ТЕМА 1. ВСТУП ДО АНАЛІЗУ. МНОЖИНИ, ФУНКЦІЇ, ПОСЛІДОВНОСТІ

1.1 Множини та операції над ними

Одним з основних понять математики, яким не надається строгого означення, є поняття множини. Під *множиною* розуміють сукупність деяких об'єктів, об'єднаних певною ознакою. Прикладами множин є множина студентів першого курсу, множина риб у Дніпрі, множина дільників числа 12 тощо.

Об'єкти, з яких складається множина, називають її *елементами*. Множини позначають великими латинськими літерами (A, B, C,…, X, Y, Z…), а їх елементи – малими літерами (a, b, c,…, x, y, z…). Якщо елемент x належить множині X, то використовують запис: $x \in X$. Запис $x \notin X$ означає, що елемент x не належить множині X. Множину, що не містить жодного елемента, називають порожньою множиною та позначають $\varnothing$. Для запису елементів множини використовують фігурні дужки, всередині яких записують елементи цієї множини (якщо це можливо), або вказують загальну властивість всіх елементів даної множини.

Наприклад, запис $A = \{1, 3, 9\}$ означає, що множина A складається з трьох чисел – 1, 3 та 9. Запис $\{x \in \mathbb{N} : x \le 100\}$, де $\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел, означає, що множина A складається з всіх натуральних чисел, що не перевищують 100.

<u>**Означення 1.1.**</u> Множину A називають *підмножиною* множини B (символічний запис має вигляд: $A \subset B$ – «A включається у B»), якщо кожний елемент множини A є також елементом множини B.

<u>**Означення 1.2.**</u> Говорять, що множини A та B є *рівними або співпадають* ($A = B$), якщо $A \subset B$ і при цьому $B \subset A$, тобто множини є рівними, якщо вони складаються з одних і тих же елементів.

<u>**Означення 1.3.**</u> *Об'єднанням* або *сумою* множин A та B називають множину C, що складається з елементів, що належать хоча б одній з множин: A чи B. Для об'єднання множин використовують записи $C = A \cup B$ або $C = A + B$.

<u>**Означення 1.4.**</u> *Перерізом або добутком* множин A та B називають множину що складається з елементів, кожний з яких належить множині A та множині B. Якщо множина C є перерізом множин A та B, то для неї використовують позначення $C = A \cap B$ або $C = AB$.

Якщо розглядаються лише підмножини деякої множини U, то множину U називають *універсальною або основною* множиною.

<u>**Означення 1.5.**</u> *Доповненням до множини* A називають множину $U \setminus A$ та позначають $\bar{A}$.

Множина $\bar{A}$ складається з усіх елементів універсальної множини U, що не належать множині A.

Означення 1.6. Множину C, що складається з усіх елементів, що належать множині A і не належать множині B, називають *різницею множин* A та B. Для різниці множин використовують позначення $C = A \setminus B$. За означенням, маємо: $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Приклад 1.1. Нехай $A = \left\{ x : x^2 - 5x + 6 = 0 \right\}$, $B = \{1, 3\}$. Знайти $A \cup B$, $A \cap B$ та $A \setminus B$.

Розв'язання. Рівняння $x^2 - 5x + 6 = 0$ має корені $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, тобто $A = \{2, 3\}$. Тоді $A \cup B = \{1, 2, 3\}$, $A \cap B = \{3\}$, $A \setminus B = \{2\}$ ∎

Означення 1.7. *Декартовим добутком* $C = A \times B$ множин A та B називають множину всіх впорядкованих пар (a, b), де $a \in A,\ b \in B$.

Приклад 1.2. Нехай множина $A = \{1,\ 2,\ 3\}$, и множина $B = \{2,\ 5\}$. Декартовий добуток $C = A \times B = \{(1,\ 2),\ (2,\ 2),\ (3, 2), (1, 5), (2, 5), (3, 5)\}$. * A×B

Означення 1.8. *Відповідністю* між непорожніми множинами A та B називають будь-яку множину $C \subset A \times B$. При цьому, якщо $(a, b) \in C$, то кажуть, що елемент b відповідає елементу a, та використовують позначення $a \to b$.

Означення 1.9. Якщо існує така відповідність між множинами A та B, що кожному елементу множини A відповідає один елемент множини B, а кожний елемент множини B – одному елементу з A, то таку відповідність називають *взаємно однозначною*, а множини A та B – *еквівалентними*. Використовують запис: $A \sim B$.

Приклад 1.3. Множини $A = \{1, 2\}$ та $B = \{7, 8\}$ є еквівалентними, оскільки між ними можна встановити взаємно однозначну відповідність $\{(1, 8), (2, 7)\}$.

У подальшому для скорочення записів будемо використовувати деякі найпростіші логічні символи:

$\alpha \Rightarrow \beta$ (символ імплікації) – з твердження α випливає твердження β;

$\alpha \Leftrightarrow \beta$ (символ еквівалентності) – твердження α та β є рівносильними;

$\forall$ (квантор загальності) – для будь-якого;

$\exists$ (квантор існування) – існує, знайдеться;

$\exists!$ (символ єдиності) –існує єдиний;

$\overline{A}$ або $\neg A$ (символ заперечення) – не A;

$A \wedge B$ (символ кон'юнкції) – A і B;

$A \vee B$ (символ диз'юнкції) – A або B;

$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$

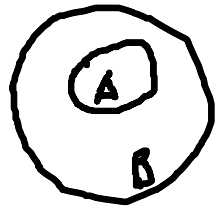
$5! =$

Наприклад, запис $\forall x \in A\, \exists y \in B$ означає, що для довільного елемента x з множини A існує елемент y з множини B.

Запис $x \in (A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B)$ є означенням об'єднання множин, а запис $x \in (A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)$ – це означення перерізу множин.

Наведемо основні властивості дій з множинами.

1. $A \cup B = B \cup A$.
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$.



3. $(A \subset B) \Rightarrow (A \cup B = B)$.
4. $A \cup A = A$.
5. $A \cup \varnothing = A$.
7. $A \cap B = B \cap A$.
8. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$.
9. $(A \subset B) \Rightarrow (A \cap B = A)$.
10. $A \cap \varnothing = \varnothing$.
11. $A \cap A = A$.
12. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
13. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
14. $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$.
15. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.
16. $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Приклад 1.4. Довести властивість 12.

Розв'язання. Покажемо, що множини, які знаходяться у лівій та правій частинах рівності $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, є рівними.

Нехай $x \in (A \cup B) \cap C$. Тоді $x \in A \cup B \wedge x \in C$. Оскільки $x \in A \cup B$, то $x \in A \vee x \in B$. Якщо $x \in A \wedge x \in C$, то $x \in A \cap C$, а якщо $x \in B \wedge x \in C$, то $x \in B \cap C$. Звідси $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Отже, отримуємо:

$$(A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C). \tag{1.1}$$

Нехай $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Тоді або $x \in (A \cap C)$, або $x \in (B \cap C)$. Якщо $x \in (A \cap C)$, то $x \in A \wedge x \in C$. Оскільки $x \in A$, то $x \in A \cup B$. Оскільки при цьому $x \in C$, то $x \in (A \cup B) \cap C$. Якщо ж $x \in B \cap C$, то $x \in B \wedge x \in C$. Оскільки $x \in B$, то $x \in A \cup B$. Отже, $x \in (A \cup B) \cap C$. Звідси випливає:

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap C. \tag{1.2}$$

З співвідношень (1.1) та (1.2) і означення 1.2 випливає, що

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

Приклад 1.5. Довести властивість 15.

Розв'язання. Доведемо, що $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$. Маємо:

$$\left(x \in \overline{A \cup B}\right) \Leftrightarrow \left(x \notin (A \cup B)\right) \Leftrightarrow (x \notin A \wedge x \notin B) \Leftrightarrow \left(x \in \bar{A} \wedge x \in \bar{B}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(x \in \bar{A} \cap \bar{B}\right).$$

Отже, $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

<u>Означення 1.10.</u> Множину, яка складається зі скінченної кількості елементів, називають *скінченною*, у протилежному випадку – *нескінченною*.

Прикладом скінченної множини є множина коренів рівняння $x^3 - 4x^2 + 3x = 0$. Множина всіх непарних чисел є нескінченною.

Скінченні множини можна порівнювати за кількістю їх елементів. Для нескінченних множин вводять поняття *потужності*, як узагальнення кількості їх елементів. Еквівалентні множини називають *рівнопотужними*.

1.2 Основні числові множини

Множини, елементами яких є числа, називають *числовими множинами*. До основних числових множин відносяться:

1) множина *натуральних* чисел $\mathbb{N} = \{1, 2, ..., n, ...\}$; $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}_0 \subset \mathbb{Z}$
2) множина *цілих невід'ємних* чисел $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$;
3) множина *цілих* чисел $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm n, ...\}$; $\frac{1}{2} = 0,5000...$
4) множина *раціональних* чисел $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$; $\frac{1}{3} = 0,33...$
5) множина *дійсних* чисел $\mathbb{R} = \{x : x = \alpha, \alpha_1 \alpha_2 ...\}$, де $\alpha \in \mathbb{Z}$, α_i, $i = 1, 2, ...,$ – цифри десяткової системи числення. $\pi = 3,1415926...$ $\sqrt{2}$

Між цими множинами існує зв'язок: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Всі наведені вище основні числові множини є нескінченними.

У подальшому ми розглянемо також множину комплексних чисел, підмножиною якої є множина $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Множина дійсних чисел містить раціональні та *ірраціональні* числа. Всяке раціональне число є цілим числом, або скінченним чи нескінченним періодичним десятковим дробом. Ірраціональне число виражається нескінченним неперіодичним десятковим дробом. Прикладами таких чисел є $\sqrt{2}$, або число π – відношення довжини круга до його діаметру. Дійсні числа зображають точками на числовій прямій.

Приклад 1.6. Довести, що число $\sqrt{2}$ є ірраціональним.

Розв'язання. Допустимо, що $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, тобто $\sqrt{2}$ є раціональним числом. За означенням раціонального числа, $\exists p \in \mathbb{N}$, $\exists q \in \mathbb{N}$: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $\frac{p}{q}$ є нескоротним дробом. Тоді $\frac{p^2}{q^2} = 2$, $p^2 = 2q^2$. Звідси випливає, що p є парним числом: $p = 2k$. Тоді $4k^2 = 2q^2$, тобто $q^2 = 2k^2$, звідки випливає, що q є парним числом. Проте, за припущенням, $\frac{p}{q}$ є нескоротним дробом. Отримане протиріччя доводить, що $\sqrt{2}$ не є раціональним числом.

<u>Означення 1.11.</u> Якщо нескінченна числова множина A є еквівалентною множині натуральних чисел $\mathbb{N}$, то множину A називають *зліченною*.

$\{x : x = 2k,\ k \in N\}$ $\quad x \leftrightarrow k$

Прикладами зліченних множин є множина всіх парних натуральних чисел, множина всіх дробів, що мають вигляд $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, множина всіх цілих чисел. Можна довести, що множина всіх раціональних чисел є зліченною.

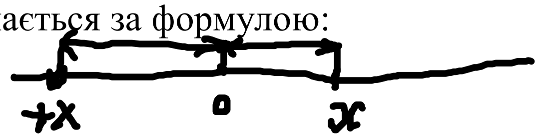
<u>Означення 1.12.</u> Якщо нескінченна числова множина A є еквівалентною множині B всіх точок відрізку $[0;1]$, то множину A називають *континуальною.*

Континуальними множинами є будь-які відрізки $[a;b]$ на числовій прямій, множина ірраціональних чисел. Можна довести, що множина всіх дійсних чисел є континуальною.

Нехай x_0 – довільне дійсне число. *Околом точки* x_0 називають будь-який інтервал $(\alpha;\beta)$, що містить цю точку. Інтервал $(x_0-\varepsilon; x_0+\varepsilon)$, де $\varepsilon > 0$, називають ε-*околом* точки x_0, причому точку x_0 називають *центром*, а ε – *радіусом* цього околу.

<u>Означення 1.13</u> *Модулем (абсолютною величиною)* дійсного числа x називають число $|x|$, що визначається за формулою:

$$|x| = \begin{cases} x, x \ge 0; \\ -x, x < 0. \end{cases}$$



З геометричної точки зору число $|x|$ визначає відстань від початку відліку – точки O на числовій прямій до точки, що відповідає на числовій прямій числу x. Якщо a – довільне дійсне число, то арифметичний квадратний корінь $\sqrt{a^2} = |a|$. $\quad \sqrt{(a-b)^2} = |a-b|$

Сформулюємо основні властивості модуля дійсного числа:

1. Рівні або протилежні за знаком числа мають рівні між собою модулі: $a = \pm b \Leftrightarrow |a| = |b|$.
2. Модуль числа є невід'ємною величиною: $|a| \ge 0$.
3. Число не перевищує свого модуля: $a \le |a|$.
4. Модуль суми двох чисел не перевищує суми їхніх модулів: $|x+y| \le |x| + |y|$.
5. Модуль різниці двох чисел не менший різниці їх модулів: $|x-y| \ge |x| - |y|$.
6. Модуль добутку двох чисел дорівнює добутку їх модулів: $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.
7. Модуль частки дорівнює частці модулів діленого і дільника: $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, y \ne 0$.
8. $\forall a \ge 0\ |x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a \Leftrightarrow x \in [-a;a]$.
9. $\forall a \ge 0\ |x| > a \Leftrightarrow x \in (-\infty;-a) \cup (a;+\infty)$.

Приклад 1.7. Розв'язати нерівність $|x-2| > 1$.

$|x| \le 2$

$x \in [-2;2]$

$|x| < 1$

$x \in (-1;1)$

$|x| > 2 \quad x \in (-\infty;-2) \cup$

$\cup (2;+\infty)$

$\left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < -2 \end{array}\right.$

Розв'язання. За властивістю 9 дана нерівність рівносильна сукупності нерівностей:

$$\left[\begin{array}{l} x-2<-1; \\ x-2>1. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x<1; \\ x>3. \end{array}\right.$$

Звідси випливає, що розв'язком нерівності $|x-2|>1$ є об'єднання проміжків $(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$.

Приклад 1.8. Розв'язати нерівність $|4x-3|<1$.

Розв'язання. За властивістю 8 ця нерівність еквівалентна подвійній нерівності $-1<4x-3<1$. Звідси $2<4x<4$, $0,5<x<1$. Таким чином, розв'язком даної нерівності є інтервал $(0,5;1)$.

max = 7

З властивості 8 випливає, що ε-окіл точки x_0, що визначається нерівністю $x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$, можна записати у вигляді нерівності $|x-x_0|<\varepsilon$.

X = {1,3,5,7}

Нехай X – непорожня множина, елементами якої є дійсні числа.

<u>Означення 1.14.</u> Множину X називають *обмеженою зверху (знизу)*, якщо існує таке число M (m), що $\forall x\in X\ x\le M$ ($\forall x\in X\ x\ge m$). При цьому число M (m) називають *верхньою (нижньою) гранню множини* X.

M=7

m=1

Наприклад, множина всіх натуральних чисел є обмеженою знизу, оскільки $\forall n\in N\ \ n\ge 1$. Проміжок $(-\infty;2)$ є прикладом множини, обмеженої зверху, оскільки $\forall x\in(-\infty;2)\quad x<2$.

<u>Означення 1.15.</u> Числову множину, обмежену зверху та знизу, називають *обмеженою.*

Для обмеженої множини $\exists M,m\ \forall x\in X\ m\le x\le M$.

Прикладом обмеженої множини є множина дробів $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $n\in\mathbb{N}$, оскільки $\forall n\in\mathbb{N}\quad 0\le\frac{1}{n}\le 1.$

X= [0;2)

sup X = 2

inf X = 0

<u>Означення 1.16.</u> Число M називають *точною верхньою гранню* множини X, якщо це число є найменшою з усіх верхніх граней цієї множини. Використовують позначення: $M=\sup X$.

<u>Означення 1.17.</u> Число m зазивають *точною нижньою гранню множини* X, якщо це число є найбільшою з усіх нижніх граней цієї множини. Для позначення точної нижньої грані використовують запис: $m=\inf X$.

Можна довести, що будь-яка обмежена зверху (знизу) множина має точну верхню(нижню) грань.

Означення 1.16 рівносильне тому, що для числа $M=\sup X$ повинні виконуватися наступні умови: 1) $\forall x\in X\ x\le M$; 2) $\forall M_0<M\ \exists x\in X: x>M_0$. Аналогічним чином, для того, що число m було точною нижньою гранню множини X, тобто $m=\inf X$, необхідним та достатнім є виконання наступних умов: 1) $\forall x\in X\ x\ge m$; 2) $\forall m_0>m\ \exists x\in X: x<m_0$.

Приклад 1.9. Знайти точну верхню та точну нижню грані множини всіх правильних дробів m/n, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $m < n$. $\frac{m}{n} < 1$, $\frac{m}{n} > 0$

Розв'язання. Позначимо множину всіх правильних дробів m/n, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $m < n$, через X. Оскільки $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, то $m/n > 0$, тому $a = 0$ є нижньою гранню множини X. Крім того, $\forall a_0 > 0 \ \exists x \in X : \ x < a_0$. Дійсно, якщо $a_0 \geq 1$, то $x = \frac{1}{2} < a_0$. Якщо $0 < a_0 < 1$, то a_0 можна записати у вигляді десяткового дробу $a_0 = 0, x_1 x_2 \ldots x_k \ldots$, причому $\exists n$, таке, що $x_n \neq 0$. Раціональне число $x = 0, x_1 x_2 \ldots x_{n-1} \left(x_n - 1 \right)$ задовольняє нерівність $0 < x < a_0 < 1$, тобто $x \in X$ і при цьому $x < a_0$. Таким чином, число $a = 0$ задовольняє обом умовам точної нижньої грані і $\inf X = 0$.

Оскільки до складу множини X входять лише правильні дроби, то $\forall x \in X$ $x < 1$, тобто число $A = 1$ є верхньою гранню множини X. При цьому $\forall A_0 \in (0;1)$ існує раціональне число x, таке, що $x \in (A_0;1)$, тобто $0 < x < 1 \Leftrightarrow x \in X$. Таким чином, число $A = 1$ задовольняє умовам точної верхньої грані і $\sup X = 1$.

1.3 Метод математичної індукції

Для доведення істинності деякого твердження для довільного натурального числа n, починаючи з деякого n_0, використовують метод математичної індукції. Згідно з цим методом, для доведення істинності даного твердження потрібно довести, що:

1) це твердження є істинним для $n = n_0$;
2) якщо дане твердження виконується для деякого натурального числа $k \geq n_0$, то воно виконується також для наступного натурального числа $k + 1$.

Приклад 1.10. Довести, що $\forall n \in N$ виконується рівність:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Розв'язання. Перевіримо виконання даної рівності при $n = 1$. Маємо $1^2 = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6} = 1$, тобто рівність виконується. Припустимо, що вона виконується для $\forall n = k \in N$, $k \geq 1$, тобто істинною є рівність:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Доведемо, що з цього випливає істинність рівності при $n = k + 1$, тобто для цього значення n ми повинні отримати:

$$1^2+2^2+\ldots+(k+1)^2=\frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Маємо:

$$1^2+2^2+\ldots+(k+1)^2=1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=$$

$$=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}=\frac{(k+1)(k(2k+1)+6(k+1))}{6}=$$

$$=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Таким чином, ми довели, що рівність є істинною при $n=1$ і з істинності рівності при $n=k$ випливає її істинність і при $n=k+1$, тобто, згідно з методом математичної індукції, рівність є істинною $\forall n\in\mathbb{N}$.

Метод математичної індукції використовують також для доведення нерівностей.

Приклад 1.11. Довести, що $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x>-1$ виконується нерівність (нерівність Бернуллі): $(1+x)^n\geq 1+nx$.

Розв'язання. При $n=1$ маємо $1+x\geq 1+1\cdot x$, тобто нерівність виконується. Нехай нерівність Бернуллі є справедливою для деякого натурального числа $n=k\geq 1$, тобто $(1+x)^k\geq 1+kx$. Доведемо, що з цього випливає справедливість нерівності і при $n=k+1$. Оскільки $x>-1$, то $1+x>0$. Помноживши обидві частини нерівності $(1+x)^k\geq 1+kx$ на $1+x$, отримаємо:

$$(1+x)^{k+1}\geq 1+kx+x+kx^2.$$

Відкинувши невід'ємний доданок kx^2 у правій частині, нерівність ми при цьому не змінимо. Отримаємо:

$$(1+x)^{k+1}\geq 1+kx+x=1+(k+1)x.$$

Ми довели, що з істинності нерівності $\forall n=k\in\mathbb{N}$ випливає її істинність для $n=k+1$, тобто, за методом математичної індукції, істинність нерівності Бернуллі доведено.

1.4 Поняття та основні способи задання функції

Певна величина у деякому процесі може набувати різних або однакових числових значень. У першому випадку величину називають *змінною*, у другому – *сталою.* Предметом математичного аналізу є дослідження змінних величин. Вивчаючи певне явище, дослідник здебільшого вивчає кілька змінних величин, які пов'язані між собою так, що зміна деяких з них приводить до зміни інших. Такий взаємозв'язок у математиці виражається за допомогою поняття функції, що ввів у практику наукових досліджень видатний німецький математик Г.В. Лейбніц.

Отже, поняття функції пов'язане з встановленням залежності між елементами двох множин.

<u>Означення 1.18.</u> Якщо кожному числу x з деякої числової множини X за певним правилом поставлене у відповідність єдине число y, то кажуть, що y є *функція* від x і пишуть $y=f(x),\ x\in X$.

Змінну x називають *незалежною змінною*, або *аргументом*, а змінну y – *залежною змінною*, або *функцією*. Під символом f розуміють правило, за яким кожному значенню змінної x ставиться у відповідність значення y, або операції, які потрібно виконати над аргументом x, щоб дістати відповідне значення функції y. Множину X називають *областю визначення функції*. Множину Y всіх чисел y, таких, що $y=f(x)$ для кожного $x\in X$, називають *множиною значень функції*, тобто $Y=\left\{y: y=f(x)\ \forall x\in X\right\}$. Область визначення функції $y=f(x)$ часто позначають $D(y)$, або $D(f)$, а множину значень функції – $E(y)$, або $E(f)$.

Значення функції $y=f(x)$, що відповідає значенню аргументу $x=a$ позначають $f(a)$.

Приклад 1.12. Задана функція $y=f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$. Знайти $f(0)$, $f(2x)$, $2f(x)$, $f\left(x^2\right)$, $\left(f(x)\right)^2$, $f(x+1)$, $f(x)+1$.

Розв'язання. $f(0)=\dfrac{0+1}{0-1}=-1$, $f(2x)=\dfrac{2x+1}{2x-1}$, $2f(x)=2\cdot\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{2x+2}{x-1}$, $f\left(x^2\right)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$, $\left(f(x)\right)^2=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2=\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}$, $f(x+1)=\dfrac{(x+1)+1}{(x+1)-1}=\dfrac{x+2}{x}$, $f(x)+1=\dfrac{x+1}{x-1}+1=\dfrac{2x}{x-1}$

<u>Означення 1.19.</u> *Графіком функції* $y=f(x)$ називають множину всіх точок $(x;y)$ координатної площини Oxy, для кожної з яких x є значенням аргументу, а y – відповідним значенням функції.

Наприклад, графіком функції $y=x^2$ є парабола з вершиною у початку координат, віссю симетрії Ox, вітки якої направлені вгору. Графік функції $y=x$ – це бісектриса першої та третьої чвертей координатної площини.

Щоб задати функцію $y=f(x)$, треба вказати її область визначення $D(y)$, множину значень $E(y)$ та правило f, за яким для довільного аргументу $x\in D(y)$ можна знайти відповідне йому значення функції $y\in E(y)$. Найчастіше використовують три способи задання функції: аналітичний, табличний та графічний.

При використанні *аналітичного способу* задання функції відповідність між аргументом та функцією задають у вигляді однієї або кількох формул (аналітичних виразів). Ці формули визначають, які дії потрібно виконати над значенням аргументу, щоб отримати відповідне значення функції. Якщо при цьому область визначення не вказується, то під нею розуміють область існування відповідного аналітичного виразу. Однією й тією ж формулою можна задавати різні функції, і, навпаки, одна й та сама функція на різних проміжках її області визначення може задаватися різними формулами. Так, функції $y = x^2$, $x \in [0; 1]$ та $y = x^2$, $x \in [2; 4]$ – це різні функції, бо вони мають різні області визначення. Функція

$$y = \begin{cases} 2x^2 + 1, x < 0; \\ x^3 + 2, x \geq 0 \end{cases}$$

визначена на всій числовій прямій, але для від'ємних та невід'ємних значень аргументу вона задається різними формулами.

Областю існування функції можуть бути різноманітні множини: числова пряма, відрізок, відкритий інтервал, кілька відрізків або відкритих інтервалів, множина окремих точок тощо.

Приклад 1.13. Знайти область визначення функції $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt[4]{3-x}$.

Розв'язання. Оскільки у аналітичному виразі для функції $f(x)$ присутні корені парної степені, то область його існування – це множина значень аргументу x, для якого підкореневі вирази є невід'ємними. Таким чином, отримуємо систему:

$$\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 3 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 3 \end{cases}.$$

Отже, $D(f) = [1; 3]$.

Приклад 1.14. Знайти область визначення функції $y = \arcsin x + \sqrt{x-1}$.

Розв'язання. Оскільки $\arcsin x$ визначений при $x \in [-1;1]$, а $\sqrt{x-1}$ – при $x > 1$, то аналітичний вираз $\arcsin x + \sqrt{x-1}$ визначений лише при значенні $x = 1$, тобто $D(y) = \{1\}$.

Приклад 1.15. Залежність шляху s, пройденого тілом, що вільно падає з висоти H, від часу падіння t, $s = \frac{gt^2}{2}$ є функцією $s = s(t)$. Знайти область визначення цієї функції.

Розв'язання. Оскільки змінна t є часом, то $t \geq 0$. За умовою, шлях, пройдений тілом, дорівнює H. Розв'язуючи рівняння $\frac{gt^2}{2} = H$ відносно змінної t, знаходимо, що час руху тіла $T = \sqrt{2H/g}$. Отже, областю визначення функції $s(t)$ є відрізок $[0; T]$, $T = \sqrt{2H/g}$. Зауважимо, що аналітичний вираз $s = \frac{gt^2}{2}$, який задає функцію $s = s(t)$, є визначеним $\forall t \in R$.

Задача знаходження множини значень функції при аналітичному способі її задання є набагато складнішою, ніж знаходження області визначення і здебільшого розв'язується з допомогою методів диференціального числення, проте у деяких випадках її можна розв'язати з допомогою елементарних міркувань.

Приклад 1.16. Знайти множину значень для наступних функцій:

а) $y=\dfrac{2}{5+3\sin 2x}$;.б) $y=\dfrac{|x|}{x}$; в) $y=\dfrac{x+2}{2x+3}$.

Розв'язання. а) Оскільки $\sin 2x$ набуває всіх значень з $[-1;1]$, то $5+3\sin 2x$ набуває всіх значень з відрізка $[2;8]$, а функція $y=\dfrac{2}{5+3\sin 2x}$ приймає всі значення з $\left[\frac{1}{4};1\right]$. Тому $E(y)=\left[\frac{1}{4};1\right]$.

б) Оскільки $|x|=\begin{cases}x, x\ge 0;\\ -x, x<0\end{cases}$, а областю визначення функції $y=\dfrac{|x|}{x}$ є множина $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$, то дана функція приймає лише два значення: $y=-1$, якщо $x<0$, та $y=1$ при $x>0$. Таким чином, $E(y)=\{-1;1\}$.

в) Розв'яжемо рівняння $y=\dfrac{x+2}{2x+3}$ відносно змінної x. При $x\neq-\frac{3}{2}$ отримуємо:

$$2xy+3y=x+2\Leftrightarrow x(2y-1)=2-3y\Rightarrow x=\frac{2-3y}{2y-1}.$$

З останнього виразу випливає, що $y\neq\frac{1}{2}$. Отже, множина значень функції $y(x)$ має вигляд: $E(y)=\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

При *графічному способі* задання функції $y=f(x)$ відповідність між змінними x та y задається з допомогою графіка. Графічним способом задання функції широко користуються при дослідженнях, пов'язаних з використанням таких самописних приладів, як барограф (для запису змін атмосферного тиску), осцилограф (для запису змін сили електричного струму або напруги), термограф (для запису змін температури повітря) тощо. Графіками широко користуються також для наочного геометричного зображення функцій, навіть якщо самі ці функції задані аналітичними виразами.

Зауважимо, що в прямокутній системі координат Oxy функцію визначає лише така крива, яку кожна пряма, що проходить через точку $x\in D(y)$ паралельно осі Oy, перетинає лише у одній точці. Це пояснюється тим, що при заданні функції кожному значенню x з її області визначення відповідає єдине значення змінної y.

Табличний спосіб задання функції полягає у тому, що відповідність між змінними x та y задається у вигляді таблиці. Він часто використовується при записі результатів експерименту, коли для певної сукупності значень аргументу $x_1, x_2, ..., x_n$ дослідним шляхом знаходять відповідні значення функції $y_1, y_2, ..., y_n$.

Крім розглянутих, існують і інші способи задання функції. Так, функції, що є розв'язками складних математичних задач, можуть задаватися у вигляді комп'ютерних програм, що реалізують алгоритми розв'язання цих задач. Функцію можна задати також словесним описом залежності між змінними. Наприклад, *функція Діріхле* – це функція, що кожному раціональному значенню аргументу ставить у відповідність одиницю, а ірраціональному – нуль.

1.5 Класифікація елементарних функцій

До основних елементарних функцій відносять наступні:

1. Степенева функція $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Показникові функція $y = a^x$, $a > 0, a \neq 1$.
3. Логарифмічна функція $y = \log_a x$, $a > 0, a \neq 1$.
4. Тригонометричні функції $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$.
5. Обернені тригонометричні функції $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$.

$y = secx = \frac{1}{cosx}$

$y = cosecx = \frac{1}{sinx}$

Властивості вказаних основних елементарних функцій та їх графіки детально розглянуті у шкільному курсі алгебри та початків аналізу.

Визначимо арифметичні операції над функціями. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на множині A, а функція $y = g(x)$ – на множині B і при цьому переріз цих множин $C = A \cap B \neq \varnothing$. Тоді на множині C можна визначити суму цих функцій $y = f(x) + g(x)$, їх різницю $y = f(x) - g(x)$, добуток $y = f(x) \cdot g(x)$. За умови $g(x) \neq 0 \ \forall x \in C$ на множині C визначено також частку функцій $y = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Над функціями виконують також операцію суперпозиції, або побудови складеної функції.

<u>Означення 1.20.</u> Нехай функція $y = f(u)$ визначена на множині A, а функція $u = g(x)$ – на множині B, причому для кожного значення $x \in B$ відповідне значення $u = g(x) \in A$. Тоді на множині B визначена функція $y = f(g(x))$, яку називають *складеною функцією* змінної x, або *суперпозицією функцій* f та g. Для складеної функції використовують позначення $y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Змінну $u = g(x)$ функції $y = f(u)$ називають *проміжним аргументом* або *внутрішньою функцією*, а змінну $y = f(u)$ – *зовнішньою функцією*.

$y = \sin^2 x$

Наприклад, функція $y = \sin x^2$ є суперпозицією двох функцій – тригонометричної та степеневої. Тут зовнішня функція – $y = \sin u$, внутрішня функція – $u = x^2$. Складені функції можна утворювати за допомогою суперпозиції не лише двох, але й кількох функцій, наприклад, $y = \sin\left(\ln\left(2+\sqrt{x}\right)\right)$.

Приклад 1.17. Знайти суперпозиції даних функцій $f \circ g$ та $g \circ f$, якщо: а) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = tgx$; б) $f(x) = 2^x + 1$, $g(x) = \arcsin x$.

Розв'язання. а) Суперпозиція $(f \circ g)(x) = \sqrt{tgx}$. Ця функція визначена для значень аргументу x, для яких $tgx > 0$, тобто область визначення суперпозиції функцій $f \circ g$ має вигляд: $D(f \circ g) = \bigcup\limits_{k \in Z}\left(k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \cup \bigcup\limits_{k \in Z}\left(\pi + k\pi; \frac{3\pi}{2} + k\pi\right)$. Тут символ $\bigcup\limits_{k \in Z} A(k)$ позначає об'єднання нескінченної кількості всіх множин $A(k)$, кожна з яких залежить від цілого параметра k.

Суперпозиція $(g \circ f)(x) = tg\sqrt{x}$. Областю визначення для цієї суперпозиції функцій є множина значень аргументу x, що задовольняє умовам $x \ge 0 \wedge \sqrt{x} \ne \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$, тобто $D(g \circ f) = \left\{x : x \ge 0 \wedge x \ne \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2, k \in Z\right\}$.

б) $(f \circ g)(x) = 2^{\arcsin x} + 1$. Область визначення отриманої функції – відрізок $[-1;1]$ збігається з областю визначення $g(x) = \arcsin x$, оскільки областю визначення функції $f(x) = 2^x + 1$ є вся числова пряма. $-1 \le 2^x + 1 \le 1$ $-2 \le 2^x \le 0$

$(g \circ f)(x) = \arcsin\left(2^x + 1\right)$. Оскільки $2^x + 1 > 1\ \forall x \in \mathbb{R}$, а $g(x) = \arcsin x$ визначена на $[-1;1]$, то отримана суперпозиція не визначає функції (її областю визначення є пуста множина). Таким чином, у цьому випадку суперпозиції $g \circ f$ не існує.

<u>Означення 1.21</u>. Основні елементарні функції, а також функції, утворені шляхом виконання скінченого числа арифметичних операцій та утворення суперпозицій основних елементарних функцій, називають *елементарними*.

Наприклад, функція $y = \cos\left(\frac{2}{x^2}\right) + 4\ln(x+3) - 2e^x$ є елементарною. Функція Діріхле, описана у п. 1.4 не є елементарною. Не є елементарними також функції $y = \text{sign x} = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$, $y = [x]$ та $y = \{x\}$.

Функція $y = [x]$ (ціла частина числа x) кожному значенню аргументу $x \in R$ ставить у відповідність найбільше ціле число, що не перевищує x. Так,

$[3{,}8]=3$, $[-4{,}2]=-5$. Функція $y=\{x\}$ $\forall x\in\mathbb{R}$ визначається як різниця між числом та його цілою частиною: $\{x\}=x-[x]$. Наприклад, $\{5{,}2\}=5{,}2-[5{,}2]=5{,}2-5=0{,}2$, $\{-3{,}7\}=-3{,}7-[-3{,}7]=-3{,}7-(-4)=0{,}3$. Множиною значень функції $y=[x]$ є множина цілих чисел, для $y=\{x\}$ множина значень – це проміжок $[0;1)$.

Елементарні функції поділяють на наступні класи.

1. Функції виду $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$, де $n\in\mathbb{Z}_0$, коефіцієнти a_0, a_1, …, a_n є дійсними числами, називають *цілими раціональними функціями, або многочленами (поліномами) степеня* n. Многочлен першого степеня називають також *лінійною функцією*, а многочлен другого степеня – *квадратичною функцією*.
2. Функції виду $R(x)=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_{m-1}x+b_m}$, що є відношенням двох многочленів, називають *дробовими раціональними функціями*, або *раціональними дробами*. Сукупність многочленів та раціональних дробів утворює клас *раціональних функцій.*
3. Функції, утворені за допомогою скінченного числа суперпозицій та арифметичних операцій над раціональними функціями і над степеневими функціями з дробовими показникам степеня, які не є раціональними, називають *ірраціональними функціями.* Наприклад, $y=\sqrt[3]{x+5}+2x-1$ є ірраціональною функцією. Раціональні та ірраціональні функції називають *алгебраїчними.*
4. Елементарні функції, які не є раціональними чи ірраціональними , називають *трансцендентними функціями*. Зокрема, до трансцендентних належать показникові, логарифмічні, тригонометричні та обернені тригонометричні функції. Наприклад, функції $y=\sin 2x$, $y=\ln\left(1+x^2\right)$ є трансцендентними.

1.6 Елементарні перетворення графіків функцій

Використовуючи графіки основних елементарних функцій, можна отримати за допомогою елементарних перетворень графіки багатьох інших функцій. Розглянемо основні види елементарних перетворень графіків.

1. Графік функції $y=f(x)+b$ отримуємо з графіка функції $y=f(x)$ паралельним перенесенням останнього вздовж осі Oy на величину b. При $b>0$ графік $y=f(x)$ піднімаємо на b одиниць вгору, при $b<0$ – опускаємо вниз.
2. Графік функції $y=f(x+a)$ отримуємо з графіка функції $y=f(x)$ паралельним перенесенням останнього вздовж осі Ox на a одиниць. При $a>0$ графік $y=f(x)$ зміщується на a одиниць вліво, при $a<0$ – вправо.

3. Графік функції $y = c \cdot f(x)$, $c \neq 0$, отримаємо з графіка $y = f(x)$ при $0 < c < 1$ за допомогою стискування в $\frac{1}{c}$ разів ординат останнього, а при $c > 1$ – за допомогою розтягування у c разів його ординат. При цьому відповідні абсциси зберігаються. При $c < 0$ графік функції $y = c \cdot f(x)$ є симетричним відображенням графіка функції $y = -c \cdot f(x)$ відносно осі Ox.
4. Графік функції $y = f(kx)$, $k \neq 0$, отримуємо з графіка функції $y = f(x)$ при $k > 1$ зменшенням у k разів абсцис його точок при збереженні відповідних ординат, при $0 < k < 1$ абсциси точок графіка збільшуються у $\frac{1}{k}$ разів при збереженні ординат цих точок. При $k < 0$ графік $y = f(kx)$ є симетричним відображенням графіка $y = f(-kx)$ відносно осі Oy.
5. Графік функції $y = -f(x)$ є симетричним до графіка функції $y = f(x)$ відносно осі Ox, а графік функції $y = f(-x)$ є симетричним до графіка функції $y = f(x)$ відносно осі Oy.
6. Для побудови графіка функції $y = c \cdot f(kx + a) + b$ необхідно виконати перетворення графіка функції $y = f(x)$ у наступній послідовності:
$$f(x) \to f(kx) \to f\left(k\left(x + \frac{a}{k}\right)\right) \to c \cdot f\left(k\left(x + \frac{a}{k}\right)\right) \to c \cdot f\left(k\left(x + \frac{a}{k}\right)\right) + b.$$
7. Для побудови графіка функції $y = |f(x)|$ частину графіка $y = f(x)$, розташовану нижче осі Ox, потрібно відобразити симетрично відносно цієї осі, іншу частину графіка – залишити без змін.
8. Для отримання графіка функції $y = f(|x|)$ з графіка $y = f(x)$ потрібно видалити частину цього графіка, що лежить зліва від осі Oy, залишити частину графіка при $x \geq 0$ і відобразити цю частину симетрично Oy у область $x < 0$.

1.7 Основні характеристики функцій

<u>Означення 1.22.</u> Функцію $y = f(x)$, визначену на множині $D(y)$, називають *парною,* якщо $\forall x \in D(y)$ $-x \in D(y)$ та $f(-x) = f(x)$. Функцію $y = f(x)$, визначену на множині $D(y)$, називають *непарною*, якщо $\forall x \in D(y)$ $-x \in D(y)$ та $f(-x) = -f(x)$.

Наприклад, функції $y = x^2$, $y = \cos x$, $y = |x|$ є парними, функції $y = \frac{1}{x}$, $y = x^3$, $y = \arcsin x$ – непарними, а функції $y = \arccos x$, $y = \ln x$, $y = 2x - x^2$ є прикладами ні парних, ні непарних функцій.

Графік парної функції є симетричним відносно осі Oy, а графік непарної функції симетричний відносно початку координат.

Приклад 1.18. Дослідити на парність наступні функції: 1) $f(x)=2^{\cos x}+|x|$; 2) $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$; 3) $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+3}$; 4) $f(x)=\lg(2x+1)$.

Розв'язання. Для дослідження функції на парність згідно означення 1.22 необхідно спочатку перевірити умову симетричності області визначення функції відносно точки $x=0$, а потім визначити $f(-x)$ і порівняти його з $f(x)$.

1) Функція $f(x)=2^{\cos x}+|x|$ визначена на $(-\infty;+\infty)$. Знайдемо $f(-x)$: $f(-x)=2^{\cos(-x)}+|-x|=2^{\cos x}+|x|=f(x)$. Оскільки $f(-x)=f(x)$, функція є парною.

2) Знайдемо область визначення функції $f(x)$ з умови $\frac{1+x}{1-x}<0$. Розв'язавши цю нерівність методом інтервалів, отримуємо $D(f)=(-1;1)$ – інтервал, симетричний відносно початку координат.

$$f(-x)=\ln\frac{1-x}{1+x}=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1}=-\ln\frac{1+x}{1-x}=-f(x).$$

Отримана рівність свідчить, що $f(x)$ є непарною функцією.

3) Областю визначення $f(x)$ є вся числова пряма. Знайдемо $f(-x)$:

$$f(-x)=\frac{2\cdot(-x)+1}{(-x)^2+3}=\frac{-2x+1}{x^2+3}\neq f(x),\quad f(-x)\neq f(x).$$

Отримані нерівності свідчать, що $f(x)$ – ні парна, ні непарна функція.

4) Областю визначення функції $f(x)=\lg(2x+1)$ є проміжок $(-0{,}5;+\infty)$, для кого вираз під знаком логарифма є додатним. Цей проміжок несиметричний відносно точки $x=0$, тому $f(x)$ – ні парна, ні непарна функція.

Приклад 1.19. Довести, що добуток непарних функцій є парною функцією.

Розв'язання. Нехай $u(x)$ та $v(x)$ – непарні функції, тобто $u(-x)=-u(x)$, $v(-x)=-v(x)$. $f(-x)=u(-x)\cdot v(-x)=(-u(x))\cdot(-v(x))=u(x)\cdot v(x)=f(x)$, тобто добуток $u(x)\cdot v(x)$ є парною функцією.

<u>Означення 1.23</u>. Нехай функція $y=f(x)$ визначена на множині $D(y)$ і $D_1\subset D(y)$. Якщо $\forall x_1\in D_1\ \forall x_2\in D_1\quad x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$, то функцію називають *зростаючою* на множині D_1. Якщо $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$, то $f(x)$ називають *неспадною* на множині D_1. За умови $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$ $f(x)$

називають *спадною* на множині D_1.Якщо ж $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$, то функцію $f(x)$ називають *незростаючою* на множині D_1.

Прикладом зростаючої на всій числовій прямій функції є $f(x) = 2x + 3$. Функція $y = x^2$ зростає на множині $D_1 = (0; +\infty)$, ця ж функція спадає на множині $D_2 = (-\infty; 0)$.

<u>Означення 1.24.</u> Зростаючі, не зростаючі, спадні та неспадні на множині D_1 функції називають *монотонними* на цій множині. Зростаючі та спадні функції називають *строго монотонними*.

Приклад 1.20. Дослідити на монотонність наступні функції:

1) $f(x) = \ln x$: 2) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$.

Розв'язання. 1) Функція $f(x) = \ln x$ визначена при $x \in (0; +\infty)$. Нехай $0 < x_1 < x_2$. Тоді $f(x_1) - f(x_2) = \ln x_1 - \ln x_2 = \ln \dfrac{x_1}{x_2} < 0$, оскільки $0 < \dfrac{x_1}{x_2} < 1$. Отже, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, тому $f(x)$ є спадною на своїй області виначення.

2) Функція $f(x)$ визначена на об'єднанні проміжків $(-\infty; 0)$ та $(0; +\infty)$. Розглянемо монотонність функції на кожному з цих проміжків. Якщо $0 < x_1 < x_2$, то $\dfrac{1}{x_1^3} > \dfrac{1}{x_2^3}$, тобто на $(0; +\infty)$ функція $f(x)$ є спадною. При від'ємних значеннях x маємо: $x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x_1^3} > \dfrac{1}{x_2^3}$, тобто при $x < 0$ $f(x)$ також є спадною. Проте на всій області визначення $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ задана функція не є монотонною, оскільки при $x_1 < 0 < x_2$ $\dfrac{1}{x_1^3} < \dfrac{1}{x_2^3}$.

<u>Означення 1.25</u>. Функцію $y = f(x)$, визначену на множині $D(y)$, називають *обмеженою зверху* на цій множині, якщо $\exists M_1 : \forall x \in D(y)\ f(x) \leq M_1$. Функцію $y = f(x)$, визначену на множині $D(y)$, називають *обмеженою знизу* на цій множині, якщо $\exists M_2 : \forall x \in D(y)\ f(x) \geq M_2$. Функцію $y = f(x)$, визначену на множині $D(y)$, називають *обмеженою* на цій множині, якщо $\exists M > 0 : \forall x \in D(y)\ |f(x)| \leq M$.

Обмежена функція є обмеженою зверху і знизу.

Аналогічним чином можна визначити функцію, обмежену на будь-якій множині $D_1 \subset D(y)$.

З означення обмеженої функції випливає, що множина її значень є підмножиною відрізка $[-M; M]$, тому її графік розташований між прямими $y = -M$ та $y = M$. Так, функція $y = \operatorname{arctg} x$ є обмеженою на своїй області визначення – всій числовій прямій, оскільки $\left|\operatorname{arctg} x\right| < \frac{\pi}{2}\ \forall x \in \mathbb{R}$. Відповідно, графік цієї функції розташований між прямими $y = -\frac{\pi}{2}$ та $y = \frac{\pi}{2}$.

Приклад 1.21. Дослідити на обмеженість наступні функції:

1) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$; 2) $f(x) = -\frac{1}{x^4}$.

Розв'язання. 1) Оскільки $0 < \frac{1}{1+x^2} < 1\ \forall x \in \mathbb{R}$, тобто $\left|f(x)\right| < 1$, то функція $f(x)$ є обмеженою на своїй області визначення – числовій прямій.

2) Маємо область визначення функції $f(x)$ $D(f) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$. Оскільки $f(x) = -\frac{1}{x^4} < 0$ при $x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$, то функція є обмеженою зверху. Проте функція є необмеженою знизу, оскільки для довільного $M < 0$, як завгодно великого за абсолютною величиною можна вказати таке $x_0 \in D(f)$, що $f(x_0) < M$. Дійсно, маємо нерівність:

$$-\frac{1}{x^4} < M < 0 \Rightarrow \frac{1}{x^4} > -M > 0 \Rightarrow x^4 < -\frac{1}{M} \Rightarrow x \in \left(-\sqrt[4]{-\frac{1}{M}}; \sqrt[4]{-\frac{1}{M}}\right).$$

При довільному x_0 з проміжку $\left(-\sqrt[4]{-\frac{1}{M}}; \sqrt[4]{-\frac{1}{M}}\right)$, $x_0 \neq 0$ $f(x_0) < M$, тому функція $f(x)$ є необмеженою знизу і тому необмеженою на своїй області визначення.

<u>**Означення 1.25**</u>. Функцію $y = f(x)$, визначену на множині $D(y)$, називають *періодичною* на цій множині, якщо існує таке число $T \neq 0$, що $x + T \in D(y)$ і $f(x+T) = f(x)\ \forall x \in D(y)$.

Якщо число T є періодом функції $y = f(x)$, то її періодами є також числа виду kT, $k \in \mathbb{Z}$. Далі під періодом функції розумітимемо найменший з її додатних періодів. Такий період називають *основним*.

Прикладами періодичних функцій є тригонометричні функції $y = \sin x$ та $y = \cos x$, період яких $T = 2\pi$, $y = \operatorname{tg} x$ та $y = \operatorname{ctg} x$ з періодом $T = \pi$. У п.1.5 була визначена функція $y = \{x\}$, її період $T = 1$.

Приклад 1.22. Нехай функція $y = f(x)$ є періодичною з періодом T. Довести, що функція $y = f(ax+b)$, $a > 0$, має період T/a.

Розв'язання. Оскільки T є періодом функції $f(x)$, то $f(x+T) = f(x)$. Знайдемо значення функції $y = f(ax+b)$ при значенні аргументу $x + \frac{T}{a}$:

$$f\left(a\left(x+\frac{T}{a}\right)+b\right)=f\left(ax+T+b\right)=f\left(\left(ax+b\right)+T\right)=f\left(ax+b\right).$$

З останньої рівності випливає, що $\frac{T}{a}$ є періодом функції $f\left(ax+b\right)$.

З результату цього прикладу випливає, що для функцій $y=\sin\left(\omega x+\varphi\right)$, $y=\cos\left(\omega x+\varphi\right)$ період дорівнює $\frac{2\pi}{\omega}$, а для функцій $y=\mathrm{tg}\left(\omega x+\varphi\right)$ та $y=\mathrm{ctg}\left(\omega x+\varphi\right)$ період дорівнює $\frac{\pi}{\omega}$.

Приклад 1.23. Довести, що функція $f\left(x\right)=\cos\left(x^2\right)$ не є періодичною.

Розв'язання. Нехай задана функція має період T. Тоді повинна виконуватися рівність $\cos\left(\left(x+T\right)^2\right)=\cos\left(x^2\right)\quad\forall x\in\mathbb{R}$. Звідси знаходимо:

$$\cos\left(\left(x+T\right)^2\right)-\cos\left(x^2\right)=0\Leftrightarrow -2\sin\frac{\left(x+T\right)^2-x^2}{2}\cdot\sin\frac{\left(x+T\right)^2+x^2}{2}=0.$$

З цього рівняння маємо: $xT+\frac{T^2}{2}=k\pi$, або $x^2+xT+\frac{T^2}{2}=k\pi$, де $k\in\mathbb{Z}$. Отримані два рівняння можна об'єднати у вигляді:

$$x^2+2xT+T^2\pm x^2=2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Оскільки параметр k є цілим числом, а зліва у отриманій рівності знаходиться лінійна або квадратична функція дійсного аргументу x, то виконання даної рівності $\forall x\in\mathbb{R}$ неможливе, тому періоду T для заданої функції $f\left(x\right)$ не існує.

1.8 Обернена функція

Нехай задано функцію $y=f\left(x\right)$ з областю визначення X та множиною значень Y. Функція $f\left(x\right)$ кожному значенню $x_0\in X$ ставить у відповідність єдине значення $y_0\in Y$. При цьому може виявитися, що різним значенням аргументу x_1 і x_2 відповідає одне й те ж значення функції y_1. Будемо додатково вимагати, щоб функція $y=f\left(x\right)$ різним значенням x ставила у відповідність різні значення y. Тоді кожному значенню $y\in Y$ відповідатиме єдине значення $x\in X$, тобто можна визначити функцію $x=\varphi\left(y\right)$ з областю визначення Y і множиною значень X.

Означення 1.26. Функція $x=\varphi\left(y\right)$ є *оберненою* до функції $y=f\left(x\right)$, якщо областю визначення функції φ є множина значень функції f, множина значень функції φ є областю визначення функції f, а кожному значенню змінної $y\in Y$ відповідає єдине значення $x\in X$.

З цього означення випливає, що кожна з функцій $y=f(x)$ і $x=\varphi(y)$ може бути названа прямою чи оберненою, тобто ці функції є взаємно оберненими.

Щоб знайти функцію $x=\varphi(y)$, обернену до функції $y=f(x)$, достатньо розв'язати рівняння $y=f(x)$ відносно змінної x (якщо це можливо). Оскільки кожна точка $(x;y)$ кривої $y=f(x)$ є одночасно точкою кривої $x=\varphi(y)$, то графіки взаємно обернених функцій $y=f(x)$ і $x=\varphi(y)$ збігаються. Якщо у оберненій функції $x=\varphi(y)$ незалежну змінну позначити через x, а залежну – через y, то замість функції $x=\varphi(y)$ отримаємо функцію $y=\varphi(x)$. Графіки взаємно обернених функцій $y=f(x)$ та $y=\varphi(x)$ є симетричними відносно прямої $y=x$.

З означення оберненої функції випливає, що функція $y=\varphi(x)$, $x\in X$, $y\in Y$, має обернену функцію тоді і тільки тоді, коли вона встановлює взаємно однозначну відповідність між множинами X та Y, тобто кожному значенню $x\in X$ ставиться у відповідність єдине значення $y\in Y$ і, навпаки, кожному значенню $y\in Y$ відповідає єдине значення $x\in X$. Взаємно однозначну відповідність між областю визначення та множиною значень встановлюють строго монотонні функції. Так, для зростаючої на проміжку функції $y(x)$ $x_1<x_2 \Rightarrow y(x_1)<y(x_2)$, для функції, що строго спадає на деякому проміжку, $x_1<x_2 \Rightarrow y(x_1)>y(x_2)$. Таким чином, будь-яка строго монотонна на проміжку функція має на цьому проміжку обернену функцію. При цьому, якщо пряма функція строго зростає (спадає) на проміжку, то обернена їй функція також строго зростає (спадає) на цьому проміжку.

Приклад 1.24. Знайти функцію, обернену до функції $y=3x+5$.

Розв'язання. Функція $y=3x+5$ визначена та зростає на всій числовій прямій. Отже, обернена функція існує та зростає $\forall x\in\mathbb{R}$. Розв'язавши рівняння $y=3x+5$ відносно змінної x, отримуємо вираз для оберненої функції:

$$x=\frac{y-5}{3}.$$

Приклад 1.25. Знайти функцію, обернену до $y=f(x)=\lg\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

Розв'язання. Областю визначення заданої функції є вся числова пряма, оскільки $\sqrt{x^2+1}>|x|$, тому $x+\sqrt{x^2+1}>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$. Оскільки $u=x+\sqrt{x^2+1}$ зростає і $y=\lg u$ – зростаюча на своїй області визначення функція , то $f(x)$ зростає на всій числовій прямій.

Розв'яжемо рівняння $y=\lg\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ відносно змінної x. Маємо:

$$x+\sqrt{x^2+1}=10^y.$$

Враховуючи, що $-x+\sqrt{x^2+1}=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{-1}$, отримаємо систему:

$$\begin{cases} x+\sqrt{x^2+1}=10^y; \\ -x+\sqrt{x^2+1}=10^{-y}. \end{cases}$$

Звідси знаходимо функцію, обернену до заданої:

$$x=\frac{1}{2}\left(10^y-10^{-y}\right)$$

1.9 Неявна та параметрична форми задання функцій

Якщо функція задана рівнянням $y=f(x)$, розв'язаним відносно залежної змінної y, то кажуть, що функція задана у явній формі або є явною.

Означення 1.27. Під *неявно заданою функцією* розуміють функцію, задану у вигляді рівняння $F(x,y)=0$, не розв'язаного відносно залежної змінної.

Це рівняння задає функцію лише тоді, коли множина впорядкованих пар чисел (x,y), що є розв'язками даного рівняння, така, що будь-якому числу x_0 у цій множині відповідає не більше однієї впорядкованої пари (x_0,y_0). Так, рівняння $4x-3y+2=0$ задає функцію, а рівняння $x^2+y^2=16$ функцію не визначає, оскільки кожному значенню x_0 відповідає дві впорядковані пари чисел: $\left(x_0,\sqrt{16-x_0^{\ 2}}\right)$ та $\left(x_0,-\sqrt{16-x_0^{\ 2}}\right)$.

Довільну явно задану функцію $y=f(x)$ можна записати як неявну рівнянням $f(x)-y=0$, але неявну функцію не завжди можна записати у вигляді явної. Це пояснюється тим, що рівняння $F(x,y)=0$ не завжди можна розв'язати відносно y.

Нехай задано дві функції $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ однієї незалежної змінної t, визначені на одному й тому ж числовому проміжку. Якщо функція $x=\varphi(t)$ є строго монотонною, то вона має обернену функцію $t=\Phi(x)$. Тому змінну y можна розглядати як складену функцію змінної x: $y=\psi(\Phi(x))$.

Означення 1.28. Задання функціональної залежності між змінними x та y у вигляді двох функцій $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ називають *параметричним заданням функції*. Допоміжну змінну t називають при цьому *параметром*.

Всяка параметрично задана функція визначає на площині xOy деяку криву, проте не всяка крива на площині, задана у параметричній формі, визначає функцію. Наприклад, рівняння $x=\cos t$, $y=\sin t$, $t\in[0;2\pi]$ визначають на декартовій площині xOy коло з центром у початку координат та одиничним радіусом, проте вони не визначають функції, оскільки кожному значенню аргументу x з відрізка $\left[-1;1\right]$ на даному колі відповідають два значення змінної y. Відзначимо, що параметричні рівняння $x=\cos t$, $y=\sin t$, $t\in\left[0;\pi\right]$, що визначають на координатній площині верхнє півколо $x^2+y^2=1$, $y\geq 0$, визначають при цьому і функцію, задану у параметричній формі, оскільки тут кожному значенню x відповідає єдине значення змінної y.

1.10 Числові послідовності

<u>Означення 1.29</u>. Якщо кожному натуральному числу n за яким-небудь правилом поставлено у відповідність певне дійсне число a_n, то говорять, що задано *числову послідовність* $\left\{a_n\right\}$, або $a_1,a_2,...,a_n,...$. Числа $a_1,a_2,...,a_n,...$, з яких складається послідовність, називають *членами послідовності*, а вираз для a_n – *загальним членом послідовності*.

Наприклад, послідовність з загальним членом $a_n=\dfrac{1}{n}$ має вигляд: $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}=1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},...,\dfrac{1}{n},...$. Якщо кожному натуральному числу n поставити у відповідність його квадрат, то отримаємо послідовність $\left\{n^2\right\}$, або 1, 4, 9, 16, …., $n^2,...$.

З означення 1.29. випливає, що послідовність є функцією, визначеною на множині натуральних чисел.

Числову послідовність слід відрізняти від множини її членів: множина визначається елементами, з яких вона складається, а для визначення послідовності потрібно ще вказати порядок розташування цих елементів. Розглянемо основні способи задання послідовності.

Найчастіше послідовність задають за формулою, що визначає її загальний член a_n залежно від номера n. Наприклад, формула загального члена послідовності $a_n=\dfrac{n-1}{n+1}$ визначає послідовність $0,\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{4},\dfrac{3}{5},...$, а формула $a_n=2^n$ – послідовність $2, 4, 8, 16, 32, ...$

Досить часто послідовності задають також *рекурентними співвідношеннями*, тобто співвідношеннями, які будь-який член послідовності виражають через попередні члени послідовності. При цьому задають перший, або, за необхідності, кілька перших членів послідовності. Наприклад, послідовність можна задати у наступному вигляді: $a_1=1$, $a_2=3$, $a_n=\dfrac{a_{n-2}+a_{n-1}}{2}$. Для кожного номера n члена цієї послідовності ми можемо визначити значення цього члена a_n, проте для цього потрібно визначити всі попередні значення. Наприклад, потрібно знайти a_5. Послідовно визначаємо:

$$a_3 = \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{1+3}{2} = 2,\ a_4 = \frac{a_2 + a_3}{2} = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2},\ a_5 = \frac{a_3 + a_4}{2} = \frac{2+\frac{5}{2}}{2} = \frac{9}{4}.$$

Послідовність інколи задають словесним правилом, за яким утворюються її члени. Прикладами таких послідовностей є послідовність простих чисел 2, 3, 5, 7, 11, 13, …., або послідовні наближення числа π з недостачею: 3; 3,14; 3,141,…

<u>**Означення 1.30**</u>. Числову послідовність $\{a_n\}$ називають *обмеженою зверху*, якщо $\exists A \in \mathbb{R}:\ \forall n \in \mathbb{N}\quad a_n < A$. Числову послідовність $\{a_n\}$ називають *необмеженою зверху*, якщо $\forall A \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}: a_n > A$. Числову послідовність $\{a_n\}$ називають *обмеженою знизу*, якщо $\exists a \in \mathbb{R}:\ \forall n \in \mathbb{N}\quad a_n > A$. Числову послідовність $\{a_n\}$ називають *необмеженою знизу*, якщо $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}: a_n < A$. Послідовність $\{a_n\}$ називають *обмеженою,* якщо вона обмежена і зверху, і знизу. Послідовність називають *необмеженою*, якщо вона необмежена хоча б з однієї сторони: зверху, або знизу.

Прикладом послідовності, обмеженої зверху, є послідовність з загальним членом $a_n = -n,\ n \in \mathbb{N}$, оскільки для довільного невід'ємного числа A, наприклад, $A=1,\ a_n = -n < A$. Послідовність $a_n = n$ є необмеженою зверху, проте вона обмежена знизу, оскільки $\forall n \in \mathbb{N}\quad a_n > 0$. Послідовність $a_n = \frac{1}{n}$ є прикладом обмеженої послідовності, оскільки $\forall n \in \mathbb{N}\quad 0 < \frac{1}{n} < 2$. Послідовність $a_n = n^2$ є необмеженою, оскільки вона необмежена зверху.

Можна надати інше означення обмеженої та необмеженої послідовностей.

<u>**Означення 1.31**</u>. Послідовність $\{a_n\}$ називають *обмеженою,* якщо $\exists M > 0, M \in \mathbb{R}:\ \forall n \in \mathbb{N}\quad |a_n| < M$. Послідовність $\{a_n\}$ називають *необмеженою,* якщо $\forall M > 0\ \exists n \in \mathbb{N}:\ |a_n| > M$.

Наприклад, послідовність з загальним членом $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ є обмеженою, оскільки $\forall n \in \mathbb{N}\quad |a_n| = \frac{1}{n} < 2$. Тут у якості числа M можна взяти довільне дійсне число, що перевищує одиницю.

Прикладом необмеженої послідовності є послідовність $b_n = n^2$. Дійсно, з нерівності $|b_n| = n^2 > M$ випливає, що $n > \sqrt{M}$, тобто для довільного додатного M член цієї послідовності з номером n, більшим, ніж $\sqrt{M}$, наприклад, $n = \left[\sqrt{M}\right] + 1$, перевищуватиме за абсолютною величиною число M.

Оскільки послідовність є окремим випадком функції, то аналогічно монотонним функціям можна розглядати монотонні послідовності: зростаючі, неспадні, спадні, незростаючі. Наприклад, послідовність з загальним членом $a_n = \dfrac{1}{n}$ є прикладом спадної послідовності, оскільки $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ $n_1 < n_2 \Rightarrow \dfrac{1}{n_1} > \dfrac{1}{n_2}$, тобто з збільшенням номера члена послідовності його величина зменшується. Послідовність $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ – приклад послідовності, що не є монотонною, тут з нерівності $n_1 < n_2$ не випливає, що $a_{n_1} < a_{n_2}$ або $a_{n_1} > a_{n_2}$.