(-4)^2}}=\frac{26}{\sqrt{1+4+16}}=\frac{26}{\sqrt{21}}=\frac{26\sqrt{21}}{21}.$$

4) Знайдемо кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$ за формулою:

$$sin\angle\left(A_1A_4, A_1A_2A_3\right)=sin\angle\left(\bar{a}_{A_1A_4}, \bar{n}_{A_1A_2A_3}\right)=\frac{\left|\bar{a}_{A_1A_4}\cdot\bar{n}_{A_1A_2A_3}\right|}{\left|\bar{a}_{A_1A_4}\right|\cdot\left|\bar{n}_{A_1A_2A_3}\right|}. \qquad (4.1)$$

Для цього спочатку знайдемо координати напрямного вектора ребра A_1A_4: $\bar{a}_{A_1A_4}(6,2,9)$.

Підставимо відповідні значення у (4.1):

$$sin\angle\left(A_1A_4, A_1A_2A_3\right)=\frac{\left|6\cdot 1+2\cdot 2+9\cdot(-4)\right|}{\sqrt{6^2+2^2+9^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+(-4)^2}}=\frac{26}{11\sqrt{21}}\approx 0{,}515,$$

$$\angle\left(A_1A_4, A_1A_2A_3\right)\approx 31^\circ.$$

2. Точка $M(x;\,y;\,z)$ рухається прямолінійно і рівномірно з початкової точки $M_0(11;-21;20)$ в напрямку вектора $\bar{s}(-1;2;-2)$ зі швидкістю $v=12$. Визначте, за який час вона пройде відрізок своєї траєкторії, який міститься між площинами $2x+3y+5z-41=0$, $2x+3y+5z+31=0$.

Розв'язання:

Рівняння траєкторії руху має вигляд

$$\frac{x-11}{-1}=\frac{y+21}{2}=\frac{z-20}{-2}\ \text{або}\ \begin{cases}x=-t+11,\\ y=2t-21,\\ z=-2t+20.\end{cases}$$

Знайдемо координати точок перетину траєкторії з площинами. Для цього розв'яжемо системи (а та б):

$$\text{а)}\ \begin{cases}2x+3y+5z-41=0,\\ x=-t+11,\\ y=2t-21,\\ z=-2t+20.\end{cases}$$

Підставляючи вирази для x, y, z у перше рівняння, маємо:

$$-2t+22+6t-63-10t+100-41=0\ \text{або}\ 6t=18,\ t=3.$$

Отже, $x_1=8$, $y_1=-15$, $z_1=14$.

$$
\text{б)}\ \begin{cases} 2x+3y+5z+31=0, \\ x=-t+11, \\ y=2t-21, \\ z=-2t+20. \end{cases}
$$

Аналогічно знаходимо $t=15$, $x_2=4$, $y_2=9$, $z_2=-10$. Отже, точками перетину паралельних площин траєкторією будуть $A(8;-15;14)$, $B(-4;9;-10)$. Довжина відрізка

$$
AB=\sqrt{(8+4)^2+(-15-9)^2+(14+10)^2}=36.
$$

Оскільки час $t=\dfrac{AB}{v}$, то $t=\dfrac{36}{12}=3$.

3. Складіть рівняння площини, що проходить через точку $M(3;-1;-5)$ і перпендикулярна площинам $3x-2y+7=0$ і $5x-4y+3z+1=0$.

Розв'язання:

Оскільки шукана площина перпендикулярна даним площинам, то її нормальний вектор $\overline{n}$ перпендикулярний до нормальних векторів $\overline{n}_1(3;-2;2)$ і $\overline{n}_2(5;-4;3)$ площин, отже можна покласти:

$$
\overline{n}=\overline{n}_1\times\overline{n}_2=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -4 & 3 \end{vmatrix}=2\overline{i}+\overline{j}-2\overline{k}.
$$

Скористаємося рівнянням площини, що проходить через задану точку $M(3;-1;-5)$ перпендикулярно вектору $\overline{n}(2,1,-2)$. Отримаємо

$$
2(x-3)+(y+1)-2(z+5)=0 \text{ або } 2x+y-2z-15=0.
$$

4. Складіть рівняння площини, що проходить через початок координат і перпендикулярна до площин $2x-y+3z-1=0$ та $x+2y+z=0$.

Розв'язання:

Нехай рівняння шуканої площини має вигляд $Ax+By+Cz=0$, тоді нормальні вектори площин $\overline{n}_1(2;-1;3)$ і $\overline{n}_2(1;2;1)$ за умовою задачі будуть перпендикулярні до вектора $\overline{n}(A, B, C)$, тобто справедливі рівності

$$
\begin{cases} 2A-B+3C=0, \\ A+2B+C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-7/5C, \\ B=1/5C. \end{cases}
$$

Нехай $C=-5$. Тоді шукане рівняння площини матиме вигляд $7x-y-5z=0$.

5. З початку координат опустіть перпендикуляр на пряму

$$
\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{1}.
$$

Розв'язання:

Оскільки напрямний вектор прямої $\overline{a}(2;3;1)$ буде нормальним до площини, що проходить через початок координат, то рівняння такої площини має вигляд

$$2x+3y+z=0.$$

Знайдемо точку перетину прямої та площини. Для цього розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{1}, \\ 2x+3y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2t+2, \\ y=3t+1, \\ z=t+3, \\ 2x+3y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=-5/7, \\ x=4/7, \\ y=6/7, \\ z=16/7. \end{cases}$$

Складемо рівняння шуканої прямої. Вона проходить через точки $O(0,\ 0,\ 0)$ і $M(4/7;\ 6/7;\ 16/7)$:

$$\frac{x}{4/7}=\frac{y}{6/7}=\frac{z}{16/7} \text{ або } \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{8}.$$

Задачі для самостійного розв'язування

1. Знайдіть довжину перпендикуляра, опущеного з точки $M_0(2;3;-5)$ на площину $4x-2y+5z-12=0$.

2. Перевірте, які з точок $A(-1;\ 2;\ 3)$, $B(1;\ -2;\ 1)$, $C(0;\ 1;\ 2)$, $D(3;\ 0;\ 3)$ та $E(5;-7;11)$ належать площині $2x-3y+z-9=0$.

3. Визначте координати нормального вектора площини, яка проходить через точки $A(2;\ -1;\ 1)$, $B(3;\ 1;\ 0)$ і $C(1;\ 5;\ -2)$.

4. Площина проходить через точки $A(1;\ 2;\ 1)$ та $B(0;\ 3;\ -1)$ паралельно до осі Oz. Напишіть її рівняння.

5. Чи проходить площина $4x-y+3z+1=0$ через точки: $A(-1;6;3)$; $B(3;-2;-5)$; $C(0;4;1)$; $D(2;0;5)$; $E(2;7;0)$; $F(0;1;0)$?

6. Укажіть особливості розміщення площин у просторі:

1) $3x-5z+1=0$; 2) $9y-2=0$;

3) $x+y-5=0$; 4) $2x+3y-7z=0$;

5) $8y-3z=0$.

7. Запишіть загальне рівняння площини, що проходить через точки $A(-1;6;3)$; $B(3;-2;-5)$; $C(0;4;3)$. Зведіть його до нормального виду. Запишіть рівняння площини у відрізках на осях.

8. Чи можна провести площину через наступні чотири точки: (3;1;0), (0;7;2), (–1;0;–5), (4;1;5)?

9. Обчисліть відстань від точки до площини:

а) $A(3;1;-1)$, $22x+4y-20z-45=0$;

б) $B(4;3;-2)$, $3x-y+5z+1=0$.

10. Знайдіть відстань між паралельними площинами: $3x-y+5z+1=0$ та $3x-y+5z+12=0$.

11. Обчисліть висоту піраміди h_S з вершинами $S(0;6;4)$, $A(3;5;3)$, $B(-2;11;-5)$, $C(1;-1;4)$.

12. Обчисліть кути між площинами:

а) $4x-5y+3z-1=0$ і $x-4y-z+9=0$;

б) $3x-y+2z+15=0$ і $5x+9y-3z-1=0$.

13. Складіть рівняння площини, що проходить:

а) через точку (–2;7;3) паралельно площині $x-4y+5z-1=0$;

б) через початок координат і перпендикулярної площинам $2x-y+5z+3=0$ та $x+3y-z-7=0$;

в) через точки $E(0;0;1)$ і $K(3;0;0)$ та утворює кут 60° з площиною Oxy.

14. Складіть рівняння площини, що проходить через точку $P(-1;\ 2;\ 3)$ і відтинає від осей Ox та Oy відрізки $a=2$, $b=-1$.

15. Через точку $P(1;\ 2;\ -1)$ проведіть площину, що відтинає від осей координат рівні відрізки.

16. Знайдіть відстань між площинами $2x+2y-z-15=0$ і $4x+4y-2z+11=0$.

17. Дано точки $A(1;\ -1;\ 1)$, $B(1;\ 3;\ 1)$, $C(4;\ 3;\ 1)$, $D(4;\ -1;\ 1)$. Складіть рівняння:

1) площини, що проходить через точки A, B, C;
2) прямої, яка проходить через точку A й паралельна прямій BC;
3) прямої, яка проходить через точки C і D.

18. Дано площини $\alpha:\ 2x-y+z+3=0$, $\beta:\ 3x-2y-z-1=0$, $\gamma:\ -4x+2y-2z+1=0$ і прямі $l_1:\ \dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{-1}$, $l_2:\ \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$.

1) Знайдіть відстань від точки $A(2;\ -1;\ 1)$ до площини α;
2) встановіть взаємне розташування площин α і β, α і γ, β і γ; прямої l_2 і площини β; прямих l_1 і l_2;
3) знайдіть відстань між площинами α і γ;
4) при яких значеннях параметра m площина α паралельна площині $2x-my+z=0$;
5) знайдіть кути між площинами α і β, прямими l_1 і l_2;
6) при яких значеннях параметра p площини γ і $px-2y+pz-1=0$ перпендикулярні.
7) знайдіть відстань між прямими l_1 і l_2.

19. Знайдіть координати центру та радіус шару, вписаного в тетраедр, обмежений координатними площинами та площиною $11x-10y-2z-57=0$.

20. Чи мають точку перетину дані площини:

а) $5x+8y-z-7=0$, $x+2y+3z-1=0$, $2x-3y+2z-9=0$;

б) $5x-y+3=0$, $2x-y-4z+5=0$, $3y+2z-1=0$, $3x+4y+5z-3=0$?

21. Через лінію перетину площин $4x-y+3z-1=0$ та $x+5y-z+2=0$ проведіть площину:

а) що проходить через початок координат;

б) що проходить через точку (1;1;1);

в) паралельну осі Oy;

г) перпендикулярну площині $2x-y+5z-3=0$.

22. У жмутку, що визначається площинами $3x+y-2z-6=0$ та $x-2y+5z-1=0$, знайдіть площини, перпендикулярні цим основним площинам.

23. У жмутку, що визначається площинами $2x+y-3z+2=0$ та $5x+5y-4z+3=0$, знайдіть дві перпендикулярні одна одній площини, одна з яких проходить через точку (4;–3;1).

24. У жмутку $\alpha(x+3y-5)+\beta(x-y-2z+4)=0$ знайдіть площину, що відтинає рівні відрізки від осей Ox та Oy.

25. Через лінію перетину площин $x+5y+z=0$ і $x-z+4=0$ проведіть площину, що утворює кут $\frac{\pi}{4}$ з площиною $x-4y-8z+12=0$.

26. Перевірте, що площини $3x-4y+5=0$, $x-2z+1=0$ і $2y-3z-1=0$ належать одному і тому ж жмутку площин.

27. При яких значеннях параметрів A та D площини $2x+y-z+3=0$, $x-3y+5=0$ і $Ax+y-2z+D=0$ належать одному і тому ж жмутку?

28. У в’язці, що визначається площинами $x+y-z+2=0$, $4x-3y+z-1=0$ та $2x+y-5=0$, знайдіть площину:

а) що проходить через вісь абсцис;

б) паралельну площині Oxz;

в) що проходить через початок координат і через точку (1;3;2).

29. Складіть параметричні та канонічне рівняння прямої $\begin{cases} 5x+y+z=0, \\ 2x+3y-2z+5=0. \end{cases}$

30. Доведіть, що прямі перетинаються та знайдіть координати їх точки перетину: $x=-3t, \quad y=2+3t, \quad z=1$ й $x=1+5t', \quad y=1+13t', \quad z=1+10t'$.

31. Знайдіть відстань між мимобіжними прямими $x=2-3t, y=-1+t, z=-2t$ та $x=1+5t', \quad y=3+4t', \quad z=4+2t'$.

32. Встановіть взаємне розміщення прямої та площини; у випадку перетину знайдіть їх спільну точку:

а) $x=2+4t, \quad y=-1+t, \quad z=2-t$ й $4x+y-z+13=0$;

б) $x=2-3t, \quad y=-1+t, \quad z=-2t$ й $x+y-z+3=0$;

в) $x=t, \quad y=-8-4t, \quad z=-3-3t$ й $x+y-z+5=0$;

г) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+2}{5}$ й $4x+3y-z+3=0$;

д) $\frac{x-7}{5}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{4}$ й $3x-y+2z-5=0$;

е) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z}{5}$ й $3x-3y+2z-5=0$;

ж) $\begin{cases} 2x-y+3z+4=0, \\ x-2y-2z+2=0 \end{cases}$ й $4x-5y-z+8=0$;

з) $\begin{cases} 2x-3y-3z-9=0, \\ x-2y+z+3=0 \end{cases}$ й $x-2y+z-1=0$;

і) $\begin{cases} 3x+5y-7z+16=0, \\ 2x-y+z-6=0 \end{cases}$ й $5x-z-4=0$.

33. Знайдіть кут між прямою $\begin{cases} x+4y-2z+7=0, \\ 3x+7y-2z=0. \end{cases}$ та площиною $3x+y-z+1=0$.

34. Знайдіть точку, симетричну точці $P(6;-5;5)$ відносно площини $2x-3y+z-4=0$.

35. Знайдіть проекцію прямої $x=1+2t,\quad y=3+t,\quad z=2+t$ на площину $3x-2y-z+15=0$.

36. Переконайтеся, що прямі $x=8+5t,\quad y=1+2t,\quad z=6+4t$ та $x=11+3t',\quad y=2+t',\quad z=4-2t'$ перетинаються і знайдіть рівняння площини, якій вони належать.

37. Напишіть рівняння площини, що проходить через точку $A(4;-1;3)$, паралельно прямим $x=t,\quad y=2t,\quad z=-3t$ та $x=1+5t',\quad y=3+4t',\quad z=4+2t'$.

38. Напишіть рівняння площини, що проходить через пряму $x=-5+4t,\quad y=2+7t,\quad z=1+2t$ паралельно до прямої $x=t',\quad y=1-2t',\quad z=-3t'$.

39. Напишіть рівняння площини, паралельної площині $x+y+z-2=0$ та такої, що містить пряму $x=2t,\quad y=5-t,\quad z=-1-t$.

40. Чи можна через пряму $x=1-t,\quad y=-3+t,\quad z=5-4t$ провести площину, паралельну площині $2x+3y-4z+2=0$?

41. Через точку $A(1;0;7)$ паралельно площині $6x-2y+4z-11=0$ проведіть пряму так, щоб вона перетнула пряму $x=5+4t,\quad y=5+2t,\quad z=1+t$.

42. На прямій $x=2t,\quad y=4t,\quad z=3+5t$ знайдіть точку, рівновіддалену від точок $A(3;1;-2)$ та $B(5;3;-2)$.

43. Знайдіть точку, симетричну точці $P(-3;1;-1)$ відносно прямої $\begin{cases} 4x-3y-13=0, \\ y-2z+5=0. \end{cases}$

44. Напишіть рівняння прямої, що проходить через точку перетину площини $x+y+z-1=0$ з прямою $x=t,\quad y=1,\quad z=-1$, що належить цій площині та перпендикулярна даній прямій.

45. Напишіть рівняння спільного перпендикуляру до прямих $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{2}$ й $x=-1+3t,\quad y=2+2t,\quad z=1$.

5 КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Еліпсом називається геометричне місце точок площини, для кожної з яких сума довжин до двох фіксованих точок F_1 та F_2 є величина стала, що дорівнює $2a$. Точки F_1 та F_2 називаються *фокусами* еліпса, відстань між ними $F_1F_2 = 2c$ – *фокусною відстанню*. В канонічній системі координат, початок якої співпадає з серединою відрізка F_1F_2, а вісь абсцис проходить через точки $F_1(-c;0)$ та $F_2(c;0)$, рівняння еліпса має вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{5.1}$$

і називається *канонічним рівнянням* еліпса. У цьому рівнянні $b^2=a^2-c^2$. Точки $A_1(-a,0),\ A_2(a,0),\ B_1(0,-b),\ B_2(0,b)$ перетину еліпса з осями координат називаються *вершинами* еліпса. Відрізки $A_1A_2=2a,\ B_1B_2=2b$ – відповідно *велика (фокальна) і мала осі* еліпса. *Ексцентриситетом* ε еліпса називається відношення $e=\frac{c}{a}$. Очевидно, що для еліпса $0<e<1$. Відстані довільної точки $M(x,y)$ еліпса до фокусів називаються *фокальними радіусами* r_1 та r_2 і обчислюються за формулами

$$r_1=a-ex,\ r_2=a+ex.$$

Директрисами еліпса називаються дві прямі, перпендикулярні великій осі еліпса та такі, що відстоять від його центру на відстані $\frac{a}{e}$. Таким чином, рівняння директрис еліпса записуються у вигляді: $x=-\frac{a}{e},\ x=\frac{a}{e}$.

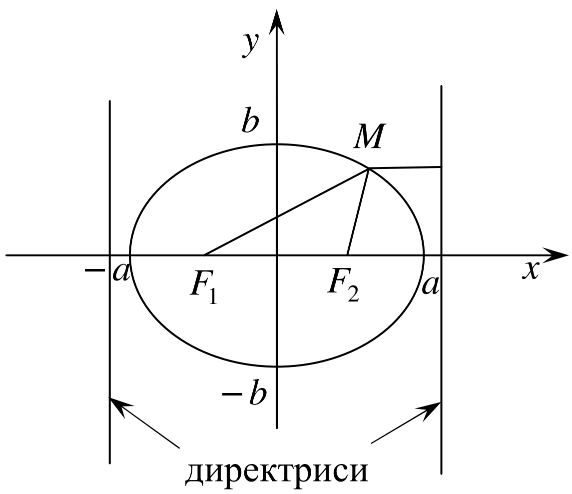


Рисунок 5.1 – Еліпс

Нехай $N(x_0,y_0)$ – довільна точка еліпса. *Дотична* до еліпса у цій точці задається рівнянням $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$. У випадку, коли дотична має проходити через точку $N(x_0,y_0)$, що не належить еліпсу, для відшукання кутового коефіцієнту дотичної треба скористатися умовою, що дотична $y-y_0=k(x-x_0)$ та еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ повинні мати лише одну спільну точку.

Гіперболою називається геометричне місце точок площини, для кожної з яких модуль різниці відстаней до двох фіксованих точок F_1 і F_2 (фокусів) є величина стала, що дорівнює $2a$. Оберемо початок системи координат у середині відрізка $F_1F_2=2c$, а вісь абсцис проходить через точки F_1 та F_2. Тоді отримаємо *канонічне* рівняння гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{5.2}$$

У цьому рівнянні $b^2=c^2-a^2$. Точки $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$ перетину гіперболи з віссю Ox називаються *вершинами* еліпса. Відрізок $A_1A_2=2a$ – *дійсна вісь* гіперболи, а відрізок осі ординат $B_1B_2=2b$ – *уявна вісь*. Прямокутник, обмежений прямими $x=-a$, $x=a$, $y=-b$, $y=b$, називається *характеристичним прямокутником гіперболи*, а його діагоналі – *асимптотами*. Рівняння асимптот гіперболи мають вид:

$$y=\frac{b}{a}x,\ y=-\frac{b}{a}x.$$

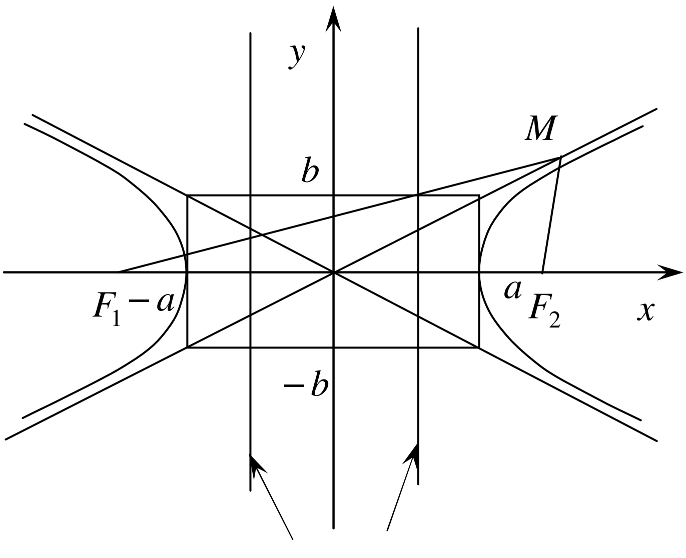


Рисунок 5.2 – Гіпербола

Ексцентриситетом e гіперболи також називається відношення $e=\frac{c}{a}$. Очевидно, що для гіперболи $e>1$. Відстані довільної точки $M(x,y)$ гіперболи до фокусів називаються *фокальними радіусами* r_1 та r_2 і обчислюються за формулами

$$r_1=ex-a,\ r_2=ex+a.$$

Директрисами гіперболи називаються дві прямі, перпендикулярні дійсній осі гіперболи та такі, що відстоять від її центру на відстані $\frac{a}{e}$. Аналогічно еліпсу, рівняння директрис гіперболи записуються у вигляді: $x=-\frac{a}{e}$, $x=\frac{a}{e}$. Гіпербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ називається спряженою до гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Спряжена гіпербола має ті ж асимптоти, що і вихідна гіпербола. Дотичною до гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ в її точці $N(x_0,y_0)$ є пряма $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$.

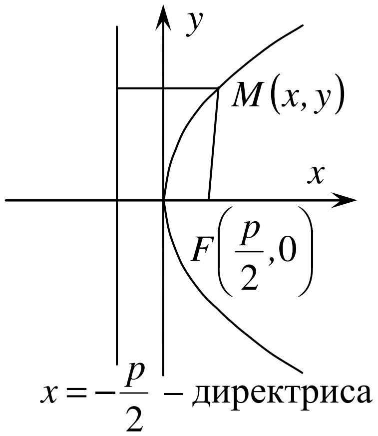


Рисунок 5.3 – Парабола

Параболою називається множина точок площини, рівновіддалених від фіксованої точки F (фокуса) та даної прямої (директриси). Якщо по аналогії з еліпсом та гіперболою визначити ексцентриситет параболи, як відношення відстані від фокуса до директриси, то для параболи $e=1$. Проведемо на площині, в якій розміщено параболу, вісь Ox перпендикулярно директрисі. Вісь Oy декартової системи проведемо паралельно директрисі між фокусом та директрисою на відстані $\frac{p}{2}$ від фокуса, де p – відстань між фокусом та директрисою. Тоді в цій канонічній системі координат рівняння параболи матиме вид:

$$y^2 = 2px. \qquad (5.3)$$

Рівняння дотичної до параболи, що проходить через її точку $N(x_0, y_0)$ має вигляд:

$$yy_0 = p(x + x_0).$$

Приклади розв'язування задач

1. Складіть найпростіше рівняння еліпса, знаючи, що:

а) півосі його відповідно дорівнюють 4 і 2;

б) відстань між фокусами дорівнює 6 і більша піввісь дорівнює 5;

в) більша піввісь дорівнює 10 і ексцентриситет $e = 0{,}8$;

г) мала піввісь дорівнює 3 і ексцентриситет $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

д) сума півосей дорівнює 8 і відстань між фокусами теж дорівнює 8.

Розв'язання.

а) Використовуючи загальне рівняння еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ й знаючи, що a й b – півосі, з’ясовуємо, що шукане рівняння має вигляд: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.

б) Відстань між фокусами дорівнює $2c$, отже $c = 3$. З рівності $b^2 = a^2 - c^2$ знаходимо значення $b = 4$. Піввісь $a = 5$ відома з умови. Отже, шукане рівняння має вигляд: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

в) За умовою $a = 10$. З означення ексцентриситету $e = \frac{c}{a}$ знаходимо $c = 8$. Скориставшись рівністю $b^2 = a^2 - c^2$, знаходимо $b = 6$. Запишемо рівняння еліпса: $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$.

г) За умовою $b=3$. З означення ексцентриситету $e=\frac{c}{a}$, знаходимо залежність $c=\frac{\sqrt{2}}{2}a$. Використовуючи рівність $b^2=a^2-c^2$ і наявні дані, одержуємо рівняння $a^2-\frac{a^2}{2}=9$, звідки $a=3\sqrt{2}$. Шукане рівняння еліпсу має вигляд: $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$.

д) З умови відомо, що $a+b=8$ й $2c=8$, звідки $c=4$. Використовуючи рівність $b^2=a^2-c^2$, одержимо $a^2-b^2=16$. Розв'язавши систему $\begin{cases} a+b=8, \\ a^2-b^2=16, \end{cases}$ знаходимо значення $a=5$ й $b=3$. Запишемо шукане рівняння еліпса: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

2. Складіть рівняння параболи, знаючи, що:

а) відстань фокуса від вершини дорівнює 3;

б) фокус має координати $(5;0)$, а вісь ординат служить директрисою;

в) парабола симетрична відносно осі Ox, проходить через початок координат і через точку $M(1;-4)$;

г) парабола симетрична відносно осі Oy, фокус знаходиться в точці $(0;2)$ й вершина збігається з початком координат;

д) парабола симетрична відносно осі Oy, проходить через початок координат і через точку $M(6;-2)$.

Розв'язання:

а) Канонічне рівняння параболи має вигляд $y^2=2px$, де p – фокальний параметр, що дорівнює відстані від фокуса до директриси. Як відомо, відстань фокуса від вершини дорівнює половині відстані фокуса від директриси, отже, $p=6$ і шукане рівняння параболи має вигляд: $y^2=12x$.

б) Так як вісь ординат служить директрисою, а відстань від фокуса до директриси – це фокальний параметр, то $p=5$. Вершина параболи повинна перебувати в середині між фокусом і директрисою, виходить, її координати $(2{,}5;0)$ й, отже, шукане рівняння має вигляд: $y^2=10(x-2{,}5)$ або $y^2=10x-25$.

в) Канонічне рівняння параболи має вигляд $y^2=2px$. Якщо парабола проходить через точку $M(1;-4)$, то координати цієї точки задовольняють її рівнянню, тобто $16=2p$, звідки $p=8$. Отже, шукане рівняння: $y^2=16x$.

г) Так як фокус розташований на відстані дві одиниці від вершини, то $p=4$. З умови відомо, що парабола симетрична відносно осі Oy, звідки шукане рівняння: $x^2=8y$.

д) Рівняння параболи з вершиною в початку координат, симетричної відносно осі Oy, має вигляд: $x^2 = 2py$. Підставляючи в це рівняння координати точки $M(6;-2)$, через яку проходить парабола, знаходимо значення $p = -9$. У підсумку шукане рівняння має вигляд: $x^2 = -18y$.

3. Складіть рівняння гіперболи, осі якої збігаються з осями координат, знаючи, що:

а) відстань між вершинами дорівнює 8, а відстань між фокусами 10;

б) дійсна піввісь дорівнює 5 і вершини поділяють відстані між центром і фокусами навпіл;

в) дійсна вісь дорівнює 6 і гіпербола проходить через точку $(9;-4)$;

г) гіпербола проходить через дві точки $P(-5;2)$ й $Q(2\sqrt{5};\sqrt{2})$.

Розв'язання:

а) З умови завдання маємо, що $A_1A_2 = 2a = 8$, звідки $a = 4$. Крім того $F_1F_2 = 2c = 10$, тобто $c = 5$. Використовуючи співвідношення $b^2 = c^2 - a^2$, знаходимо значення $b = 3$. Отже, підставляючи знайдені значення в канонічне рівняння гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, одержуємо шукане рівняння: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

б) З умови маємо, що $a = 5$ й $OF_1 = c = 2a = 10$. Використовуючи рівність $b^2 = c^2 - a^2$, знаходимо значення $b = 5\sqrt{3}$, звідки шукане рівняння має вигляд: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{75} = 1$.

в) За умовою дійсна вісь дорівнює 6, отже, піввісь $a = 3$. Так як гіпербола проходить через точку $(9;-4)$, то координати цієї точки задовольняють загальному рівнянню гіперболи. Використовуючи наявні дані, приходимо до рівняння $\frac{81}{9} - \frac{16}{b^2} = 1$, звідки $b^2 = 2$. Отже, шукане рівняння гіперболи має вигляд: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{2} = 1$.

г) Підставляючи в канонічне рівняння гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ координати даних точок, приходимо до системи $\begin{cases} \frac{25}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1, \\ \frac{20}{a^2} - \frac{2}{b^2} = 1. \end{cases}$ Виразимо з першого рівняння системи $a^2 = \frac{25b^2}{b^2 + 4}$ й підставимо його в друге рівняння. Отримаємо $b^2 = 6$, тоді $a^2 = 15$ й шукане рівняння прийме вид: $\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{6} = 1$.

4. Знайдіть точки перетину еліпса $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{12} = 1$ з прямою $2x - y - 9 = 0$.

Розв'язання:

Щоб знайдіть потрібну нам точку, необхідно розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{12}=1, \\ 2x-y-9=0. \end{cases}$ Виразимо із другого рівняння y й підставимо отриманий вираз в перше рівняння системи: $\begin{cases} x^2+3(2x-9)=36, \\ y=2x-9. \end{cases}$. Розв'яжемо квадратне рівняння системи відносно x:

$$13x^2-108x+207=0,$$

$$D=(108)^2-4\cdot 13\cdot 207=900,$$

$$x_1=\frac{108+30}{26}=\frac{69}{13},\ x_2=\frac{108-30}{26}=3.$$

Використовуючи друге рівняння системи, знаходимо $y_1=\dfrac{21}{13}$, $y_2=-3$. Таким чином, точки перетину еліпса з прямою мають координати: $\left(\dfrac{69}{13};\dfrac{21}{13}\right)$ і $(3;-3)$.

5. Задані точки $A(1;\ 0)$ і $B(2;\ 0)$. Точка M рухається так, що в трикутнику AMB $\angle B$ у два рази більший за $\angle A$. Знайдіть рівняння кривої, яку описує точка M.

Розв’язання:

Візьмемо точку M з координатами x і y. Виразимо $\text{tg}\angle B$ і $\text{tg}\angle A$ через координати точок A, B і M:

$$\text{tg}\angle B=\frac{y}{2-x},\ \text{tg}\angle A=\frac{y}{x+1}.$$

Згідно з умовою $\angle B=2\angle A$, тобто

$$\text{tg}\angle B=\frac{2\text{tg}\angle A}{1-\text{tg}^2\angle A} \text{ або } \frac{y}{2-x}=\frac{2\dfrac{y}{x+1}}{1-\left(\dfrac{y}{x+1}\right)^2}.$$

Після спрощення дістаємо $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$. Отже, шукана крива – гіпербола.

6. Складіть рівняння параболи, симетричної відносно осі Ox, з вершиною в початку координат, якщо довжина деякої хорди цієї параболи, що перпендикулярна до осі Ox, дорівнює 16, а відстань до цієї хорди від вершини дорівнює 6.

Розв’язання:

Оскільки відома довжина хорди й відстань до неї від вершини, то відомі координати кінця цієї хорди – точки M, що лежить на параболі. У рівнянні параболи $y^2 = 2px$ покладемо $x = 6$, $y = 8$. Тоді $2p = \frac{32}{3}$. Отже, рівняння шуканої параболи

$$y^2 = \frac{32x}{3}.$$

Тест для самоконтролю

1. Обчисліть ексцентриситет гіперболи $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$:

А. $e = \frac{4}{5}$ Б. $e = \frac{5}{4}$ В. $e = 1{,}2$ Г. $e = 0{,}6$

2. Складіть рівняння директрис еліпса $\frac{x^2}{39} + \frac{y^2}{64} = 1$:

А. $y = \pm 6{,}4$ **Б.** $x = \pm 6{,}4$ **В.** $y = \pm\frac{5}{64}$ **Г.** $y = \pm 12{,}8$

3. Гілки параболи $y^2 = -4x$ спрямовані у:

А. додатному напрямку осі Ox **Б.** додатному напрямку осі Oy
В. від'ємному напрямку осі Ox **Г.** від'ємному напрямку осі Oy

4. Гілки параболи $x^2 = 3y$ спрямовані у:

А. додатному напрямку осі Ox **Б.** додатному напрямку осі Oy
В. від'ємному напрямку осі Ox **Г.** від'ємному напрямку осі Oy

5. Визначте значення параметру p параболи $y^2 = -4x$:

А. $p = -2$ **Б.** $p = 4$ **В.** $p = -4$ **Г.** $p = 2$

6. Запишіть рівняння еліпса з фокусами $F_1(-1{,}0)$, $F_2(0{,}1)$ та $a = \sqrt{2}$.

А. $-2xy - 8x + 8y + 15 = 0$ **Б.** $-2xy - 8x - 8y + 15 = 0$
В. $2xy + 8x + 10y + 15 = 0$ **Г.** $2xy - 8x + 10y + 15 = 0$

7. Запишіть рівняння параболи з фокусом $F(2,-2)$ та директрисою $y = x$.

А. $x^2 - 2xy + y^2 - 8x + 8y - 16 = 0$ **Б.** $x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 8y - 16 = 0$
В. $x^2 - 2xy + y^2 - 8x - 8y + 16 = 0$ **Г.** $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 8y + 16 = 0$

8. Центр симетрії якої із наступних кривих розташований найближче до осі Ox?

А. $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+4)^2}{16} = 1$ **Б.** $4(x+1)^2 - 9(y+2)^2 = -36$

В. $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 3$ **Г.** $\frac{(x+1)^2}{2} - \frac{(y-1)^2}{4} = 0$

9. Вкажіть усі осі симетрії еліпса $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$.

А. $x = 0, y = 0$ **Б.** $x = -1, y = -3$ **В.** $y = -3$ **Г.** $x = 2, y = -3$

10. Вкажіть усі осі симетрії гіперболи $\frac{(x+1)^2}{16}-\frac{(y-2)^2}{25}=1$.

А. $x=0, y=0$ **Б.** $x=-1, y=2$ **В.** $y=2$ **Г.** $x=1, y=-2$

11. Яке з наступних рівнянь визначає лінію, що має тільки одну вісь симетрії?

А. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=-1$ **Б.** $y^2+8x-16=0$ **В.** $x^2+2y^2+8x-4=0$ **Г.** $x^2=0$

12. Після стиснення до осі Ox з коефіцієнтом $k=0{,}5$ отримали еліпс $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{36}=1$. Велика піввісь вихідного еліпса дорівнює…

А. 12 **Б.** 13 **В.** 72 **Г.** 6

13. Після стиснення до осі Ox з коефіцієнтом $k=0{,}5$ отримали гіперболу $\frac{x^2}{169}-\frac{y^2}{36}=1$. Дійсна піввісь вихідної гіперболи дорівнює…

А. 12 **Б.** 13 **В.** 72 **Г.** 6

14. Пряма $y-1=0$ є директрисою параболи…

А. $x^2=4y$ **Б.** $y^2=-2x$ **В.** $x^2=-4y$ **Г.** $y^2=4x$

15. Периметр чотирикутника, дві вершини якого знаходяться у фокусах еліпса $9x^2+25y^2=225$, а дві інші збігаються з кінцями його малої осі, дорівнює…

А. 10 **Б.** 6 **В.** 20 **Г.** 12

16. Асимптоти гіперболи $x^2-4y^2=64$ мають рівняння…

А. $y=\pm\frac{1}{4}x$ **Б.** $y=\pm\frac{1}{2}x$ **В.** $y=\pm 2x$ **Г.** $y=\pm 4x$

17. Дано гіперболу $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$. Відстань від точки $M\left(-2;4\sqrt{3}\right)$ до лівого фокуса дорівнює…

А. $\sqrt{52}$ **Б.** $\sqrt{60}$ **В.** 8 **Г.** $\sqrt{57}$

18. Рівняння параболи, вершина якої знаходиться у початку координат, а пряма $x-1=0$ є директрисою, має вигляд…

А. $y^2=-6x$ **Б.** $y^2=6x$ **В.** $y=-6x^2$ **Г.** $y=6x^2$

19. Яке з наступних рівнянь у полярній системі координат визначає еліпс?

А. $r=\frac{144}{5-13cos\varphi}$ **Б.** $r=\frac{144}{13-5cos\varphi}$ **В.** $r=\frac{144}{5+13cos\varphi}$ **Г.** $r=\frac{144}{5cos\varphi}$

20. Яке з наступних рівнянь у полярній системі координат визначає гіперболу?

А. $r=\frac{144}{13+5cos\varphi}$ **Б.** $r=\frac{144}{5cos\varphi}$ **В.** $r=\frac{144}{5-13cos\varphi}$ **Г.** $r=\frac{144}{13-5cos\varphi}$

21. Укажіть всі значення параметра a, при яких крива $x^2+ay^2+2x=0$ є еліпсом.

А. $a=1$ **Б.** $a\ge 0$ **В.** $a\le 0$ **Г.** $a>0$

22. Складіть рівняння еліпса, який отримано поворотом еліпса $\frac{(x-4)^2}{16}+\frac{(y+3)^2}{9}=1$ навколо його центра на 90°.

А. $\frac{(x-4)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{16}=1$ **Б.** $\frac{(x+4)^2}{16}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$

В. $\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y-4)^2}{16}=1$ **Г.** $\frac{(x+3)^2}{16}+\frac{(y-4)^2}{9}=1$

23. Складіть рівняння гіперболи, яку отримано поворотом гіперболи $\frac{(x+1)^2}{16}-\frac{(y-2)^2}{25}=1$ навколо її центра на 90°.

А. $\frac{(x-1)^2}{25}-\frac{(y+2)^2}{16}=1$ **Б.** $\frac{(x-1)^2}{16}-\frac{(y+2)^2}{25}=1$

В. $\frac{(x+1)^2}{16}-\frac{(y-2)^2}{25}=1$ **Г.** $\frac{(x+1)^2}{25}-\frac{(y-2)^2}{16}=-1$

Відповіді: 1. Б. 2. Г. 3. В. 4. Б. 5. Г. 6. В. 7. Г. 8. Г. 9. Г. 10. Б. 11. Г. 12. Б. 13. Б. 14. В. 15. В. 16. А. 17. Г. 18. А. 19. В. 20. В. 21. Г. 22. А. 23. Г.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Складіть рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо:

1) його півосі дорівнюють 5 і 2;
2) його велика вісь дорівнює 10, а відстань між фокусами – 8;
3) його мала вісь дорівнює 24, а відстань між фокусами – 10;
4) відстань між фокусами дорівнює 6 і ексцентриситет $e=\frac{3}{5}$;
5) його велика вісь дорівнює 20, а ексцентриситет $e=\frac{3}{5}$;
6) його мала вісь дорівнює 10, а ексцентриситет $e=\frac{12}{13}$;
7) відстань між директрисами дорівнює 5 і відстань між фокусами – 4;
8) його велика вісь дорівнює 8, а відстань між директрисами – 16;
9) його мала вісь дорівнює 6, а відстань між директрисами – 15;
10) відстань між директрисами дорівнює 32 і $e=\frac{1}{2}$;
11) точка $M\left(-2\sqrt{5};\,2\right)$ належить еліпсу і його мала піввісь дорівнює 3;
12) точка $M(2;\,-2)$ належить еліпсу і його велика піввісь дорівнює 4;
13) точки $M\left(4;\,-\sqrt{3}\right)$ і $N\left(2\sqrt{2};\,3\right)$ належать еліпсу;
14) відстань від директриси до найближчої вершини дорівнює 4, а до вершини, що лежить на осі, паралельній директрисі, дорівнює 8;
15) трикутник з вершинами у фокусах і в кінці малої осі правильний, а діаметр кола, що проходить через центр і дві вершини еліпса – 7.

2. Складіть рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо:

1) її вісі $2a = 10$ і $2b = 8$;
2) відстань між фокусами $2c = 10$ і вісь $2b = 8$;
3) відстань між фокусами $2c = 6$ і ексцентриситет $e = \frac{3}{2}$;
4) вісь $2a = 16$ і ексцентриситет $e = \frac{5}{4}$;
5) рівняння асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$ і відстань між фокусами $2c = 20$;
6) відстань між директрисами $22\frac{2}{13}$ і відстань між фокусами $2c = 26$;
7) відстань між директрисами $\frac{32}{5}$ і вісь $2b = 6$;
8) відстань між директрисами дорівнює $\frac{8}{3}$ і $e = \frac{3}{2}$;
9) рівняння асимптот $y = \pm\frac{3}{4}x$ і відстань між директрисами $12\frac{4}{5}$;
10) точки $M(6; -1)$ і $N\left(-8; 2\sqrt{2}\right)$ належать гіперболі;
11) точка $M(-5; 3)$ належить гіперболі і ексцентриситет дорівнює $\sqrt{2}$;
12) точка $M\left(\frac{9}{2}; -1\right)$ гіперболи і рівняння асимптот $y = \pm\frac{2}{3}x$;
13) точка $M\left(-3; \frac{5}{2}\right)$ належить гіперболі і рівняння директрис $x = \pm\frac{4}{3}$;
14) рівняння асимптот $y = \pm\frac{3}{4}x$ і рівняння директрис $x = \pm\frac{32}{5}$.

3. Складіть рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, якщо:

1) парабола розташована в правій півплощині симетрично відносно вісі Ox і її параметр $p = 3$;
2) парабола розташована в лівій півплощині симетрично відносно вісі Ox і її параметр $p = 0{,}5$;
3) парабола розташована в верхній півплощині симетрично відносно вісі Oy і її параметр $p = \frac{1}{4}$;
4) парабола розташована в нижній півплощині симетрично відносно вісі Oy і її параметр $p = 3$;
5) парабола розташована симетрично відносно вісі Ox і проходить через точку $A(9; 6)$;

6) парабола розташована симетрично відносно вісі Ox і проходить через точку $B(-1;3)$;

7) парабола розташована симетрично відносно вісі Oy і проходить через точку $C(1;1)$;

8) парабола розташована симетрично відносно вісі Oy і проходить через точку $D(4;-8)$.

4. Точка $M\left(-\frac{5}{2};1\right)$ лежить на гіперболі $4x^2-5y^2=20$. Знайдіть її фокальні радіуси.

5. Знайдіть точки перетину еліпса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ з прямою $x-2y+2=0$.

6. Знайдіть точки перетину гіперболи $\frac{x^2}{90}-\frac{y^2}{36}=1$ з прямою $x-y+5=0$.

7. Через точку $M(2;4)$ проведіть дотичні до еліпса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.

8. Складіть рівняння дотичних, проведених через точку $M\left(0;-\frac{1}{4}\right)$ до гіперболи $9x^2-2y^2=1$.

9. Напишіть рівняння дотичної до еліпса $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{18}=1$ в точці $M(4;4)$.

10. Складіть рівняння дотичних до еліпса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, що проходять через точку $N(10{,}4)$.

11. Дана пряма $x+y=0$. Складіть рівняння дотичних до еліпса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$:

1) паралельних даній прямій;

2) перпендикулярних даній прямій.

12. Складіть рівняння гіперболи, якщо відомо її ексцентриситет $e=\sqrt{5}$, фокус $F(2;-1)$ і рівняння відповідної директриси $3x-y+3=0$.

13. Складіть рівняння параболи, якщо заданий її фокус $F(4;\ 3)$ і директриса $y+1=0$.

14. Складіть рівняння двох спряжених гіпербол, якщо відстань між директрисами першої з них дорівнює 7,2 і відстань між директрисами другої дорівнює 12,8.

15. Складіть рівняння еліпса, якщо його ексцентриситет $e=\frac{1}{2}$, фокус знаходиться в точці $F(1;-2)$, а відповідна директриса визначається рівнянням $x-y+1=0$.

16. Визначте ексцентриситет еліпса, знаючи, що:

1) його мала вісь видна з фокуса під прямим кутом;

2) відстань між фокусами дорівнює відстані між вершинами малої і великої осей;

3) відстань між директрисами в чотири рази більше відстані між фокусами;

4) відрізок між фокусом і дальньою вершиною більшої осі ділиться другим фокусом у відношенні 2:1.

17. Відомо, що фокус еліпса має координати $(1;0)$, йому відповідає директриса $x=7$, а ексцентриситет $e=\dfrac{1}{2}$. Знайдіть другий фокус і другу директрису цього еліпса.

18. Знайдіть ексцентриситет еліпса, знаючи, що сторони вписаного в нього квадрата проходять через фокуси еліпса паралельно його малій осі.

19. Складіть рівняння прямої, що проходить через середини хорд еліпса $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{64}=1$, що лежать на прямих $2x-y+7=0$ і $2x-y-1=0$.

20. Відомо, що фокус гіперболи має координати $(3;0)$, йому відповідає директриса $x=-1/5$, а ексцентриситет $e=5/3$. Знайдіть другий фокус і другу директрису цієї гіперболи.

21. Напишіть рівняння гіперболи, знаючи чотири точки $(\pm 4{,}2)$, $(\pm 4{,}-2)$ перетину її директрис і асимптот.

22. Сторони квадрата, вписаного в гіперболу, проходять через її фокуси. Знайдіть її ексцентриситет.

23. На параболі $y^2=10x$ знайдіть точку M таку, що:

1) пряма, що проходить через точку M та фокус параболи, утворює з віссю Ox кут 60°;

2) площа трикутника з вершинами в шуканій точці M, фокусі параболи й точці перетину осі параболи з директрисою дорівнює 5;

3) відстань від точки M до вершини параболи дорівнює відстані від точки M до фокуса;

4) відстані від точки M до вершини параболи та до фокуса параболи відносяться як $8:7$.

24. Знайдіть таку хорду параболи $y^2=4x$, яка точкою $(3;1)$ ділиться навпіл.

25. Складіть рівняння дотичної до гіперболи $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, якщо дотична:

1) паралельна прямій $3x-y-17=0$;

2) перпендикулярна до прямої $2x+5y+11=0$.

26. Складіть рівняння гіперболи, знаючи рівняння її асимптоти $y=\pm\dfrac{1}{2}x$ і рівняння однієї з її дотичних $5x-6y-8=0$.

27. Гіпербола, осі якої збігаються з осями координат, дотикається прямої $x-y-2=0$ в точці $M(4;2)$. Складіть рівняння цієї гіперболи.

28. Напишіть рівняння еліпса з півосями $a = 2, b = 1,$ для якого прямі $x + y - 1 = 0$ й $x - y + 1 = 0$ суть відповідно більша й мала осі.

29. Еліпс при русі по площині дотикається двох взаємно перпендикулярних прямих. Яку лінію описує центр еліпса?

30. Напишіть рівняння рівносторонньої гіперболи, знаючи її фокус $(1;1)$ і асимптоту $x + y = 0$.

31. Визначте фокус параболи $y = x^2 - 4x + 5$.

32. Напишіть рівняння параболи, знаючи її директрису $x - y + 8 = 0$ й фокус $F_1(-1,-2)$.

33. Складіть рівняння лінії другого порядку, знаючи її фокус $F(1,1)$, директрису $x + 2y - 1 = 0$ й ексцентриситет $\varepsilon = \sqrt{5}$.

34. Складіть рівняння лінії другого порядку, знаючи її фокуси $F_1(1,1)$ і $F_2(-2,-2)$ й одну з її директрис $x + y - 1 = 0$.

35. Складіть рівняння лінії другого порядку, знаючи її фокус $F(-3,-7)$, центр $(-1,-3)$ і одну з директрис $x + 2y - 4 = 0$.

6 ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ КРИВОЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Алгебраїчною кривою другого порядку на площині називається множина всіх точок площини, координати яких задовольняють рівнянню:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \tag{6.1}$$

Вираз $f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ називається *квадратичною частиною*, $2a_{13}x + 2a_{23}y$ – *лінійною частиною*, a_{33} – *вільним членом* рівняння.

Ліву частину рівняння (6.1) позначимо $F(x, y)$. Параметри точок перетину прямої $x = x_0 + lt,\ y = y_0 + mt$ з кривою (6.1) можна знайти з рівняння:

$$At^2 + 2Bt + C = 0, \tag{6.2}$$

де $A = a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2$, $B = \frac{1}{2}\left(lF_x(x_0, y_0) + mF_y(x_0, y_0)\right)$, $F_x = \frac{\partial F}{\partial x}$, $F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$, $C = F(x_0, y_0)$.

Вектор $\overline{(l,m)}$ називається *вектором асимптотичного напряму* відносно кривої другого порядку, якщо $A = 0$. Дослідження рівняння $A = a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0$ приводить до наступних висновків: кількість асимптотичних напрямів відносно кривої залежить від числа $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $a_{12} = a_{21}$. Крива другого порядку, для якої $\delta > 0$, називається кривою *еліптичного типу*, вона має два асимптотичні напрями. Умова $\delta < 0$ визначає криву *гіперболічного типу*, вона має два асимптотичні напрями. При $\delta = 0$ маємо криву *параболічного типу*, відносно неї існує один асимптотичний напрямок.

Точка M називається *центром кривої* другого порядку, якщо при центральній симетрії відносно точки M крива переходить в себе.

Теорема. Для того, щоб точка $M(x_0, y_0)$ була центром кривої другого порядку необхідно і достатньо, щоб виконувались умови:

$$\begin{cases} F_x(x_0, y_0) = 0, \\ F_y(x_0, y_0) = 0, \end{cases} \text{тобто} \begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0, \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0. \end{cases} \tag{6.3}$$

При цьому, якщо система (6.3) має єдиний розв'язок, то крива називається центральною. Тому ознакою центральної кривої є $\delta \neq 0$.

Користуючись канонічними рівняннями кривих другого порядку неважко з'ясувати, що еліпс і гіпербола – центральні криві, парабола не має центра, дві паралельні прямі мають нескінченну кількість центрів — пряму центрів (див. таблицю).

Таблиця 6.1 – Криві другого порядку та їх центри

Крива	**Канонічне рівняння**	**Центри кривої**
еліпс	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\begin{cases}\frac{1}{a^2}x=0\\ \frac{1}{b^2}y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$
точка	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	
порожня множина	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$	
гіперболи	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1$	$\begin{cases}\frac{1}{a^2}x=0\\ \frac{1}{b^2}y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$
перетинні прямі	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	
парабола	$y^2=2px,\quad p\neq 0$	$\begin{cases}p=0\\ y=0\end{cases}$
паралельні прямі	$y^2=a^2,\ a>0$	$\begin{cases}0=0\\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow y=0$
здвоєна пряма	$y^2=0$	
порожня множина	$y^2=-a^2,\ a>0$	

Пряма, що проходить через центр кривої та має асимптотичний напрямок, називається *асимптотою* кривої другого порядку. Отже, гіпербола має дві асимптоти, а еліпс та парабола жодної. З рівняння (6.2) випливає, що умова $B^2-AC=0$ є умовою дотику прямої та кривої другого порядку, при цьому, якщо точка (x_0,y_0) належить кривій, то умова дотику приймає вид $B=0$. *Дотична пряма* у цьому випадку має вигляд:

$$F_x(x_0,y_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0. \tag{6.4}$$

Діаметром лінії другого порядку називається геометричне місце середин всіх хорд, паралельних даному вектору не асимптотичного напряму.

Теорема. Геометричним місцем середин всіх хорд лінії другого порядку, що мають не асимптотичний напрямок, є пряма лінія, що визначається рівнянням:

$$lF_x+mF_y=0, \tag{6.5}$$

де l,m – координати напрямного вектору паралельних хорд. Рівняння (6.5) називають рівнянням діаметру, спряженого даному напрямку $\overline{(l,m)}$. Два вектори $\overline{p}_1(l_1,m_1)$ та $\overline{p}_2(l_2,m_2)$ є *спряженими* відносно кривої другого порядку, якщо виконується умова: $a_{11}l_1l_2+a_{12}(l_1m_2+l_2m_1)+a_{22}m_1m_2=0$. Паралельні цим векторам діаметри називаються спряженими діаметрами кривої. Напрямок вектора називається *головним* відносно кривої другого порядку, заданої в декартовій системі координат, якщо він спряжений перпендикулярному йому напрямку. Рівняння, з якого можна знайти кутові коефіцієнти головних напрямків: $a_{12}k^2 + (a_{11} - a_{22})k - a_{12} = 0$. Діаметри, що мають головні напрямки відносно кривої другого порядку, називаються *головними діаметрами*.

Ортогональним інваріантом загального рівняння (6.1) лінії другого порядку відносно перетворення декартової системи координат назвемо функцію $I(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33})$, значення якої не змінюється при переході до нової декартової системи координат.

Теорема. Три функції

$I_1 = a_{11} + a_{22} = S$ – слід матриці $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$,

$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \delta$ – малий визначник лінії (6.1),

$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta$ – великий визначник лінії (6.1)

є *ортогональними інваріантами* лінії другого порядку (6.1).

Вираз: $K_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ називається *напівінваріантом* (семиінваріантом) лінії (6.1). Рівняння $\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$ називається характеристичним рівнянням лінії (6.1).

Теорема. Корені λ_1, λ_2 характеристичного рівняння кривої другого порядку завжди дійсні.

Таблиця 6.2 – Визначення типу кривої за допомогою інваріантів.

Тип	Зведене рівняння	Інваріанти	Канонічне рівняння	Назва
1	2	3	4	5
Еліптичний	$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0$	$I_2 > 0, I_1 \cdot I_3 < 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	Еліпс
		$I_2 > 0, I_1 \cdot I_3 > 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	Уявний еліпс
		$I_2 > 0, I_3 = 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	Вироджений еліпс (пара уявних прямих, що перетинаються в дійсній точці)

Продовження таблиці 6.2

1	2	3	4	5
гіперболічний		$I_2 < 0, I_3 \neq 0$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	Гіпербола
		$I_2 < 0, I_3 = 0$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	Пара дійсних прямих, що перетинаються
Параболічний	$I_1 y^2 \pm 2\sqrt{-\frac{I_3}{I_1}} \cdot x = 0$	$I_2 = 0, I_3 \neq 0$	$y^2 = 2px$	Парабола
		$I_2 = 0, I_3 = 0$, $K_1 < 0$	$y^2 - b^2 = 0$	Пара дійсних паралельний прямих
	$I_1 y^2 + \frac{I_4}{I_1} = 0$	$I_2 = 0, I_3 = 0$, $K_1 > 0$	$y^2 + b^2 = 0$	Пара уявних паралельних прямих
		$I_2 = I_3 = K_1 = 0$	$y^2 = 0$	Пара дійсних прямих, що співпадають

Приклади розв'язування задач

1. Приведіть до канонічного виду рівняння й визначте вид кривої: $x^2 + 4y^2 + 4x - 8y - 8 = 0$.

Розв'язання:

Виділимо в даному рівнянні повні квадрати. Для цього перенесемо вільний член 8 вправо, додамо до обох частин рівняння 8 і згрупуємо доданки, виділяючи повні квадрати по кожній змінній: $\left(x^2 + 4x + 4\right) + 4\left(y^2 - 8y + 1\right) = 16$, звідки $(x+2)^2 + 4(y-1)^2 = 16$ або $\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$. Одержали рівняння еліпса із центром у точці $(-2;1)$ й півосями, що дорівнюють: $a = 4$ і $b = 2$.

2. Напишіть рівняння дотичних до кола $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 25 = 0$, проведених з: а) початку координат; б) із точки $(3;2)$ на лінії.

Розв'язання:

а) Усяка пряма, що проходить через початок координат, має рівняння $y = kx$. Треба підібрати кутовий коефіцієнт k так, щоб пряма $y = kx$ й дане коло мали дві точки перетину, що злилися. Розв'яжемо спільно обидва рівняння (виключаємо y):

$$x^2 + k^2x^2 - 10x - 4kx + 25 = 0$$

або

$$x^2\left(1 + k^2\right) - 2x(5 + 2k) + 25 = 0.$$

У випадку дотику корені цього рівняння повинні бути дійсні й рівні, тому складемо дискримінант і дорівняємо його до нуля:

$$4 \cdot (5 + 2k)^2 - 4 \cdot \left(1 + k^2\right) \cdot 25 = 0.$$

Коренями цього рівняння є числа: $k_1 = 0$ і $k_2 = \frac{20}{21}$. Тому рівняннями шуканих дотичних будуть: 1) $y = 0$; 2) $y = \frac{20}{21}x$ або $20x - 21y = 0$.

б) Рівняння дотичної до кола $x^2 + y^2 = r^2$ має вигляд $xx_0 + yy_0 = r^2$, де (x_0, y_0) – координати точки дотику.

Приведемо дане рівняння кола до канонічного виду, для цього виділимо повний квадрат по кожній змінній:

$$(x^2 - 5\cdot 2\cdot x + 25) + (y^2 - 2\cdot 2\cdot y + 4) - 4 = 0 \Rightarrow (x-5)^2 + (y-2)^2 = 4.$$

Рівняння дотичної в точці $(3;2)$ буде мати вигляд:

$$(x-5)(3-5) + (y-2)(2-2) = 4,$$

$$(x-5)(-2) = 4,$$

$$x = 3.$$

3. *Який вид прийме рівняння кривої $xy - 6x + 2y + 3 = 0$, якщо перенести початок координат у точку $O'(-2;6)$, не змінюючи напрямку осей координат?*

*Розв'язання***:**

Якщо, не змінюючи напрямку осей координат, перенести початок координат у будь-яку точку $O'(x'; y')$, то рівняння

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

перетвориться в наступне:

$$a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + 2F_{x'}X + 2F_{y'}Y + 2F' = 0,$$

$$\begin{cases} 2F' = a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2a_{13}x' + 2a_{23}y' + a_{33}, \\ 2F_{x'} = 2(a_{11}x' + a_{12}y' + 2a_{13}), \\ 2F_{y'} = 2(2a_{12}x' + a_{22}y' + a_{23}), \end{cases}$$

тобто коефіцієнти при старших членах не зміняться, а коефіцієнтами при перших ступенях координат будуть часткові похідні від лівої частини вихідного рівняння по відповідних до координат із заміною поточних координат координатами нового початку; вільний член представляє всю ліву частину вихідного рівняння, у якій зроблена та ж заміна.

Перенесемо початок координат у точку $O'(-2;6)$, тоді рівняння кривої $xy - 6x + 2y + 3 = 0$ буде мати вигляд $xy + 15 = 0$, тому що

$$\begin{cases} 2F' = x'y' - 6x' + 2y' + 3, \\ 2F_{x'} = y' - 6, \\ 2F_{y'} = x' + 2. \end{cases}$$

4. Зведіть до канонічного вигляду рівняння кривої другого порядку, використовуючи перетворення координат, а саме перетворення повороту та паралельного переносу: $5x^2 - 4\sqrt{2}xy + 3y^2 - 14 = 0$.

Розв'язання:

У загальному рівнянні кривої присутній член xy, тому виконаємо перетворення повороту. У вихідному рівнянні $a_{22}=3\neq a_{11}=5$, тому $tg2\varphi=\frac{2\cdot\left(-2\sqrt{2}\right)}{5-3}=-2\sqrt{2}$. Знайдемо $\sin\varphi$ та $\cos\varphi$, використовуючи формули: $tg2\varphi=\frac{2tg\varphi}{1-tg^2\varphi}$, $\sin\varphi=\frac{tg\varphi}{\pm\sqrt{1+tg^2\varphi}}$, $\cos\varphi=\frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2\varphi}}$. Отримаємо: $tg\varphi=\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \sqrt{2}\right\}$, а $\sin\varphi$ і $\cos\varphi$ візьмемо, наприклад, $\sin\varphi=\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Запишемо формули перетворення:

$$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\bar{x}-\bar{y}\sqrt{2}\right),\\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\bar{x}\sqrt{2}+\bar{y}\right),\end{cases}$$

за допомогою яких отримаємо рівняння кривої в новій системі координат:

$$3\bar{x}^2+21\bar{y}^2-42=0 \text{ або } \frac{\bar{x}^2}{14}+\frac{\bar{y}^2}{2}=1$$

– рівняння еліпса з центром в початку координат та півосями $\sqrt{14}$ та $\sqrt{2}$, при цьому системи координат пов'язані формулами: $\begin{cases} \bar{x}=\frac{x\sqrt{3}}{3}+\frac{y\sqrt{6}}{3},\\ \bar{y}=-\frac{x\sqrt{6}}{3}+\frac{y\sqrt{3}}{3}.\end{cases}$

5. Зведіть до канонічного вигляду рівняння кривої другого порядку, використовуючи теорію квадратичних форм:

$$5x^2-4\sqrt{2}xy+3y^2-14=0.$$

Розв'язання:

Випишемо матрицю старших членів:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -2\sqrt{2}\\ -2\sqrt{2} & 3\end{pmatrix}.$$

Знайдемо власні значення цієї матриці. Для цього складемо характеристичне рівняння та розв'яжемо його:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2\sqrt{2}\\ -2\sqrt{2} & 3-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

$$(3-\lambda)(5-\lambda)-8=0,$$

$$\lambda^2-8\lambda+7=0,$$

$$\lambda_1=1,\ \lambda_2=7.$$

Для знаходження перетворення координат, знайдемо власні вектори, відповідні знайденим власним значенням. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 3-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}_{\cdot\sqrt{2}+\mathrm{I}} \sim \begin{pmatrix} 4 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$4x_1 - 2\sqrt{2}x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}x_2.$$

Таким чином, для $\lambda_1 = 1$ власний вектор $\overline{a}_1 = c_1\left(\sqrt{2};\ 2\right)$, $c_1 = const \neq 0$, який після нормування буде: $\overline{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

При $\lambda_2 = 7$:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & -4 \end{pmatrix}_{-\mathrm{I}\cdot\sqrt{2}} \sim \begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$-2x_1 - 2\sqrt{2}x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{2}x_2.$$

Таким чином, для $\lambda_2 = 7$ власний вектор $\overline{a}_2 = c_2\left(-2;\ \sqrt{2}\right)$, $c_2 = const \neq 0$, який після нормування буде: $\overline{e}_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}};\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Можна перевірити, що отримані нормовані власні вектори попарно ортогональні ($\overline{e}_1 \cdot \overline{e}_2 = 0$), тому запишемо матрицю перетворення координат (вектори $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ розмістимо по стовпцях):

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Тоді формули перетворення координат матимуть вид:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q \cdot \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} \text{ або } \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}}\overline{x} - \frac{2}{\sqrt{6}}\overline{y}, \\ y = \frac{2}{\sqrt{6}}\overline{x} + \frac{1}{\sqrt{3}}\overline{y}. \end{cases}$$

Підставимо знайдені вирази у рівняння кривої, спростимо його. Отримаємо:

$$\overline{x}^2 + 7\overline{y}^2 - 42 = 0,$$

$$\frac{\bar{x}^2}{42}+\frac{\bar{y}^2}{6}=1 \text{ – еліпс.}$$

Тест для самоконтролю

1. Скільки існує центральних кривих другого порядку?

А. 2 **Б.** 4 **В.** 5 **Г.** 6

2. Яка з кривих не має центру?

А. $x^2+4y^2+4x-8y+2=0$ **Б.** $3x^2-y^2+4x+6y-2=0$

В. $y=2x^2-4x+1$ **Г.** $x^2+2x+1=0$

3. Вкажіть всі значення p, при яких крива $x^2+py^2-2x+1=0$ має більше двох центрів.

А. $p>0$ **Б.** $p=0$ **В.** $p<0$ **Г.** $p\in R$

4. Для якої кривої з наведених напрям $1:0$ є асимптотичним?

А. $2x^2+y^2-4x+2y=0$ **Б.** $x^2-2y^2+4x-3y=0$

В. $y=2x^2+3x-1$ **Г.** $y^2=4x-1$

5. Яка з наведених кривих не має асимптотичних напрямів?

А. $x^2-3y^2+2x-2y+1=0$ **Б.** $y^2=-x^2+3x-1$

В. $x^2+3y^2-2x+2y-1=0$ **Г.** $y^2=4$

6. Для кривої $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ асимптотичним є напрям …

А. 9:16 **Б.** $4:3$ **В.** $3:4$ **Г.** $1:0$

Відповіді: 1. А. 2. В. 3. Б. 4. Г. 5. Г. 6. Б.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Використовуючи паралельний перенос, з'ясуйте вид і розташування на координатній площині наступних ліній другого порядку:

1) $x^2+y^2-2x+6y-5=0;$
2) $x^2+4y^2+4x-8y-8=0;$
3) $x^2+2y^2+8x-4=0;$
4) $9x^2-y^2-18x-20y-316=0;$
5) $6x^2-5y^2+12x-10y-31=0;$
6) $x^2-4y^2+6x+5=0;$
7) $y^2-10x-2y-19=0;$
8) $y^2-6x+14y+49=0;$
9) $y^2+8x-16=0;$
10) $x^2-6x-4y+29=0;$

11) $2x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0;$

12) $6x^2 + 8y^2 + 3x - 4y + 1 = 0;$

13) $2x^2 + 9y^2 - 12x - 6y + 19 = 0;$

14) $3x^2 - 2y^2 + 6x + 4y + 1 = 0;$

15) $x^2 + x - 6 = 0;$

16) $y^2 - 5y + 11 = 0;$

17) $25x^2 - 30x + 9 = 0.$

2. Зведіть до канонічного вигляду рівняння кривої другого порядку, використовуючи перетворення координат, а саме перетворення повороту та паралельного переносу. Схематично побудуйте криву (якщо вона існує):

1) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 3 = 0$;

2) $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$;

3) $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$;

4) $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0$;

5) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$;

6) $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24x - 16y + 3 = 0$;

7) $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 160x + 120y + 425 = 0$;

8) $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 4x - 6y + 1 = 0$;

9) $19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38x + 6y + 29 = 0$;

10) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$.

3. Приведіть рівняння кривої до канонічного виду за допомогою теорії квадратичних форм, визначте її тип і схематично побудуйте:

1) $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 18 = 0$;

2) $x^2 + 2xy - y^2 - 8\sqrt{2} = 0$;

3) $4x^2 + 2\sqrt{6}xy + 3y^2 - 24 = 0$;

4) $5x^2 - 2\sqrt{45}xy + y^2 - 5 = 0$;

5) $6x^2 + 2\sqrt{5}xy + 2y^2 - 21 = 0$;

6) $7x^2 - 8xy + y^2 - 9 = 0$;

7) $3x^2 - 4\sqrt{6}xy + 5y^2 + 18 = 0$;

8) $2\sqrt{6}xy + 5y^2 + 6 = 0$;

9) $9x^2 + 8\sqrt{3}xy + 6y^2 - 36 = 0$;

10) $5x^2 + 12xy - 19 = 0$.

4. Визначте вид наступних ліній другого порядку:

1) $x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y - 1 = 0$;

2) $4x^2 - 4xy + y^2 - 8x + 6y - 2 = 0$;

3) $2xy - 4y^2 - 6x + 6y + 1 = 0$;

4) $x^2 - 4xy - y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$;

5) $x^2 - 2xy + 4y^2 - 2x - 2y - 4 = 0$;

6) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x - 8y = 0.$

5. Покажіть, що кожне з нижченаведених рівнянь визначає пари прямих, і знайдіть рівняння цих прямих (система координат афінна):

1) $2x^2 - 5xy - 12y^2 - x + 26y - 10 = 0$;

2) $3x^2 + xy - 2y^2 - 5x + 5y - 2 = 0$;

3) $4x^2 + 16xy - 15y^2 - 8x - 22y - 5 = 0$;

4) $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y - 4 = 0$.

6. Лінія другого порядку визначається рівнянням $x^2 - 2y + \lambda(y^2 - 2x) = 0$. Визначте тип лінії при кожному дійсному значенні параметра λ й опишіть її розташування щодо даної системи координат.

7. При якій необхідній і достатній умові рівняння $Ax^2 + By^2 + 2Cx + 2Dy + E = 0$ задає: 1) еліпс; 2) гіперболу? Система координат афінна.

8. Використовуючи метод обертань, визначте форму й розташування на площині наступних ліній другого порядку:

1) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$;

2) $xy + x + y = 0$;

3) $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$;

4) $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0$;

5) $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0$;

6) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$;

7) $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$;

8) $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 2x + 3y - 2 = 0$;

9) $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$;

10) $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x - 8y - 1 = 0$;

11) $6xy - 8y^2 + 12x - 26y - 11 = 0$;

12) $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$;

13) $2x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0$;

14) $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y - 7 = 0$.

9. Лінія другого порядку визначається рівнянням $x^2 + 2\lambda xy + y^2 + 1 = 0$. Визначте вид лінії при кожному дійсному значенні параметра λ й опишіть її розташування щодо даної системи координат.

7 ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Розглянемо загальне рівняння поверхні другого порядку Φ в довільній афінній декартовій системі координат $Oxyz$:

$$\begin{gathered} F(x,y,z)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+y^2+2a_{13}xz+2a_{23}yz+a_{33}z^2+ \\ +2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0. \end{gathered} \tag{7.1}$$

Квадратичною формою поверхні (7.1) називають функцію

$$\varphi(x,y,z)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+y^2+2a_{13}xz+2a_{23}yz+a_{33}z^2. \tag{7.2}$$

Нехай $A_\varphi=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ – матриця квадратичної форми (7.2), $rangA_\varphi=r$ – малий ранг поверхні (7.1), $det\,A_\varphi=\delta$ – малий визначник поверхні (7.1), $A_F=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$ – велика матриця поверхні (7.1), $rangA_F=R$ – великий ранг поверхні, $det\,A_F=\Delta$ – великий визначник поверхні (7.1). Матриці A_φ і A_F симетричні.

Теорема. Характеристичний многочлен $\chi(t)=det(A_\varphi-\lambda E)$ матриці A_φ квадратичної форми $\varphi(x,y,z)$ поверхні другого порядку (7.1), що задана в декартовій системі координат з репером $I=\{O,\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$, є ортогональним інваріантом.

Теорема. Величини

$$I_1=a_{11}+a_{22}+a_{33},\; I_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\; I_3=\delta,\; I_4=\Delta$$

є *ортогональними інваріантами поверхні* другого порядку.

Теорема. Малий та великий ранги поверхні другого порядку є її ортогональними інваріантами.

Теорема. Напівінваріанти (семиінваріанти)

$$K_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$K_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

поверхні другого порядку (7.1) є ортогональними інваріантами лише по відношенню до повороту системи координат.

Таблиця 7.1 – Визначення типу поверхні другого порядку за допомогою інваріантів.

Центральні поверхні $I_3 \neq 0$			
1	2	3	4
Зведене рівняння	Інваріанти	Канонічне рівняння	Назва
$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \frac{I_4}{I_3} = 0$	$I_2 > 0$, $I_1 \cdot I_3 > 0$ $I_4 < 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	Еліпсоїд
	$I_2 > 0$, $I_1 \cdot I_3 > 0$ $I_4 > 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$	Уявний еліпсоїд
	$I_2 > 0$, $I_1 \cdot I_3 > 0$ $I_4 = 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$	Уявний конус
	$I_2 \leq 0$, $I_1 \cdot I_3 \leq 0$ $I_4 = 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	Конус
	$I_2 \leq 0$, $I_1 \cdot I_3 \leq 0$ $I_4 < 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$	Двопорожнинний гіперболоїд
	$I_2 \leq 0$, $I_1 \cdot I_3 \leq 0$ $I_4 > 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	Однопорожнинний гіперболоїд
Нецентральні поверхні $I_3 = 0$			
Зведене рівняння	Інваріанти	Канонічне рівняння	Назва
$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 \pm 2\sqrt{\frac{I_4}{I_2}} \cdot z = 0$	$I_2 \neq 0$, $I_4 < 0$	$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$	Еліптичний параболоїд
	$I_2 \neq 0$, $I_4 > 0$	$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$	Гіперболічний параболоїд
$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{K_3}{I_2} = 0$	$I_2 > 0$, $I_1 \cdot K_3 < 0$ $I_4 = 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	Еліптичний циліндр
	$I_2 > 0$, $I_1 \cdot K_3 > 0$ $I_4 = 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	Уявний еліптичний циліндр
	$I_2 > 0$, $K_3 = 0$ $I_4 = 0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	Пара уявних площин, що перетинаються по дійсній прямій

Продовження таблиці 7.1

1	2	3	4
	$I_2 < 0$, $K_3 \neq 0$ $I_4 = 0$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	Гіперболічний циліндр
	$I_2 < 0$, $K_3 = 0$ $I_4 = 0$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	Пара дійсних площин, що перетинаються
$I_1 x^2 \pm 2\sqrt{-\frac{K_3}{I_1}} \cdot y = 0$	$I_2 = 0$, $K_3 \neq 0$ $I_4 = 0$	$y^2 = 2px$	Параболічний циліндр
$I_1 x^2 + \frac{K_2}{I_1} = 0$	$I_2 = 0$, $K_2 < 0$ $K_3 = 0$ $I_4 = 0$	$x^2 - a^2 = 0$	Пара дійсних паралельних площин
	$I_2 = 0$, $K_2 > 0$ $K_3 = 0$ $I_4 = 0$	$x^2 + a^2 = 0$	Пара уявних паралельних площин
$I_1 x^2 = 0$	$I_2 = 0$, $K_2 = 0$ $K_3 = 0$ $I_4 = 0$	$x^2 = 0$	Пара дійсних площин, що співпадають

Зовнішній вигляд основних поверхонь другого порядку можна з'ясувати, скориставшись допоміжною літературою [1-3].

Теорема. Довільна пряма або перетинає поверхню не більше, ніж у двох точках, або цілком належить цій поверхні.

Напрямок називається асимптотичним відносно поверхні другого порядку (7.1), якщо його напрямний вектор $\overline{p}(\alpha, \beta, \gamma)$ анулює квадратичну форму поверхні $\varphi(x, y, z)$, тобто $\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0$.

Теорема. Точка $M(x_0, y_0, z_0)$ є центром поверхні другого порядку (7.1) тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{cases} F_x(x_0, y_0, z_0) = 0, \\ F_y(x_0, y_0, z_0) = 0, \\ F_z(x_0, y_0, z_0) = 0. \end{cases} \tag{7.3}$$

Система (7.3) називається системою рівнянь центра. Вона має єдиний розв'язок, коли $\delta \neq 0$. Поверхня другого порядку (7.1) називається *центральною*, якщо вона має центр симетрії і притому лише один.

Теорема. Якщо малий ранг поверхні $r \leq 2$, то поверхня другого порядку (7.1) може: 1) не мати центрів, якщо система (7.3) не сумісна; 2) мати пряму центрів, якщо система (7.3) сумісна та містить два лінійно незалежних рівняння; 3) мати площину центрів, якщо $r=1$, тобто система (7.3) має одне лінійно незалежне рівняння.

Приклади розв'язування задач

1. Визначте вид поверхні другого порядку, заданої рівнянням $x^2+2y^2-2xy+4yz-4x+2y+12z=7$.

Розв'язання:

У цьому рівнянні коефіцієнт a_{11} при x^2 відмінний від нуля й дорівнює одиниці. Виділимо повний квадрат у групі доданків лівої частини, що містять змінну x:

$$x^2-2xy-4x=(x^2-2x(y+2)+(y+2)^2)-(y+2)^2=(x-y-2)^2-y^2-4y-4.$$

У результаті рівняння прийме вигляд:

$$(x-y-2)^2+y^2+4yz-2y+12z=11.$$

Застосуємо тепер аналогічну процедуру виділення повного квадрата по змінній y:

$$(x-y-2)^2+y^2+2y(2z-1)+(2z-1)^2-(2z-1)^2+12z=11 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-y-2)^2+(y+2z-1)^2-4z^2+16z=12$$

і потім по змінній z:

$$(x-y-2)^2+(y+2z-1)^2-4(z^2-4z+4)+16=12 \Leftrightarrow$$

$$(x-y-2)^2+(y+2z-1)^2-4(z-2)^2=-4 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{x-y}{2}-1\right)^2+\left(\frac{y+2z-1}{2}\right)^2-(z-2)^2=-1.$$

Перейдемо до нових координат за формулами:

$$x'=\frac{x-y}{2}-1,\ y'=\frac{y+2z-1}{2},\ z'=z-2.$$

Тоді рівняння поверхні прийме вид

$$(x')^2+(y')^2-(z')^2=-1,$$

з якого випливає, що вихідне рівняння задає двопорожнинний гіперболоїд.

2. Визначте вид поверхні другого порядку, заданої рівнянням $xy+yz+xz=0$.

Розв'язання:

Так як дане рівняння не містить доданків з x^2, y^2, z^2, то зробимо проміжну заміну змінних:

$$x=x_1+y_1,\ y=x_1-y_1,\ z=z_1.$$

У результаті цього рівняння прийме вид

$$(x_1-y_1)z_1+(x_1-y_1)z_1+(x_1+y_1)z_1=0 \Leftrightarrow x_1^2-y_1^2+2x_1z_1=0.$$

Виділимо повний квадрат по змінній x_1:

$$\left(x_1^2+2x_1z_1+z_1^2\right)-y_1^2-z_1^2=0 \Leftrightarrow (x_1+z_1)^2-y_1^2-z_1^2=0.$$

Уводячи нові змінні x', y', z' за формулами:

$$\begin{cases} x' = x_1 + z_1, \\ y' = y_1, \\ z' = z_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}y + z, \\ y' = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}y, \\ z' = z, \end{cases}$$

одержимо рівняння

$$(x')^2 + (y')^2 - (z')^2 = 0.$$

Отже, вихідне рівняння задає конус.

3. Визначте вид поверхні $z^2 = 3x + 4y + 15$.

Розв'язання:

Перетворення координат

$$x' = x,\ y' = 3x + 4y + 15,\ z' = z$$

приводить вихідне рівняння до рівняння

$$(z')^2 = y',$$

яке визначає параболічний циліндр.

4. Визначте вид і розташування поверхні, заданої в прямокутній декартовій системі координат рівнянням $2x^2 - 3y^2 - 3z^2 + 4x + 6z - 7 = 0$.

Розв'язання:

Вихідне рівняння не містить доданка з xz, тому тільки переносом початку координат можна звільнитися від змінних x і z в першому степені. Маємо

$$2\left(x^2 + 2x + 1\right) - 2 - 3y^2 - 3\left(z^2 - 2z + 1\right) + 3 - 7 = 0 \Leftrightarrow 2(x+1)^2 - 3y^2 - 3(z-1)^2 = 6.$$

Поклавши $x + 1 = z', y = y', z - 1 = x'$ одержимо рівняння

$$\frac{(x')^2}{2} + \frac{(y')^2}{2} - \frac{(z')^2}{3} = -1,$$

яке є канонічним рівнянням двопорожнинного гіперболоїда з півосями $a = b = \sqrt{2},\ c = \sqrt{3}$. Канонічна система координат цього гіперболоїда отримана переносом вихідної системи координат у точку $O'(-1, 0, 1)$. Ця точка є центром гіперболоїда.

5. Визначте вид і розташування поверхні, заданої в прямокутній декартовій системі координат рівнянням $3x^2 + 4y^2 - 12x + 8y + 16z = 0$.

Розв'язання:

Пропоноване рівняння не містить доданків з xy і z^2, тому тільки переносом початку координат можна звільнитися від змінних x, y у першому степені. Маємо

$$3(x-2)^2 + 4(y+1)^2 + 16(z-1) = 0.$$

Поклавши $x - 2 = x', y + 1 = y', z - 1 = z'$ одержимо рівняння

$$\frac{(x')^2}{8/3} + \frac{(y')^2}{2} = -2z',$$

яке визначає еліптичний параболоїд з вершиною в точці $O'(2,-1,1)$ для якого $a^2=\frac{8}{3}, b^2=2$. Напрямок осі параболоїда збігається з від'ємним напрямком осі Oz.

6. Визначте форму й розташування поверхні, заданої в прямокутній декартовій системі координат рівнянням $z^2=3x+4y+15$.

Розв'язання:

Для визначення розташування поверхні припустимі лише ортогональні перетворення координат, так що перетворення, розглянуте вище, тут не підходить.

Виконаємо поворот площини Oxy навколо осі Oz на кут φ: $cos\,\varphi=\frac{4}{5}, sin\,\varphi=\frac{3}{5}$. Формули перетворення координат будуть мати вигляд:

$$\begin{cases} x_1=\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y, \\ y_1=\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y, \\ z_1=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{4}{5}x_1-\frac{3}{5}y_1, \\ y=\frac{3}{5}x_1+\frac{4}{5}y_1, \\ z=z_1. \end{cases}$$

Звідси $3x+4y=5y_1$ й вихідне рівняння прийме вид $z_1^2=5(y_1+3)$. Поклавши $x_1=x', y_1+3=y', z_1=z'$, одержимо рівняння $(z')^2=5y'$ – рівняння параболічного циліндра, причому $x'=\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y, y'=\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y+3, z'=z$.

Для всіх точок циліндра $y'\geq 0$, тобто циліндр лежить у додатному півпросторі щодо площини $3x+4y+15=0$. Твірні циліндра паралельні осі x', тобто прямій $3x+4y+15=0, z=0$. Напрямною циліндра служить парабола з параметром $p=2/5$, що лежить у площині $4x-3y=0$, з вершиною $(-9/5;-12/5;0)$ й фокусом $(-21/20;-7/5;0)$.

7. Визначте вид і розташування поверхні, заданої в прямокутній декартовій системі координат рівнянням $z^2=2xy$.

Розв'язання:

Виконуючи поворот площини Oxy навколо осі Oz на кут $\frac{\pi}{4}$

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y'), y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y'), z=z',$$

приведемо рівняння до виду

$$(z')^2=(x')^2-(y')^2.$$

Це канонічне рівняння конуса обертання з вершиною у початку координат. Віссю конуса є вісь Ox', тобто бісектриса кута xOy. Твірні конуса нахилені до осі конуса під кутом $\frac{\pi}{4}$.

8. Визначте форму й розташування в просторі поверхні, заданої в прямокутній декартовій системі координат рівнянням $x^2+2y^2+z^2-xz+x-12y+z=-1$.

Розв'язання:

У рівнянні присутній лише доданок з xz (доданки з xy і yz відсутні), тому виконаємо поворот навколо осі Oy на кут, рівний $\frac{\pi}{4}$. Формули перетворення в цьому випадку мають вигляд $x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1-z_1)$, $y=y_1$, $z=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1+z_1)$.

Підставляючи ці співвідношення в умову, одержимо $\frac{1}{2}(x_1-z_1)^2+2y_1^2+\frac{1}{2}(x_1+z_1)^2-\frac{1}{2}\left(x_1^2-z_1^2\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1-z_1)-12y_1+\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1+z_1)=-1$, тобто $x_1^2+4y_1^2+3z_1^2+2\sqrt{2x_1}-24y_1=-2$.

Виділимо тепер повні квадрати щодо змінних x_1 і y_1:

$$\left(x_1+\sqrt{2}\right)^2+4(y_1-3)^2+3z_1^2=36.$$

Остання рівність показує, що при переносі початку системи координат $Ox_1y_1z_1$, тобто в результаті перетворення

$$x'=x_1+\sqrt{2},\, y'=y_1-3,\, z'=z_1,$$

отримаємо канонічне рівняння еліпсоїда

$$(x')^2+4(y')^2+3(z')^2=36 \Leftrightarrow \frac{(x')^2}{36}+\frac{(y')^2}{9}+\frac{(z')^2}{12}=1.$$

Таким чином, вихідне рівняння задає еліпсоїд із центром $x'=y'=z'=0$ $\Leftrightarrow x_1=-\sqrt{2}, y_1=3, z_1=0 \Leftrightarrow x=-1, y=3, z=-1$; півосями $a=6, b=3, c=2\sqrt{3}$ й осями симетрії:

$$y'=z'=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y_1=3, \\ z_1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3, \\ z-x=0; \end{cases}$$

$$x'=z'=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-\sqrt{2}, \\ z_1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1, \\ z=-1; \end{cases}$$

$$x'=y'=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-\sqrt{2}, \\ y_1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=-2, \\ y=3. \end{cases}$$

Відзначимо, що вид, форму й розташування в просторі поверхні другого порядку, заданої загальним рівнянням, можна (так само, як для лінії другого порядку) визначити безпосередньо за допомогою інваріантів.

9. Визначте вид лінії перетину конуса $x^2+y^2=z^2$ площиною $3x-y+z+12=0.$

Розв'язання:

Записавши рівняння площини у параметричній формі $x=-4+u+4v,$ $y=3u,$ $z=-3v,$ одержимо вирази просторових координат x,y,z точки площини через її площинні координати u,v в системі координат $\{M_0;\bar{e}_1,\bar{e}_2\}$, де $M_0(-4{,}0{,}0)$, $\bar{e}_1=(1;3;0)$, $\bar{e}_2=(4;0;-3)$. Підставивши параметричні рівняння площини в рівняння конуса, одержимо рівняння лінії перетину конуса з площиною в площинній системі координат:

$$16+u^2+16-8u-32v+8uv+9v^2 \iff 10u^2+7v^2+8uv-8u-32v+16=0.$$

Застосуємо до цього рівняння лінії другого порядку теорію інваріантів. Одержимо

$$I_1=17>0,\ I_2=\begin{vmatrix}10 & 4\\ 4 & 7\end{vmatrix}>0,\ K_3=\begin{vmatrix}10 & 4 & -4\\ 4 & 7 & -16\\ -4 & -16 & 16\end{vmatrix}<0.$$

Умови $I_2>0,$ $I_2\cdot K_3<0$ означають, що лінією перетину конуса площиною є еліпс.

Зауваження. Дана площина не проходить через вершину конуса й перетинає всі його твірні. Можна показати, що в перетині конуса такими площинами завжди лежить еліпс.

10. Визначте вид перетину конуса $x^2+y^2=z^2$ площиною $x+y+1=0$.

Розв'язання:

Запишемо параметричні рівняння площини:

$$x=-v,\ \ y=u,\ \ z=-1+v\ .$$

Вони виражають просторові координати x,y,z точки площини через її площинні координати u,v в системі координат $\{M_0;\bar{e}_1,\bar{e}_2\}$, де $M_0(0{,}0{,}-1)$, $\bar{e}_1=\{0{,}1{,}0\}$, $\bar{e}_2=\{-1{,}0{,}1\}$. Підставивши ці вирази в рівняння конуса, одержимо рівняння лінії перетину конуса із площиною: $v^2+u^2=1-2v+v^2$ $\iff u^2=-2\left(v-\dfrac{1}{2}\right)$, яке визначає параболу.

Зауваження: Дана площина не проходить через вершину конуса й паралельна тільки одній твірній $(x=t,y=0,z=-t)$. Можна показати, що в перетині конуса такими площинами завжди лежить парабола.

11. Визначте вид лінії перетину конуса $x^2+y^2=z^2$ площиною $x-4=0$.

Розв'язання:

Підставивши параметричні рівняння $x=4,$ $y=u+v, z=u-v$ площини в рівняння конуса, одержимо рівняння лінії перетину конуса із площиною: $uv+16=0$ у площинній системі координат $\{M_0;\bar{e}_1,\bar{e}_2\}$, де $M_0(4{,}0{,}4)$, $\bar{e}_1=\{0{,}1{,}1\}$, $\bar{e}_2=\{0{,}1{,}-1\}$. Отримане рівняння визначає гіперболу.

Зауваження. Дана площина не проходить через початок координат і паралельна двом твірним конуса. Можна показати, що в перетині конуса такими площинами завжди лежить гіпербола.

12. З'ясуйте, по якій лінії перетинаються циліндр $x^2+2y^2=1$ і площина $y-z=2$. Система координат прямокутна.

Розв'язання:

Виберемо ортонормований базис площини з її напрямних векторів, наприклад, з векторів $\bar{e}_1=\{1,0,1\}$, $\bar{e}_2=\left\{0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$ і доповнимо його до ортонормованого базису всього простору вектором $\bar{e}_3=\left\{0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. Тоді нові координати x',y',z' точки простору будуть пов'язані зі старими координатами x,y,z формулами $x=x'$, $y=\frac{1}{\sqrt{2}}(y'+z')$, $z=\frac{1}{\sqrt{2}}(y'+z')$.

Звідси випливає, що координати точки шуканого перетину в новій системі координат повинні задовольняти співвідношенням:

$$\begin{cases}(x')^2+2\dfrac{(y'+z')^2}{2}=1,\\ \sqrt{2}z'=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x')+\left(y'+\sqrt{2}\right)^2=1,\\ z'=\sqrt{2}.\end{cases}$$

Таким чином, шуканим перетином є коло радіуса 1 із центром у точці $x'=0,\ y'=-\sqrt{2}$, $z'=\sqrt{2}$ або, що те ж саме, $x=0,y=0,z=0$.

Тест для самоконтролю

1. Яке з наступних співвідношень визначає коло у просторі?

А. $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=3,\\ y=3;\end{cases}$ **Б.** $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ 2x+3y+4z=0;\end{cases}$ **В.** $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ x^2+y^2+z^2=1;\end{cases}$ **Г.** $x^2+y^2=1$.

2. Яке з наступних рівнянь визначає гіперболічний параболоїд?

А. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ **Б.** $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ **В.** $\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=2px$ **Г.** $\frac{x^2+z^2}{a^2}=2py$

3. Яке з наступних рівнянь визначає еліптичний параболоїд?

А. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ **Б.** $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ **В.** $\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=2px$ **Г.** $\frac{x^2+z^2}{a^2}=2py$

4. Рівняння $x^2+z^2+4x-2z+1=0$ визначає у просторі…

А. коло **Б.** еліптичний циліндр **В.** гіперболічний циліндр **Г.** кулю

5. Яку фігуру визначає система рівнянь $\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 4z, \\ y = 2? \end{cases}$

А. параболу **Б.** еліпс **В.** гіперболу **Г.** дві прямі

6. Яку фігуру визначає система рівнянь $\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 4z^2, \\ y = 2? \end{cases}$

А. параболу **Б.** еліпс **В.** гіперболу **Г.** дві прямі

7. Скільки площин симетрії має фігура в просторі, яка задана рівнянням $xy = 1$?

А. 2 **Б.** 4 **В.** ні однієї **Г.** нескінченно багато

8. Які з трьох систем рівнянь визначають однакові фігури

$1.\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ y^2 = 0: \end{cases}$ $2.\begin{cases} x^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4; \end{cases}$ $3.\begin{cases} x^2 + z^2 = 4, \\ x = 0? \end{cases}$

А. 1, 2, 3 **Б.** 2, 3 **В.** 1, 3 **Г.** 1, 2

9. Яка з наступних поверхонь не має центра симетрії:

А. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} - \dfrac{z^2}{5} = 0$ **Б.** $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = z$ **В.** $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{9} = -1$ **Г.** $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1$**?**

10. Яка з наступних поверхонь має безліч площин симетрії:

А. $\dfrac{(x-1)^2}{16} + \dfrac{(y+2)^2}{9} + \dfrac{(z-1)^2}{4} = 1$; **Б.** $\dfrac{(x+2)^2}{9} + \dfrac{(y-1)^2}{16} - \dfrac{z^2}{4} = 1$;

В. $\dfrac{(x+3)^2}{16} + \dfrac{(y-2)^2}{16} = 2z$; **Г.** $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 0$ **?**

Відповіді: 1. В. 2. В. 3. Г. 4. Б. 5. А. 6. В. 7. А. 8. Г. 9. В. 10. Г.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Складіть рівняння кругового конуса, що проходить через усі три координатні осі.

2. Складіть рівняння кругового конуса, що дотикається площин Oxz і Oyz по прямим Ox і Oy відповідно.

3. Напрямна циліндра дана рівняннями $x = y^2 + z^2, x = 2z$, твірна перпендикулярна до площини напрямної. Складіть рівняння циліндра.

4. Знайдіть прямі, що проходять через початок координат і цілком лежать на поверхні $y^2+3xy+2yz-xz+3x+2y=0$. Система координат афінна.
5. Знайдіть ті прямолінійні твірні поверхні $x^2+y^2+5z^2-6xy+2yz-2xz-12=0$, які паралельні прямій $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z}{-1}$. Система координат афінна.
6. Знайдіть лінію перетину поверхні:
   1) $3x^2+4y^2-5z^2+2xy-3yz+5x-8=0$ з площиною Oxy;
   2) $x^2+3z^2+2xy+4xz+2yz+5x-z=1$ з площиною Oyz;
   3) $x^2+y^2-2xy+5yz+xz-x+3y-z=0$ з площиною Oxz.

Система координат афінна.
7. Визначте вид лінії перетину поверхні $x^2+2y^2+z^2+4xy-2xz-4yz+2x-6z=0$ з площиною $x-z=0$ й дослідіть її розташування в просторі.
8. Користуючись методом Лагранжа, покажіть, що наступні рівняння в загальній афінній системі координат визначають поверхні, що розпадаються на пари площин, і знайдіть ці площини:
   1) $y^2+2xy+4xz+2yz-4x-2z=0$;
   2) $x^2+4y^2+9z^2-4xy+6xz-12yz+2y-3z-6=0$;
   3) $3x^2-4y^2+3z^2+4xy+10xz-4yz+6x-20y-14z-24=0$;
   4) $5x^2+4y^2+3z^2+9xy+8xz+7yz+7x+6y+5z+2=0$.
9. Визначте вид поверхні, користуючись методом Лагранжа (система координат афінна):
   1) $4x^2+6y^2+4z^2+4xz-8y-4z+3=0$;
   2) $x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-2x+6y-10z=0$;
   3) $x^2+y^2-3z^2-2xy-6xz-6yz+2x+2y+4z=0$;
   4) $x^2-2y^2+z^2+4xy-8xz-4yz-14x-4y+14z+16=0$;
   5) $2x^2+y^2-2z^2-2xy-2yz+x-4y-3z+2=0$;
   6) $x^2-2y^2+z^2+4xy-10xz+4yz+x+y-z=0$;
   7) $2x^2+y^2+2z^2-2xy-2yz+4x-2y=0$;
   8) $x^2+y^2+4z^2+2xy+4xz+4yz-6z+1=0$;
   9) $4xy+2x+4y-6z-3=0$;
   10) $xy+xz+yz+2x+2y-2z=0$.
10. Визначте вид і розташування поверхні, користуючись переносом системи координат:
   1) $x^2+4y^2+9z^2-6x+8y-36z=0$;
   2) $4x^2-y^2-z^2+32x-12z+44=0$;
   3) $3x^2-y^2+3z^2-18x+10y+12z+14=0$;

4) $6y^2+6z^2+5x+6y+30z-11=0$;

5) $z=2x^2-4y^2-6x+8y+1$;

6) $z=x^2+3y^2-6y+1$;

7) $x^2+2y^2-3z^2+2x+4y-6z=0$;

8) $x^2+4y^2-z^2-10x-16y+6z+16=0$;

9) $3x^2+3y^2+3z^2-6x+4y-1=0$;

10) $3x^2+3y^2-6x+4y-1=0$;

11) $4x^2-y^2-4x+4y-3=0$.

11. Визначте вид поверхні і її розташування щодо системи координат, користуючись поворотом системи координат навколо однієї з її осей:

1) $z^2=2xy$; 2) $z=xy$; 3) $z^2=3x+4y$; 4) $z^2=x^2+2xy+y^2+1$.

12. Визначте вид поверхні і її розташування щодо системи координат, користуючись переносом і поворотом системи координат навколо однієї з її осей:

1) $x^2+4y^2+5z^2+4xy+4z=0$; 2) $x^2+2x+3y+4z+5=0$;

3) $z^2=x^2+2xy+y^2+1$; 4) $2xy+z^2-2z+1=0$;

5) $x^2+y^2-z^2+2xy+2z-1=0$; 6) $2xy+2x+2y+2z-1=0$;

7) $x^2+y^2+2z^2+2xy+4z=0$; 8) $x^2+y^2+z^2-2yz-2x-y+1=0$;

9) $z^2-2xy-4x-2y+2z-3=0$.

13. Визначте форму й розташування в просторі геометричного місця точок, рівновіддалених від осі Oz і від прямої $y=z, x=1$, що не лежить із віссю Oz в одній площині.

14. Знайдіть рівняння циліндра з твірною, паралельною осі Oz, й напрямною – колом $x^2+y^2+z^2=3$.

15. Твірна циліндра паралельна осі Oz, його напрямна – коло $x^2+y^2=2z$, $x^2+y^2+z^2=8$. Знайдіть рівняння циліндра.

16. Знайдіть рівняння конуса з вершиною в точці $O(0,0,0)$ й напрямною – колом $x^2+y^2+z^2=1,\ x+y+z=1$.

17. Напишіть рівняння конуса з вершиною $(2,3,6)$, знаючи, що площина Oxy перетинає його по еліпсу, осі якого паралельні осям Ox і Oy, причому еліпс дотикається цих осей координат.

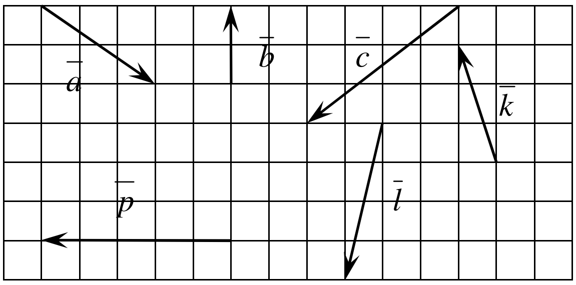
18. Напишіть рівняння поверхні, що утворюється при обертанні прямої $y=kx+b, z=0$ навколо осі Ox.

19. Пряма $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{6}$ обертається навколо осі Ox. Знайдіть рівняння описаної нею поверхні.

20. Напишіть рівняння кругового циліндра радіуса r, віссю якого є пряма $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$.

21. Напишіть рівняння кругового циліндра, що проходить через точку $(1,-2,1)$, віссю якого служить пряма $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{-2}$.

ПРИКЛАД КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ



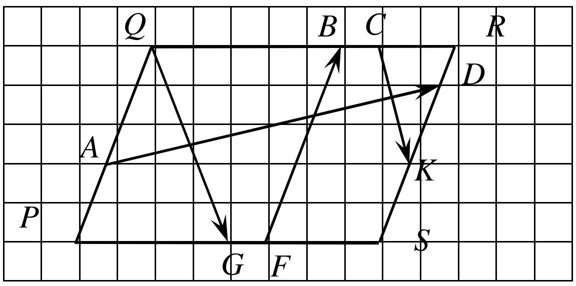
Побудуйте вектори:

1. $\overline{f} = \overline{a} + \overline{b}$

2. $\overline{m} = \overline{p} - \overline{c}$

3. $\overline{r} = \frac{2}{5}\overline{p} - 2\overline{k}$

4. $\overline{t} = -\frac{1}{2}\overline{c} + \frac{3}{2}\overline{l}$



Знайдіть координати векторів за базисом $\left\{S, \overline{SP}, \overline{SR}\right\}$

5. $\overline{AD}$

6. $\overline{QG}$

7. $\overline{FB}$

8. $\overline{CK}$

Відповіді до завдань 5-8 оберіть із запропонованих варіантів

1) $(0, -1)$ 2) $\left(-1, \frac{2}{5}\right)$ 3) $(-1, 0)$ 4) $\left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{5}\right)$ 5) $\left(1, \frac{3}{5}\right)$ 6) $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ 7) $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{3}{5}\right)$

8) $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ 9) $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ 10) $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$ 11) $\left(-1, -\frac{3}{5}\right)$ 12) $(0, 1)$ 13) $\left(\frac{3}{5}, -\frac{1}{4}\right)$ 14) $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$

Дано точки $A(1; 3; -2)$, $B(0; -3; 1)$, $C(-2; 0; 4)$, $D(1; 1; -1)$. Знайдіть:

9. координати векторів: $\overline{a} = \overline{AB}$, $\overline{b} = \overline{AC}$, $\overline{c} = \overline{AD}$; у відповідь запишіть найменший за довжиною;

10. $\overline{b} \cdot (\overline{a} - 2\overline{c})$;

11. площу трикутника ABD;

12. $\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot 2\overline{c} + (\overline{b} \times \overline{a}) \cdot \overline{b}$;

13. рівняння площини BCD;

14. рівняння висоти h_A тетраедра $ABCD$;

15. рівняння прямої, що паралельна прямій AC та проходить через точку D.

Визначте ексцентриситети наступних кривих другого порядку:

16. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1$ **17.** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ **18.** $y^2 = 16x$ **19.** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{24} = -1$ **20.** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 0$

Варіанти відповідей до завдань 16-20:

1) $\frac{3}{5}$	2) $\frac{5}{7}$	3) 1	4) визначити не можливо	5) $\frac{7}{5}$	6) $\frac{5}{3}$	7) $\frac{3}{4}$

21. Визначте тип кривої $x^2 - 2xy + y^2 - x - 2y + 3 = 0$ та схематично побудуйте її на площині.

22. Визначте тип поверхні $3x^2 + 2y^2 + 4yz - 2xz - 4x - 8z - 8 = 0$ та схематично побудуйте її.

23. Складіть рівняння гіперболи, знаючи її фокуси $F_1(-2,0)$ та $F_2(0,2)$ та довжину дійсної осі $2a = 1$.

24. Складіть рівняння параболи, якщо вона симетрична відносно осі Oy, проходить через початок координат та точку $M(6;-2)$.

25. Складіть рівняння дотичних, що проведені з початку координат до кола $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 25 = 0$.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Означення вектора. Лінійні операції над векторами: додавання, віднімання, множення вектора на число.
2. Означення радіус-вектора. Ділення відрізка у даному відношенні.
3. Лінійна комбінація векторів: тривіальна, нетривіальна, нульова, ненульова.
4. Лінійна залежність векторів. Колінеарні, компланарні вектори.
5. Поняття базису векторного простору. Розкладання вектору за базисом. Координати вектора у базисі.
6. Скалярний та векторний добутки двох векторів. Їх властивості. Геометричний зміст. Правила обчислення скалярного та векторного добутків в ПДСК.
7. Мішаний та подвійний векторний добутки трьох векторів. Їх властивості. Геометричний зміст. Правило обчислення мішаного добутку в ПДСК.
8. Орієнтація трійки векторів. Орієнтація реперу, системи координат.
9. Афінна і декартова системи координат. Перетворення афінних та декартових систем координат: поворот, паралельне перенесення.
10. Поняття алгебраїчної лінії. Рівняння лінії на площині.
11. Рівняння прямої на площині: за двома точками; канонічне; загальне; за точкою та нормальним вектором; з кутовим коефіцієнтом; у відрізках на осях; нормальне; параметричні. Зв’язок між ними. Кут між прямими на площині. Відстань від точки до прямої на площині. Напрямний та нормальний вектори прямої.
12. Взаємне розташування прямих на площині.
13. Рівняння площини: за трьома точками; за двома точками та паралельним вектором; за точкою та двома паралельними векторами; за точкою та нормальним вектором; загальне; у відрізках на осях; нормальне; параметричні. Зв'язок між ними. Кут між площинами. Відстань між паралельними площинами та від точки до площини. Нормальний вектор та напрямний бівектор площини.
14. Рівняння прямої у просторі: за двома точками; канонічне; неявне; параметричні.
15. Взаємне розташування прямих та площин у просторі.
16. Пучок, в’язка прямих на площині та в просторі.
17. Пучок, в’язка площин у просторі.
18. Означення еліпсу. Канонічне рівняння еліпсу. Формули ексцентриситету, директрис. Рівняння дотичних до еліпса, що проходять: через точку еліпса; через довільну точку площини.
19. Означення гіперболи. Канонічне рівняння гіперболи. Формули ексцентриситету, директрис, асимптот. Рівняння дотичних до гіперболи, що проходять: через точку гіперболи; через довільну точку площини.
20. Означення параболи. Канонічне рівняння параболи. Рівняння дотичних до параболи, що проходять: через точку параболи; через довільну точку площини.

21. Загальне рівняння кривої другого порядку. Зведення рівняння кривої до канонічного виду (паралельне перенесення, поворот). Інваріанти кривих.
22. Поверхні другого порядку. Рівняння поверхонь.
23. Поняття циліндричної та конічної поверхонь.
24. Загальне рівняння поверхні другого порядку. Зведення рівняння поверхні до канонічного виду. Інваріанти поверхонь.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ
(N – номер студента за списком академічної групи,
$p=(-1)^{pik}$)

$$\alpha=\left[\frac{N}{2}\right]-5,\ \beta=(-1)^N\cdot\left[\frac{N}{3}\right]+4,\ \gamma=\left[\frac{2N}{3}\right]+(-1)^N\cdot 2,$$

$$\eta=\left[\frac{N}{2}\right]-2,\ \mu=(-1)^N\cdot\left[\frac{N}{4}\right]-3.$$

1. Дано довільний шестикутник $ABCDEF$: $\overline{AB}=\overline{a},\ \overline{BC}=\overline{b},\ \overline{CD}=\overline{c},\ \overline{DE}=\overline{d}$, $\overline{EF}=\overline{e}$, $\overline{FA}=\bar{f}$. Побудуйте вектори:

1. $\alpha\overline{a}-p\cdot\gamma\overline{c}-\eta\overline{d}+p\cdot\mu\bar{f}$;
2. $\gamma\overline{b}+2\cdot p\cdot\mu\overline{e}-\alpha\bar{f}$.

2. Дано тетраедр $OABC$. Точки L_1, L_2, L_3; M_1, M_2, M_3; N_1, N_2, N_3 – поділяють ребра OA, OB, OC відповідно на чотири рівні частини. У репері $\left\{O, N\cdot\overline{OL_1}, p\cdot\overline{OM_2}, -5p\cdot\overline{ON_3}\right\}$ знайдіть координати:

1. всіх вершин тетраедра;
2. центрів тяжіння його граней;
3. вектора $\frac{1}{N}\overline{CB}$.
4. У якому відношенні відрізок CL_1 ділить відрізок AN_2?
5. Знайдіть лінійну залежність векторів $\overline{L_2N_1}, \overline{CM_1}, \overline{AC}$ та $\overline{KL_1}$, де K – центр тяжіння грані ABC.

3. Знайдіть лінійну залежність векторів $\overline{a}=(1,-1,5)$, $\overline{b}=(0,4,-pN)$, $\overline{c}=(1,-8,N)$, $\overline{d}=(pN,-1,-2)$. Знайдіть координати вектора $\overline{b}$ у базисах $\{\overline{a}, \overline{c}, \overline{d}\}$ та $\{\overline{c}, \overline{a}, \overline{d}\}$.

4. Дано вектори $\overline{a}=\alpha\overline{m}+p\beta\overline{n}$ й $\overline{b}=\gamma\overline{m}-p\eta\overline{n}$, де $|\overline{m}|=|\alpha-\beta|$, $|\overline{n}|=|2\mu-3\eta|$, $\angle(\overline{m},\overline{n})=\left|\left[\frac{N}{5}\right]-1\right|\cdot\frac{\pi}{3}$. Знайдіть:

1. $(\eta\overline{a}+\mu\overline{b})\cdot\left((-1)^N\cdot\overline{a}+\gamma\overline{b}\right)$;
2. $cos\left(\widehat{\overline{a},\overline{b}}\right)$;
3. $\left|(\eta\overline{a}+\mu\overline{b})\times\left((-1)^N\cdot\overline{a}+\gamma\overline{b}\right)\right|$;
4. площу трикутника, побудованого на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$.

5. За координатами точок A, B та C для зазначених векторів визначте:

1. скалярний добуток векторів $\overline{a}=p\alpha\overline{AB}+\beta\overline{BC}$ і $\overline{b}=-p\mu\overline{AC}+\eta\overline{CB}$;
2. довжину вектора $\overline{a}$;

3. координати точки M, що ділить направлений відрізок AB у відношенні $\alpha:\beta$;
4. проекцію вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$;
5. векторну проекцію вектора $\overline{a}+\overline{b}$ на вектор $\overline{a}-\overline{b}$;
6. чи ортогональні вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$?
7. чи колінеарні вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$?
8. чи компланарні вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}=(0,1,2)$?

Варіанти завдань:

1. $A(1,-2,3), B(0,-1,2), C(3,-4,5)$.
2. $A(0,-3,6), B(-12,-3,-3), C(-9,-3,-6)$.
3. $A(3,3,-1), B(5,5,-2), C(4,1,1)$.
4. $A(-1,2,-3), B(3,4,-6), C(1,1,-1)$.
5. $A(-4,-2,0), B(-1,-2,4), C(3,-2,1)$.
6. $A(5,3,-1), B(5,2,0), C(6,4,-1)$.
7. $A(-3,-7,-5), B(0,-1,-2), C(2,3,0)$.
8. $A(2,-4,6), B(0,-2,4), C(6,-8,10)$.
9. $A(0,1,-2), B(3,1,2), C(4,1,1)$.
10. $A(3,3,-1), B(1,5,-2), C(4,1,1)$.
11. $A(2,1,-1), B(6,-1,-4), C(4,2,1)$.
12. $A(-1,-2,1), B(-4,-2,5), C(-8,-2,2)$.
13. $A(6,2,-3), B(6,3,-2), C(7,3,-3)$.
14. $A(0,0,4), B(-3,-6,1), C(-5,-10,-1)$.
15. $A(2,-8,-1), B(4,-6,0), C(-2,-5,-1)$.
16. $A(1,0,-3), B(-6,0,-2), C(-1,-6,3)$.
17. $A(-2,0,-4), B(-1,7,1), C(4,-8,-4)$.
18. $A(12,4,5), B(-5,-3,2), C(-2,-6,-3)$.
19. $A(1,2,0), B(3,0,-3), C(5,2,6)$.
20. $A(-4,2,6), B(2,-3,0), C(-10,5,8)$.

6. Обчисліть об'єм тетраедра з вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 і його висоту, опущену з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

1. $A_1(1,3,6),\ A_2(2,2,1),\ A_3(-1,0,1),\ A_4(-4,6,-3)$.
2. $A_1(-4,2,6),\ A_2(2,-3,0),\ A_3(-10,5,8),\ A_4(-5,2,-4)$.
3. $A_1(7,2,4),\ A_2(7,-1,-2),\ A_3(3,3,1),\ A_4(-4,2,1)$.
4. $A_1(2,1,4),\ A_2(-1,5,-2),\ A_3(-7,3,2),\ A_4(-6,-3,6)$.
5. $A_1(-1,-5,2),\ A_2(-6,0,-3),\ A_3(3,6,-3),\ A_4(-10,6,7)$.
6. $A_1(0,-1,-1),\ A_2(-2,3,5),\ A_3(-1,-5,-9),\ A_4(-1,-6,3)$.
7. $A_1(5,2,0),\ A_2(2,5,0),\ A_3(1,2,4),\ A_4(-1,1,1)$.
8. $A_1(2,-1,-2),\ A_2(1,2,1),\ A_3(5,0,-6),\ A_4(-10,9,-7)$.

9. $A_1(-2,0,-4)$, $A_2(-1,7,1)$, $A_3(4,-8,-4)$, $A_4(1,-4,6)$.
10. $A_1(14,4,5)$, $A_2(-5,-3,2)$, $A_3(-2,-6,-3)$, $A_4(-2,2,-1)$.
11. $A_1(1,2,0)$, $A_2(3,0,-3)$, $A_3(5,2,6)$, $A_4(8,4,-9)$.
12. $A_1(2,-1,2)$, $A_2(1,2,-1)$, $A_3(3,2,1)$, $A_4(-4,2,5)$.
13. $A_1(1,1,2)$, $A_2(-1,1,3)$, $A_3(2,-2,4)$, $A_4(-1,0,-2)$.
14. $A_1(2,3,1)$, $A_2(4,1,-2)$, $A_3(6,3,7)$, $A_4(7,5,-3)$.
15. $A_1(1,1,-1)$, $A_2(2,3,1)$, $A_3(3,2,1)$, $A_4(5,9,-8)$.
16. $A_1(-5,-3,-4)$, $A_2(1,4,6)$, $A_3(3,2,-2)$, $A_4(8,-2,4)$.
17. $A_1(3,4,2)$, $A_2(-2,3,-5)$, $A_3(4,-3,6)$, $A_4(6,-5,3)$.
18. $A_1(-4,6,3)$, $A_2(3,-5,1)$, $A_3(2,6,-4)$, $A_4(2,4,-5)$.
19. $A_1(7,5,8)$, $A_2(-4,-5,3)$, $A_3(2,-3,5)$, $A_4(5,1,4)$.
20. $A_1(3,-2,6)$, $A_2(-6,-2,3)$, $A_3(1,1,-4)$, $A_4(4,6,-7)$.

7. Дано вершини трикутника $A(\alpha,2,-\beta)$, $B(N,\gamma,-1)$, $C(\mu,-2,1)$. Визначте величини внутрішніх кутів, довжини сторін, довжини всіх висот і площу трикутника ABC.

8. Спростіть вираз: $[N\overline{a}+\overline{b}+\overline{c},\,\overline{c}]+[\overline{a}+\eta\overline{b}+\overline{c},\,\overline{b}]+\left[\overline{b}-p\dfrac{N}{\eta}\overline{c},\,\overline{a}\right]$.

9. Визначте, при яких значеннях λ і ν вектор $\lambda N\overline{i}+3\overline{j}+\nu\overline{k}$ буде колінеарний вектору $\left[\overline{a}_1,p\dfrac{N}{\mu}\overline{a}_2\right]$, якщо $\overline{a}_1=(N,-2p,-\alpha)$, $\overline{a}_2=(2\mu,-N,2)$.

10. Якій умові повинні задовольняти вектори $\overline{b}_1$ та $\overline{b}_2$, щоб вектори $\left(N\overline{b}_1+\alpha\overline{b}_2\right)$ та $\left(\overline{b}_1-\dfrac{1}{N}\overline{b}_2\right)$ були колінеарні?

11. Обчисліть об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{p}=N\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$, $\overline{q}=\overline{a}-\beta\overline{b}+\overline{c}$, $\overline{r}=\overline{a}+\overline{b}-(N-\mu)\overline{c}$, якщо $\overline{a}=(1,\gamma,5)$, $\overline{b}=(0,4,N)$, $\overline{c}=(\eta,-8,N)$.

12. Доведіть тотожність: $\left([N\overline{a},\overline{b}],[\overline{b},p\overline{c}],[p\overline{c},N\overline{a}]\right)=\left(N\overline{a},\overline{b},p\overline{c}\right)^2$.

13. Дано чотири точки: $A(22-N,N,10-N)$, $B(-N,-N-1,1-N)$, $C(2,3,-4)$, $D(0,0,N)$. Знайдіть:
1. рівняння прямих AB, AD, BD, BC;
2. рівняння площин ABC, ABD;
3. рівняння перпендикуляра h_D, опущеного з точки D на площину ABC, довжину висоти h_D;
4. косинус кута між прямими AB та AD;
5. синус кута між прямою AD і площиною ABC;
6. косинус кута між площинами ABC та ABD;
7. рівняння прямої, що проходить через точку C перпендикулярно площині ABD;

8. рівняння площини, що проходить через точку D перпендикулярно прямій BD.

14. Розв'яжіть задачі:

1. Знайдіть величини відрізків, що відтинаються на осях координат площиною, що проходить через точку $M(-2,\ 7,\ 3)$ паралельно площині $x-4y+5z-1=0$.
2. Складіть рівняння площини, що проходить через середину відрізка M_1M_2 перпендикулярно до цього відрізка, якщо $M_1(1,5,6)$, $M_1(-1,7,10)$.
3. Складіть рівняння площини, що проходить через точку $A(2,\ -3,\ 5)$ паралельно площині Oxy.
4. Складіть рівняння площини, що проходить через вісь Ox і точку $A(2,5,-1)$.
5. Складіть рівняння площини, що проходить через точки $A(2,5,-1)$, $B(-3,1,3)$ паралельно осі Oy.
6. Складіть рівняння площини, що проходить через точку $A(3,4,0)$ та пряму $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{2}$.
7. Складіть рівняння площини, що проходить через дві паралельні прямі $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$ та $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$.
8. Складіть рівняння площини в «відрізках на осях», якщо вона проходить через точку $M(6,-10,1)$ та відтинає на осі Ox відрізок $a=-3$, а на осі Oz – відрізок $c=2$.
9. Складіть рівняння площини, що проходить через точку $A(2,3,-4)$ паралельно двом векторам $\overline{a}=(4,1,-1)$ і $\overline{b}=(2,-1,2)$.
10. Складіть рівняння площини, що проходить через точки $A(1,1,0)$, $B(2,-1,-1)$ перпендикулярно до площини $5x+2y+3z-7=0$.
11. Складіть рівняння площини, що проходить через початок координат перпендикулярно двом площинам $2x-3y+z-1=0$ і $x-y+5z+3=0$.
12. Складіть рівняння площини, що проходить через точки $A(3,-1,2)$, $B(2,1,4)$ паралельно вектору $\overline{a}=(5,-2,-1)$.
13. Складіть рівняння площини, що проходить через початок координат перпендикулярно до вектора $\overline{AB}$, якщо $A(5,-2,3)$, $B(1,-3,5)$.
14. Знайдіть величини відрізків, що відтинаються на осях координат площиною, яка проходить через точку $M(2,-3,3)$) паралельно площині $3x+y-3z=0$.
15. Складіть рівняння площини, що проходить через точку $M(1,-1,2)$ перпендикулярно до відрізка M_1M_2, якщо $M_1(3,3,-4)$, $M_2(-1,2,-3)$.

16. Складіть загальне рівняння площини, що проходить через точку $A(3,-4,1)$ паралельно координатній площині Oxz.
17. Складіть рівняння площини, що проходить через вісь Oy і точку $A(2,5,-1)$.
18. Складіть рівняння площини, що проходить через точки $M(1,2,3)$ та $N(-3,4,-5)$ паралельно осі Oz.
19. Складіть рівняння площини, що проходить через точку $A(2,-3,-4)$ та відтинає на осях координат рівні ненульові відрізки.
20. Складіть рівняння площини, що проходить через точки $A(2,3,-1)$ та $B(1,1,4)$ перпендикулярно до площини $x-4y+3z+2=0$.

15. Розв'яжіть задачі:

1. Складіть рівняння площини, що проходить через дві паралельні прямі $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$ та $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$.
2. Знайдіть відстань від точки $M(2,0,-0{,}5)$ до площини $4x-4y+2z+17=0$.
3. Знайдіть проекцію точки $M(4,-3,1)$ на площину $x-2y-z-15=0$.
4. Визначте, при якому значенні B площини $x-4y+z-1=0$ та $2x+By+10z-3=0$ будуть перпендикулярні.
5. При яких значеннях n і A пряма $\frac{x}{3}=\frac{y-5}{n}=\frac{z+5}{6}$ перпендикулярна до площини $Ax+2y-2z-7=0$?
6. Визначте, при якому значенні C площини $3x-5y+Cz-3=0$ і $x-3y+2z+5=0$ будуть перпендикулярні.
7. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $M(1,-3,3)$ і утворює з осями координат кути, що дорівнюють відповідно 60°, 45° і 120°.
8. При якому значенні n пряма $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{n}=\frac{z}{1}$ паралельна прямій $\begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y-5z-8=0. \end{cases}$
9. Знайдіть проекцію точки $P(3,1,-1)$ на площину $x+2y+3z-30=0$.
10. При якому значенні C площини $3x-5y+Cz-3=0$ й $x+3y+2z+5=0$ перпендикулярні.
11. При якому значенні A площина $Ax+3y-5z+1=0$ паралельна прямій $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{1}$?
12. Складіть рівняння площини, що проходить через точку $M(2,3,-1)$ і пряму $x=t-3,\ y=2t+5,\ z=-3t+1$.

13. Складіть рівняння прямої, що проходить через початок координат паралельно прямій $x = 2t + 5$, $y = -3t + 1$, $z = -7t - 4$.
14. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $M(2, -5,3)$ паралельно прямій $\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0, \\ 5x + 4y - z + 7 = 0. \end{cases}$
15. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $M(2, -3,4)$ перпендикулярно до прямих $\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{1}$ і $\frac{x+4}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{-3}$
16. При яких значеннях A та B площина $Ax + By + 6z - 7 = 0$ перпендикулярна прямій $\frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z+1}{3}$?
17. Покажіть, що прямі $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3}$ та $3x - y + 2z - 6 = 0,$ $2x + 3y - 8z + 3 = 0$ перпендикулярні.
18. При якому значенні p прямі $x = 2t + 5, y = -t + 2, z = pt - 7$ та $x + 3y + z + 2 = 0,\ x - y - 3z - 2 = 0$ паралельні?
19. При яких значеннях B і D пряма $x - 2y + z - 9 = 0, 3x + By + z + D = 0$ лежить у площині Oxy?
20. Складіть канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $M(1, -5, 3)$ перпендикулярно до прямих $x = 3t + 1, y = -t - 5, z = 2t + 3$ і $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-1}$.

16. Дано координати вершин ΔABC: $A(N, 10 - N)$, $B(-p\alpha - 1, 1 - \beta)$, $C(3, -4p)$. Знайдіть:
1. рівняння всіх сторін ΔABC;
2. рівняння медіани m_A;
3. рівняння висоти h_B, опущеної з вершини B, та її довжину;
4. точку перетину медіани m_A та висоти h_B;
5. рівняння бісектриси l_C;
6. косинус кута між прямими AB та AC;
7. рівняння прямої, що проходить через вершину C паралельно прямій AB;
8. відстань від точки C до прямої AB.

17. Розв'яжіть задачі:
1. Знайдіть рівняння прямої, що проходить через точку перетину прямих $3x - 2y - 7 = 0$ і $x + 3y - 6 = 0$ та відтинає на осі абсцис відрізок, що дорівнює 3.
2. Знайдіть проекцію точки $A(-8, 12)$ на пряму, що проходить через точки $B(2, -3)$ і $C(-5, 1)$.

3. Дано дві вершини трикутника ABC: $A(-4, 4)$, $B(4, -12)$ і точка $M(4, 2)$ перетину його висот. Знайдіть координати вершини C.
4. Знайдіть рівняння прямої, що відтинає на осі ординат відрізок довжини 2 та проходить паралельно прямій $2y - x = 3$.
5. Дано рівняння висот трикутника ABC: $2x - 3y + 1 = 0$, $x + 2y + 1 = 0$ і координати його вершини $A(2, 3)$. Знайдіть рівняння сторін AB і AC трикутника.
6. Запишіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(3, 1)$ перпендикулярно до прямої BC, якщо $B(2, 5)$, $C(1, 0)$.
7. Знайдіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(-2, 1)$ паралельно прямій MN, якщо $M(-3, -2)$, $N(1, 6)$.
8. Знайдіть точку, симетричну точці $M(2, -1)$ відносно прямої $x - 2y + 3 = 0$.
9. Дано рівняння двох сторін паралелограма $x - 2y = 0$, $x - y - 1 = 0$ і точка перетину його діагоналей $M(3, -1)$. Знайдіть рівняння двох інших сторін.
10. Запишіть рівняння прямих, що проходять через точку $A(-1, 1)$ під кутом $45°$ до прямої $2x + 3y = 6$.
11. Відомі рівняння сторони AB трикутника ABC: $4x + y = 12$, його висот BH: $5x - 4y = 12$ і AM: $x + y = 6$. Знайдіть рівняння двох інших сторін трикутника ABC.
12. Дано дві вершини трикутника ABC: $A(-6, 2)$, $B(2, -2)$ і точка перетину його висот $H(1, 2)$. Знайдіть координати точки M перетину сторони AC і висоти BH.
13. Відомі рівняння двох сторін ромба $2x - 5y - 1 = 0$ і $2x - 5y - 34 = 0$ та рівняння однієї з його діагоналей $x + 3y - 6 = 0$. Знайдіть рівняння другої діагоналі.
14. Обчисліть координати точки перетину перпендикулярів, проведених через середини сторін трикутника, вершинами якого служать точки $A(2, 3)$, $B(0, -3)$, $C(6, -3)$.
15. Складіть рівняння висоти, проведеної з вершини A трикутника ABC, знаючи рівняння його сторін: AB: $-2x - y - 3 = 0$, AC: $-x + 5y - 7 = 0$, BC $-3x - 2y + 13 = 0$.
16. Складіть рівняння прямої, що проходить через початок координат та точку перетину прямих $2x + 5y - 8 = 0$ і $2x + 3y + 4 = 0$.
17. Знайдіть рівняння перпендикулярів, що проведені до прямої $3x + 5y - 15 = 0$ через точки її перетину з осями координат.
18. Запишіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(-2,3)$ та складає кут 30° з віссю Ox.

19. Через точку перетину прямих $2x-5y-1=0$ та $x+4y-7=0$ проведіть пряму, що ділить відрізок між точками $A(4,-3)$ і $B(-1,2)$ у відношенні $\lambda = 2/3$.

20. Відомі рівняння двох сторін ромба $2x-5y-1=0$ і $2x-5y-34=0$ та рівняння одної з його діагоналей $x+3y-6=0$. Знайдіть рівняння другої діагоналі.

18. Складіть канонічні рівняння: а) еліпса; б) гіперболи; в) параболи (A, B – точки, що лежать на кривій, F – фокус, a – більша (дійсна) піввісь, b – мала (уявна) піввісь, ε – ексцентриситет, $y=\pm kx$ – рівняння асимптот гіперболи, D – директриса кривої, $2c$ – фокальна відстань).

№	Завдання а)	Завдання б)	Завдання в)
1.	$b=15$, $F(-10, 0)$	$a=13$, $\varepsilon=14/13$	D: $x=-4$
2.	$b=2$, $F(4\sqrt{2}, 0)$	$a=7$, $\varepsilon=\sqrt{85}/7$	D: $x=5$
3.	$A(3, 0)$, $B(2, \sqrt{5}/3)$	$k=3/4$, $\varepsilon=5/4$	D: $y=-2$
4.	$\varepsilon=\sqrt{21}/5$, $A(-5, 0)$	$A(\sqrt{80}, 3)$, $B(4\sqrt{6}, 3\sqrt{2})$	D: $y=1$
5.	$2a=22$, $\varepsilon=\sqrt{57}/11$	$k=2/3$, $2c=10\sqrt{13}$	вісь симетрії Ox, $A(27, 9)$
6.	$b=\sqrt{15}$, $\varepsilon=\sqrt{10}/25$	$k=3/4$, $2a=16$	вісь симетрії Ox, $A(4, -8)$
7.	$a=4$, $F(3, 0)$	$b=2\sqrt{10}$, $F(-11, 0)$	D: $x=-2$
8.	$b=4$, $F(9, 0)$	$a=5$, $\varepsilon=7/5$	D: $x=6$
9.	$A(0, \sqrt{3})$, $B(\sqrt{14/3}, 1)$	$k=\sqrt{21}/10$, $\varepsilon=11/10$	D: $y=-4$
10.	$\varepsilon=7/8$, $A(8, 0)$	$A(3, -\sqrt{3/5})$, $B(\sqrt{13/5}, 6)$	D: $y=4$
11.	$2a=24$, $\varepsilon=\sqrt{22}/6$	$k=\sqrt{2/3}$, $2c=10$	вісь симетрії Ox, $A(-7, -7)$
12.	$b=2$, $\varepsilon=5\sqrt{29}/29$	$k=12/13$, $2a=26$	вісь симетрії Ox, $A(-5,15)$
13.	$a=6$, $F(-4, 0)$	$b=3$, $F(7, 0)$	D: $x=-7$
14.	$b=7$, $F(5, 0)$	$a=11$, $\varepsilon=12/11$	D: $x=10$
15.	$A(-\sqrt{17/3}, 1/3)$, $B(\sqrt{21}/2, 1/2)$	$k=1/2$, $\varepsilon=\sqrt{5}/2$	D: $y=-1$
16.	$\varepsilon=3/5$, $A(0,8)$	$A(\sqrt{6},0)$, $B(-2\sqrt{2},1)$	D: $y=9$
17.	$2a=22$, $\varepsilon=10/11$	$k=\sqrt{11}/5$, $2c=12$	вісь симетрії Ox, $A(-7,5)$
18.	$b=5$, $\varepsilon=12/13$	$k=1/3$, $2a=6$	вісь симетрії Oy, $A(-9,6)$
19.	$a=9$, $F=(7,0)$	$b=6$, $F(12,0)$	D: $x=-1/4$
20.	$b=5$, $F=(-10,0)$	$a=9$, $\varepsilon=4/3$	D: $x=12$

19. Запишіть рівняння кривої з центром у початку координат, якщо відомо, що один з її фокусів має координати $F(3\alpha, -2\beta)$, а ексцентриситет $\varepsilon=\eta+4$.

20. Складіть рівняння параболи, знаючи рівняння її директриси $x - y + N = 0$ та фокуса $F(N/2,\ N/2)$.

21. Запишіть рівняння кола з центром у точці A, що проходить через указані точки.

1. Вершини гіперболи $12x^2 - 13y^2 = 156, A(0,-2)$.
2. Вершини гіперболи $4x^2 - 9y^2 = 36, A(0,4)$.
3. Фокуси гіперболи $24y^2 - 25x^2 = 600, A(0,-8)$.
4. Фокуси еліпса $9x^2 + 25y^2 = 1, A(0,6)$.
5. Фокуси еліпса $3x^2 + 4y^2 = 12, A$ – його верхня вершина.
6. Фокуси гіперболи $4x^2 - 5y^2 = 80, A(0,-4)$.
7. Фокуси еліпса $16x^2 + 41y^2 = 656, A$ – його нижня вершина.
8. Фокуси гіперболи $5x^2 - 11y^2 = 55, A(0,5)$.
9. $B(1,4)$, A – вершина параболи $y^2 = (x-4)/3$.
10. Лівий фокус еліпса $3x^2 + 7y^2 = 21, A(-1,-3)$.
11. Ліву вершину гіперболи $5x^2 - 9y^2 = 45, A(0,-6)$.
12. Фокуси еліпса $24x^2 + 25y^2 = 600, A$ – його верхня вершина.
13. Праву вершину гіперболи $3x^2 - 16y^2 = 48, A(1,3)$.
14. Лівий фокус гіперболи $7x^2 - 9y^2 = 63, A(-1,-2)$.
15. $B(2,-5)$, A – вершина параболи $x^2 = -2(y+1)$.
16. Правий фокус еліпса $x^2 + 4y^2 = 12, A(2,-7)$.
17. Праву вершину гіперболи $40x^2 - 81y^2 = 3240, A(-2,5)$.
18. Фокуси еліпса $x^2 + 10y^2 = 90, A$ – його нижня вершина.
19. Праву вершину гіперболи $3x^2 - 25y^2 = 75, A(-5,-2)$.
20. Лівий фокус еліпса $13x^2 + 49y^2 = 837, A(1,8)$.

22. Складіть рівняння лінії, кожна точка M якої задовольняє вказаним умовам.

1. Відстоїть від прямої $x = -6$ на відстань у два рази більшу, ніж від точки $A(1,3)$.
2. Відстоїть від прямої $x = -2$ на відстань у два рази більшу, ніж від точки $A(4,0)$.
3. Відстоїть від прямої $y = -2$ на відстань у три рази більшу, ніж від точки $A(5,0)$.
4. Відношення відстаней від точки M до точок $A(2,3)$ та $B(-1,2)$ дорівнює $3/4$.
5. Сума квадратів відстаней від точки M до точок $A(4,0)$ та $B(-2,2)$ дорівнює 28.

6. Відстоїть від точки $A(1,0)$ на відстань у п'ять разів меншу, ніж від прямої $x = 8$.
7. Відстоїть від точки $A(4,0)$ на відстань у чотири рази більшу, ніж від точки $B(-2,-1)$.
8. Відстоїть від прямої $x = -5$ на відстань у три рази більшу, ніж від точки $A(6,1)$.
9. Відстоїть від прямої $y = 7$ на відстань у п'ять разів більшу, ніж від точки $A(4,-3)$.
10. Відношення відстаней від точки M до точок $A(-3,5)$ та $B(4,2)$ дорівнює $1/4$.
11. Сума квадратів відстаней від точки M до точок $A(-5,-1)$ та $B(3,2)$ дорівнює 40,5.
12. Відстоїть від точки $A(-3,3)$ на відстань у три рази більшу, ніж від точки $B(5,1)$.
13. Відстоїть від прямої $x = 8$ на відстань у два рази більшу, ніж від точки $A(-1,7)$.
14. Відстоїть від прямої $x = 9$ на відстань у чотири рази меншу, ніж від точки $A(-1,2)$.
15. Відношення відстаней від точки M до точок $A(2,-4)$ та $B(3,5)$ дорівнює $2/3$.
16. Сума квадратів відстаней від точки M до точок $A(-3,3)$ та $B(4,1)$ дорівнює 31.
17. Відстоїть від точки $A(0,-5)$ на відстань у два рази меншу, ніж від прямої $x = 3$.
18. Відстоїть від точки $A(4,-2)$ на відстань у два рази меншу, ніж від точки $B(1,6)$.
19. Відстоїть від прямої $x = -7$ на відстань у три рази меншу, ніж від точки $A(1,4)$.
20. Відношення відстаней від точки M до точок $A(3,-2)$ та $B(4,6)$ дорівнює $3/5$.

23. Зведіть до канонічного виду рівняння кривих *а,б* (поверхні *в*) та схематично їх побудуйте:

1. $(\alpha+1)x^2 - (10-\beta)y^2 + 8x + 25y - \gamma = 0$;
2. $(\alpha+1)x^2 - (10-\beta)y^2 + Nxy = 0$;
3. $(\alpha+1)x^2 + (10-\beta)y^2 + Nz^2 + 6x + 4y + 2z - k = 0$.

24. Визначте вид поверхонь та схематично їх побудуйте:

1. а) $4x^2 - y^2 - 16z^2 + 16 = 0$; б) $x^2 + z = 0$.
2. а) $3x^2 + y^2 + 9z^2 - 9 = 0$; б) $x^2 + y^2 - 2z = 0$.
3. а) $-5x^2 + 10y^2 - z^2 + 20 = 0$; б) $y^2 + 4z^2 = 5x^2$.

4. а) $4x^2-8y^2+z^2+24=0$; б) $x^2-y=-9z^2$.

5. а) $x^2-6y^2+z^2=0$; б) $7x^2-3y^2-z^2=21$.

6. а) $z=8-x^2-4y^2$; б) $4x^2+9y^2+36z^2=72$.

7. а) $4x^2+6y^2-24z^2=96$; б) $y^2+8z^2=20x^2$.

8. а) $4x^2-5y^2-5z^2+40=0$; б) $y=5x^2+3z^2$.

9. а) $x^2=8\left(y^2+z^2\right)$; б) $2x^2+3y^2-z^2=18$.

10.а) $5z^2+2y^2=10x$; б) $4z^2-3y^2-5x^2+60=0$.

11.а) $x^2-7y^2-14z^2-21=0$; б) $2y=x^2+4z^2$.

12.а) $6x^2-y^2+3z^2-12=0$; б) $8y^2+2z^2=x$.

13.а) $-16x^2+y^2+4z^2-32=0$; б) $6x^2+y^2-3z^2=0$.

14.а) $5x^2-y^2-15z^2+15=0$; б) $x^2+3z=0$.

15.а) $6x^2+y^2+6z^2-18=0$; б) $3x^2+y^2-3z=0$.

16.а) $-7x^2+14y^2-z^2+21=0$; б) $y^2+2z^2=6x^2$.

17.а) $-3x^2+6y^2-z^2-18=0$; б) $x^2-2y=-z^2$.

18.а) $4x^2-6y^2+3z^2=0$; б) $4x^2-y^2-3z^2=12$.

19.а) $z=4-x^2-y^2$; б) $3x^2+12y^2+4z^2=48$.

20.а) $4x^2+5y^2-10z^2=60$; б) $7y^2+z^2=14x^2$.

ВІДПОВІДІ ТА РОЗВ'ЯЗАННЯ

1

1. $\overline{CE}=\overline{a}-2\overline{b}$, $\overline{AE}=-\overline{a}-\overline{b}$, $\overline{FB}=-\overline{a}+2\overline{b}$. **4.** $\overline{MB}=-\frac{1}{2}\overline{BA}-\frac{1}{2}\overline{BD}$, $\overline{PA}=\overline{BA}-\frac{1}{3}\overline{BC}-\frac{2}{3}\overline{BD}$, $\overline{QB}=-\frac{2}{3}\overline{BC}-\frac{1}{3}\overline{BD}$, $\overline{NQ}=\frac{1}{6}\overline{BC}+\frac{1}{3}\overline{BD}$. **6.** $\overline{AA_1}=-3\overline{a}+\overline{b}$, $\overline{BB_2}=\frac{3}{2}\overline{a}+\overline{b}$, $\overline{CC_2}=\overline{a}-2\overline{b}$, $\overline{B_1C_2}=-\frac{5}{4}\overline{a}-\overline{b}$, $\overline{B_3A_1}=-\frac{3}{4}\overline{a}-\frac{1}{2}\overline{b}$, $\overline{BB_3}=\frac{3}{4}\overline{a}+\frac{7}{4}\overline{b}$. **8.** $\overline{AB}=\frac{4}{3}\overline{AK}-\frac{2}{3}\overline{AL}$**,** $\overline{AD}=-\frac{2}{3}\overline{AK}+\frac{4}{3}\overline{AL}$**,** $\overline{CA}=-\frac{2}{3}\left(\overline{AK}+\overline{AL}\right)$**,** $\overline{LK}=\overline{AK}-\overline{AL}$**.** **9.** Нехай O – точка перетину медіан трикутника. Тоді $\overline{AA_1}+\overline{BB_1}+\overline{CC_1}=3\overline{OA_1}-\frac{3}{2}\overline{OB}-\frac{3}{2}\overline{OC}=3\overline{OA_1}-\frac{3}{2}\left(\overline{OB}+\overline{OC}\right)=$

$=3\overline{OA_1}-\frac{3}{2}\cdot 2\overline{OA_1}=\overline{0}$. Доведено. **10.** З одного боку $\overline{M_1M_2}=\overline{M_1A_1}+\overline{A_1A_2}+\overline{A_2M_2}$, а з іншого $\overline{M_1M_2}=\overline{M_1B_1}+\overline{B_1B_2}+\overline{B_2M_2}$. Додамо ці дві рівності: $2\overline{M_1M_2}=\left(\overline{M_1A_1}+\overline{M_1B_1}\right)+\overline{A_1A_2}+\overline{B_1B_2}+\left(\overline{A_2M_2}+\overline{B_2M_2}\right)=\overline{0}+\overline{A_1A_2}+\overline{B_1B_2}+\overline{0}=$

$=\overline{A_1A_2}+\overline{B_1B_2}$. Отже, $\overline{M_1M_2}=\frac{1}{2}\left(\overline{A_1A_2}+\overline{B_1B_2}\right)$. Доведено. **11.** Вказівка. Доведіть, що $\overline{A_1B_1}=\overline{D_1C_1}$. **12.** Вказівка. Доведіть, що існує таке λ, що $\overline{r}_M=\frac{\overline{r}_N+\lambda\overline{r}_B}{1+\lambda}$. **15.** а) $\overline{KL}=\frac{3}{4}\overline{AD}+\frac{2}{3}\overline{AB}$, $\overline{AK}=\frac{1}{4}\overline{AD}$, $\overline{LM}=\frac{1}{3}\overline{AB}+\frac{3}{8}\overline{AA_1}$, $\overline{B_1M}=\overline{AD}-\frac{5}{8}\overline{AA_1}$, $\overline{MN}=-\frac{7}{9}\overline{AD}+\frac{5}{8}\overline{AA_1}$, $\overline{PQ}=\overline{AD}-\frac{1}{4}\overline{AB}$, $\overline{QR}=-\overline{AD}-\frac{1}{2}\overline{AB}-\frac{3}{4}\overline{AA_1}$, $\overline{ON}=-\frac{7}{18}\overline{AD}+\frac{1}{2}\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{AA_1}$. **16.** Оберемо в якості полюса довільну точку O, тоді $\overline{DC}=\overline{r}_C-\overline{r}_D$, $\overline{AB}=\overline{r}_B-\overline{r}_A$. Так як $ABCD$–паралелограм, то $\overline{DC}=\overline{AB}$ та $\overline{r}_D=\overline{r}_A-\overline{r}_B+\overline{r}_C$. **17.** Якщо існує таке число λ, що для радіус-векторів точок A,B,C виконується співвідношення $\overline{r}_C=\frac{\overline{r}_A+\lambda\overline{r}_B}{1+\lambda}$, то точки A,B,C лежать на одній прямій. **18.** Розглянемо тетраедр $ABCD$; M,N,K,L – середини сторін AD,BC,DB,AC відповідно. Нехай O_1,O_2 – середини MN,KL відповідно. Нехай точка D – полюс. Тоді $\overline{r}_{O_1}=\frac{\overline{r}_M+\overline{r}_N}{2}$, $\overline{r}_{O_2}=\frac{\overline{r}_K+\overline{r}_L}{2}$. З умови задачі $\overline{r}_M=\frac{1}{2}\overline{DA}$, $\overline{r}_N=\frac{1}{2}\left(\overline{DB}+\overline{DC}\right)$, $\overline{r}_K=\frac{1}{2}\overline{DB}$, $\overline{r}_L=\frac{1}{2}\left(\overline{DA}+\overline{DC}\right)$. Отже, $\overline{r}_{O_1}=\frac{1}{4}\left(\overline{DA}+\overline{DB}+\overline{DC}\right)=\overline{r}_{O_2}$, тобто точки O_1,O_2 співпадають. Доведено. **19.**

Точки належать одній прямій. **21.** Так як $\overline{CB_1} = \lambda \overline{B_1 A}$, то $\overline{r}_{B_1} = \dfrac{\overline{r}_C + \lambda \overline{r}_A}{1+\lambda}$. Так як $\overline{CA_1} = \mu \overline{A_1 B}$, то $\overline{r}_{A_1} = \dfrac{\overline{r}_C + \mu \overline{r}_B}{1+\mu}$. Нехай точка O ділить відрізок AA_1 у відношенні x, а відрізок BB_1 у відношенні y, тобто її радіус-вектор можна представити у вигляді $\overline{r} = \dfrac{\overline{r}_B + x\overline{r}_{B_1}}{1+x}$ (*) або $\overline{r} = \dfrac{\overline{r}_A + y\overline{r}_{A_1}}{1+y}$. Підставимо в останні вирази $\overline{r}_{B_1}$ і $\overline{r}_{A_1}$ та дорівняємо коефіцієнти при відповідних векторах. При $\overline{r}_A$: $\dfrac{x\lambda}{(1+\lambda)(1+\mu)} = \dfrac{1}{1+y}$; при $\overline{r}_B$: $\dfrac{1}{1+x} = \dfrac{y\mu}{(1+\mu)(1+y)}$; при $\overline{r}_C$: $\dfrac{x}{(1+\lambda)(1+x)} = \dfrac{y}{(1+\mu)(1+y)}$. Розв'язуючи систему трьох останніх рівнянь, отримаємо $x = \dfrac{1+\lambda}{\mu}$. Підставимо цей вираз у (*). Отримаємо $\overline{r} = \dfrac{\lambda \overline{r}_A + \mu \overline{r}_B + \overline{r}_C}{1+\lambda+\mu}$. Доведено. **23.** За теоремою Піфагора для ΔABC: $AB = \sqrt{a^2+b^2}$. Так як CD – висота ΔABC, то $AD = \dfrac{AC^2}{AB} = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $DB = \dfrac{CB^2}{AB} = \dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Нехай C– полюс. Точка D ділить AB у відношенні $\lambda = \dfrac{AD}{DB} = \dfrac{a^2}{b^2}$. Тоді $\overline{CD} = \overline{r}_D = \dfrac{\overline{r}_A + \frac{a^2}{b^2}\overline{r}_B}{1+\frac{a^2}{b^2}} = \dfrac{b^2\overline{r}_A + a^2\overline{r}_B}{b^2+a^2}$. **30.** а) $1\cdot\overline{CE} + 0\cdot\overline{AE} + 1\cdot\overline{FB} = \overline{0}$. **31.** а) $1\cdot\overline{PA} + 1\cdot\overline{QB} + 6\cdot\overline{NQ} + 2\cdot\overline{MB} = \overline{0}$. **33.** а) Будемо шукати лінійну залежність у вигляді $x\overline{l} + y\overline{m} + z\overline{n} = \overline{0}$ (*). У рівності $x(2\overline{a} - \overline{b} - \overline{c}) + y(-\overline{a} + 2\overline{b} - \overline{c}) + z(-\overline{a} - \overline{b} + 2\overline{c}) = \overline{0}$ розкриємо дужки та зберемо коефіцієнти при векторах $\overline{a}, \overline{b}$ і $\overline{c}$: $(2x-y-z)\overline{a} + (-x+2y-z)\overline{b} + (-x-y+2z)\overline{c} = \overline{0}$. Так як за умовою вектори $\overline{a}, \overline{b}$ і $\overline{c}$ не компланарні, то вони лінійно незалежні, а, отже, утворюють лише тривіальну нульову лінійну комбінацію. Тому дорівняємо до нуля коефіцієнти при векторах та розв'яжемо систему: $\begin{cases} 2x-y-z=0, \\ -x+2y-z=0, \\ -x-y+2z=0. \end{cases}$ Отримаємо $\begin{cases} x=z, \\ y=z. \end{cases}$ Нам потрібний який-небудь ненульовий розв'язок. Тому покладемо $z=1$, отже, $x=y=1$. Лінійна залежність матиме вигляд: $\overline{l} + \overline{m} + \overline{n} = 0$. **35.** $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,1)$, $D(-1,0)$, $E(0,-1)$, $F(1,-1)$. **37.** $A(-2,2)$, $B(0,0)$, $C(2,0)$, $D(0,2)$. **43.** $\overline{p} = 2\overline{a} + 3\overline{b}$. **45.** $\alpha = 0$. **46.** $\alpha = 2$, $\beta = -3$, $\gamma = 1$.

2

1. 1) -6; 2) 9; 3) 16; 4) 13; 5) –61. **2.** $\alpha = \pm\frac{3}{5}$**.** **3.** 373. **4.** $arccos\frac{2\sqrt{7}}{7}$. **5.** $\pi - arccos\frac{49\sqrt{949}}{1898}$. **6.** 1) 22; 4) –200; 5) 129. **7.** 1) –524. **8.** $\frac{\pi}{3}$. **11.** $\bar{a} \perp \bar{b}$. **12.** c^2. **13.** 0. **15.** За умовою $AB^2 + BC^2 + AC^2 = k$, але за властивостями скалярного добутку можна записати $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 = k$. Розглянемо суму квадратів довжин медіан трикутника

$$\overline{AA_1}^2 + \overline{BB_1}^2 + \overline{CC_1}^2 = \left(\frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AC}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BC}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\overline{AC} - \frac{1}{2}\overline{BC}\right)^2 =$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{4}\overline{AB}^2}} + \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC} + \underline{\underline{\frac{1}{4}\overline{AC}^2}} + \underline{\underline{\frac{1}{4}\overline{AB}^2}} - \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{BC} + \underline{\underline{\frac{1}{4}\overline{BC}^2}} + \underline{\underline{\frac{1}{4}\overline{AC}^2}} + \frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BC} +$$

$$+ \underline{\underline{\frac{1}{4}\overline{BC}^2}} = \frac{1}{2}k + \frac{1}{4}\left(\underline{\overline{AB}\cdot\overline{AC}} + \underline{\underline{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}} - \underline{\overline{AB}\cdot\overline{BC}} - \overline{AB}\cdot\overline{BC} + \underline{\underline{\overline{AC}\cdot\overline{BC}}} + \overline{AC}\cdot\overline{BC}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}k + \frac{1}{4}\left(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2\right) = \frac{3}{4}k.$$

16. $arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$. **18.** –0,5. **19.** 2) $0, 0, \bar{0}, \bar{0}$; 4) $np_{\bar{b}}\bar{a} = -\frac{10}{3}$, $\overline{np_{\bar{b}}\bar{a}} = -\frac{10}{9}\overline{(2;2;1)}$. **20.** $\overline{(1;1;0)}$. **21.** $\overline{\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-1\right)}$. **22.** $\overline{(0;1;2)}$. **23.** $\overline{\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2};\frac{11}{2};-2\sqrt{2}\right)}$**. 24.** 120°**. 25.** $\overline{\left(4\sqrt{2};4;4\right)}$**. 26.** 3) $\bar{a}^2\cdot\bar{b}^2$; 4) $\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$; 5) $\bar{0}$. **27.** 7) $\overline{(18;-12;21)}$; 9) $\overline{(28;-7;0)}$; 12) Так як $\bar{a}$ – векторний добуток векторів $\bar{c}$ та $\bar{x}$, то за означенням $\bar{a} \perp \bar{c}, \bar{a} \perp \bar{x}$, але $\bar{a}\cdot\bar{c} \neq 0$, тому вектор $\bar{x}$ визначити не можливо. **28.** $np_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|} = 6$. **29.** $np_{\bar{b}}(\bar{a}+\bar{c}) = \frac{(\bar{a}+\bar{c})\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b} + \bar{c}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|} = -4$,

$$\overline{np_{\bar{b}}(\bar{a}+\bar{c})} = np_{\bar{b}}(\bar{a}+\bar{c})\cdot\frac{\bar{b}}{|\bar{b}|} = -4\cdot\frac{\overline{(2,-3,-6)}}{7} = \overline{\left(-\frac{8}{7},\frac{12}{7},\frac{24}{7}\right)}.$$

30. $\left|\bar{f}_1 + \bar{f}_2\right| = \sqrt{\left(\bar{f}_1 + \bar{f}_2\right)^2} = \sqrt{\bar{f}_1^2 + 2\bar{f}_1\ \bar{f}_2 + \bar{f}_2^2} = \sqrt{\left|\bar{f}_1\right|^2 + 2\left|\bar{f}_1\right|\cdot\left|\bar{f}_2\right|\cdot cos\,\alpha + \left|\bar{f}_2\right|^2}$. **31.** $S = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{62}$ кв. од. **32.** $\bar{e}_{1,2} = \pm\frac{\bar{a}\times\bar{b}}{|\bar{a}\times\bar{b}|} = \pm\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$. **33.**

$$S = \left|\bar{a}\times\bar{b}\right| = \left|(\bar{m}+\bar{n})\times(3\bar{m}+2\bar{n})\right| = \left|3\bar{m}\times\bar{m} + 2\bar{m}\times\bar{n} + 3\bar{n}\times\bar{m} + 2\bar{n}\times\bar{n}\right| =$$

$$= \left|3\cdot\bar{0} - 2\bar{n}\times\bar{m} + 3\bar{n}\times\bar{m} + 2\cdot\bar{0}\right| = \left|\bar{n}\times\bar{m}\right| = \left|\bar{n}\right|\cdot\left|\bar{m}\right|\cdot sin\,\varphi = 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$ (кв.од.). **34.**

1) $(\bar{a}\times\bar{b})^2 = \left|\bar{a}\times\bar{b}\right|^2 = \left(|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot sin\,\varphi\right)^2 = \left(1\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3$; 2) $\left((2\bar{a}+\bar{b})\times(\bar{a}+2\bar{b})\right)^2 =$

$= \left(2\cdot\bar{0} + 4\bar{a}\times\bar{b} + \bar{b}\times\bar{a} + 2\cdot\bar{0}\right)^2 = \left(3\bar{a}\times\bar{b}\right)^2 = 9\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|^2 = 27$. **35.** 1) 24. **36.** $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{BC}\right| = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -3 & -2 & 6 \\ -2 & 4 & 4 \end{vmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\left|\overline{(-32;0;-16)}\right| = \left|\overline{(-16;0;-8)}\right| = 8\sqrt{5}$ (кв.од.); $\left|\overline{BC}\right| = \sqrt{4+16+16} = 6$ (од. д.); $h = \frac{2S}{\left|\overline{BC}\right|} = \frac{8\sqrt{5}}{3}$ (од. д.). **37.** $\frac{3\sqrt{10}}{20};\frac{26\sqrt{101}}{101}$. **39.** $\overline{(24;-21;-15)}$. **40.** $\overline{(8;-7;5)}$. **42.** 210 кв.од. **44.** 1) права. **45.** 11 од. д. **46.** $\left(0;-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$**. 47.** $\overline{\left(-\frac{3\sqrt{38}}{38};\frac{5\sqrt{38}}{38};-\frac{\sqrt{38}}{19}\right)}$**. 49.** $\overline{(2;-3;10)}$. **50.** За умовою $\bar{a}\times\bar{b} + \bar{b}\times\bar{c} + \bar{c}\times\bar{a} = \bar{0}$. Помножимо скалярно дану суму на вектор $\bar{a}$. Отримаємо суму трьох мішаних добутків: $\bar{a}\cdot\bar{a}\times\bar{b} + \bar{a}\cdot\bar{b}\times\bar{c} + \bar{a}\cdot\bar{c}\times\bar{a} = 0$. В ній перший та третій доданки дорівнюють нулю, так як вектори, що в них входять, компланарні. Тому $\bar{a}\cdot\bar{b}\times\bar{c} = 0$, тобто вектори $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ компланарні. **51.** 1) За умовою вектори компланарні, отже їх мішаний добуток дорівнює нулю: $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\cdot\left(\bar{c}\times\bar{a}\right) = 0$. За означенням мішаного добутку: $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\left(\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\times\left(\bar{c}\times\bar{a}\right)\right) = 0$. Розкриємо подвійний векторний добуток за відомою властивістю (див. теоретичний матеріал): $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\left(\bar{c}\left(\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\bar{a}\right) - \bar{a}\left(\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\bar{c}\right)\right) = 0$. В дужках останній мішаний добуток – нульовий. Винесемо множник $\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\bar{a}$ та отримаємо добуток $\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\cdot\bar{a}\right)\cdot\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\right) = 0$, $\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\right)^2 = 0$, $\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\right) = 0$. Таким чином, вектори $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ компланарні. 2) З попередньої задачі випливає, що вектори $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ лінійно залежні. Нехай $\exists\,\alpha,\beta\in R:\ \bar{c} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b}$. Тоді $\bar{c}\times\bar{a} = \left(\alpha\bar{a} + \beta\bar{b}\right)\times\bar{a} = \beta\left(\bar{b}\times\bar{a}\right)$, $\bar{b}\times\bar{c} = \bar{b}\times\left(\alpha\bar{a} + \beta\bar{b}\right) = \alpha\left(\bar{b}\times\bar{a}\right)$. Так як вектори $\bar{a}\times\bar{b},\ \bar{b}\times\bar{c},\ \bar{c}\times\bar{a}$ відрізняються один від одного лише на множник, то вони колінеарні.**52.** Введемо декартову систему координат таким чином, що $B(0,0,0)$, $A(a,0,0)$, $C(0,a,0)$, $D(a,a,0)$, $D_1(a,a,a)$. Тоді $M\left(0,0,\frac{2}{3}a\right)$, $\overline{MD_1}\left(a,a,\frac{1}{3}a\right)$, $\overline{D_1C}(-a,0,-a)$, $\overline{MD}\left(a,a,-\frac{2}{3}a\right)$. Відстанню між мимобіжними прямими буде висота паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{MD_1},\overline{D_1C},\overline{MD}$ як на сторонах. Тому $h = \frac{\left|\overline{MD_1}\cdot\overline{D_1C}\cdot\overline{MD}\right|}{\left|\overline{D_1C}\times\overline{MD}\right|} = \frac{3a\sqrt{43}}{43}$ (од. д.). **54.** $\frac{S}{15}$. **55.** Трійка векторів $\bar{a},\bar{x},\bar{b}$ права. Довжина вектора $\bar{x}$ та $sin\,\alpha$ – кута між векторами $\bar{a}$ та $\bar{x}$

такі, що $|\bar{x}|\cdot sin\alpha=\dfrac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}$. В частинному випадку можна в якості вектора $\bar{x}$ взяти вектор, ортогональний векторам $\bar{a}$ та $\bar{b}$, довжина якого дорівнює $|\bar{x}|=\dfrac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}$. **56.** 1) Рівнянню $(\bar{x},\bar{a},\bar{b})=p$ задовольняє вектор $\bar{x}$, ортогональний векторам $\bar{a}$ та $\bar{b}$, довжина якого дорівнює $|\bar{x}|=\dfrac{p}{|\bar{a}\times\bar{b}|}$. 2) Рівнянню $(\bar{x},\bar{a},\bar{b})=p$ задовольняють всі вектори $\bar{x}$, на яких разом з векторами $\bar{a}$ та $\bar{b}$ можна побудувати паралелепіпед, об'єм якого дорівнюватиме $|p|$. У випадку, коли вектор $\bar{x}$ ортогональний векторам $\bar{a}$ та $\bar{b}$, отримаємо прямий паралелепіпед. **57.** $-4;3$. **59.** 3) Застосуємо властивість подвійного векторного добутку: $(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}=\bar{b}\cdot(\bar{a}\cdot\bar{c})-\bar{a}\cdot(\bar{b}\cdot\bar{c})$. Отримаємо: $(\bar{a}\times\bar{b})\times(\bar{c}\times\bar{d})=$
$=\bar{c}\cdot((\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{d})-(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{d}\cdot\bar{c}=\bar{c}(\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{d})-\bar{d}(\bar{c}\cdot(\bar{a}\times\bar{b}))=\bar{c}(\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{d})-$
$-\bar{d}((\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c})=\bar{c}(\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{d})-\bar{d}(\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c})$.

3

1. A_2. **2.** 1) $BC: 4x-7y-23=0$; 2) $x+y-3=0$; 3) $7x+4y-1=0$; 4) $4x-7y+54=0$; 5) $12x+13y-35=0$. **3.** 1) $5x+y-3=0$; 2) $8x-y+2=0$; 5) $4x+3y-25=0$; 6) $x+y-3=0$; 7) Будемо шукати рівняння у вигляді $y-6=k(x-12)$ (*). Ця пряма перетинає координатні осі в точках: $\left(-\dfrac{6}{k}+12;\ 0\right)$ та $(0;\ -12k+6)$. Так як площа трикутника дорівнює 150 кв. од., то отримаємо рівняння для визначення коефіцієнта k: $\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{6}{k}+12\right)\cdot(-12k+6)=150$. Звідси $k_1=-\dfrac{3}{4}$, $k_2=-\dfrac{1}{3}$. Підставивши ці значення в рівняння (*), отримаємо: $y-6=-\dfrac{3}{4}(x-12)$, $y-6=-\dfrac{1}{3}(x-12)$ або $3x+4y-33=0$ та $x+3y-22=0$. **4.** $a=-6, b=2$. **5.** $\sqrt{3}x+2y-6=0$. **6.** $\varphi=135^\circ$. **7.** $2x+5y=0$. **8.** $x+2y-5=0$. **9.** 1) $\dfrac{13}{5}$; 2) $\dfrac{23}{13}$; 3) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **10.** $5x+2y-9=0$. **11.** $\left(\dfrac{11}{2};\ \dfrac{15}{2}\right)$. **12.** $17x+19y+30=0$. **13.** 1) Шукане рівняння належить пучку прямих $\alpha(x+2y-1)+\beta(2x+y-4)=0$. Так як пряма проходить через точку M, то її координати задовольняють рівнянню прямої: $\alpha(-1-6-1)+\beta(-2+3-4)=0$. Отже, $\alpha=\dfrac{3}{4}\beta$. Нехай $\beta=4$, тоді $\alpha=3$ та рівняння шуканої прямої прийме вигляд $11x+10y-19=0$; 2) $3x-7=0$; 3)

$2x+y-4=0$. **14.** 1) $\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y+\frac{11}{5}=0$. **15.** 2) $arccos\frac{9\sqrt{130}}{130}$; 3) $m=6$; 4) $p\in\varnothing$, так як не існує p, для яких виконуються рівності $\frac{p}{3}=\frac{-1}{-1}=\frac{-p}{-4}$. **16.** а) $cos\angle\left(\overline{(A,B)},\overline{(l,m)}\right)\in(0,1]$; б) $\overline{(A,B)}\cdot\overline{(l,m)}=0,(x_0,y_0)\notin l_1$; в) $\overline{(A,B)}\cdot\overline{(l,m)}=0$, $(x_0,y_0)\in l_1$. **17.** а) перетинаються в точці $(15;-10)$; б) паралельні; в) співпадають; г) паралельні; д) співпадають; е) перетинаються в точці $(1;2)$. **18.** Як бачимо з умови, прямі не паралельні, бо коефіцієнти при x,y не пропорційні. Нехай $AB:\ x+y-2=0$, $BC:\ 2x-y+5=0$. Розв'язавши систему цих двох рівнянь, знайдемо точку перетину прямих AB та BC: $B(-1;3)$. Точку D знайдемо з умови, що M – середина відрізка BD: $x_M=\frac{x_B+x_D}{2}$, $y_M=\frac{y_B+y_D}{2}$. Отже, $D(7;-1)$. Запишемо рівняння прямої DC за умови, що вона проходить через точку D та паралельна прямій AB: $1\cdot(x-7)+1\cdot(y+1)=0$ або $x+y-6=0$. Аналогічно, пряма AD проходить через точку D та паралельна прямій BC: $2\cdot(x-7)-1\cdot(y+1)=0$ або $2x-y-15=0$. **19.** Точки Q та S належать протилежним сторонам паралелограма з нормальним вектором $\overline{(A;B)}$: $A(x-6)+B(y-6)=0$, $A(x+5)+B(y-4)=0$. Ці дві прямі знаходяться на однаковій відстані від точки $M(1;6)$ перетину діагоналей: $|A(1-6)+B(6-6)|=|A(1+5)+B(6-4)|\ \Rightarrow |5A|=|6A+2B|\ \Rightarrow \left[\begin{array}{l}A=-2/11B,\\ A=-2B.\end{array}\right.$

Отримаємо два варіанти прямих BC та AD: $BC^{(1)}:\ 2x-11y+54=0$, $AD^{(1)}:\ 2x-11y+54=0$; $BC^{(2)}:\ 2x-y-6=0$, $AD^{(2)}:\ 2x-y+14=0$. Перший варіант не підходить, бо тоді прямі, що містять суміжні сторони паралелограма, співпадають. Аналогічно, точки P та R належать протилежним сторонам паралелограма з нормальним вектором $\overline{(A;B)}$: $A(x-3)+B(y-0)=0$, $A(x-5)+B(y-9)=0$. Ці дві прямі знаходяться на однаковій відстані від точки $M(1;6)$ перетину діагоналей: $|A(1-3)+B(6-0)|=|A(1-5)+B(6-9)|$ $\Rightarrow|-2A+6B|=|-4A-3B|\ \Rightarrow \left[\begin{array}{l}A=-9/2\,B,\\ A=1/2\,B.\end{array}\right.$ Отримаємо два варіанти прямих AB та CD: $AB^{(1)}:\ 9x-2y-27=0$, $DC^{(1)}:\ 9x-2y-27=0$; $AB^{(2)}:\ x-2y-3=0$, $DC^{(2)}:\ x-2y+13=0$. Також перший варіант не підходить, бо тоді прямі, що містять суміжні сторони паралелограма, співпадають. **20.** $(-2;-6)$. **21.** $BC\perp AH\ \Rightarrow\ BC:\ 7x-4y+22=0$; $AC\perp BH\ \Rightarrow$ $AC:\ 3x-4y+14=0$. $C:\begin{cases}BC,\\ AC\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}7x-4y+22=0,\\ 3x-4y+14=0\end{cases}\Rightarrow C(-2;2)$. **22.** В трикутнику MCN $\angle C = 90^\circ$, тоді $CN \perp CM$ та їх рівняння можна записати у вигляді $A(x-1)+B(y+4)=0$ та $B(x-1)-A(y+4)=0$. Точки M, N перетину останніх прямих з віссю абсцис матимуть координати: $M\left(\dfrac{4B}{A}+1;\ 0\right), N\left(-\dfrac{4A}{B}+1;\ 0\right)$. Тоді довжини катетів дорівнюватимуть $CM=\sqrt{\left(\dfrac{4B}{A}\right)^2+16}$, $CN=\sqrt{\left(\dfrac{4A}{B}\right)^2+16}$. Площа $S_\Delta = \dfrac{1}{2}CM\cdot CN$ за умовою дорівнює 20 кв. од. Підставивши вирази для CM та CN у формулу площі, отримаємо рівняння, розв'язком якого є $\dfrac{B}{A}=\pm 2$ або $\dfrac{B}{A}=\pm\dfrac{1}{2}$. Отже, шукані рівняння: $x+2y+7$ та $2x-y-6$. **23.** Невідоме рівняння будемо шукати у вигляді $A(x-3)+B(y-1)=0$. Косинус кута між цією прямою та даною дорівнює $\dfrac{2A+3B}{\sqrt{A^2+B^2}\sqrt{4+9}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Так як довжина вектора нормалі може бути довільною, то покладемо для спрощення $\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{26}$. Розв'язками системи $\begin{cases}\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{26},\\ 2A+3B=13\end{cases}$ будуть пари чисел $(-1;5)$ та $(5;\ 1)$. Отже, запишемо рівняння шуканих прямих: $x-5y+2=0,\ 5x+y-16=0$. **24.** Напрямними векторами бісектрис будуть вектори: $\overline{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{3}{\sqrt{10}};\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)}$, $\overline{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{3}{\sqrt{10}};\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)}$. **25.** Дана вершина гіпотенузі не належить, отже, це вершина прямого кута C. Рівняння катетів шукатимемо у вигляді: $m(x-4)+n(y+1)=0$, $n(x-4)-m(y+1)=0$. Перетнемо ці прямі з гіпотенузою. Отримаємо точки $A\left(\dfrac{4m-6n}{3n+m};3\cdot\dfrac{4m-6n}{3n+m}+5\right)$, $B\left(\dfrac{6m+4n}{n-3m};3\cdot\dfrac{6m+4n}{n-3m}+5\right)$. З умови відомо, що ΔABC – рівнобедрений, тобто $AC=BC$. Отже, $\dfrac{m}{n}=2$ або $\dfrac{m}{n}=-\dfrac{1}{2}$ та рівняння катетів приймуть вигляд $2x+y-7=0$, $x-2y-6=0$. **26.** $2x+y-3=0$ або $x-2y+1=0$. **27.** Знайдемо рівняння другої діагоналі. Як відомо, вона перпендикулярна першій та проходить через точку A, тому матиме рівняння $\dfrac{x+4}{7}=\dfrac{y-5}{1}$ або $x+7y-31=0$. Для знаходження точки перетину діагоналей знайдемо розв'язок системи: $\begin{cases}7x-y+8=0,\\ x+7y-31=0.\end{cases}$ Це точка $O(-0{,}5;\ 4{,}5)$. Координати точки C знайдемо з умови, що O – середина AC. Отже, $C(3;4)$. Відомо, що кожна вершина квадрата лежить на однаковій відстані від точки перетину його діагоналей: $AO=\sqrt{12{,}5}$. Знайдемо координати точок B та D за умови, що вони лежать на даній діагоналі $7x - y + 8 = 0$ на відстані $\sqrt{12{,}5}$ від точки O: $\begin{cases}(x+0{,}5)^2 + (y-4{,}5)^2 = 12{,}5;\\ 7x - y + 8 = 0.\end{cases}$ Отримаємо $B(0;8)$, $D(-1;1)$. Знаючи координати всіх вершин квадрата, запишемо рівняння його сторін: $AB:\ 3x - 4y + 32 = 0$, $CD:\ 3x - 4y + 7 = 0$, $BC:\ 4x + 3y - 24 = 0$, $AD:\ 4x + 3y + 1 = 0$. **28.** 1) Точка $A(-1;1)$ належить першій прямій. Тоді відстань від неї до другої прямої є відстанню між паралельними прямими, отже, $h = \dfrac{|2\cdot(-1) - 4\cdot 1 + 7|}{\sqrt{4+16}} = \dfrac{\sqrt{5}}{10}$. **29.** $\dfrac{x-5}{3} = \dfrac{y}{5}$, $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y-3}{5}$. **30.** Координати невідомих вершин $B\left(-\dfrac{1}{2};6\right)$, $D\left(\dfrac{5}{2};2\right)$. Рівняння невідомих сторін не складно записати за допомогою відомих координат вершин. **38.** Запишемо рівняння прямої, паралельної l_3 та такої, що проходить через точку перетину l_1 та l_2. Вона належить пучку, породженому прямими l_1 та l_2: $\alpha(5x - 2y + 6) + \beta(4x - y + 3) = 0$. Нормальні вектори шуканої прямої та l_3 за умови пропорційні: $\dfrac{5\alpha + 4\beta}{1} = \dfrac{-2\alpha - \beta}{3}$, $\alpha = -\dfrac{13}{17}\beta$ Нехай $\beta = 17$, тоді $\alpha = -13$ та рівняння шуканої прямої після спрощення прийме вид: $x + 3y - 9 = 0$. Рівняння інших прямих знаходяться аналогічно. **40.** Пряма має проходити через точки $(1;0)$ та $\left(-\dfrac{3}{2};-1\right)$, які є центрами першого та другого пучка відповідно. **44.** $\dfrac{75}{4}$.

4

1. Довжина перпендикуляра дорівнює відстані від точки до площини, отже, $h = \dfrac{|4\cdot 2 - 2\cdot 3 + 5\cdot(-5)|}{\sqrt{16+4+25}} = \dfrac{23}{3\sqrt{5}}$. **2.** Вказівка. Перевірте, чи задовольняють координати точок рівнянню площини. **3.** $\overline{(0;1;2)}$. **4.** $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 0-1 & 3-2 & -1-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ $x - y + 1 = 0$. **6.** 1) паралельна осі Oy; 2) паралельна площині Oxz; 3) паралельна осі Oz; 4) проходить через початок координат; 5) проходить через вісь Ox. **7.** Загальне рівняння площини: $2x + y - 4 = 0$; нормальне рівняння площини: $\dfrac{2}{\sqrt{5}}x + \dfrac{1}{\sqrt{5}}y - \dfrac{4}{\sqrt{5}} = 0$; рівняння площини у відрізках на осях: $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} = 1$. **8.** Вказівка. Проведіть площину через три з даних точок та перевірте, чи належить четверта точка побудованій площині. **10.** Зауваження. Відстань між паралельними площинами дорівнює відстані від довільної точки однієї площини до другої площини. **11.** Задамо рівнянням площину $(ABC):\ 2x-y-2z+5=0$. Тоді $h_s=\dfrac{|2\cdot 0-6-2\cdot 4+5|}{3}=2$. **12.** а) Кут між площинами дорівнює куту між нормалями цих площин. Тоді $cos\varphi=\dfrac{(4;-5;3)\cdot(1;-4;-1)}{\sqrt{16+25+9}\cdot\sqrt{1+16+1}}=\dfrac{27}{30}=\dfrac{9}{10}$. **14.** $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-1}+\dfrac{z}{6/7}=1$. **15.** $x+y+z-2=0$. **18.** 2) α перетинає β; α паралельна γ; β перетинає γ; прямі l_1 та l_2 мимобіжні; 4) $m=1$; 5) $\dfrac{\sqrt{21}}{6}$; 6) $p=-\dfrac{2}{3}$. **20.** Вказівка. Розв'яжіть систему рівнянь, що складається з рівнянь даних площин. **21.** а) $9x+3y+5z=0$; б) $23x-32y+26z-17=0$; в) $21x+14z-3=0$; г) $7x-14y-8z+5=0$. **23.** $3x+4y-z+1=0, x-2y-5z+3=0$. **25.** $x+20y+7z-3=0$. **32.** а) $A(-2;-2;3)$; б), е), з) пряма паралельна площині; в), г), ж) пряма належить площині; д) $A(2;3;1)$; і) $A(2;4;6)$. **33.** $arcsin\dfrac{19\sqrt{17}}{187}$. **34.** $A(-2;7;1)$. **36.** $8x-22y+z-48=0$. **38.** $17x-14y+15z+98=0$. **41.** $x=1+68t,\ y=70t,\ z=7-67t$. **42.** $C(2;4;8)$. **43.** $B(5;-7;3)$. **44.** $x+y+z-1=0,\ x-1=0$. **45.** $\begin{cases}18x+22y-5z-14=0,\\ 12x-18y+13z+35=0.\end{cases}$

5

1. 1) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{4}=1$; 2) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$; 3) $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{144}=1$; 4) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$; 5) $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{64}=1$; 6) $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{25}=1$; 7) $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{1}=1$; 8) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$; 9) $\dfrac{x^2}{15}+\dfrac{y^2}{9}=1$ або $\dfrac{x^2}{\frac{165}{4}}+\dfrac{y^2}{9}=1$;

10) Відомо, що відстань між директрисами $2\dfrac{a^2}{c}=32$, а ексцентриситет: $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$. Розв'язуючи систему $\begin{cases}a^2=16c;\\ a=2c,\end{cases}$ отримаємо $a=8, c=4$ (нульовий розв'язок не задовольняє умові задачі). Отже, $b^2=a^2-c^2=64-16=48$ та рівняння еліпса прийме вид $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{48}=1$. 11) З умови задачі $b=3$, тоді рівняння прийме вид $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{9}=1$. Так як точка $M\left(-2\sqrt{5};2\right)$ належить еліпсу, то її координати задовольняють шуканому рівнянню: $\dfrac{\left(-2\sqrt{5}\right)^2}{a^2}+\dfrac{2^2}{9}=1$. Звідси

$a^2 = 36$ та рівняння прийме вигляд $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$. 12) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16/3} = 1$; 13) $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{15} = 1$; 14) Одна з директрис задається рівнянням $x = \frac{a^2}{c}$, а найближча до неї вершина має координати $(a;0)$. Відстань від директриси до найближчої до неї вершини за умовою дорівнює 4, отже, $\frac{a^2}{c} - a = 4$. Відстань від директриси до точки, що лежить на осі, паралельній директрисі, є відстанню від директриси до осі Oy, тобто $\frac{a^2}{c} = 8$. Розв'язком системи: $\begin{cases} \frac{a^2}{c} - a = 4; \\ \frac{a^2}{c} = 8 \end{cases}$ є $a = 4, c = 2$, тому $b^2 = 12$ та рівняння еліпса матиме вигляд $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$. 15) Так як трикутник з вершинами у фокусах $(-c; 0)$ та $(c; 0)$ та в кінці малої осі $(0;b)$ правильний, то $2c = \sqrt{(0-c)^2 + (b-0)^2}$. З умови ясно, що коло проходить через початок координат та кінці малої $B(0;b)$ та великої $A(a;0)$ півосей еліпса, тобто є описаним навколо прямокутного трикутника з гіпотенузою AB. Тоді $\sqrt{a^2+b^2} = 7$. Розв'язком системи $\begin{cases} 2c = \sqrt{c^2+b^2}, \\ \sqrt{a^2+b^2} = 7, \\ c^2 = a^2 - b^2 \end{cases}$ буде $a = 4\sqrt{7}, b = \sqrt{21}$. **2.** 1) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$; 2) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

ЛІТЕРАТУРА

Основна

1. Базылев В.Т., Дуничев К.И., Иваницкая В.П. Геометрия. Ч.1. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак-тов пед. ин-тов – М.: Просвещение, 1974. – 351 с.
2. Базылев В.Т., Дуничев К.И., Иваницкая В.П. Геометрия. Ч.2. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак-тов пед. ин-тов – М.: Просвещение, 1975. – 367 с.
3. Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. – М.: Наука, 1987. – 496 с.
4. Марчук Р.А. Курс аналітичної геометрії та лінійної алгебри: підручник для студ. вищ. навч. закл. – ХНУ, 2005. – 225 с.
5. Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1976. – 384 с.
6. Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр I. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1986. – 416с.
7. Тевяшев А.Д. Алгебра і геометрія: навчальний посібник для студ. / Ін-т змісту і методів навчання. – Х.: Прикладна математика, 2000. – 386 с.
8. Шестопал А.Ф. Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії. – К.: Ін-т математики НАН України, 1998. – 164 с.
9. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. – М.: Наука, 2003. – 326 с.

Додаткова

1. Аналітична геометрія. Лінійна алгебра: навчально-методичний посібник / укладачі І.Д. Пукальський, І.П. Лусте. – Чернівці: Рута, 2007. – 244 с.
2. Ніколаєв О.Г. Аналітична геометрія та лінійна алгебра: навчальний посібник. Х.: Основа, 2000. – 223 с.
3. Рибицька О.М., Білонога Д.М., Каленюк П.І. Лінійна алгебра та аналітична геометрія / друге видання, виправлене. Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2013. – 124 с.
4. Травкін Ю.І. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: навчальний посібник. – Х.: Майдан, 2009. – 416 с.

Навчально-методичне видання
(українською мовою)

Зіновєєв Ігор Валерійович
Манько Наталія Іванівна–Володимирівна
Спиця Оксана Геннадіївна

АЛГЕБРА ТА ГЕОМЕТРІЯ: АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Навчально-методичний посібник
для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр»
напряму підготовки «Інформатика»

Рецензент *С.М. Гребенюк*
Відповідальний за випуск *А.К. Приварников*
Коректор *Н.І.–В. Манько*