1. Методи та моделі лінійної та векторної алгебри

1.1 Модель багатогалузевої економіки Леонтьєва

Розглянемо економічну систему, яка складається з n пов'язаних між собою галузей виробництва. Продукція кожної галузі частково іде на зовнішнє споживання (*кінцевий продукт*), а частково використовується в якості сировини в інших галузях. Цю частину продукції називають *виробничими потребами*.

Позначимо через X_i *обсяг валової продукції* $i-$*ої* галузі за запланований період, а через Y_i *обсяг кінцевої продукції* $i-$*ої* галузі, призначеної для невиробничого споживання $i=(1,2,...,n)$, $x_{ij}-$ частина продукції $i-$*ої* галузі, що споживається $j-$*ою* для забезпечення випуску її продукції в розмірі X_j.

Величини $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}$, $(i, j=1,2,...,n)$ називаються коефіцієнтами прямих витрат.

Ці коефіцієнти утворюють квадратну *матрицю коефіцієнтів прямих витрат.*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

яку іноді називають матрицею технологічних коефіцієнтів (*технологічною матрицею*)

Матриця називається *продуктивною*, якщо усі елементи додатні, та сума елементів в кожному стовбці менша за 1.

Матриця $A=\|a_{ij}\|-$ містить інформацію про структуру міжгалузевих зв'язків та про технологію виробництва даної економіко-виробничої системи.

Рівняння вигляду

$$\begin{cases} X_1 = x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n}+Y_1, \\ X_2 = x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2n}+Y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_i = x_{i1}+x_{i2}+\ldots+x_{in}+Y_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_n = x_{n1}+x_{n2}+\ldots+x_{nn}+Y_n. \end{cases} \quad (1)$$

називають *співвідношенням балансу.*

З рівності $x_{ij}=a_{ij}X_j$ випливає, що (1) можна записати у вигляді

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix},$$

або

$$X = AX + Y,$$

$EX = AX + Y$

де $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix}$ – вектор-план, $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_n \end{pmatrix}$ – вектор кінцевої продукції.

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & \dots & & & 1 \end{pmatrix}$

Тоді балансові співвідношення можна записати у вигляді

$$(E - A)X = Y,$$

де E – одинична матриця.

Основною задачею міжгалузевого балансу є знаходження вектора валового випуску X, який при відомій матриці прямих затрат A забезпечує заданий вектор кінцевого продукту Y. Тому, якщо матриця $(E - A)$ не вироджена, то

$$X = (E - A)^{-1} Y.$$

Матриця

$$S = (E - A)^{-1}$$

називається матрицею *повних* ви *затрат.*

Приклад 1. У наступній таблиці наведено балансовий звіт для двогалузевої моделі економіки.

Галузь	Споживання продукції		Валовий випуск
	Енергетика	Машинобуд	
Енергетика	100	160	500
Машинобудування	275	40	400

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $a_{11} = \frac{100}{500}$

$a_{12} = \frac{160}{400}$ 7

Обчислити необхідний об'єм валового випуску кожної галузі, що забезпечує вектор випуску кінцевої продукції $Y = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. За формулою

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \ (i, j = 1, 2, ..., n)$$

знаходимо матрицю коефіцієнтів прямих затрат:

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,55 & 0,1 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

яка є продуктивною.

Матриця $(E - A)$ має вигляд

$$\Delta_B = 0,72 - 0,22 = 0,5 \quad B = E - A = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,\cancel{6}4 \\ \cancel{0,45} \ -0,55 & 0,9 \end{pmatrix}. \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{21} & \dots & B_{n1} \\ B_{12} & B_{22} & \dots & B_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{1n} & B_{2n} & \dots & B_{nn} \end{pmatrix}$$

Знайдемо матрицю повних затрат $S = (E - A)^{-1}$:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,55 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{0,2} =$$

$$S = (E - A)^{-1} = \frac{1}{0,5} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,55 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,8 & 0,8 \\ 1,1 & 1,6 \end{pmatrix}. = S \cdot \frac{1}{\Delta_B}$$

Отже, для даного вектора кінцевої продукції Y можемо знайти необхідний об'єм валового випуску X за формулою:

$$\underline{X = SY},$$

$$X = \begin{pmatrix} 1,8 & 0,8 \\ 1,1 & 1,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 440 \\ 380 \end{pmatrix}.$$

1.2 Модель міжнародної торгівлі

Нехай країни S_1, S_2, …, S_n мають національні ~~прибутки~~ доходи x_1, x_2, …, x_n відповідно. Позначимо через a_{ij} частку національного доходу, яку країна S_j витрачає на закупівлю товарів у країни S_i. Припустимо, що весь національний дохід витрачається на закупівлю товарів або всередині країни, або на імпорт з інших країн, тобто для кожної країни

S_j, $j = 1, 2, ..., n$, є справедливою рівність $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$. Матриця $A = \|a_{ij}\|$, яка складається з часток національного доходу, називається *структурною матрицею торгівлі*.

Міжнародна торгівля буде збалансованою тоді і тільки тоді, коли для кожної країни S_i, $i = 1, 2, ..., n$, дохід $p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n$ від зовнішньої та внутрішньої торгівлі співпадає з національним доходом x_i цієї країни, тобто коли виконується рівність

$$\underline{AX = X,}$$

де $X = (x_1, x_2, ..., x_n) -$ вектор доходів

Приклад 2. Для структурної матриці A торгівлі трьох країн S_1, S_2, S_3, яка має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Знайти співвідношення між національними доходами країн для збалансованої торгівлі.

Розв'язання. Розв'яжемо матричне рівняння $AX = \overset{EX}{X}$ або $(A - E)X = 0$. З цього матричного рівняння отримаємо систему рівнянь.

$$\begin{cases} -\frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0, \\ \frac{1}{4}x_1 - \frac{2}{3}x_2 = 0, \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши систему методом Гауса, отримаємо: $x_1 = 8c$, $x_2 = 3c$, $x_3 = 10c$, тобто $x = (8c, 3c, 10c)$, де $c \neq 0 -$довільне число.

З отриманого результату можна зробити висновок, що збалансованість торгівлі 3-х країн досягається при векторі національних доходів $x = (8c, 3c, 10c)$. Тобто при співвідношенні національних доходів трьох країн $8 : 3 : 10$.

1.3 Простір товарів. Вектор цін

Під *товаром* розуміють деяку продукцію або послугу, яка надходить на ринок для продажу в певний час у певному місці. Вважатимемо, що маємо n різних товарів. Обсяг $i-го$ позначимо через $x_i,\ i=1,2,...,n.$. Тоді деякий набір цих товарів можна записати у вигляді вектора $\bar{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$, тобто $\bar{x}$ є $n-$вимірним арифметичним вектором. З економічних міркувань розглядатимемо лише такі набори товарів, у яких компоненти $x_i \geq 0$ для всіх $i=1,2,...,n.$ Множину всіх наборів товарів називають *простором товарів* C.

Вважаємо, що кожен товар має певну *ціну*. Всі ціни строго додатні. Нехай ціна одиниці $i-го$ товару становить $p_i,\ i=1,2,...,n.$ Тоді вектор $\bar{p}=(p_1,p_2,...,p_n)$ називають *вектором цін.*

Для набору товарів $\bar{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$ розглянемо вектор відповідних цін $\bar{p}=(p_1,p_2,...,p_n)$. Скалярний добуток цих векторів

$$\bar{p}\cdot\bar{x}=p_1x_1+p_2x_2+...+p_nx_n$$

є числом, яке визначає ціну набору товарів і позначається $c(\bar{x})$.

Індекс споживчих цін характеризує зміни у часі загального рівня цін на товари та послуги, які купує населення для невиробничого споживання. Введемо позначення $\bar{q}=(q_1,q_2,...,q_n)-$ вектор обсягу споживчих товарів**.** Тоді *індексом цін* (у відсотках) називається величина, що обчислюється за формулою

$$p=\frac{\bar{c}\cdot\bar{q}}{\bar{a}\cdot\bar{q}}\cdot 100,$$

де $\bar{c}=(c_1,c_2,...,c_n)$ − вектор цін у поточному місяці, $\bar{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ − вектор цін у попередньому місяці. Звідси $100\cdot\bar{c}\cdot\bar{q}=p\cdot\bar{a}\cdot\bar{q}$, або $(100\cdot\bar{c}-p\cdot\bar{a})\cdot\bar{q}=0$, тобто індекс можна визначати як числовий коефіцієнт р, який робить вектор $\bar{q}$ перпендикулярним до вектора $(100\cdot\bar{c}-p\cdot\bar{c}_n)$.

Індекс інфляції обчислюється за формулою

$$i=p-100.$$

до того ж

$$i=\frac{\bar{c}\cdot\bar{q}}{\bar{a}\cdot\bar{q}}\cdot 100-100=100\left(\frac{(\bar{c}-\bar{a})\bar{q}}{\bar{a}\cdot\bar{q}}\right).$$

Приклад 3. Витрати фірми на ресурси, які використовуються для виготовлення одиниці продукції задано в таблиці:

$\overline{x}$ $\overline{p}$

Ресурси	Кількість	
Сировина першого виду	200 кг	3 грн/ кг
Сировина другого виду	500 м^2	5 грн/кг
Витрати праці	0,65 людино-год	10 грн/людино год
Обладнання	0,7 машино-год	15 грн/ машино-год

Визначити ціну всіх ресурсів, що використовуються фірмою для виготовлення одиниці продукції .

Розв'язання. Введемо вектор витрат ресурсів на одиницю продукції $\overline{x} = (200\ ;500;\ 0{,}65;\ 0{,}7)$ та вектор цін одиниць відповідних ресурсів $\overline{p} = (3\ ;5;\ 10;\ 15)$. Вартість усіх ресурсів, що використовуються для виготовлення одиниці продукції, буде скалярним добутком векторів $\overline{x}$ та $\overline{p}$. Тому

$$c(\overline{x}) = \overline{x} \cdot \overline{p} = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i .$$

Отже,

$$c(\overline{x}) = \overline{x} \cdot \overline{p} = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = 200 \cdot 3 + 500 \cdot 5 + 0{,}65 \cdot 10 + 0{,}7 \cdot 15 = 3117 \quad \textit{грн.}$$

Приклад 4. Комерційний банк, що бере участь у будівництві багатоповерхових будинків на одному з масивів міста, одержав кредити від трьох комерційних банків. Кожен з них надав кредити в розмірі 200, 300, 400 тис. грн. під річні процентні ставки 40, 25 і 30 % Визначимо, яку суму треба заплатити за кредити наприкінці року.

$\overline{p} = (0{,}4\ \ 0{,}25\ \ 0{,}3)$

Розв'язання. Розглянемо вектор кредитів і вектор процентних ставок. Простим розрахунком керівник комерційного банку може визначити, скільки потрібно заплатити наприкінці року за кредити, взяті в банків:

$\overline{x} \cdot \overline{p} + \overline{x}$

$+\overline{x}$

$$c(\overline{x}) = \overline{x} \cdot \overline{p} = 200 \cdot 1{,}4 + 300 \cdot 1{,}25 + 400 \cdot 1{,}3 = 1175 \quad \textit{тис. грн.}$$

Приклад 5. (***Індекс цін та індекс інфляції)*** Визначити індекс цін та індекс інфляції через розрахунок вартості «споживчого кошика», який складається з [redacted] видів товарів і послуг, для індексів цін певного місяця, що наведено в таблиці.

Вид товару	Обсяг товару	Ціна одиниці товару в поточному місяці	Витрати споживачів у поточному місяці	Ціна одиниці товару в попередньому місяці	Витрати споживачів у попередньому місяці
A	3	4000	12000	3500	10500
B	10	2000	20000	1800	18000
C	2	4000	8000	4500	9000
Загальні витрати:	-	-	40000	-	37500

Розв'язання. Введемо вектор обсягу споживчих товарів

$$\vec{q}=(3;10;2);$$

вектор цін у поточному місяці

$$\vec{c} = (4000,2000;4000);$$

вектор цін у попередньому місяці [redacted]

[redacted] $= (3500;1800;4500).$

Розрахуємо індекс цін. Для цього обчислимо скалярні добутки $\bar{c} \cdot \bar{q}$ та [redacted] $\cdot \bar{q}$

$$\bar{c} \cdot \bar{q} = 3 \cdot 4000 + 10 \cdot 2000 + 2 \cdot 4000 = 40000 ;$$

[redacted] $\cdot \bar{q} = 3 \cdot 3500 + 10 \cdot 1800 + 2 \cdot 4500 = 37500;$

Тепер перейдемо до індексу інфляції.

$$p = 40000 : 37500 \cdot 100\ \% = 106{,}7\ \%.$$

А також

$$i = p - 100\ \% = 106{,}7\ \% - 100\ \% = 6{,}7\ \%.$$

Таким чином, індекс інфляції становить 6,7%.

2. Методи та моделі аналітичної геометрії

2.1 Модель рівноваги ринку

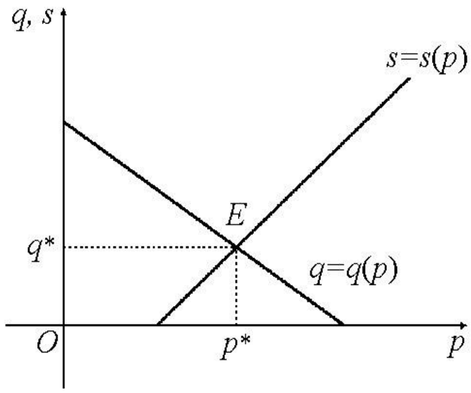

Рис. 1

Візьмемо деякий товар. За даної ціни p за одиницю товару через $s(p)$ позначимо число одиниць товару , які продавці на ринку пропонують для продажу. Функцію $s = s(p)$ називають *функцією пропозиції товару*. Через $q(p)$ позначимо число одиниць товару, які покупці бажають купити за даною ціною p. Функцію $q = q(p)$ називають *функцією попиту на товар*. З економічних міркувань функція пропозиції $s = s(p)$ зростаюча, а функція попиту $q = q(p)$ спадна.

Ціну, за якої попит на певний товар дорівнює пропозиції цього товару на ринку, називають *рівноважною ціною*. Тобто за рівноважної ціни $p*$ виконується рівність $s(p*) = q(p*)$. Точку $E(p*; q*)$ називають *точкою рівноваги*.(див. рис.1)

Приклад 6. За умови, що функція попиту має вигляд, $q = -5p + 40$, а функція пропозиції $s = 7{,}5p - 10$, визначити рівноважну ціну. Нехай уряд деякої країни встановив акцизний податок T за одиницю товару (цей податок є фіксованим числом, а не процентом від продажної ціни). З'ясувати, як зміняться при цьому рівноважна ціна та обсяг товару.

Розв'язання. Координати точки рівноваги $E(p*, q*)$ задовольняють умову рівноваги $s(p*) = q(p*)$, тобто $7{,}5p - 10 = -5p + 40$, звідки $p* = 4,$ $s(p*) = q(p*) = 20.$

Якщо уряд установить акцизний податок T за одиницю товару, то функція пропозиції зміниться і задаватиметься співвідношенням

$$s \ \ = s(p - T) = 7{,}5(p - T) - 10,$$

а функція попиту залишиться незмінною. Тоді нову точку рівноваги (p^T, q^T) можна визначити з умови рівноваги $s(p^T) = q(p^T)$, тобто

$$7{,}5(p^T - T) - 10 = -5p^T + 40.$$

Отже, нова рівноважна ціна $p^T = 4 + 0{,}6T$, а відповідний обсяг товару $s(p^T) = q(p^T) = 20 - 3T$. Дістали нову точку рівноваги $(4 + 0{,}6T,\ 20 - 3T)$.

2.2 Модель рівноваги доходів і збитків.

Розглянемо просту модель рівноваги доходів і збитків компанії. Компанія випускає продукцію й продає її за ціною p (грн.) за одиницю. Керівництво компанії встановило, що зміна суми $y_в$ загальних щомісячних витрат на виготовлення продукції в кількості x (тис.од.) має таку закономірність: $y_в = ax + b$. Знайдемо точку рівноваги, області прибутків і збитків компанії.

Оскільки дохід від продажу x (тис.) виробів продукції ціною p (грн.) за одиницю визначатиметься функцією доходу $y_д = px$, то для рівноваги доходів і витрат потрібно, щоб виконувалась умова рівноваги:

$$y_в = y_д.$$

Знаходимо розв’язок рівняння $px = ax + b$. Маємо

$$x^* = \frac{b}{p-a}.$$

Отже, визначили точку рівноваги

$$E\left(\frac{b}{p-a}; \frac{pb}{p-a}\right).$$

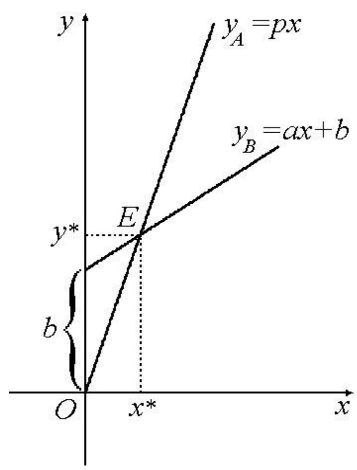

Рис. 2

Прибуток Q компанії визначається рівністю

$$Q = y_д - y_в.$$

Якщо $0 \le x \le x^*$, то графік функції доходу проходить нижче за графік функції витрат. Тоді $Q < 0$, і компанія несе збитки.

Якщо $x > x^*$, то графік функції доходу проходить вище за графік функції витрат. Тоді $Q > 0$, і компанія одержує прибуток.

Приклад 7. ***(Визначення рентабельності транспортного постачання)*** Побудувати графіки транспортних витрат та визначити, для яких відстаней вигідніше перевозити залізничним або автомобільним транспортом. Якщо транспортні витрати перевезення одиниці вантажу y залізничним та автомобільним транспортом на відстань x x визначаються за формулами:

$$y = \frac{1}{2}x + 10 \quad \text{та} \quad y = x + 5,$$

де x вимірюється десятками км.

Розв'язання. Побудуемо графіки транспортнихвитратперевезення (див.рис. 3). Графіки прямих перетинаються в точці N. Знайдемо координати точки N:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x + y = 10 \\ -x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y = 20 \\ x - y = 5 \end{cases} \Rightarrow y = 15;\ x = 10.$$

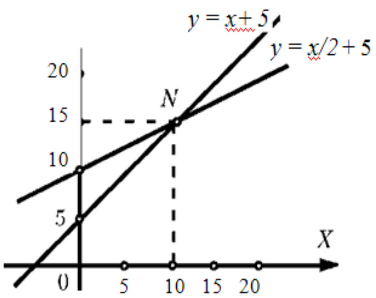

Рис. 3

Графіки витрат дозволяють зробити висновоки:

а) коли $x \in [0,10)$, тобто $x < 100$ км, транспортні витрати у перевезення автотранспортом нижче витрат перевезення залізничним транспортом;

б) коли $x \in [10,\infty)$, тобто $x > 100$ км, більш рентабельним буде залізничний транспорт.