2) $A = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19\}$

Практичне заняття № 3. Елементи теорії множини

1. Записати множини, перелічивши їх елементи:
   1) $A = \{n \in \mathbb{R} : 0 \le n \le 25 \wedge n \text{ кратне } 3\}$ $\Leftrightarrow \{n \in \mathbb{Z}_0 : 0 \le n \le 25 \wedge n \vdots 3\}$

      $A = \{0; 3; 9; 6; 12; 15; 18; 21; 24\}$
   2) $A = \{n \in \mathbb{N} : n - \text{прості числа, менші } 22\}$;
   3) $A = \left\{x \in \mathbb{Z} : \frac{1}{9} \le 3^x < 10\right\}$;

      $-2 \le x < \log_3 10$

      $A = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$
2. Знайти об'єднання, переріз та різницю множин:
   1) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 3 \le 0\}$.
   2) $A = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x+2} > x\}$, $B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{\sqrt{x+2}} < \frac{1}{x}\right\}$.

Для доведення рівності множин використовуються наступні основні формули.

$x(x-2) > 0$

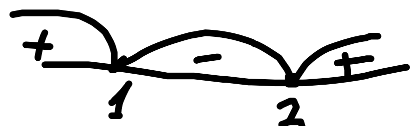
$x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty) = A$

$x^2 - 4x + 3 \le 0$

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$x_1 = 1,\ x_2 = 3$

$(x-1)(x-3) \le 0$



$B = [1; 3]$

$A \cup B = (-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$

$A \cap B = (2; 3]$

$A \setminus B = (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$

1. $A \cup B = B \cup A$.

2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$.

3. $(A \subset B) \Rightarrow (A \cup B = B)$.

4. $A \cup A = A$.

5. $A \cup \varnothing = A$.

7. $A \cap B = B \cap A$.

8. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$.

9. $(A \subset B) \Rightarrow (A \cap B = A)$.

10. $A \cap \varnothing = \varnothing$.

11. $A \cap A = A$.

12. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

13. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

14. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

15. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

$A \cup \overline{A} = E$ – універ.

16. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

U

$E \cap A = A$

17. $\overline{\overline{A}} = A$.

Приклад 3. Довести рівність множин: $(B \setminus A) \cup (C \setminus A) = (B \cup C) \setminus A$.

Доведення. Для доведення рівності потрібно, використовуючи основні формули, перетворити ліву частину рівності до правої або праву частину рівності до лівої. Можна також показати, що обидві частини рівності дорівнюють одній і тій же множині. У даному прикладі перетворимо праву частину рівності до лівої.

$A \setminus B = A \cap \overline{B}$

$$(B \cup C) \setminus A = (B \cup C) \cap \overline{A} = (B \cap \overline{A}) \cup (C \cap \overline{A}) = (B \setminus A) \cup (C \setminus A)$$

Тут ми використали формули (14) та (12).

4. Довести дані твердження або показати, що вони є невірними:

1) $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$; 2) $A \cap B = A \setminus (B \setminus A)$; 3) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$;

4) $\overline{(A \setminus B)} = \overline{A} \cup B$;

5) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.

1) $\underline{A \cup B = A \cup (B \setminus A)}$; $A \cup (B \setminus A) = A \cup (B \cap \overline{A}) = (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup B) =$
$= E \cap (A \cup B) = A \cup B$.

U

2) $A \cap B = A \setminus (B \setminus A)$; $A \setminus (B \setminus A) = A \setminus (B \cap \overline{A}) = A \cap \overline{(B \cap \overline{A})} = A \cap (\overline{B} \cup A) =$
$= (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap A) = (A \cap \overline{B}) \cup A = A$, $т.к.$ $(A \cap \overline{B}) \subset A$.

$(A \cap \overline{B}) \subset A$

3) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B);\ A \setminus (A \cap B) = A \cap \overline{(A \cap B)} = A \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) =$
$= (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{B}) = \varnothing \cup (A \setminus B) = A \setminus B.$

4) $\overline{(A \setminus B)} = \bar{A} \cup B;\quad \overline{(A \setminus B)} = \overline{(A \cap \bar{B})} = \bar{A} \cup B.$

5) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$

$(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C); (A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \cap \bar{C}) \cap \overline{(B \cap \bar{C})} =$

$= (A \cap \bar{C}) \cap (\bar{B} \cup C) = (A \cap \bar{B}) \cap \bar{C} \cup ((A \cap \bar{C}) \cap C) = (A \cap \bar{B}) \cap \bar{C} \cup \varnothing =$

$= (A \cap \bar{B}) \cap \bar{C} = (A \setminus B) \setminus C.$

5. Якщо коло та пряма дотикається, що є перерізом множин точок цих фігур?
6. Нехай A – множина всіх ромбів, B – множина всіх прямокутників. Що буде перерізом цих множин?
7. Якою фігурою може виявиться перерізом 2 прямих на площині?
8. Нехай А – множина всіх простих дільників числа 30, В – множина простих дільників числа 42. Що є об’єднанням цих множин?

$A = \{2,3,5\}$
$B = \{2,3,7\}$
$A \cup B =$
$= \{2,3,5,7\}$
$4 = 3+3-2$

Кількість елементів множини, що є об’єднанням множини А з кількостю елементів N(A) та множини B з кількостю елементів множини N(B) дорівнює $N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$.

$57 + 36 - 12 = 83$

9. У школі 1400 учнів. З них 1250 кататися на лижах, 952 – на ковзанах. На лижах і на ковзанах не вміють кататися 60 учнів. Скільки учнів уміють кататися і на лижах і на ковзанах?
10. У магазині відвідувачі, звичайно, або один торт або одну коробку цукерок, або один торт і одну коробку цукерок. Одного дня було продано57 тортів та 36 коробок цукерок. Скільки всього було покупців,, якщо12 чоловік купили і торт, і коробку цукерок?
11. Кожному студенту першого курсу поставили у відповідність номеру групу, у якій він навчається. Чи буде ця відповідність взаємно однозначною?
12. Знайти переріз множин А і В, якщо кожен елемент множини А можна подати у вигляді $4n+2$, а кожен елемент множини В – у вигляді $3n$, $n \in \mathbb{N}$.

$4n+2 = 3k \quad n = 1,\ 6$
$4n - 3k = -2$
$x\ n = \frac{3k-2}{4}$

Задачі для самостійного розв’язання:

1. Довести рівність множин:
   1) $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A;$
   2) $\bar{A} \cap (B \cup C) = (B \setminus A) \cup (C \setminus A);$
   3) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C).$

$$(A \cap B) \cup \overline{B} = (A \cup \overline{B}) \cap (B \cup \overline{B}) =$$
$$= A \cap \overline{B} = A \setminus B$$

Розв’язання

2. $$(A\cap B)\cup(A\setminus B)=(A\cap B)\cup\left(A\cap\overline{B}\right)=\left(\underbrace{(A\cap B)\cup A}_{A}\right)\cap\left(\underbrace{(A\cap B)\cup\overline{B}}\right)=$$
$$=A\cap\left(\underline{A\cap\left(B\cup\overline{B}\right)}\right)=A\cap(A\cap E)=A.$$

$$\underbrace{(A\cup\overline{B})\cap(B\cup\overline{B})}_{E}=A\cup\overline{B}$$

2. $$\overline{A}\cap(B\cup C)=\left(B\cap\overline{A}\right)\cup\left(C\cap\overline{A}\right)=(B\setminus A)\cup(C\setminus A).$$

$$A\cap(A\cup\overline{B})= = A$$

3. $$(A\cap C)\setminus(B\cap C)=(A\cap C)\cap\left(\overline{B\cap C}\right)=(A\cap C)\cap\left(\overline{B}\cup\overline{C}\right)=$$
$$=A\cap C\cap\overline{B}\cup(A\cap C\cap\overline{C})=A\cap\overline{B}\cap C\cup\varnothing=A\cap\overline{B}\cap C=(A\setminus B)\cap C.$$