

Деякі тригонометричні формули

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= \frac{\sin x}{\cos x}, & \operatorname{ctg} x &= \frac{\cos x}{\sin x}, & \sec x &= \frac{1}{\cos x}, \\ \sin^2 x + \cos^2 x &= 1, & 1 + \operatorname{tg}^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x}, & 1 + \operatorname{ctg}^2 x &= \frac{1}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

Функції кратних кутів

$$\begin{aligned} \sin 2x &= 2 \sin x \cos x, & \sin 3x &= 3 \sin x - 4 \sin^3 x, & \operatorname{tg} 2x &= \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}, \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x, & \cos 3x &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x, & \operatorname{ctg} 2x &= \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x}. \end{aligned}$$

Функції суми і різниці кутів

$$\begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, & \operatorname{tg}(x \pm y) &= \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}, \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y, & \operatorname{ctg}(x \pm y) &= \frac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} y \pm \operatorname{ctg} x}. \end{aligned}$$

Формули пониження степеня

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), & \cos^2 x &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \\ \sin^3 x &= \frac{1}{4}(3 \sin x - \sin 3x), & \cos^3 x &= \frac{1}{4}(3 \cos x + \cos 3x), \\ \sin^4 x &= \frac{1}{8}(\cos 4x - 4 \cos 2x + 3), & \cos^4 x &= \frac{1}{8}(\cos 4x + 4 \cos 2x + 3). \end{aligned}$$

Сума й різниця тригонометричних функцій

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, & \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \\ \sin x - \sin y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}, & \cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}, \\ \operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y &= \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cdot \cos y}, & \operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y &= \pm \frac{\sin(x \pm y)}{\sin x \cdot \sin y}. \end{aligned}$$

Добуток тригонометричних функцій

$$\begin{aligned} \sin x \sin y &= \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)], & \cos x \cos y &= \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)], \\ \sin x \cos y &= \frac{1}{2}[\sin(x-y) + \sin(x+y)]. \end{aligned}$$

Зв'язок між оберненими тригонометричними функціями

$$\begin{aligned} \arcsin x &= -\arcsin(-x) = \frac{\pi}{2} - \arccos x = \arccos \sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \\ \operatorname{arctg} x &= -\operatorname{arctg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}. \end{aligned}$$

Гіперболічні функції

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}.$$

Деякі формули

Основна тотожність: $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

$$\operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x - 1), \quad \operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x + 1), \quad \operatorname{ch} 2x = 2 \operatorname{ch}^2 x - 1, \quad \operatorname{sh} 2x = 2 \cdot \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x$$

Дві істотні границі й наслідки з них	Еквівалентні нескінченно малі функції
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1;$	$\sin x \sim x, \quad \operatorname{tg} x \sim x \quad (x \rightarrow 0);$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1;$	$\arcsin x \sim x, \quad \operatorname{arctg} x \sim x \quad (x \rightarrow 0);$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2};$	$1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2 \quad (x \rightarrow 0);$
$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e;$	
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1;$	$e^x - 1 \sim x, \quad \ln(1+x) \sim x \quad (x \rightarrow 0);$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$	$a^x - 1 \sim x \ln a \quad (x \rightarrow 0).$

Таблиця похідних

$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \quad x > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R};$	$C' = 0, \quad (x)' = 1, \quad (x^2)' = 2x, \quad (x^3)' = 3x^2;$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0;$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0; \quad (\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad x \neq 0;$
$(a^x)' = a^x \ln a, \quad 0 < a \neq 1;$	$(e^x)' = e^x;$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0;$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad x > 0, \quad 0 < a \neq 1;$
$(\sin x)' = \cos x;$	$(\cos x)' = -\sin x;$
$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z};$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$
$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x;$	$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$
$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$	$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \quad x \neq 0;$
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x < 1;$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x < 1;$
$(x)' = \operatorname{sgn} x \quad \text{при} \quad x \neq 0;$	$[x]' = 0 \quad \text{при} \quad x \notin \mathbb{Z}.$

Таблиця похідних вищих порядків

$P_m(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0 \Rightarrow (P_m(x))^{(n)} = \begin{cases} a_m m!, & n = m; \\ 0, & n > m; \end{cases}$	
$(x^\alpha)^{(n)} = \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1) \cdot x^{\alpha-n}, \quad x > 0, \alpha \in \mathbb{R};$	$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}, \quad x \neq 0;$
$(a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a, \quad 0 < a \neq 1;$	$(e^x)^{(n)} = e^x;$
$(\log_a x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)!}{x^n \cdot \ln a}, \quad 0 < a \neq 1, \quad x > 0;$	$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)!}{x^n}, \quad x > 0;$
$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right).$	$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$

Таблиця розкладів елементарних функцій за формулою
Маклорена із залишковим членом у формі Пеано

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n);$	
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n});$	$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n});$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1});$	$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1});$
$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n);$	
$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n);$	$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n).$
$\arcsin x = x + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}x^7 + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!! \cdot (2n+1)}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$	
$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + o(x^{2n});$	

Деякі скінченні суми та добутки

$x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}$	$\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdot \cos \frac{x}{8} \cdot \dots \cdot \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}, x \neq 2^n k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \cdot \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}},$ $x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z};$	$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}},$ $x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z};$

Розширена таблиця основних інтегралів. Нехай $a > 0$

№ пп	$\int f(x)dx = F(x) + C$	№ пп	$\int f(x)dx = F(x) + C$
1.	$\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,$ $x \in (0; +\infty),$		
	$\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ на кожному з проміжків $(-\infty; 0), (0; +\infty),$	2.	$\int \frac{dx}{x-a} = \ln x-a + C$ на кожному з проміжків $(-\infty; a), (a; +\infty),$
3.	$\int e^x dx = e^x + C, x \in \mathbb{R},$	4.	$\forall a > 0, a \neq 1 \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, x \in \mathbb{R},$
5.	$\int \sin x dx = -\cos x + C, x \in \mathbb{R},$	6.	$\int \cos x dx = \sin x + C, x \in \mathbb{R},$
7.	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$ на кожному з проміжків $(-\pi/2 + \pi n; \pi/2 + \pi n), n \in \mathbb{Z},$	8.	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$ на кожному з проміжків $(\pi n; \pi + \pi n), n \in \mathbb{Z},$
9.	$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C, x \in \mathbb{R},$	10.	$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C, x \in \mathbb{R},$
11.	$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C, x \in \mathbb{R},$	12.	$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$ на кожному з проміжків $(-\infty; 0), (0; +\infty),$
13.	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \\ -\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \end{cases} x \in \mathbb{R}$	14.	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C, \\ -\operatorname{arccos} \frac{x}{a} + C, \end{cases} x \in (-1; 1)$

15.	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$ на кожному з проміжків $(-\infty; a)$, $(a; +\infty)$,	16.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + C$ (для знака мінус на кожному з проміжків $(-\infty; a)$, $(a; +\infty)$; для знака плюс $x \in \mathbb{R}$),
17.	$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$ ($ x \leq a$), $x \in [-a; a]$,		
18.	$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + C$ (для знака мінус на кожному з проміжків $(-\infty; -a]$, $[a; +\infty)$; для знака плюс $x \in \mathbb{R}$).		

Рекурентна формула обчислення інтеграла $K_\lambda = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^\lambda}$:

$$K_\lambda = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^\lambda} = \frac{1}{a^2} \left[\frac{2\lambda - 3}{2(\lambda - 1)} K_{\lambda-1} + \frac{x}{2(\lambda - 1)(x^2 + a^2)^{\lambda-1}} \right] \quad (\lambda \in \mathbb{N}),$$

де $K_1 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$.

Інтегрування частинами. Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ диференційовні на X , тоді

- з існування на X невизначеного інтеграла $\int u(x)d(v(x))$ випливає існування інтеграла $\int v(x)d(u(x))$,
- має місце формула

$$\int u(x)d(v(x)) = u(x)v(x) - \int v(x)d(u(x))$$

Основні класи функцій, що інтегруються частинами

Клас	Види інтегралів	Перша функція-множник	Друга функція-множник під інтегралом	Заміни	Зауваження
А	$\int P_n(x)f(x)dx$ та інтеграли, що зводяться до них	$P_n(x)$ – багато-член, $\deg P_n = n$	$f(x) = \begin{bmatrix} \sin(bx), \\ \cos(bx), \\ e^{bx}, a^{bx}, \\ \frac{1}{\cos^2(bx)}, \\ \frac{1}{\sin^2(bx)}, \\ \text{і т.п.} \end{bmatrix}$	$u = P_n(x)$, $dv = f(x)dx$.	Формула інтегрування частинами застосовується n разів
Б.	$\int g(x)P_n[\varphi(x)]dx$ або $\int g(x)\varphi[f(x)]dx$ та інтеграли, що зводяться до них	$g(x)$ – дробово-лінійна функція, зокрема багато-член	$\varphi(x) = \begin{bmatrix} \arcsin(bx), \\ \arccos(bx), \\ \operatorname{arctg}(bx), \\ \operatorname{arcctg}(bx), \\ \ln(bx), \dots \end{bmatrix}$ $P_n(x)$ – многочлен, $\deg P_n = n$	$u = P_n[\varphi(x)]$, $dv = g(x)dx$, відповідно $u = \varphi[f(x)]$, $dv = g(x)dx$ (або методом підстановки $t = \varphi(x)$, відповідно $t = \varphi[f(x)]$)	У першому випадку інтегрувати частинами n разів
В	$\int e^{ax} \cos bxdx$, $\int e^{ax} \sin bxdx$ та інтеграли, що зводяться до них			Двічі $u = e^{ax}$, $dv = \cos bx dx$ ($dv = \sin bx dx$) або двічі $u = \cos bx$ ($u = \sin bx$), $dv = e^{ax} dx$	Двічі інтегрувати частинами. Див. приклад 2.5, 3)

Деякі інтеграли, що не виражаються в елементарних функціях	
1)	інтеграл Пуассона (інтеграл помилок) $\int e^{-\frac{x^2}{2}} dx$,
2)	інтеграли Френеля $\int \cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx$, $\int \sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx$,
3)	інтегральний логарифм $\int \frac{dx}{\ln x}$, $x > 0, x \neq 1$,
4)	інтегральні косинус і синус $\int \frac{\cos x}{x} dx$, $\int \frac{\sin x}{x} dx$

Інтегрування підстановкою. Якщо функція $t = \varphi(x)$ визначена й диференційовна на множині X і має множину визначення $T = \varphi(X)$, а для функції $g(t)$ на множині T існує первісна $G(t)$, тобто $\int g(t)dt = G(t) + C$, тоді на X функція $g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ має первісну, що дорівнює $G(\varphi(t))$, тобто

$$\int g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = G(\varphi(x)) + C$$

Інтеграл типу $\int R(\sin x, \cos x) dx$ в загальному випадку знаходиться універсальною тригонометричною підстановкою: $t = \tan \frac{x}{2}$, $x \in (-\pi, \pi)$.

Окремі випадки:

1) $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) \Rightarrow$ заміна $t = \cos x$,

2) $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) \Rightarrow$ заміна $t = \sin x$,

3) $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) \Rightarrow$ заміна $t = \tan x$.

Інтеграл типу $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+h}}\right) dx$ знаходиться підстановкою $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+h}}$.

Для **інтеграла типу** $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$ універсальними є підстановки Ейлера:

перша підстановка Ейлера $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x\sqrt{a} + t$, якщо $a > 0$;

друга підстановка Ейлера $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm \sqrt{c} + xt$, якщо $c > 0$;

третя підстановка Ейлера $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = t(x-x_1)$.

Окремі випадки:

Інтеграл типу $\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$, де $\deg P(x) = n$ знаходиться поданням його сумою

$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, де $Q(x)$ – многочлен з невизначеними

коефіцієнтами такий, що $\deg Q(x) = n-1$, а λ – невизначений коефіцієнт.

Інтеграл типу $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^k \cdot \sqrt{ax^2+bx+c}}$, $k \in \mathbb{N}$ знаходиться заміною $t = \frac{1}{x-\alpha}$.

Інтеграл типу $\int \frac{Mx+N}{(x^2+pq+q)^\lambda \cdot \sqrt{ax^2+bx+c}} dx$, $\lambda \in \mathbb{N}$ знаходиться за допомогою заміни Абеля

$t = \left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)' = \frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}$ та інших.

Біноміальний диференціал $\int x^m (a+bx^n)^p dx$, $m, n, p \in \mathbb{Q}$, $a, b \in \mathbb{R}$ знаходиться за допомогою заміни І. Ньютона–П.Л. Чебишева:

1) якщо $p \in \mathbb{Z}$, λ – спільний знаменник дробів m, n , тоді $t = \sqrt[\lambda]{x}$;

2) якщо $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, v – знаменник дробу p , тоді $t = \sqrt[v]{a+bx^n}$;

3) якщо $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$, v – знаменник дробу p , тоді $t = \sqrt[v]{ax^{-n}+b}$.

Основна теорема інтегрального числення, формула Ньютона-Лейбніца. Якщо $f(x)$ – неперервна на $[a, b]$, а $F(x)$ – одна з її первісних, то має місце формула

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$$

Заміна змінної під знаком визначеного інтеграла.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) - \text{неперервна на } [a, b]; \\ x = \varphi(t) - \text{неперервно диференційовна на } [\alpha, \beta]; \\ \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b, \\ \varphi[\alpha, \beta] = [a, b] \text{ (образ відрізка } [\alpha, \beta] \text{ збігається з відрізком } [a, b]); \end{array} \right\} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Інтегрування частинами під знаком визначеного інтеграла. Якщо $u(x)$ і $v(x)$ – неперервно диференційовні на $[a, b]$, тоді виконується формула:

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)du(x)$$

Формули обчислення інтеграла від $\sin^n x$ і $\cos^n x$ на відрізку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot D_n, \quad D_n = \begin{cases} 1, & n - \text{непарне,} \\ \frac{\pi}{2}, & n - \text{парне,} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

Формули для обчислення довжин кривих:

гладка крива задана параметрично: $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [t_0, T] \text{ (} \varphi(t) \text{ і } \psi(t) \text{ – неперервно диференційовні на } [t_0, T] \text{)}$	$ L = \int_{t_0}^T \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt = \int_{t_0}^T \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt;$
гладка крива задана явно: $y = f(x)$ – неперервно диференційовна на $[a, b]$	$ L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx;$
гладка крива задана в полярній системі координат: $\rho = \rho(\varphi)$ – неперервно диференційовна на $[\alpha, \beta]$	$ L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi.$

Геометричний зміст визначеного інтеграла Рімана. Визначений інтеграл Рімана від неперервної невід'ємної на $[a, b]$ функції $f(x)$ – це площа криволінійної трапеції D , утвореної графіком цієї функції, віссю абсцис і прямими $x = a$, $x = b$ (рис. А.1), тобто

$$S(D) = \int_a^b f(x)dx$$

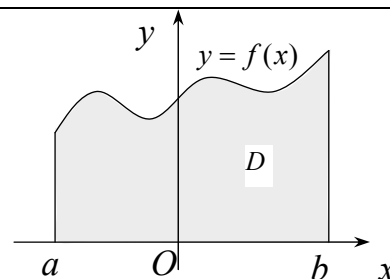


Рис. А.1.

Площа плоскої фігури D , що обмежена на декартовій площині графіками неперервних на відрізку $[a, b]$ функцій $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, де $f_2(x) \leq f_1(x)$, відрізками прямих $x = a$, $x = b$ (рис. А.2), обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) dx$$

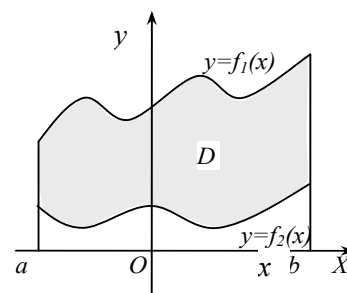


Рис. А.2.

Криволінійний сектор OAB (рис. А.3), обмежений графіком неперервної функції $\rho = \rho(\varphi)$ у полярній системі координат і двома півпрямими $\varphi = \alpha$ і $\varphi = \beta$ ($\alpha < \beta$), є кватральною областю, **площа** якого дорівнює

$$S(D) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi$$

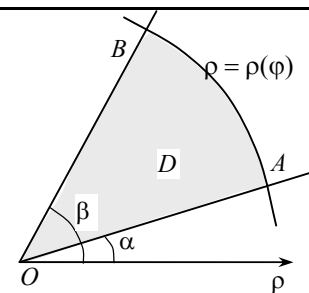


Рис. А.3.

Якщо тіло T утворене обертанням криволінійної трапеції $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge 0 \leq y \leq f(x)\}$ (тут $f(x)$ – неперервна функція на $[a, b]$) **навколо осі** Ox , то це тіло T є кубовним, а його **об'єм** дорівнює

$$V_x = V(T) = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Об'єм тіла, утвореного обертанням **навколо осі** Ox плоскої фігури D , що обмежена на декартовій площині графіками неперервних на відрізку $[a, b]$ функцій $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, де $0 \leq f_2(x) \leq f_1(x)$, відрізками прямих $x = a$, $x = b$ (фігуру D див на рис. А.2), обчислюється за формулою

$$V_x = \pi \int_a^b (f_1^2(x) - f_2^2(x)) dx$$

Об'єм тіла, утвореного обертанням **навколо осі** Oy криволінійної трапеції $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge 0 \leq y \leq f(x)\}$, де $f(x)$ – однозначна неперервна функція на $[a, b]$, дорівнює

$$V_y = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) dx$$

Формули для обчислення площ поверхонь обертання навколо осі абсцис гладких кривих ($y \geq 0$):

загальний випадок: $\begin{cases} x = x(s), \\ y = y(s), \end{cases} \quad s \in [0, L] \quad (x(s) \text{ і } y(s) - \text{ неперервно диференційовні на } [0, L], s - \text{ параметр довжини дуги})$		$P_x = 2\pi \cdot \int_0^{ L } y(s) ds ;$
гладка крива задана параметрично: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [t_0, T] \quad (x(t) \text{ і } y(t) - \text{ неперервно диференційовні на } [t_0, T])$		$P_x = 2\pi \cdot \int_{t_0}^T y(t) \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt ;$
гладка крива задана явно: $y = f(x)$ – неперервно диференційовна на $[a, b]$		$P_x = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx ;$
гладка крива задана в полярній системі координат: $\rho = \rho(\varphi)$ – неперервно диференційовна на $[\alpha, \beta]$		$P_\rho = 2\pi \cdot \int_{\alpha}^{\beta} \rho(\varphi) \cdot \sin \varphi \cdot \sqrt{\rho^2 + (\rho'_\varphi)^2} d\varphi$

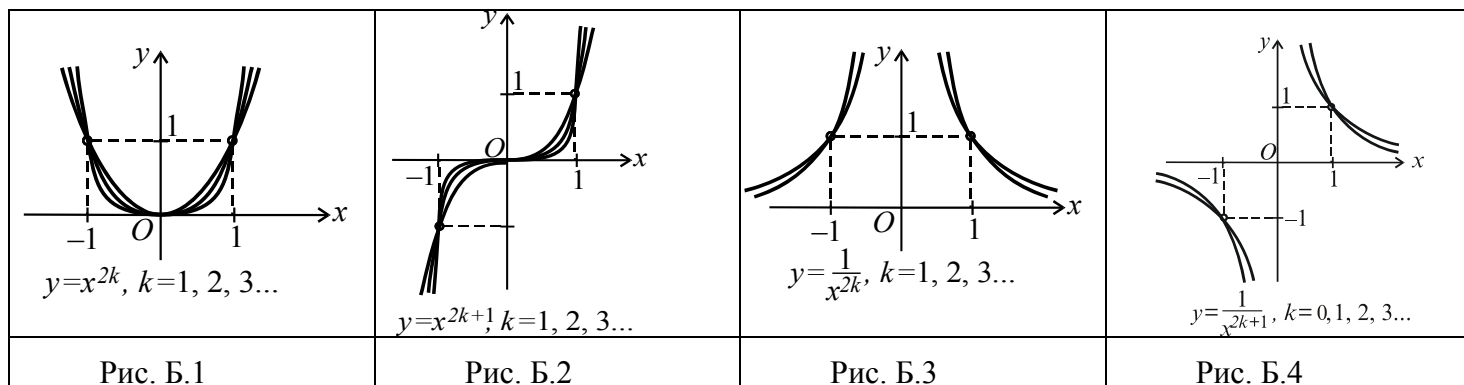
Збіжність невластних інтегралів від степеневих функцій:

$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$ $(a > 0)$	збігається при $\lambda > 1$,	$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$	збігається при $\lambda < 1$,
	розбігається при $\lambda \leq 1$,		розбігається при $\lambda \geq 1$

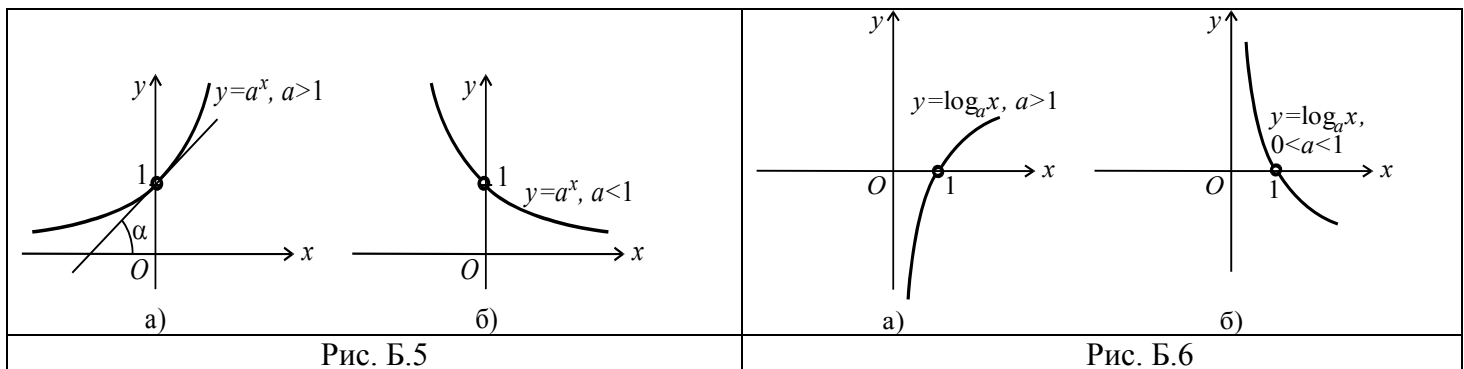
ДОДАТОК Б. ГРАФІКИ ДЕЯКИХ КРИВИХ ТА ПОВЕРХОНЬ

Графіки елементарних функцій

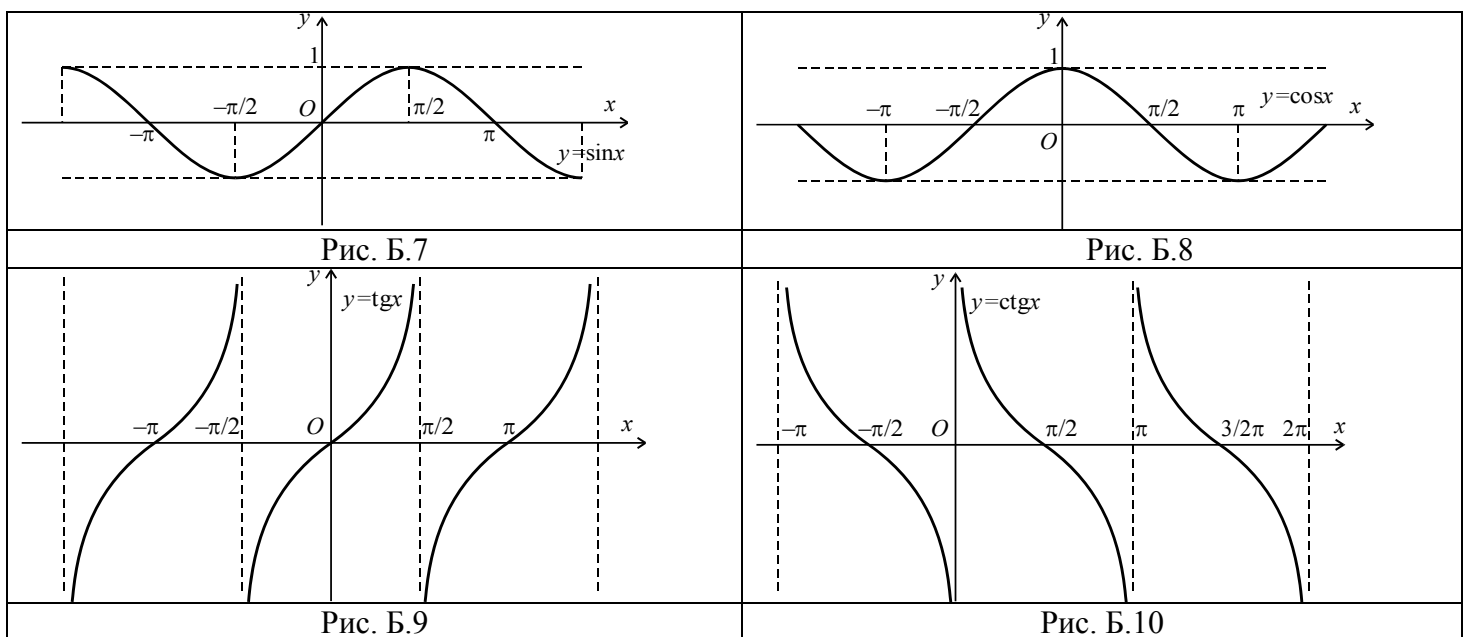
Графіки деяких степеневих функцій наведені на рис. Б.1 – Б.4.



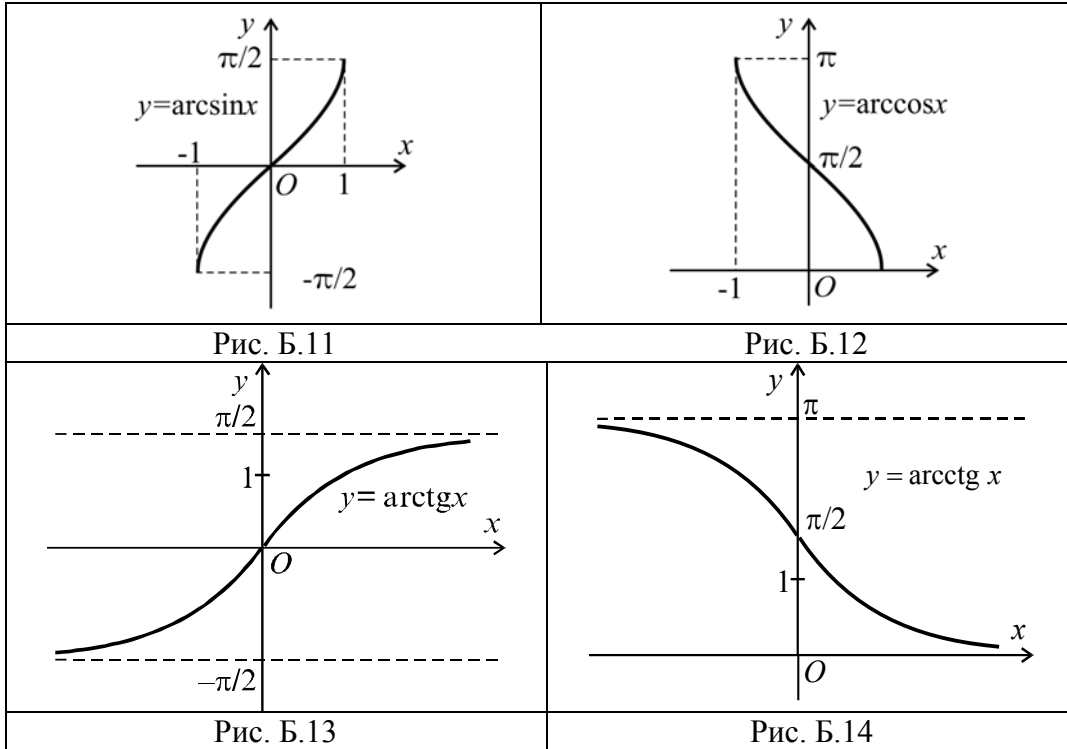
Графіки показникових і логарифмічних функцій для випадків $a > 1$ і $0 < a < 1$ наведено на рис. Б.5 а, б і рис. Б.6 а, б відповідно.



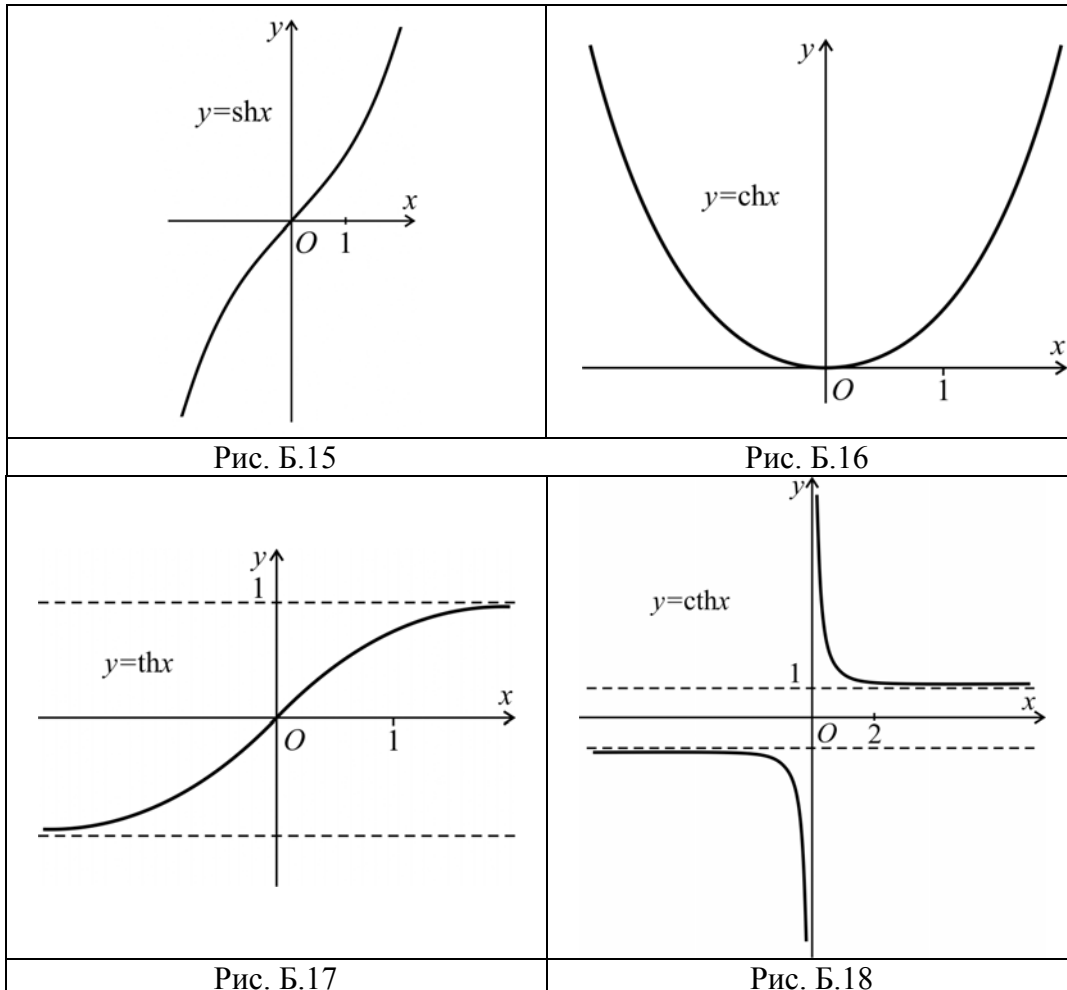
Графіки тригонометричних функцій $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ б $y = \operatorname{ctg} x$ зображено на рис. Б.7 – Б.10.



Графіки зворотних до тригонометричних функцій $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctg x$, $y = \operatorname{arccctg} x$ зображено на рис. Б.11 – Б.14



Графіки гіперболічних функцій $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{ch} x$, $y = \operatorname{th} x$, $y = \operatorname{cth} x$ зображено на рис. Б.15 – Б.18



Криві другого порядку

1. Еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (Рис. Б.19).

2. Гіпербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (Рис. Б.20).

3. Парабола $y^2 = 2px$ (Рис. Б.21).

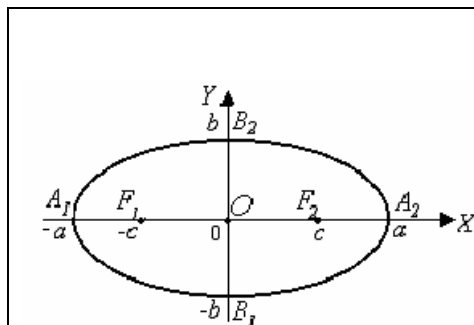


Рис. Б.19

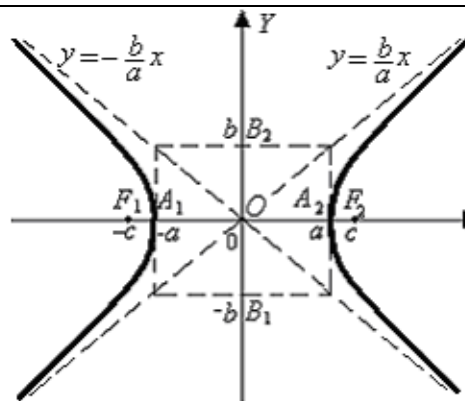


Рис. Б.20

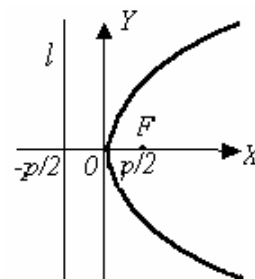


Рис. Б.21

Графіки деяких кривих, що задані параметрично:

1) На рис. Б.22 зображено графік розгортки кола $\begin{cases} x = \cos t + t \sin t, \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$ при а) $-4\pi \leq t \leq 4\pi$, б) $-2\pi \leq t \leq 2\pi$, в) $0 \leq t \leq 2\pi$;

2) на рис. Б.23 – графік циклоїди $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ при $-4\pi \leq t \leq 4\pi$;

3) на рис. Б.24 – графік астроїди $\begin{cases} x = \sin^3 t, \\ y = \cos^3 t \end{cases}$ при $0 \leq t \leq 2\pi$;

4) на рис. Б.25 – графік кривої $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 2t^2 - t^3 \end{cases}$ при $0 \leq t \leq 2$.

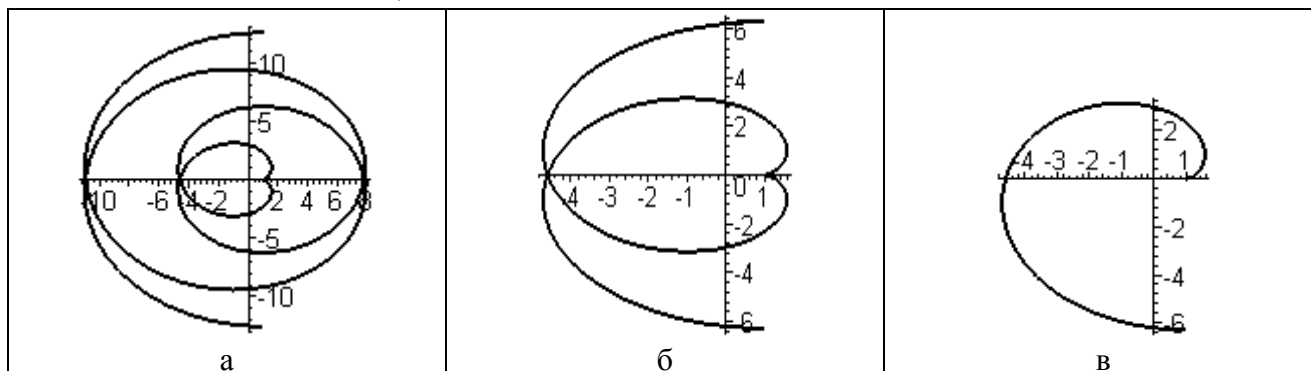


Рис. Б.22

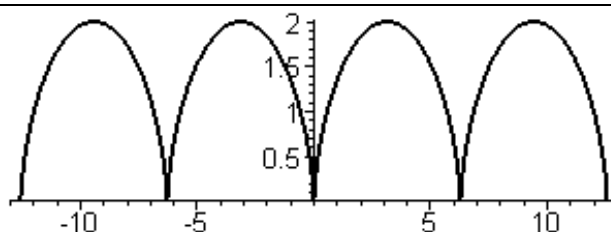


Рис. Б.23

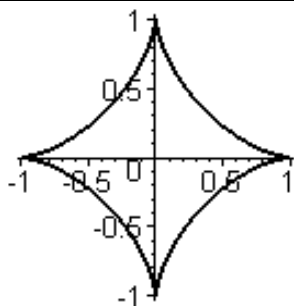


Рис. Б.24

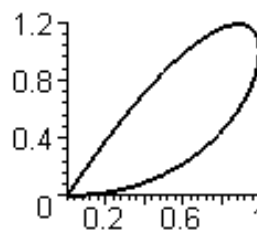


Рис. Б.25

Графіки деяких кривих, що задані в полярній системі координат

- 1) На рис. Б.26 зображено графік кардіоїди $\rho = 1 + \cos \varphi$;
- 2) на рис. Б.27 – графік трилисника $\rho = \sin 3\varphi$;
- 3) на рис. Б.28 – графіки лемніскат а) $\rho = \sqrt{\sin 2\varphi}$, б) $\rho = \sqrt{\cos 2\varphi}$;
- 4) на рис. Б.29 – графік кривої $\rho = \cos^4 \frac{\varphi}{4}$ при а) $-2\pi \leq \varphi \leq 2\pi$; б) $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, в) $\pi \leq \varphi \leq 3\pi$;
- 5) на рис. Б.30 – графіки кривих а) $\rho = \frac{1}{\cos^4 \frac{\varphi}{4}}$ при $-\pi \leq \varphi \leq \pi$; б) $\rho = \sin^5 \frac{\varphi}{5}$ при $\frac{3\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{7\pi}{2}$; в)

$$\rho = \frac{1}{\cos^5 \frac{\varphi}{5}} \text{ при } -\pi \leq \varphi \leq \pi.$$

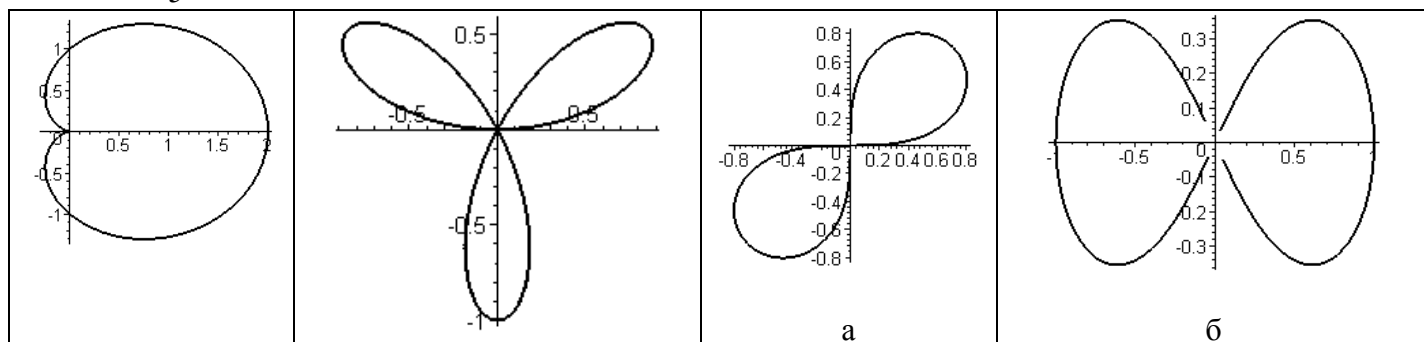


Рис. Б.26

Рис. Б.27

Рис. Б.28

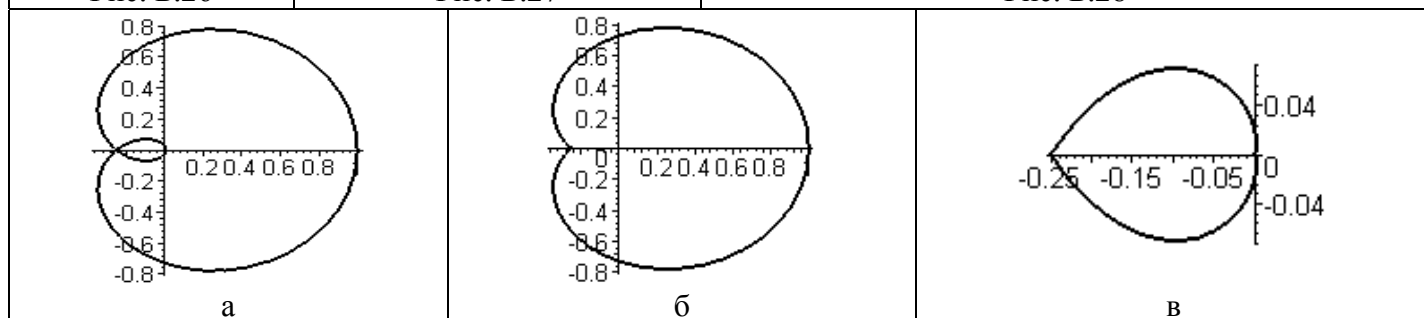


Рис. Б.29

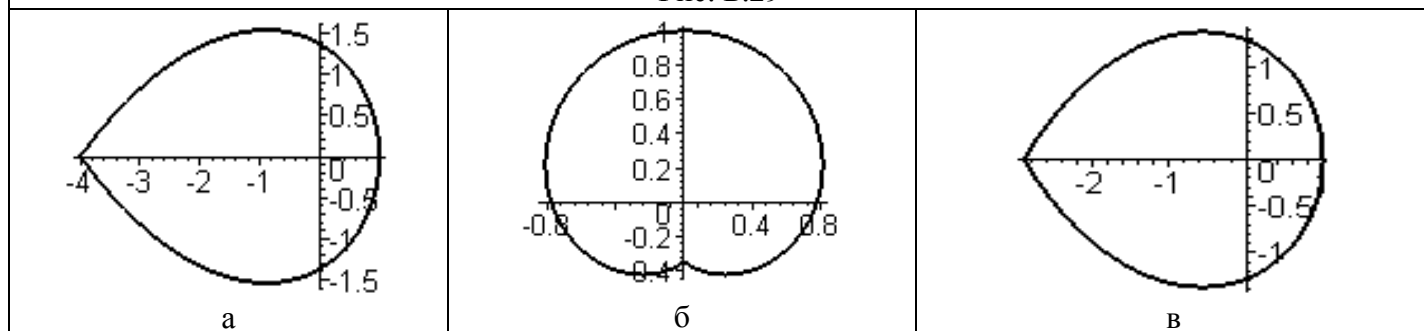


Рис. Б.30

Поверхні другого порядку

1. Еліпсоїд $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (рис. Б.31)
2. Однополосний гіперболоїд $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (рис. Б.32)/
3. Двуполосний гіперболоїд $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ (рис. Б.33).

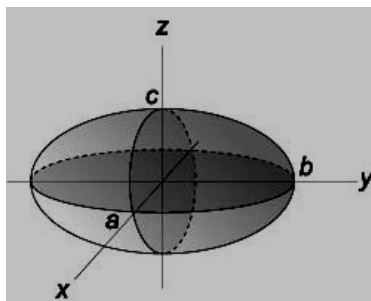


Рис. Б.31

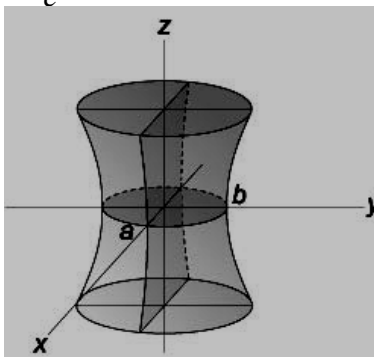


Рис. Б.32

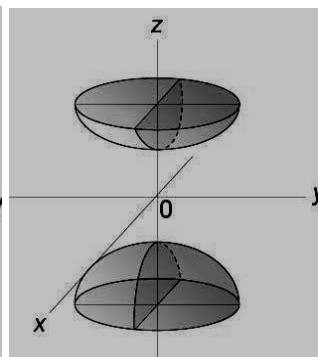


Рис. Б.33

4. Конічна поверхня $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ (рис. Б.34).
5. Еліптичний параболоїд $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$ (рис. Б.35).
6. Гіперболічний параболоїд $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$ (рис. Б.36).

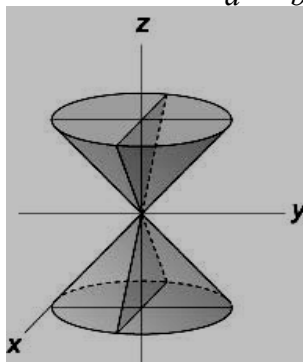


Рис. Б.34

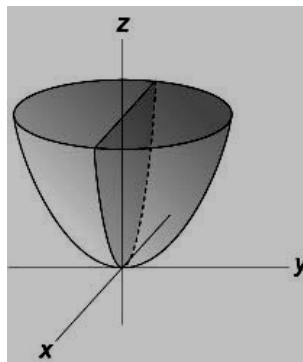


Рис. Б.35

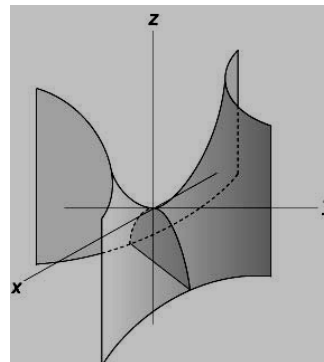


Рис. Б.36

7. Еліптичний циліндр $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (рис. Б.37).
8. Гіперболічний циліндр $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (рис. Б.38).
9. Параболічний циліндр $\frac{x^2}{a^2} - y = 0$ (рис. Б.39).

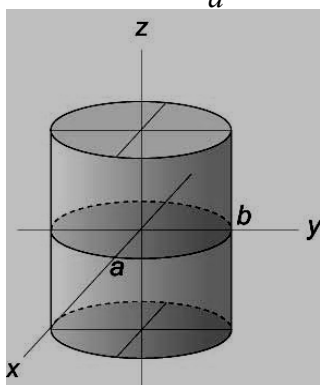


Рис. Б.37

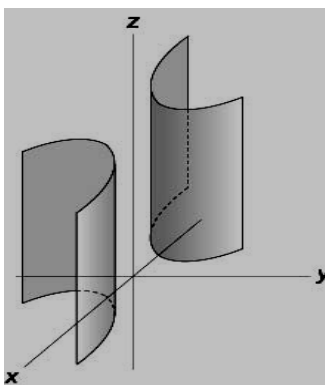


Рис. Б.38

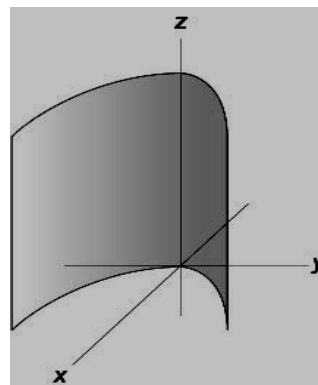


Рис. Б.39