

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ІНЖЕНЕРНИЙ НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ ІМ. Ю.М. ПОТЕБНИ
ЗАПОРІЗЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

О. О. Шапуров, І. О. Клопов , Є.К. Мержинський

ЕКОНОМЕТРІЯ

**Навчальний посібник
для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра
спеціальності «Фінанси, банківська справа, страхування
та фондовий ринок»
освітньо-професійної програми
«Фінанси держави та підприємницьких структур»**

Запоріжжя
2023

УДК 303:519.8
Ш23

Шапуров О.О., Клопов І.О., Мержинський Є.К. Економетрія : навчальний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Фінанси, банківська справа, страхування та фондовий ринок» освітньо-професійної програми «Фінанси держави та підприємницьких структур». Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2023. 72 с.

Навчальний посібник містить основні теоретичні положення тем курсу «Економетрія», питання для самоконтролю, одноваріантні запитання, навчальні та практичні завдання, тестові завдання для перевірки знань, перелік рекомендованої літератури. Видання сприятиме формуванню сучасного економічного мислення та засвоєнню спеціальних теоретичних знань із точки зору системного та процесного аналізу.

Для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Фінанси, банківська справа, страхування та фондовий ринок», які навчаються за освітньо-професійною програмою «Фінанси держави та підприємницьких структур».

Рецензент

В.Г. Воронкова, д-р філософ. наук, завідувач кафедри управління та адміністрування

Відповідальний за випуск

Ю.В. Дятлова, д-р економ. наук, доцент, професор кафедри інформаційної економіки, підприємництва та фінансів

ЗМІСТ

ВСТУП	4
ТЕМА 1 Економетричне моделювання як метод наукового пізнання	6
ТЕМА 2 Часові ряди та матричні перетворення	13
ТЕМА 3 Методи побудови загальної лінійної моделі	31
ТЕМА 4 Особливості застосування МНК для моделей регресії	49
ТЕМА 5 Економетричні моделі на основі системи структурних рівнянь та з дискретними змінними	58
ТЕРМІНОЛОГІЧНИЙ СЛОВНИК	67
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА	70
ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА	71

ВСТУП

У навчальному посібнику розглянуто основний спектр економетричних питань, що є підґрунтям для формування системи знань та навичок у майбутніх фахівців зі спеціальності «Фінанси, банківська справа, страхування та фондовий ринок», які навчаються за освітньо-професійною програмою «Фінанси держави та підприємницьких структур». Зокрема, визначено концептуальні засади теорії економетричного моделювання як методу наукового пізнання, сформовано основні характеристики часових рядів та матричних перетворень, обґрунтовано методи побудови загальної лінійної моделі, розглянуто особливості застосування МНК для багатofакторних моделей регресії, висвітлено основні моделі МНК: НМНК, 2МНК, 3МНК, доведено застосування регресійної моделі з фіктивними змінними

Дисципліна «Економетрія» належить до циклу обов'язкових освітніх компонентів згідно з освітньо-професійною програмою «Фінанси держави та підприємницьких структур». Мета курсу полягає у набутті здобувачами навичок і компетентностей із застосування ефективного економіко-статистичного інструментарію (економетричних методів і моделей) для: кількісного підтвердження або спростування теоретичних гіпотез (якісних тверджень) щодо вигляду, сутності та структури економічних моделей; оцінювання кількісних закономірностей у процесах функціонування соціально-економічних систем за рахунок побудови для них та/або їх структурних частин економетричних моделей; проведення економетричного моделювання (знаходження прогнозних оцінок ключових економічних параметрів, їх поведінки в майбутньому) та вироблення на цьому теоретичному підґрунті науково обґрунтованих управлінських рішень.

Основні завдання вивчення дисципліни «Економетрія»:

- усвідомити принципи організації економетричних досліджень явищ, процесів і соціально-економічних систем мікро-, мезо- та макрорівнів;
- ознайомитися з методами та прийомами економетричного

моделювання причинно-наслідкових зв'язків між ключовими параметрами соціально-економічних систем і процесів із застосуванням прогресивних інформаційних технологій і прикладних програмних продуктів (застосунків);

- набути вмінь застосовувати методики економетричного аналізу та прогнозування поведінки досліджуваних соціально-економічних систем і процесів з урахуванням динамічності середовища їх функціонування;

- виробити аналітичні навички використання отриманої модельної інформації для кількісного обґрунтування ефективних управлінських рішень в умовах дестабілізуючого впливу внутрішніх і зовнішніх чинників.

Необхідність комплексного дослідження особливостей розвитку суб'єктів господарювання національної економіки із застосуванням економетричних методів зумовила структуру та зміст пропонованого авторами навчального посібника.

Навчальне видання покликане допомогти здобувачам вищої освіти засвоїти знання та набути навичок з основних тем дисципліни «Економетрія» у ході аудиторних занять, а також під час самостійного вивчення методології економетричного моделювання, що сприятиме формуванню вміння приймати обґрунтовані управлінські рішення щодо економічних процесів, пов'язаних зі сферою їх майбутньої діяльності.

ТЕМА 1 Економетричне моделювання як метод наукового пізнання

Мета: визначення економетричного моделювання як методу наукового пізнання.

План

1. Економетричне моделювання як метод наукового пізнання: дефініції, мета, об'єкт і предмет, основні завдання та положення, інструментарій.
2. Етапи становлення й розвитку економетрії, її зв'язок із економічними дисциплінами та математико-статистичними методами.
3. Етапи побудови та статистична база економетричних моделей.
Застосування економетричних досліджень в економіці

Основні терміни і поняття

Економетрична модель, функціональна модель, споживання, бідність, добробут, економічна інтерпретація, адекватність моделі.

1. Економетричне моделювання як метод наукового пізнання: дефініції, мета, об'єкт і предмет, основні завдання та положення, інструментарій.

Метою викладання дисципліни «Економетрія» здобувачам економіко-управлінської вищої освіти є:

- формування у них сучасного економічного мислення та спеціальних теоретичних знань з точки зору системного та процесного аналізу: явищ, процесів, функціонування (за реальних умов) соціально-економічних систем (фірм, підприємств, організацій, установ, публічних органів тощо);
- набуття навичок і компетентностей із застосування ефективного економіко-статистичного інструментарію (економетричних методів і моделей) для: кількісного підтвердження або спростування теоретичних гіпотез (якісних тверджень) щодо вигляду, сутності та структури економічних моделей;

оцінювання кількісних закономірностей у процесах функціонування соціально-економічних систем за рахунок побудови для них та/або їх структурних частин економетричних моделей; проведення економетричного моделювання (знаходження прогностичних оцінок ключових економічних параметрів, їх поведінки у майбутньому) та вироблення на цьому теоретичному підґрунті науково обґрунтованих управлінських рішень тощо.

Основними завданнями вивчення дисципліни «Економетрія»:

- усвідомити принципи організації економетричних досліджень явищ, процесів і соціально-економічних систем мікро-, мезо- та макrorівнів;
- ознайомитися з методами та прийомами економетричного моделювання причинно-наслідкових зв'язків між ключовими параметрами соціально-економічних систем і процесів із застосуванням прогресивних інформаційних технологій і прикладних програмних продуктів (застосунків);
- набути вмінь застосовувати методики економетричного аналізу та прогнозування поведінки досліджуваних соціально-економічних систем і процесів з урахуванням динамічності середовища їх функціонування;
- виробити аналітичні навички використання отриманої модельної інформації для кількісного обґрунтування ефективних управлінських рішень в умовах дестабілізуючого впливу внутрішніх і зовнішніх чинників.

2. Етапи становлення й розвитку економетрії, її зв'язок із економічними дисциплінами та математико-статистичними методами

На початку XX століття в деяких країнах були спроби скласти так звані барометри розвитку. Найвідоміший з них «гарвардський барометр», за допомогою якого в 1920-х роках намагалися передбачити поведінку товарного і грошового ринку.

Гарвардська школа вважалася на той час центром економічних досліджень. Тут уперше почали системно вивчати ряди економічних показників з урахуванням взаємозв'язків між ними і на основі цих показників досліджувати тенденції та цикли економічних процесів. Криза 1929—1933

років призвела до критичного перегляду методів аналізу, які застосовувалися в економіці. У дослідженнях почали враховувати випадкові аспекти економічних явищ, що стало початком формування економетрії як галузі економічної науки.

Засновники економетрії – Р. Фріш, Е. Шумпетер, Я. Тінберген. Усі вони перебували під впливом неокласичної школи і кейнсіанства, намагаючись поєднати економічну теорію з математичними й статистичними методами.

Особливі досягнення пов'язані з розвитком економетрики в останні десятиріччя, про що свідчить нагородження Нобелівськими преміями ряду вчених, які внесли суттєвий вклад в розвиток математичних методів та моделей. Так, «За створення та застосування динамічних моделей до аналізу економічних процесів» у 1969 р. Нобелівську премію одержали Р. Фріш і Я. Тінберген. У 1980 р. «За створення економетричних моделей і їх застосування до аналізу коливань економіки та економічної політики» Нобелівську премію одержав Л. Клейн. «За роз'яснення теорії ймовірностей, що заклала основи економетрики, та дослідження одночасних економічних структур» Нобелівським лауреатом 1989 р. став Т. Гаавельмо. У 2000 р. Нобелівську премію одержали Д. Хекман і Д. Макфадден «За розвиток теорії та методів аналізу дискретних вибірок». Нобелівську премію з економіки 2015 року «За дослідження споживання, бідності та добробуту» одержав фахівець з економетрики А. Дітон.

3. Етапи побудови та статистична база економетричних моделей. Застосування економетричних досліджень в економіці.

Математична модель об'єкта (процесу, явища) містить три групи елементів: 1) характеристику об'єкта, яку потрібно визначити (невідомі величини), – вектор $Y = (y_j)$; 2) характеристики зовнішніх (щодо модельованого об'єкта) умов, які змінюються, – вектор $X = (x_j)$; 3) сукупність внутрішніх параметрів об'єкта – A .

Залежно від способу вираження співвідношень між зовнішніми умовами, внутрішніми параметрами та характеристиками, які мають бути знайдені, математичні моделі поділяються на дві групи: структурні та функціональні.

Основна ідея функціональних моделей – пізнання сутності об'єкта через найважливіші прояви цієї сутності: діяльність, функціонування, поведіння. Внутрішня структура об'єкта при цьому не вивчається, а тому інформація про структуру не використовується. Функціональна модель описує поведінку об'єкта так, що, задаючи значення «входу» X , можна дістати значення «виходу» Y (без участі інформації про параметри):

$$Y = A(X) \quad (1.1)$$

Побудувати функціональну модель – означає знайти оператор A , який пов'язує X і Y .

Економетричні моделі належать до функціональних моделей. Вони кількісно описують зв'язок між вихідними показниками X економічної системи та результативним показником Y . У загальному вигляді економетричну модель можна записати так:

$$Y = f(X, u) \quad (1.2)$$

де

X – вихідні економічні показники;

u – випадкова, або стохастична, складова.

Побудова економетричної моделі проводиться в кілька основних етапів.

Етап 1. Якісний аналіз (постановка мети аналізу; визначення сукупності об'єктів дослідження; визначення результативних і факторних ознак; вибір періоду, за який проводиться аналіз; вибір методу аналізу).

Етап 2. Попередній аналіз модельованої сукупності (перевірка однорідності сукупності, виключення аномальних спостережень, уточнення необхідного обсягу ознак, установлення законів розподілу ознак).

Етап 3. Побудова економетричної моделі (встановлення переліку чинників, розрахунок оцінок параметрів рівнянь регресії, перебір конкурентних варіантів моделі).

Етап 4. Оцінювання адекватності моделі (перевірка статистичної значущості рівняння залежності в цілому і його окремих параметрів; перевірка відповідності формальних властивостей оцінок завданням дослідження).

Етап 5. Економічна інтерпретація та практичне використання моделі для аналізу та прогнозування.



Теми доповідей

1. Аналіз коливань економіки та економічної політики.
2. Розвиток теорії та методів економетрії.
3. Дослідження споживання, бідності та добробуту за допомогою економетричних моделей.



Контрольні запитання

1. Назвіть основними завданнями вивчення дисципліни «Економетрія».
2. Визначте основну ідею функціональної моделі.
3. Обґрунтуйте основні етапи побудови економетричної моделі.



Одноваріантні запитання («Так» чи «Ні»)

1. «Гарвардський барометр», це економетричний показник за допомогою якого в 1920-х роках намагалися передбачити поведінку товарного і грошового ринку.
2. Оцінювання адекватності моделі (перевірка статистичної значущості рівняння залежності в цілому і його окремих параметрів; перевірка відповідності формальних властивостей оцінок завданням дослідження) є останнім етапом побудови економетричної моделі.
3. У 2000 р. Нобелівську премію одержали Д. Хекман і Д. Макфадден «За розвиток теорії та методів аналізу дискретних вибірок».

4. Математична модель об'єкта (процесу, явища) містить дві групи елементів: 1) характеристику об'єкта, яку потрібно визначити (невідомі величини), – вектор $Y = (y_j)$; 2) характеристики зовнішніх (щодо модельованого об'єкта) умов, які змінюються, – вектор $X = (x_j)$.
5. Основна ідея функціональних моделей – пізнання сутності об'єкта через найважливіші прояви цієї сутності: діяльність, функціонування, поводження.



Тестові завдання для самоконтролю

1. Як основні завдання формує дисципліни «Економетрія»?
 - а) усвідомити принципи організації економетричних досліджень явищ, процесів і соціально-економічних систем мікро-, мезо- та макрорівнів;
 - б) ознайомитися з методами та прийомами економетричного моделювання причинно-наслідкових зв'язків між ключовими параметрами соціально-економічних систем і процесів із застосуванням прогресивних інформаційних технологій і прикладних програмних продуктів (застосунків) та набути вмінь застосовувати методики економетричного аналізу та прогнозування поведінки досліджуваних соціально-економічних систем і процесів з урахуванням динамічності середовища їх функціонування;
 - в) виробити аналітичні навички використання отриманої модельної інформації для кількісного обґрунтування ефективних управлінських рішень в умовах дестабілізуючого впливу внутрішніх і зовнішніх чинників;
 - г) усі вище згадані.
2. Якісний аналіз (постановка мети аналізу; визначення сукупності об'єктів дослідження; визначення результативних і факторних ознак; вибір періоду, за який проводиться аналіз; вибір методу аналізу) є:
 - а) першим етапом побудови економетричної моделі;

- б) другим етапом побудови економетричної моделі;
 - в) четвертим етапом побудови економетричної моделі;
 - г) немає правильної відповіді.
3. Економічна інтерпретація та практичне використання моделі для аналізу та прогнозування є:
- а) першим етапом побудови економетричної моделі;
 - б) другим етапом побудови економетричної моделі;
 - в) четвертим етапом побудови економетричної моделі;
 - г) немає правильної відповіді.
4. У 2000 році Нобелівську премію з економіки отримали:
- а) Р. Фріш і Я. Тінберген;
 - б) Т. Гаавельмо;
 - в) Д. Хекман і Д. Макфадден;
 - г) А. Дітон.
5. Економетричні моделі належать до:
- а) функціональних моделей;
 - б) імітаційних;
 - в) мобільних;
 - г) немає правильної відповіді.

✍ Завдання

1. Існують наступні макроекономічні дані України (таблиця 1). Побудувати економетричну модель залежності ВВП на душу населення від військових витрат на душу населення.

Таблиця 1 – Вихідні дані для побудови економетричної моделі

Роки	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Військові витрати на душу населення	4024,1	2901,5	2110,9	2181,2	2633,7	3086,5	3648,2	3713,0
ВВП на душу населення, млн.дол	4073,5 6	3065,2 3	2157,5 0	2220,7 1	2670,3 3	3115,0 5	3661,4 5	3794,6 8

2. Існують наступні макроекономічні дані України (таблиця 1). Побудувати економетричну модель залежності внутрішніх державних витрат на охорону здоров'я на душу населення та військових витрат на душу населення.

Таблиця 2 – Вихідні дані для побудови економетричної моделі

Роки	Військові витрати на душу населення	Внутрішні державні витрати на охорону здоров'я на душу населення, ПКС, дол
2013	4024,1	1107,2
2014	2901,5	1137,7
2015	2110,9	1190,4
2016	2181,2	1273,6
2017	2633,7	1357,4
2018	3086,5	1438,4
2019	3648,2	1575,1
2020	3713,0	1575,1

ТЕМА 2 Часові ряди та матричні перетворення

Мета: ознайомлення з часовими рядами та матричними перетвореннями.

План

1. Матриця та її види
2. Дії з матрицями.
3. Часові ряди, основні поняття та означення.
4. Поняття стаціонарного часового ряду.
5. Розкладання часових рядів на складові.
6. Тренд часового ряду і його виявлення.
7. Трендові моделі за кривими зростання.
8. Прогнозування економічної динаміки за трендовими моделями.

Основні терміни і поняття

Матриця-стовпець, матриця-рядок, квадратна матриця, нульова матриця, детермінант, тренд, сезонність, криві зростання, поліном, експоненційне згладжування, ковзна середня.

1. Матриця та її види

Розглянемо множину $m \times n$ дійсних чисел, записаних у вигляді прямокутної таблиці з m рядків і n стовпців:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Матрицею називають таблицю елементів a_{ij} , яка складається з m рядків і n стовпців.

Позначаються матриці літерами A, B, C .

Числа a_{ij} називаються її елементами. Індeksi i та j елемента a_{ij} позначають відповідно номер рядка та стовпця, на перетині яких міститься даний елемент. Наприклад, елемент a_{12} міститься у першому рядку і другому стовпці.

Розглянемо матрицю яка має два рядки ($m = 2$) і три стовпці ($n = 3$), тобто розміром 2×3 . Загалом, якщо матриця має m рядків і n стовпців, розмір такої матриці є $(m \times n)$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

Якщо в матриці A кількість рядків m дорівнює кількості стовпців n ($m = n$), її називають квадратною порядку m (або n).

Матриця-стовпець – це прямокутна матриця порядку $m \times 1$:

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Матриця-рядок – це прямокутна матриця порядку $1 \times n$:

$$A_i = (a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{in}). \quad (2.4)$$

Матриця, усі елементи якої дорівнюють нулю, називається нульовою:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Розглянемо квадратну матрицю порядку $n \times n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Елементи $a_{11}, a_{22} \dots a_{nn}$ утворюють головну діагональ матриці A ; елементи $a_{1n}, a_{2n-1} \dots a_{n1}$ — побічну діагональ матриці A .

Квадратна матриця, в якій всі елементи, крім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається діагональною.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Скорочено: квадратна матриця $A = (a_{ij})$ є діагональною, якщо $a_{ij} = 0$ для $i \neq j$.

Квадратна матриця E_n є одиничною n -го порядку, якщо всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці, а решта елементів — нулю, тобто

$$A = E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Скорочено: квадратна матриця $I = (a_{ij})$ є одиничною, якщо $a_{ij} = 0$ для $i \neq j$ та $a_{ij} = 1$ для $i = j$.

Квадратна матриця $A = (a_{ij})$ є трикутною, якщо всі її елементи над головною діагоналлю ($a_{ij} = 0$, коли $i < j$) або під цією діагоналлю ($a_{ij} = 0$, коли $i > j$) дорівнюють нулю:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ або } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Якщо в матриці A (3.1) поміняємо місцями відповідно елементи рядків на елементи стовпців (або навпаки), дістанемо транспоновану матрицю (позначається A' або A^T):

$$A' = A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Транспонуючи вектор-стовпець, дістанемо вектор-рядок і навпаки, а саме:

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, \quad A' = (a_{1j} \ a_{2j} \ \dots \ a_{nj})$$

i

$$A = (a_{1j} \ a_{2j} \ \dots \ a_{nj}) , \quad A' = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

Матрицю A називають симетричною, якщо $A = A'$, тобто матриця A дорівнює її транспонованій матриці A' .

Матрицю A^{-1} називають оберненою до матриці A , якщо виконується рівність.

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E_n \quad (2.11)$$

2. Дії з матрицями

Дві матриці $A = (a_{ij})$ та $B = (b_{ij})$ одного й того самого порядку $(m \times n)$ вважаються рівними, якщо всі відповідні елементи цих матриць рівні між собою, тобто

$$A = B \leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \ (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}).$$

Отже, матриці різних порядків завжди не рівні між собою. Матриці можна додавати, віднімати, множити матрицю на число та матрицю на матрицю.

Додавання і віднімання виконуються лише для матриць одного й того самого порядку. Якщо $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$ мають порядок $m \times n$, то

$$C = A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & a_{13} \pm b_{13} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & a_{23} \pm b_{23} & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ a_{31} \pm b_{31} & a_{32} \pm b_{32} & a_{33} \pm b_{33} & \dots & a_{3n} \pm b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & a_{m3} \pm b_{m3} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

або $C = (c_{ij}) = (a_{ij} \pm b_{ij})$.

Очевидно, що

$$A + B = B + A; \quad (A + B)' = A' + B'; \quad A + (B - A) = B$$

Для додавання матриць A , B і C одного й того самого порядку справджується закон асоціативності:

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

Добутком скаляра λ на матрицю $A = (a_{ij})$ порядку $(m \times n)$ називається матриця, елементи якої дорівнюють λa_{ij} , тобто

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \dots & \lambda A_{1n} \\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} & \dots & \lambda A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda A_{m1} & \lambda A_{m2} & \dots & \lambda A_{mn} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

У разі множення матриці A на скаляр λ виконуються такі закони:

- а) $\lambda A = A \lambda$; г) $(\lambda + \gamma)A = \lambda A + \gamma A$;
- б) $(\lambda A)' = \lambda A'$; д) $(\lambda \gamma)A = \lambda(\gamma A) = \gamma(\lambda A)$.
- в) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;

Дві матриці A і B можна помножити одна на одну, тобто визначити $C = AB$, коли кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B .

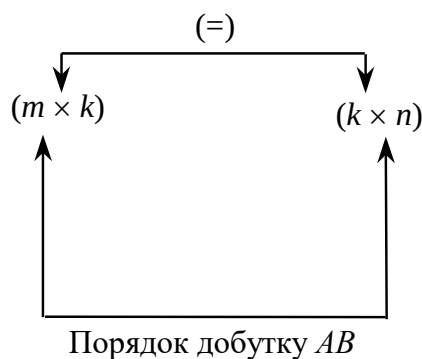


Рис. 3.1. Схема множення матриць

Нехай маємо матрицю A порядку $m \times k$ і матрицю $B - k \times n$. Добуток двох матриць $C = AB$ існує, бо матриця A має k стовпців і стільки ж рядків має матриця B . Матриця-добуток $C = AB$ матиме порядок $m \times n$, тобто стільки

рядків, скільки має перша матриця A , і стільки стовпців, скільки їх має матриця B . Цей висновок унаочнює рис. 3.1.

Правило множення двох матриць A на B : кожний елемент матриці c_{ij} є сумою добутків відповідних елементів i -го рядка матриці A на елементи j -го

стовпця матриці B , тобто $c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{ik} b_{kj} = \sum_{e=1}^k a_{ie} b_{ej}$.

Для множення матриць діють такі закони:

а) $AB \neq BA$, тобто добуток матриць не є комутативним.

б) $(AB)C = A(BC)$;

в) $(A+B)C = AC + BC$;

г) $C(A+B) = CA + CB$;

д) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$;

е) $AE = EA = A$, де E — одинична матриця того самого порядку, що й матриця A — квадратна матриця;

є) $(AB)' = B'A'$;

ж) $(ABC)' = C'B'A'$.

Як окремий випадок добуток матриці розміру $1 \times p$ (вектор-рядок) на матрицю порядку $p \times 1$ (вектор-стовпець) дає скаляр, а саме:

$$A = (a_1, a_2, a_3 \dots a_p); \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_p \end{pmatrix}; \quad C = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots + a_p b_p). \quad (2.14)$$

$$\text{Якщо вектор } A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

$$\text{то} \quad A'A = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \quad (2.16)$$

$$AA' = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n) = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & \dots & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & a_2^2 & \dots & a_2 a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n a_1 & a_n a_2 & \dots & a_n^2 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Два вектори A і B , для яких скалярний добуток дорівнює нулю, тобто $A'B = 0$ або $B'A = 0$ і $A'A \neq 0$, $B'B \neq 0$, називаються взаємно ортогональними.

Квадратна матриця A , яка задовольняє умову $A^2 = A$ ($A^2 = A \cdot A$), тобто квадратна матриця, яка внаслідок множення сама на себе не змінюється, називається ідемпотентною.

Детермінантом (визначником) квадратної матриці A порядку n називається алгебраїчна сума $n!$ членів, кожний з яких містить n співмножників, узятих по одному з кожного рядка (стовпця) матриці з певним знаком.

Позначається:

$$\det A \text{ або } |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (2.18)$$

3. Часові ряди, основні поняття та означення

Ряд динаміки – це послідовність спостережень одного показника (ознаки), які упорядковані відповідно до послідовно зростаючих або спадних значень іншого показника (ознаки). Якщо цей упорядкований показник – час, то такий ряд має назву часового ряду. Це важливий інструмент для аналізу економічних явищ, які змінюються з часом.

У контексті соціально-економічних систем, дослідження часових рядів динаміки є важливим для розуміння структури, класифікації та аналізу впливу основних факторів на складові часових рядів. Це дозволяє розкрити темпи і пропорції у розвитку економічних процесів та передбачити їхню можливу поведінку у майбутньому.

Часові ряди можуть бути моментними або інтервальними. Моментні ряди характеризують певний момент часу (наприклад, випуск продукції на початку кожного місяця), тоді як інтервальні ряди представляють агреговані дані за певний проміжок часу (наприклад, середній фонд заробітної плати за квартал або за рік).

Формально, часовий ряд записують як послідовність членів (рівнів): $y_1, y_2, \dots, y_t, \dots, y_n$, де n - це кількість членів ряду, або скорочено: $y_t, t = \overline{1, n}$, де t порядковий номер рівня ряду, що набуває значень від 1 до n . Довжина ряду - це тривалість від початкового рівня спостережень y_1 до кінцевого y_n .

Часовий аналіз і прогнозування часових рядів є важливими для різних областей, зокрема в економіці, фінансах, маркетингу та інших сферах, де необхідно розуміти і передбачити зміни у часі для прийняття кращих управлінських рішень.

4. Розкладання часових рядів на складові

Динаміка рядів економічних явищ і процесів у загальному випадку формується під впливом чотирьох груп факторів, а саме:

Довготривалі фактори (тренд). Ці фактори створюють загальну тенденцію розвитку економічних показників протягом тривалого періоду. Кожен окремий фактор може впливати на процес у різні способи, але разом вони формують загальний тренд або напрям розвитку, що описується функцією тренду $Q_t = f(t)$.

Сезонні фактори. Ці фактори відображають періодичні коливання показників, які повторюються впродовж певних періодів часу. Функція сезонності $S_t = \phi(t)$ зазвичай має періодичний характер та включає гармоніки залежно від періодів, які відображають ці повторювані впливи.

Циклічні фактори. Ці фактори формують зміни у динаміці ряду, спричинені тривалими циклами, такими як економічні, демографічні чи астрофізичні цикли. Функція циклічності позначається як $Z_t = \psi(t)$ і

відображає дію цих тривалих циклів на розвиток певного економічного явища.

Випадкові (нерегулярні) фактори. Ці фактори є випадковими та не піддаються реєстрації чи обліку. Їх вплив на формування рівнів часового ряду визначається їхньою стохастичною природою. Ці випадкові величини формують стохастичний характер часового ряду, відмінний від класичної стохастичної вибірки.

5. Тренд часового ряду і його виявлення

5.1 Аномальність тренду методом Ірвіна

Для моделювання тренду потрібно провести попередній аналіз часового ряду, котрий полягає у виявленні й усуненні перш за все аномальних його значень, що може бути здійснено, наприклад, методом Ірвіна.

Метод Ірвіна припускає використання такої формули:

$$\lambda = \frac{|y_t - y_{t-1}|}{\sigma_y}, \quad t = 2, 3, \dots, n, \quad (2.19)$$

Де

σ_y – середнє квадратне відхилення часового ряду,

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2}{n-1}}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{t=1}^n y_t}{n} \quad (2.20)$$

Розраховані значення $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{n-1}$ порівнюються з критичним значенням критерію Ірвіна λ_α , і, якщо вони будуть більші за табличні, відповідне значення ряду y_t вважається аномальним. Рівень значущості α , як правило, береться $\alpha = 0,05$.

5.2 Перевірка наявності тренду в динамічному ряді

До попереднього аналізу ряду відносять також перевірку наявності тренду в динамічному ряду. Найчастіше для цього використовують такі методи: перевірка різниць середніх рівнів ряду, метод Фостера – Стюарта.

За методом перевірки різниць середніх визначають:

$$t_p = \frac{|\bar{y}_1 - \bar{y}_2|}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}, \quad (2.21)$$

Де

σ – середньоквадратичне відхилення різниці середніх, що визначається:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)\sigma_1^2 + (n_2 - 1)\sigma_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \quad (2.22)$$

Якщо розрахункове значення $t_p < t_\alpha$ (для рівня значущості α), то гіпотеза про відсутність тренду приймається; у протилежному випадку, тобто коли $t_p \geq t_\alpha$, то з імовірністю $1 - \alpha$ гіпотеза відхиляється.

За методом Фостера – Стюарта визначають:

$$t_p^{(1)} = \frac{D}{\sigma_2}; \quad t_p^{(2)} = \frac{W - \bar{W}}{\sigma_1}, \quad (2.23)$$

Де

σ_1 і σ_2 — середні квадратичні відхилення для W і D ;

$$W = \sum_{t=1}^n \omega_t \quad \text{і} \quad D = \sum_{t=1}^n d_t; \quad \omega_t = C_t + V_t; \quad d_t = C_t - V_t;$$

параметри C_t і V_t мають такі значення

$$C_t = \begin{cases} 1, \text{ коли } y_t > y_{t-1}, \dots, y_1; \\ 0 \text{ в інших випадках;} \end{cases} \quad V_t = \begin{cases} 1, \text{ коли } y_t < y_{t-1}, \dots, y_1; \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases} \quad (2.24)$$

Де

$\bar{W}$ – середнє значення параметра W .

Якщо розрахункове значення $t_p^{(1)} > t_{\text{теор}}$ і $t_p^{(2)} > t_{\text{теор}}$ (за рівнем значущості α), то гіпотеза про відсутність тренду відхиляється; у протилежному випадку, тобто, коли $t_p^{(1)} < t_{\text{теор}}$ і $t_p^{(2)} < t_{\text{теор}}$, то з імовірністю $1 - \alpha$ гіпотеза про відсутність тренду приймається.

5.3 Методи визначення тренду

Методи визначення тренду поділяються на механічні й аналітичні.

Механічні методи згладжування ряду: метод простої ковзної середньої; метод експоненціального згладжування.

Метод простої ковзної середньої – це один з базових методів аналізу часових рядів, який використовується для виявлення трендів чи згладжування випадкових коливань у даних.

Принцип роботи методу полягає в обчисленні середньої величини показників на певному проміжку часу, здебільшого називаному вікном. Для кожної точки часового ряду виконується середнє значення значень на певному інтервалі часу (вікні), і результат використовується як точка нового згладженого ряду.

Метод експоненційного згладжування – це метод аналізу часових рядів, який використовується для прогнозування чи згладжування даних. Він ґрунтується на принципі зваженої середньої, де оновлення нових прогнозів або згладжених значень визначаються на попередніх значеннях та вагах.

6. Трендові моделі за кривими зростання

Найбільш вживані в економічних процесах криві зростання:

$$y_t = a_0 + a_1 t \text{ (поліном першого степеня);}$$

$$y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \text{ (поліном другого степеня);}$$

$$y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \text{ (поліном третього степеня);}$$

$$y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_p t^p \text{ (поліном } p\text{-го степеня), } (a_1, a_2, a_p - \text{ параметри многочлена, } t - \text{ незалежна змінна);}$$

$y_t = a_0 + a_1/x$ — гіперболічна функція;

експоненціальні функції: $Y_t = a(1 + r)^t$ або $Y_t = ab^t$, де $Y_t = ae^{bt}$; $r = \text{const}$;

модифікована експоненціальна функція: $Y_t = k + ab^t$;

логістична крива: $y_t = \frac{k}{1 + be^{-at}}$, або $y_t = \frac{k}{1 + 10^{a+bt}}$; крива Гомперця:

$y_t = ka^{bt}$; $0 < b < 1$

7. Прогнозування економічної динаміки за трендовими моделями

Прогнозування часового ряду за кривими зростання ґрунтується на методі екстраполяції: спостерігаючи ту чи іншу зміну процесу в минулому, продовжуємо її з певною ймовірністю у майбутній період.

Метод екстраполяції базується на двох припущеннях:

- часовий ряд дійсно має тренд;
- тенденція, що виявлена у минулому періоді, не буде мати суттєвих змін у майбутньому.

Процес екстраполяційного прогнозування економічної динаміки за трендовими моделями складається з таких етапів:

- попередній аналіз даних;
- вибір найбільш ефективної моделі — кривої зростання;
- чисельне оцінювання параметрів моделі;
- визначення адекватності моделі;
- оцінювання точності моделі;
- розрахунок точкового й інтервального прогнозів;
- верифікація прогнозу.



Теми доповідей

1. Особливості обчислення ковзної середньої.
2. Візуалізація тренду: сучасні аспекти.
3. Процес екстраполяційного прогнозування економічної динаміки.



Контрольні запитання

1. Назвіть основні етапи процесу екстраполяційного прогнозування економічної динаміки.
2. Які основні трендові моделі кривих зростання існують?
3. Охарактеризуйте аномальність тренду методом Ірвіна.
4. Визначте основні характеристики методу Фостера – Стюарта.
5. Дайте визначення методу простої ковзної середньої.
6. Дайте визначення методу експоненційного згладжування.



Одноваріантні запитання («Так» чи «Ні»)

1. Ряд динаміки – це послідовність спостережень одного показника (ознаки), які упорядковані відповідно до послідовно зростаючих або спадних значень іншого показника (ознаки)
2. Метод простої ковзної середньої – це один з базових методів аналізу часових рядів, який використовується для виявлення трендів чи згладжування випадкових коливань у даних
3. Метод експоненційного згладжування – це метод аналізу часових рядів, який використовується для прогнозування чи згладжування даних.
4. Аномальність ряду перевіряється за допомогою методу Ірвіна.
5. Перевірка наявності тренду в динамічному ряді здійснюється за допомогою методу Фостера – Стюарта.



Тестові завдання для самоконтролю

1. Один з базових методів аналізу часових рядів, який використовується для виявлення трендів чи згладжування випадкових коливань у даних:
 - а) метод ковзної середньої;
 - б) метод експоненційного згладжування;
 - в) метод центрування;
 - г) немає правильної відповіді.

2. Метод аналізу часових рядів, який використовується для прогнозування чи згладжування даних. Він ґрунтується на принципі зваженої середньої, де оновлення нових прогнозів або згладжених значень визначаються на попередніх значеннях та вагах:

- а) метод ковзної середньої;
- б) метод експоненційного згладжування;
- в) метод центрування;
- г) немає правильної відповіді.

3. Який з методів відноситься до механічних методів згладжування ряду?

- а) метод ковзної середньої;
- б) медіанний метод;
- в) метод центрування;
- г) немає правильної відповіді.

4. Ці фактори створюють загальну тенденцію розвитку економічних показників протягом тривалого періоду:

- а) довгострокові;
- б) сезонні;
- в) циклічні;
- г) випадкові;

5. Ці фактори відображають періодичні коливання показників, які повторюються впродовж певних періодів часу:

- а) довгострокові;
- б) сезонні;
- в) циклічні;
- г) випадкові.

Завдання

1. Знайти транспоновану матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 6 & 6 \\ 2 & 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 6 & 6 \\ 2 & 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

2. Знайти добуток матриць

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Додати матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 6 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Знайти обернену матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

5. Визначити детермінант матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

6. Використовуючи метод ковзної середньої, проаналізувати динаміку показників.

Таблиця 1 – Вихідні дані

роки	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Військові витрати на душу населення	3998	4024,1	2901,5	2110,9	2181,2	2633,7	3086,5	3648,2	3713,0
ВВП на душу населення, млн.дол	4030	4073,56	3065,23	2157,50	2220,71	2670,33	3115,05	3661,45	3794,68

7. Використовуючи метод центрування, побудувати лінійний тренд.

Таблиця 1 – Вихідні дані

роки	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Військові витрати на душу населення	3998	4024,1	2901,5	2110,9	2181,2	2633,7	3086,5	3648,2	3713,0
ВВП на душу населення, млн.дол	4030	4073,56	3065,23	2157,50	2220,71	2670,33	3115,05	3661,45	3794,68

8. Використовуючи матричний метод, побудувати лінійну економетричну модель.

Таблиця 1 – Вихідні дані

роки	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Військові витрати на душу населення (х)	3998	4024,1	2901,5	2110,9	2181,2	2633,7	3086,5	3648,2	3713,0
ВВП на душу населення, млн.дол (у)	4030	4073,56	3065,23	2157,50	2220,71	2670,33	3115,05	3661,45	3794,68

9. Знайдіть аномальність зазначеного тренду за методом Ірвіна. Визначте тренд за: методом експоненційного згладжування та методом ковзної середньої; визначте згладжування часового ряду за прямою, гіперболою, параболою.

Таблиця 1 – Вихідні дані

Рік	Урожайність	Рік	Урожайність	Рік	Урожайність
1884	15,2	1903	15,1	1922	14,0
1885	16,9	1904	14,6	1923	14,5
1886	15,3	1905	16,0	1924	15,4
1887	14,9	1906	16,8	1925	15,3
1888	15,7	1907	16,8	1926	16,0
1889	15,1	1908	15,5	1927	16,4
1890	16,7	1909	17,3	1928	17,2
1891	16,3	1910	15,5	1929	17,8
1892	16,5	1911	15,5	1930	14,4
1893	13,3	1912	14,2	1931	15,0
1894	16,5	1913	15,8	1932	16,0
1895	15,0	1914	15,7	1933	16,8
1896	15,9	1915	14,1	1934	16,9
1897	15,5	1916	14,8	1935	16,6
1898	16,9	1917	14,4	1936	16,2
1899	16,4	1918	15,6	1937	14,0
1900	14,9	1919	13,9	1938	18,1
1901	14,5	1920	14,7	1939	17,5
1902	16,6	1921	14,3		

ТЕМА 3 Методи побудови загальної лінійної моделі

Мета: формування загальної лінійної моделі: специфікація, передумови, оцінювання, обчислення коваріації, визначення прогнозу

План

1. Поняття моделі та етапи її побудови.
2. Специфікація моделі.
3. Передумови застосування методу найменших квадратів (МНК).
4. Оцінювання МНК.
5. Коваріаційна матриця оцінок параметрів моделі.
6. Прогноз та оцінювання можливостей моделі.
7. Нелінійна регресія та її лінеаризація.
8. Лінійна багатофакторна модель (множинна регресія).

Основні терміни і поняття

МНК, специфікація моделі, лінійна функція, степенева функція, гіпербола, квадратична функція, коваріаційна матриця, лінеаризація, множинна регресія

1. Поняття моделі та етапи її побудови

Економетрична модель – це функція чи система функцій, що кількісно описує залежність між соціально-економічними показниками, один чи кілька з яких є залежною змінною, інші – незалежними.

У загальному вигляді економетрична модель запишеться так:

$$Y = f(X_1, X_2, X_3 \dots X_{m-1}, u), \quad (3.1)$$

Де

Y – залежна змінна;

$X_j (j = \overline{1, m-1})$ – незалежні змінні;

u – стохастична складова

Етапи побудови моделі:

1) Знайомство з економічною теорією та висунення гіпотези: Цей етап включає ознайомлення з теоретичними аспектами економічної теорії та визначення певних гіпотез щодо взаємозв'язку між економічними змінними.

2) Специфікація моделі. Формулювання математичних рівнянь, які відображають теоретичні уявлення та гіпотези щодо зв'язків між економічними змінними. Це може бути представлено у вигляді системи рівнянь або математичних виразів, які описують взаємозв'язки.

3) Формування масивів вихідної інформації. Збір і підготовка даних для подальшого аналізу, які відповідають меті та завданням дослідження.

4) Оцінка параметрів економетричної моделі. Використання методу найменших квадратів (МНК) для оцінки параметрів моделі. Аналіз залишків (різниця між фактичними і прогнозованими значеннями) для перевірки відповідності моделі даним.

5) Коригування моделі. Якщо певні передумови застосування МНК не виконуються, необхідно змінювати специфікацію моделі або застосовувати інші методи оцінювання параметрів.

6) Верифікація моделі. Перевірка відповідності моделі та її оцінок параметрів тестами на адекватність, стабільність та іншими методами оцінки якості моделі.

7) Прогноз на основі моделі. Використання побудованої моделі для прогнозування майбутніх значень економічних змінних на основі попередніх даних.

2. Специфікація моделі

Специфікація моделі – це аналітична форма економетричної моделі на основі досліджуваних чинників. Вона складається з певного виду функції чи функцій, що використовуються для побудови моделей, має ймовірнісні характеристики, які притаманні стохастичним залишкам моделі.

З досвіду економетричних досліджень, а також на підставі якісного

теоретичного аналізу взаємозв'язків між економічними показниками, можна навести клас функцій, які можуть описувати ці взаємозв'язки:

1) лінійна функція:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_m x_m; \quad (3.2)$$

2) степенева функція:

$$y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_m^{a_m} \rightarrow \ln y = \ln a_0 + a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2 + \dots + a_m \ln x_m; \quad (3.3)$$

3) гіпербола:

$$y = a_0 + \frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \dots + \frac{a_m}{x_m} \rightarrow y = a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2 + \dots + a_m z_m, \quad (3.4)$$

$$\text{де } z_j = \frac{1}{x_j};$$

4) квадратична функція:

$$y = a_0 + a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_m x_m^2 \Rightarrow y = a_0 + a_1 t_1 + a_2 t_2 + \dots + a_m t_m, \quad (3.5)$$

$$\text{Де } t_j = x_j^2.$$

У цих функціях:

y – залежна (пояснювана) змінна;

$x_j, \quad j = \overline{1, m-1}$ – незалежні, або пояснювальні, змінні;

$a_j, \quad j = \overline{0, m}$ – параметри функцій.

Похибки специфікації моделі можуть бути трьох видів:

1) ігнорування при побудові економетричної моделі істотної пояснювальної змінної;

- 2) введення в модель незалежної змінної, яка не є істотною для вимірюваного зв'язку;
- 3) використання не відповідних математичних форм залежності.

3. Передумови застосування методу найменших квадратів (1МНК)

Економетрична модель у матричній формі має вигляд

$$Y = XA + u, \quad (3.6)$$

Де

Y – вектор значень залежної змінної;

X – матриця пояснювальних змінних розміром $n \times m$ (n — кількість спостережень, m — кількість змінних);

A – вектор параметрів моделі;

u – вектор залишків.

Застосовуємо 1МНК для оцінювання параметрів моделі, якщо виконуються наведені далі умови.

- 1) Математичне сподівання залишків дорівнює нулю:

$$M(u) = 0; \quad (3.7)$$

- 2) Значення u_i вектора залишків u незалежні між собою і мають сталу дисперсію (наявність гомоскедастичності):

$$M(uu') = \begin{cases} \sigma_u^2 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j; \end{cases} \quad (3.8)$$

- 3) Пояснювальні змінні моделі не пов'язані із залишками (відсутність лагових змінних):

$$M(X'u) = 0; \quad (3.9)$$

4) Пояснювальні змінні моделі утворюють лінійно незалежну систему векторів, або, іншими словами, пояснювальні змінні не повинні бути мультиколінеарними, тобто матриця X має повний ранг.

4. Оцінювання 1МНК

Оцінимо методом 1МНК параметри моделі, для якої виконуються чотири розглянуті щойно умови.

Рівняння (3.1) подамо у вигляді: $u = Y - X\hat{A}$. Тоді суму квадратів залишків u можна записати так:

$$\sum_{i=1}^n u_i^2 = u'u = (Y - X\hat{A})'(Y - X\hat{A}) = Y'Y - 2\hat{A}'X'Y + \hat{A}'X'X\hat{A}. \quad (3.10)$$

Продиференціюємо цю умову за $\hat{A}$ і прирівняємо похідні до нуля:

$$X'X\hat{A} = X'Y \quad (3.11)$$

Де

X' – матриця, транспонована щодо матриці пояснювальних змінних X .
Звідси

$$\hat{A} = (X'X)^{-1}X'Y \quad (3.12)$$

Рівняння (3.11) дає матричну форму запису системи нормальних рівнянь, а формула (3.12) показує, що вектор $\hat{A}$ є розв'язком системи таких рівнянь.

5. Коваріаційна матриця оцінок параметрів моделі

Етапи визначення коваріаційної матриці параметрів моделі ($Y = a_1 + a_2X_1 + a_3X_2 + u$):

1) Обчислення незміщеної оцінки дисперсії залишків $\hat{\sigma}_u^2$, скориставшись

співвідношенням
$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{Y'Y - \hat{A}'X'Y}{n - m};$$

2) Визначимо дисперсії оцінок $\hat{\sigma}_{\hat{a}_j}^2$: $\text{var}(\hat{a}_1) = \hat{\sigma}_{\hat{a}_1}^2 = \hat{\sigma}_u^2 c_{11}$,

$\text{var}(\hat{a}_2) = \hat{\sigma}_{\hat{a}_2}^2 = \hat{\sigma}_u^2 c_{22}$, $\text{var}(\hat{a}_3) = \hat{\sigma}_{\hat{a}_3}^2 = \hat{\sigma}_u^2 c_{33}$

3) Обчислимо коваріації відповідних оцінок параметрів: $\hat{\sigma}_{\hat{a}_1\hat{a}_2} = \hat{\sigma}_u^2 c_{12}$,

$\hat{\sigma}_{\hat{a}_1\hat{a}_3} = \hat{\sigma}_u^2 c_{13}$, $\hat{\sigma}_{\hat{a}_2\hat{a}_3} = \hat{\sigma}_u^2 c_{23}$;

4) Визначимо стандартні похибки оцінок параметрів моделі:

$S_{\hat{a}_j} = \sqrt{\text{cov}(\hat{a}_j)}$;

5) Знаходження відношення $\frac{S_{\hat{a}_j}}{|\hat{a}_j|}$:

6. Прогноз та оцінювання можливостей моделі

Економетричне моделювання зв'язку між економічними показниками завжди складається з трьох етапів:

- побудови економетричної моделі;
- перевірки статистичної значущості моделі та оцінювання її параметрів;
- прогнозування на основі моделі.

Задаючи X_0 , підставимо значення цього вектора в побудовану економетричну модель

$$\hat{y}_0 = X_0' \hat{A}. \quad (3.13)$$

Інтервальний прогноз індивідуального значення визначається як:

$$\hat{y}_0 - t_\alpha \hat{\sigma}_{np(i)} \leq \hat{y}_0 \leq \hat{y}_0 + t_\alpha \hat{\sigma}_{np(i)} \quad (3.14)$$

або

$$\begin{aligned} \hat{y}_0 - t_\alpha \hat{\sigma}_u \sqrt{1 + X_0' (X' X)^{-1} X_0} \leq \hat{y}_0 \leq \\ \leq \hat{y}_0 + t_\alpha \hat{\sigma}_u \sqrt{1 + X_0' (X' X)^{-1} X_0}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

7. Нелінійна регресія та її лінеаризація

Нехай модель регресії має вигляд

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1}^2 + \beta_2 \sqrt{x_{i2}} + \varepsilon_i \quad (3.16)$$

Це рівняння є *нелінійним за змінними*.

Уведемо нові змінні:

$$z_1 = x_1^2, z_2 = \sqrt{x_2} \quad (3.17)$$

Тоді $y_i = \beta_0 + \beta_1 z_{i1} + \beta_2 z_{i2} + \varepsilon_i$.

Недоліком цієї моделі є труднощі, що виникають при інтерпретації кінцевих результатів.

Розглянемо регресійні моделі, що *нелінійні за параметрами*.

Мультиплікативна (степенева) модель:

$$y_i = \beta_0 \cdot x_{i1}^{\beta_1} \cdot x_{i2}^{\beta_2} \cdot \varepsilon_i \quad (3.18)$$

Експонентна модель:

$$y_i = e^{\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \varepsilon_i} \quad (3.19)$$

Логарифмуючи обидві частини цих рівнянь, одержимо лінійну модель щодо логарифмів змінних.

$$\ln y_i = \ln \beta_0 + \beta_1 \ln x_{i1} + \beta_2 \ln x_{i2} + \ln \varepsilon_i \quad (3.20)$$

Для цього рівняння можна застосувати метод найменших квадратів (МНК), але необхідно, щоб вектор збурень ε мав *логарифмічно нормальний розподіл*.

Задача залежності обсягу виробництва від витрат капіталу й праці називається задачею Кобба–Дугласа.

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta}\varepsilon, \quad (3.21)$$

Де

Y – обсяг виробництва;

A – коефіцієнт пропорційності;

K – витрати капіталу;

L – витрати праці; ε – вектор збурень;

α, β – коефіцієнти часткової еластичності обсягу виробництва за витратами капіталу й праці відповідно.

Коефіцієнтом часткової еластичності $E_{x_i}(y)$ функції $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається межа відношення відносного часткового збільшення функції до відносного збільшення цієї змінної при $\Delta x_i \rightarrow 0$, тобто

$$E_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta xy}{y} : \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{x}{y} \cdot y'_x, \quad (3.22)$$

Де

y'_x – коефіцієнт еластичності; $E_K = \alpha$; $E_L = \beta$.

Лінеаризація моделі проходить шляхом логарифмування:

$$\ln Y = \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L + \ln \varepsilon \quad (3.33)$$

При розширенні виробництва (збільшення витрат капіталу й праці в декілька разів приводить до збільшення обсягу виробництва на таке ж число разів) $\alpha + \beta = 1$.

У цьому випадку $Y = AK^\alpha L^{1-\alpha} \varepsilon$:

$$\frac{Y}{L} = A \left(\frac{K}{L} \right)^\alpha \varepsilon - \text{модель розширення виробництва, (3.34)}$$

Де

$\frac{Y}{L}$ – продуктивність праці;

$\frac{K}{L}$ – капіталоозброєність виробництва.

Лінеаризація цієї моделі здійснюється шляхом логарифмування.

Функція Кобба–Дугласа з урахуванням *технічного прогресу* має вигляд

$$Y = AK^\alpha L^\beta e^{\theta t} \varepsilon, \quad (3.35)$$

Де

θ – параметр темпу приросту обсягу виробництва завдяки технічному прогресу;

t – час.

8. Лінійна багатофакторна модель (множинна регресія)

Вплив багатьох чинників на результативну змінну може бути описаний лінійною моделлю:

$$Y = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_m X_m + U, \quad (3.36)$$

Де

Y – точні фактичні значення досліджуваної (залежної, пояснюваної) змінної, показника або регресанду; $X_1, X_2, \dots$,

X_m – незалежні (пояснюючі) змінні, фактори або регресори;

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ – невідомі параметри моделі;

U – випадкова складова регресійного рівняння,

m – кількість факторів у моделі.

Рівняння

$$\hat{Y} = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_m X_m \quad (3.37)$$

буде оцінкою моделі (3.36) , якщо $\hat{Y}$ – теоретичні значення досліджуваного показника, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ – оцінки точних значень параметрів $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$.

Функція (3.37) є лінійною відносно незалежних змінних і параметрів моделі, але саме лінійність за параметрами є більш суттєвою, оскільки це пов'язано з методами оцінювання параметрів. Випадкова складова U є результативною дією всіх неконтрольованих випадкових факторів, що зумовлюють відхилення реальних значень досліджуваного показника Y від аналітичних (обчислених на підставі обраної регресійної залежності).

Лінійні зв'язки не вичерпують усіх можливих форм залежності між показниками. Тому при дослідженні конкретного економічного явища першочерговим завданням є пошук найточнішої аналітичної форми опису статистичного зв'язку між його показниками. Певна форма залежності повинна мати відповідне економічне обґрунтування. Якщо вигляд залежності встановити важко, то за перше наближення до моделі все ж обирають лінійну залежність.

Звичайним математичним підходом до розв'язання задач є відокремлення специфічних класів задач або зведення задач до деякого класу і застосування відповідних методів розв'язування. Оскільки дослідження лінійних функцій має незаперечні переваги перед іншими класами функцій, то нелінійні функції намагаються передусім звести до лінійних.

Наприклад, степенева функція $Y = a_0 X_1^{a_1} X_2^{a_2} \dots X_m^{a_m}$ після логарифмування набуває вигляду $\ln Y = \ln a_0 + a_1 \ln X_1 + a_2 \ln X_2 + \dots + a_m \ln X_m$ і після заміни $\ln a_0 = a$ є лінійною відносно параметрів $a, a_1, a_2, \dots, a_m$.

Показникова функція $Y = a_0 a_1^{X_1} a_2^{X_2} \dots a_m^{X_m}$ після логарифмування набуває вигляду $\ln Y = \ln a_0 + X_1 \ln a_1 + X_2 \ln a_2 + \dots + X_m \ln a_m$ і після заміни $\ln a_i = b_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, m$) стає лінійною відносно нових параметрів $b_0, b_1, b_2, \dots, b_m$.

Гіперболічна $Y = a_0 + \frac{a_1}{X_1} + \frac{a_2}{X_2} + \dots + \frac{a_m}{X_m}$ функція за допомогою заміни змінних $Z_i = \frac{1}{X_i}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, m$) зводяться до лінійного вигляду

$$Y = a_0 + a_1 Z_1 + a_2 Z_2 + \dots + a_m Z_m.$$

Квадратична функція $Y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_m X_m + a_{11} X_1^2 + a_{12} X_1 X_2 + \dots + a_{1m} X_1 X_m + a_{22} X_2^2 + \dots + a_{2m} X_2 X_m + \dots + a_{mm} X_m^2$ зводиться до лінійної $Y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_m X_m + a_{11} X_{11} + a_{12} X_{12} + \dots + a_{1m} X_{1m} + a_{22} X_{22} + \dots + a_{2m} X_{2m} + \dots + a_{mm} X_{mm}$ за допомогою заміни $X_{ij} = X_i X_j$ ($i, j = 0, 1, 2, \dots, m$).

Зауважимо, що в сучасному економічному аналізі існують залежності, які не зводяться до лінійних елементарними перетвореннями, однак їх параметри можна легко розрахувати спеціальними спрощеними методами.

Оскільки найпоширенішими в економетричному моделюванні є лінійні функції, обґрунтування економетричних методів розглядають, як правило, на базі лінійних моделей. Отже, предметом наших досліджень буде узагальнена багатofакторна лінійна регресійна модель.

Узагальнена регресійна модель справджується для всієї генеральної сукупності, а похибка регресії має певний закон розподілу. На практиці мають справу з вибірковою моделлю, тобто з такою, яка побудована для деякої вибірки. Параметри вибіркової моделі є випадковими величинами, а їх математичне сподівання дорівнює параметрам узагальненої моделі. Щоб

визначити параметри узагальненої моделі, необхідно за вибіркою отримати якомога кращі їх оцінки, тобто значення, найближчі до параметрів узагальненої моделі. З цією метою використовують метод найменших квадратів (МНК), який для багатфакторної лінійної моделі зручно застосовувати у матричній формі.

Розглянемо, наприклад, лінійну модель двофакторної регресії

$$\mathbf{Y} = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2. \quad (3.38)$$

Система нормальних рівнянь в матричній формі записується як

$$X \cdot A = Y, \quad (3.39)$$

де через X позначено матрицю початкових даних; через $A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ – вектор-стовпець невідомих оцінок параметрів; через Y – вектор-стовпець спостережених значень досліджуваного показника.

Оскільки зазвичай передбачається, що рівняння регресії (5.3) має вільний член, тобто a_0 , то для того, щоб отримати оцінку параметра a_0 , розширюємо матрицю X урахуванням в неї змінної $x_0 = 1$. Тому перший стовпець матриці початкових даних складається з одиниць, а два інші стовпці містять спостереження над змінними X_1 і X_2 .

Згідно МНК рівняння (5.4) треба помножити зліва на транспоновану матрицю X^T початкових даних: $X^T \cdot X \cdot A = X^T \cdot Y$. Матрицю $(X^T \cdot X)$ називають інформаційною матрицею задачі. Її можна обчислити за формулою:

$$(X^T \cdot X) = \begin{pmatrix} n & \sum x_1 & \sum x_2 \\ \sum x_1 & \sum x_1^2 & \sum x_1 x_2 \\ \sum x_2 & \sum x_1 x_2 & \sum x_2^2 \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

Коректне застосування МНК передбачає відсутність суттєвої мультиколінеарності факторів. В цьому випадку інформаційна матриця є не виродженою і має обернену $(X^T \cdot X)^{-1}$, множення останньої рівності на яку дає формулу для оцінки вектору параметрів моделі за МНК:

$$A = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot (X^T \cdot Y) \quad (3.41)$$

Слід зауважити, що формула (3.41) знаходження оцінок параметрів двофакторної лінійної моделі (3.38) є справедливою для випадку будь-якого скінченного числа факторів.

Для випадку множинної регресії вводять деякі нові показники точності її підбору та критерії її перевірки.

Множинний коефіцієнт кореляції R дорівнює парному коефіцієнту кореляції між фактичними (Y) і теоретичними ($\mathbf{Y}$) значеннями змінної Y і характеризує ступінь точності підбору моделі. Він обчислюється за формулою:

$$R = r_{Y\mathbf{Y}} = \frac{n \sum Y\mathbf{Y} - \sum Y \sum \mathbf{Y}}{\sqrt{n \sum Y^2 - (\sum Y)^2} \sqrt{n \sum \mathbf{Y}^2 - (\sum \mathbf{Y})^2}} \quad (3.42)$$

Для знаходження множинного коефіцієнта кореляції застосовують також модифікації формули (3.43) у вигляді:

$$R = \frac{\sum (Y - \bar{Y})(\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}})}{\sqrt{\sum (Y - \bar{Y})^2} \sqrt{\sum (\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}})^2}}, \quad R = \sqrt{1 - \frac{\sum (Y - \mathbf{Y})^2}{\sum (Y - \bar{Y})^2}}, \quad R = \sqrt{\frac{\sum (\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Y}})^2}{\sum (Y - \bar{Y})^2}} \quad (3.43)$$

Для одержання висновків про практичну значущість синтезованої в аналізі моделі показникам тісноти зв'язку дається кількісна оцінка на основі шкали Чеддока.

Довірчий інтервал для генерального множинного коефіцієнта кореляції має вигляд:

$$R - \Delta_R \leq R_T \leq R + \Delta_R, \quad (3.44)$$

Де

$$\Delta_R = t_{kp}(n - m - 1, \alpha) \frac{1 - R^2}{\sqrt{n - m - 1}},$$

n – кількість спостережень,

m – число факторів,

α – рівень значущості, критичне значення $t_{kp}(n - m - 1, \alpha)$ знаходять за таблицями Стьюдента

Коефіцієнт детермінації R^2 характеризує частку загальної дисперсії відносно середнього $\bar{Y}$, яку можна пояснити побудованим рівнянням регресії.

При вивченні кореляційних залежностей показників комерційної діяльності в умовах переваги малого й середнього бізнесу аналізу піддаються порівняно невеликі по складу одиниць сукупності. При чисельності об'єктів аналізу до 30 одиниць виникає необхідність перевірки параметрів рівняння регресії на їх типовість. При цьому здійснюється перевірка, наскільки розрахункові параметри характерні для відображення всього комплексу умов. Перевірка проводиться за F – критерієм Фішера і t – критерієм Стьюдента.

Критерій Фішера: фактичне значення F – статистики, яке обчислюють за формулою $F = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n - m - 1}{m}$, порівнюють з критичним $F_{kp}(m, n - m - 1, \alpha)$.

Якщо $F > F_{kp}$, то рівняння регресії є значущим, коефіцієнт множинної

кореляції значуще відрізняється від нуля, модель адекватно описує зв'язок між показником Y і факторами $X_1, X_2, \dots, X_m$.

Критерій Стюдента: обчислюють величину t -статистики

$$t_k = b_k \sqrt{\frac{n-m-1}{c_{kk} \sum (Y - \hat{Y})^2}}, \quad (c_{kk} - \text{діагональний елемент матриці } (X^T \cdot X)^{-1}).$$
 По

таблицях критичних точок Стюдента знаходять критичне значення $t_{KP}(n-m-1, \alpha)$. Якщо $|t| \geq t_{KP}$, параметр α_k значуще відрізняється від нуля, між показником Y і фактором X_k існує лінійна залежність.

Довірчий інтервал для параметра α_k рівняння складе:

$$a_k - \Delta_k \leq \alpha_k \leq a_k + \Delta_k, \quad \Delta_k = t_{KP}(n-m-1, \alpha) \sqrt{\frac{c_{kk} \sum (Y - \hat{Y})^2}{n-m-1}} \quad (3.45)$$

Важливим показником адекватності побудованої моделі є величини відносних відхилень розрахункових рівнів показника від його фактичних значень. Вважають, якщо величина відносних відхилень для більшості вимірів не перевершує 5%, то модель є адекватною фактичним даним.

Коефіцієнт еластичності Y по X_k є безрозмірним показником, що визначає вплив цього фактору на показник:

$$E_{X_k} = \frac{\partial \hat{Y}}{\partial X_k} \cdot \frac{X_k}{\hat{Y}} \quad (3.46)$$

Якщо X_k зміниться на 1%, то Y зміниться на E_{X_k} %. Оскільки для лінійної регресії коефіцієнт еластичності залежить від X_k : $E_{X_k} = a_k \cdot \frac{X_k}{\hat{Y}}$, то найчастіше обчислюють коефіцієнт еластичності для середнього $\overline{X_k}$.

Прогнозування: припустимо, ми хочемо поширити нашу модель на інші значення факторних змінних і поставити проблему прогнозування середнього значення Y , що відповідає деякому даному значенню $X_1^0, X_2^0, \dots, X_m^0$ змінних $X_1, X_2, \dots, X_m$. Причому ці нові значення $X_1^0, X_2^0, \dots, X_m^0$ можуть лежати як між вибірковими спостереженнями, так і поза відповідними інтервалами. Точковий прогноз представляє із себе обчислене по рівнянню (3.38) значення $\hat{Y}_0 = a_0 + a_1 X_1^0 + a_2 X_2^0 + \dots + a_m X_m^0$. Інтервальний прогноз складає довірчий інтервал, що покриває із заданою надійністю $p = 1 - \alpha$ очікувану величину Y_0 :

$$\hat{Y}_0 - \Delta_Y \leq Y_0 \leq \hat{Y}_0 + \Delta_Y; \Delta_Y = t_{KP}(n - m - 1, \alpha) \sqrt{\frac{\sum (Y - \hat{Y})^2}{n - m - 1}} \quad (3.47)$$



Теми доповідей

1. Сучасні особливості множинної регресії.
2. Специфікація лінійної моделі: однофакторної, багатфакторної.
3. Коефіцієнти кореляції та детермінації: сутність та порядок визначення



Контрольні запитання

1. Дайте визначення сутності специфікації моделі.
2. Як проходить процес формування масивів вихідної інформації?
3. Розкрийте основні етапи оцінки параметрів економетричної моделі.
4. Як здійснюється коригування економетричної моделі?
5. Що значить верифікація моделі?



Одноваріантні запитання («Так» чи «Ні»)

1. Застосовуємо 1МНК для оцінювання параметрів моделі, якщо виконуються наведені далі умови: математичне сподівання залишків дорівнює нулю; значення u_i вектора залишків u незалежні між собою і мають сталу дисперсію (наявність гомоскедастичності); пояснювальні змінні моделі не пов'язані із залишками (відсутність лагових змінних).

2. Лінійна модель двофакторної регресії: $\hat{Y} = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2$.
3. Лінеаризація моделі проходить шляхом логарифмування:
 $\ln Y = \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L + \ln \varepsilon$.
4. Задача залежності обсягу виробництва від витрат капіталу й праці називається задачею Кобба–Дугласа.
5. Економетричне моделювання зв'язку між економічними показниками завжди складається з трьох етапів: побудови економетричної моделі; перевірки статистичної значущості моделі та оцінювання її параметрів; прогнозування на основі моделі.



Тестові завдання для самоконтролю

1. Функція чи система функцій, що кількісно описує залежність між соціально-економічними показниками, один чи кілька з яких є залежною змінною, інші – незалежними.
 - а) економетрична модель;
 - б) статистична модель;
 - в) логічна модель;
 - г) немає правильної відповіді.
2. Формулювання математичних рівнянь, які відображають теоретичні уявлення та гіпотези щодо зв'язків між економічними змінними.
 - а) специфікація;
 - б) лінеаризація;
 - в) диференціація;
 - г) немає правильної відповіді.
3. Перевірка відповідності моделі та її оцінок параметрів тестами на адекватність, стабільність та іншими методами оцінки якості моделі.
 - а) лінеаризація;
 - б) диференціація;
 - в) валідація;
 - г) верифікація.

4. Перед Вами зображена: $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m$
- лінійна функція;
 - гіперболічна функція;
 - логарифмічна функція;
 - немає правильної відповіді.
5. Значення u_i вектора залишків u незалежні між собою і мають сталу дисперсію – це:
- гомоскедастичність;
 - мультиколеніарність;
 - автокореляція;
 - немає правильної відповіді.

Завдання

1. Побудуйте нелінійну однофакторну модель залежності продуктивності від фондомісткості.

Таблиця 1 – Вихідні дані

Номер цеху	Продуктивність праці, людино-днів	Фондомісткість, млн грн	Коефіцієнт плинності робочої сили, %
1	32	0,89	19,5
2	29	0,43	15,6
3	30	0,70	13,5
4	31	0,61	9,5
5	25	0,51	23,5
6	34	0,51	12,5
7	29	0,65	17,5
8	24	0,43	14,5
9	20	0,51	14,5
10	33	0,92	7,5

2. Побудуйте багатфакторну економетричну модель залежності між продуктивністю, фондомісткістю та коефіцієнтом плинності робочої сили.

Таблиця 2 – Вихідні дані

Номер цеху	Продуктивність праці, людино-днів	Фондомісткість, млн грн	Коефіцієнт плинності робочої сили, %
1	32	0,89	19,5
2	29	0,43	15,6
3	30	0,70	13,5
4	31	0,61	9,5
5	25	0,51	23,5
6	34	0,51	12,5
7	29	0,65	17,5
8	24	0,43	14,5
9	20	0,51	14,5
10	33	0,92	7,5

ТЕМА 4 Особливості застосування МНК для моделей регресії

Мета: набуття навичок визначення мультиколінеарності, автокореляції та гомоскедастичності.

План

1. Мультиколінеарність: ознаки та наслідки.
2. Визначення мультиколінеарності на основі алгоритму Фаррара – Глобера.
3. Гомоскедастичність та гетероскедастичність: сутність та методи оцінки.
4. Параметричний тест Гольдфелда – Квандта та метод Ейткена.
5. Автокореляція та методи її оцінки.
6. Метод Дарбіна – Уотсона.

Основні терміни і поняття

Мультиколінеарність, гомоскедастичність, гетероскедастичність, автокореляція, параметричний тест.

1. Мультиколінеарність: ознаки та наслідки

Мультиколінеарність – це існування тісної лінійної залежності, або сильної кореляції, між двома чи більше пояснювальними змінними.

Вона негативно впливає на кількісні характеристики економетричної моделі або робить її побудову взагалі неможливою.

Основні наслідки мультиколінеарності:

- 1) Дисперсія і коваріація оцінок параметрів моделі різко збільшуються.
- 2) Похибки оцінок параметрів значно збільшуються, відповідно збільшуються їхні інтервали довіри.
- 3) Оцінки параметрів моделі можуть бути статистично незначущими.

Основні ознаки мультиколінеарності.

- 1) Наявність парних коефіцієнтів кореляції між пояснювальними змінними, які наближаються до одиниці і наближено дорівнюють множинному коефіцієнту кореляції.
- 2) Значення визначника кореляційної матриці наближається до нуля.
- 3) Наявність значень оцінок параметрів моделі, які наближаються до нуля, за високого рівня коефіцієнта детермінації і F-критеріїв, які істотно відрізняються від нуля.
- 4) Наявність частинних коефіцієнтів детермінації між пояснювальними змінними, які наближаються до одиниці.
- 5) Істотна зміна оцінок параметрів моделі за додаткового введення до останньої пояснювальної змінної, а також незначне підвищення (або зниження) коефіцієнтів кореляції чи детермінації.

2. Визначення мультиколінеарності на основі алгоритму Фаррара – Глобера

Алгоритм Фаррара – Глобера складається із семи кроків:

- 1) Нормалізація (стандартизація) змінних: $x_{ik}^* = \frac{x_{ik} - \bar{x}_k}{\sqrt{n \sigma_{x_k}^2}}$.
- 2) Знаходження кореляційної матриці $r_{xx} = X^{*'} X^*$.
- 3) Визначення критерію χ^2 («хі»-квадрат): $\chi^2 = - \left[n - 1 - \frac{1}{6}(2m + 5) \right] \ln |r_{xx}|$
- 4) Визначення оберненої матриці $C = r_{xx}^{-1} = \left(X^{*'} X^* \right)^{-1}$.
- 5) Обчислення F -критеріїв: $F_k = (c_{kk} - 1) \frac{n - m}{m - 1}$.
- 6) Знаходження частинних коефіцієнтів кореляції: $r_{kj} = \frac{-c_{kj}}{\sqrt{c_{kk} \cdot c_{jj}}}$.
- 7) Обчислення t -критеріїв: $t_{kj} = \frac{r_{kj} \sqrt{n - m}}{\sqrt{1 - r_{kj}^2}}$.

3. Гомоскедастичність та гетероскедастичність: сутність та методи оцінки

Якщо дисперсія залишків стала для кожного спостереження, тобто $M(uu') = \sigma^2$, то ця її властивість називається гомоскедастичністю. Якщо дисперсія залишків змінюється для кожного спостереження або групи спостережень, тобто $M(uu') = \sigma_u^2 S$, то це явище називається гетероскедастичністю.

Перевірка припущень про наявність гетероскедастичності залежить від природи вихідних даних. Для перевірки наявності гетероскедастичності використовуються такі методи:

Методи оцінки гетероскедастичності:

- 1) Параметричний тест Гольдфельда – Квандта.
- 2) Непараметричний тест Гольдфельда – Квандта.
- 3) Тест Глейзера.

4) Тест Спірмена.

5) Тест Парка.

4. Параметричний тест Гольдфельда – Квандта та метод Ейткена

Параметричний тест Гольдфельда – Квандта складається з п'яти кроків.

Спостереження (вихідні дані) впорядковуються відповідно до величини елементів вектора X_j , який може викликати зміну дисперсії залишків.

1) Відкидається c спостережень, які містяться всередині векторів вихідних даних.

2) Будуються дві економетричні моделі на основі 1МНК за двома створеними сукупностями спостережень обсягу $(n-c)/2$ за умови, що $(n-c)/2$ перевищує кількість змінних m .

3) Обчислюється сума квадратів залишків за першою S_1 та другою S_2 моделями:

$$S_1 = u_1' u_1, \quad (4.1)$$

Де

u_1 – залишки за моделлю, побудованою за першою сукупністю спостережень,

$$S_2 = u_2' u_2, \quad (4.2)$$

Де

u_2 – залишки за моделлю, побудованою за другою сукупністю спостережень.

4) Відшукується критерій $R^* = \frac{S_2}{S_1}$, який в разі виконання гіпотези про

гомоскедастичність відповідатиме F -розподілу з $\gamma_1 = (n - c - 2m)/2$, $\gamma_2 = (n - c - 2m)/2$ ступенями свободи.

5) Обчислене значення критерію порівнюється з табличним значенням F -критерію за вибраного рівня довіри і відповідних ступенів свободи. Якщо $R^* \leq F_{\text{табл}}$, то гетероскедастичність відсутня.

За наявності гетероскедастичності для оцінювання параметрів моделі доцільно застосувати узагальнений метод найменших квадратів (метод Ейткена), оператор оцінювання якого має такий вигляд:

$$\hat{A} = (X' S^{-1} X)^{-1} X' S^{-1} Y \quad (4.3)$$

Вектор $\hat{A}$ у такому разі містить незміщену лінійну оцінку параметрів моделі, яка має найменшу дисперсію і матрицю коваріацій

$$\text{cov}(\hat{A}) = \sigma_u^2 (X' S^{-1} X)^{-1} \quad (4.4)$$

5. Автокореляція та методи її оцінки

Автокореляція — це наявність взаємозв'язку між послідовними елементами часового чи просторового ряду даних.

Знехтувавши автокореляцією залишків і оцінивши параметри моделі ІМНК, дійдемо таких трьох основних наслідків.

1. Оцінки параметрів моделі можуть бути незміщеними, але неефективними, тобто вибіркві дисперсії вектора оцінок $\hat{A}$ можуть бути невиправдано великими.

2. Оскільки вибіркві дисперсії обчислюються не за уточненими формулами, то статистичні критерії t - і F -статистики, які знайдено для лінійної моделі, практично не можуть бути використані в дисперсійному аналізі при автокореляції.

3. Неефективність оцінок параметрів економетричної моделі призводить, як правило, до неефективних прогнозів, тобто прогнозів з доволі великою вибірковою дисперсією.

Для оцінювання параметрів моделі з автокорельованими залишками можна застосувати наступні методи:

- 1) Ейткена;
- 2) Перетворення вихідної інформації;
- 3) Кочрена – Оркатта;
- 4) Дарбіна.

6 .Метод Дарбіна -Уотсона

Метод Дарбіна є ітеративним методом, який складається з двокрокової процедури. На першому кроці визначаються 1МНК оцінки параметрів моделі:

$$y_t = a_0 + \sum_j a_j x_{tj} + u_t, \quad (4.5)$$

Де

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t, \text{ або } u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \varepsilon_t \text{ і т. д.}$$

На другому кроці 1МНК застосовується для перетворених даних з допомогою параметра ρ , який визначено на першому кроці, тобто змінні наберуть вигляду $(y_t - \rho y_{t-1})$, $(x_{tj} - \rho x_{tj-1})$.

Коефіцієнт при $x_{tj} - \rho x_{tj-1}$ є оцінкою параметра a_j , а вільний член, поділений на ρ , – оцінкою параметра a_0 .

Оцінку прогнозного рівня залежної змінної можна дістати, скориставшись таким співвідношенням:

$$\hat{y}_{n+1} = X_{n+1} \hat{A} + W' V^{-1} u, \quad (4.6)$$

Де

$$\begin{aligned} \hat{A} & \text{ – вектор оцінок параметрів моделі з автокорельованими залишками} \\ u & = Y - X\hat{A}. \end{aligned}$$

Оскільки $W' V^{-1} u_n = \rho u_n$, то формула найкращого незміщеного прогнозу запишеться у вигляді:

$$\hat{y}_{n+1} = X_{n+1} \hat{A} + \rho u_n \quad (4.7)$$

Теми доповідей

1. Особливості алгоритму Теста Глейзера.
2. Практичне застосування Теста Спірмена.
3. Тест Парка: сутність та основні етапи.
4. Алгоритм Ейткена: основні етапи та практичне застосування.
5. Метрики алгоритму Кочрена – Оркатта.



Контрольні запитання

1. Назвіть основні ознаки та наслідки мультиколінеарності.
2. Які основні кроки алгоритму Фаррара – Глобера ?
3. Охарактеризуйте методи оцінки гетероскедастичності.
4. Назвіть основні кроки теста Гольдфельда–Квандта.
5. Які основні методи оцінювання автокореляції вам відомі?



Одноваріантні запитання («Так» чи «Ні»)

1. Метод Дарбіна є ітеративним методом, який складається з двокрокової процедури.
2. Автокореляція – це наявність взаємозв'язку між послідовними елементами часового чи просторового ряду даних.
3. Мультиколінеарність – це існування тісної лінійної залежності, або сильної кореляції, між двома чи більше пояснювальними змінними.
4. Алгоритм Фаррара – Глобера складається із семи кроків.
5. Параметричний тест Гольдфельда – Квандта є методом, який оцінює гетероскедастичність.



Тестові завдання для самоконтролю

1. Існування тісної лінійної залежності, або сильної кореляції між двома чи більше пояснювальними змінними – це:
 - а) автокореляція;

- б) мультиколінеарність;
 - в) гетероскедастичність;
 - г) немає правильної відповіді.
2. Наявність взаємозв'язку між послідовними елементами часового чи просторового ряду даних – це:
- а) автокореляція;
 - б) мультиколінеарність;
 - в) гетероскедастичність;
 - г) немає правильної відповіді.
3. Для оцінювання параметрів моделі з автокорельованими залишками можна застосувати такий метод:
- а) Тест Глейзера;
 - б) Тест Спірмена;
 - в) Кочрена – Оркатта;
 - г) Фаррара – Глобера.
4. Оберіть методи оцінки гетероскедастичності:
- а) Тест Глейзера;
 - б) Тест Спірмена;
 - в) Кочрена – Оркатта;
 - г) Фаррара – Глобера.
5. Оберіть методи оцінки мультиколінеарності:
- а) Тест Глейзера;
 - б) Тест Спірмена;
 - в) Кочрена – Оркатта;
 - г) Фаррара – Глобера.

Завдання

1. Для знаходження гетероскедастичності застосувати перевірку гетероскедастичності за критерієм Гольдфельда – Квандта.

Місяць	Дохід, гр. од.	Заощадження, гр. од.	Місяць	Дохід, гр. од.	Заощадження, гр. од.
1	10,8	2,36	10	17,5	2,59
2	11,4	2,20	11	18,7	2,90
3	12,0	2,08	12	19,7	2,95
4	12,6	2,20	13	20,6	2,82
5	13,0	2,10	14	21,7	3,04
6	13,9	2,12	15	23,1	3,53
7	14,7	2,41	16	24,8	3,44
8	15,5	2,50	17	25,9	3,75
9	16,3	2,43	18	27,2	3,99

2. Знайти можливу автокореляцію критерієм Дарбіна – Уотсона

Рік	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Роздрібний товарообіг, грош. од.	24,0	25,0	25,7	27,0	28,8	30,8	33,8	38,1	43,4	45,5
Дохід, грош. од.	27,1	28,2	29,3	31,3	34,0	36,0	38,7	43,2	50,0	52,1

3. Розглянути мультиколінеарність за алгоритмом Фаррара–Глобера

Номер цеху	Продуктивність праці, людино-днів	Фондомісткість, млн грн	Коефіцієнт плинності робочої сили, %
1	32	0,89	19,5
2	29	0,43	15,6
3	30	0,70	13,5
4	31	0,61	9,5
5	25	0,51	23,5
6	34	0,51	12,5
7	29	0,65	17,5
8	24	0,43	14,5
9	20	0,51	14,5
10	33	0,92	7,5

ТЕМА 5 Економетричні моделі на основі системи структурних рівнянь та з дискретними змінними

Мета: набути аналітичних навичок застосування методів НМНК, 2МНК, 3МНК, регресії з фіктивними змінними.

План

1. Економетричні моделі на основі систем одночасних структурних рівнянь.
2. Непрямий метод найменших квадратів (НМНК).
3. Метод 2МНК.
4. Метод 3МНК.
5. Фіктивні змінні та моделі з фіктивними змінними.

Основні терміни і поняття

Система одночасних структурних рівнянь, рекурсивна система рівнянь, НМНК, 2МНК, 3МНК, ANCOVA-модель, ANOVA-модель, LPM-модель, Logit-модель.

1. Економетричні моделі на основі систем одночасних структурних рівнянь

Система одночасних структурних рівнянь в матричному вигляді запишеться так:

$$Y = AY + BX + u \quad (5.1)$$

Якщо кожне рівняння системи розв'язати відносно Y , то одержимо зведену форму моделі, яка має вигляд:

$$Y = RX + v, \quad (5.2)$$

Де

залишки v є лінійною комбінацією залишків u .

3. Зв'язок між коефіцієнтами структурної і зведеної форми моделі запишеться так:

$$\begin{aligned} R &= (E - A)^{-1}B \text{ або} \\ R &= -A^{-1}B, \text{ або} \\ AR + B &= 0. \end{aligned} \tag{5.3}$$

4. Оцінка параметрів моделі на основі системи одночасних рівнянь 1МНК даватиме зміщення, яке буде дорівнювати:

$$\frac{(1 - a_1)\sigma^2 / \overline{m}_{ss}}{1 + \sigma^2 / \overline{m}_{ss}}, \tag{5.4}$$

Де

$\overline{m}_{ss}$ – момент другого порядку залежної змінної, який прямує до деякої константи.

5. Чисельна оцінка параметрів моделі на основі одночасових структурних рівнянь пов'язана з проблемою ідентифікації. Необхідна умова ідентифікації системи – справедливість нерівності для кожного рівняння:

$$k_s - 1 \leq m - m_s, \tag{5.5}$$

Де

k_s – кількість ендогенних змінних, які входять в s-те рівняння структурної форми;

m – загальна кількість екзогенних змінних моделі;

m_s – кількість екзогенних змінних, які не входять в s-те рівняння структурної форми моделі.

Якщо записане вище співвідношення виконується як рівність, то відповідне рівняння є точно ідентифікованим, а коли як нерівність, то відповідне рівняння є наідентифікованим. Якщо воно не виконується, то потрібно змінити специфікацію моделі.

6. Якщо в структурній формі моделі $Y = AY + BX + u$, матриця A є трикутною, а залишки характеризуються діагональною матрицею вигляду

$$\Sigma = M(uu') = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

то така система рівнянь називається рекурсивною і для оцінювання параметрів можна застосувати 1МНК.

2. Непрямий метод найменших квадратів (НМНК)

Алгоритм цього методу складається з чотирьох кроків.

- 1) Перевіряється умова ідентифікованості для кожного рівняння. Якщо кожне рівняння точно ідентифіковане, то виконується перехід до кроку 2.
- 2) Перехід від структурної форми моделі до зведеної.
- 3) Оцінка параметрів кожного рівняння зведеної форми моделі 1МНК.
- 4) Розрахунок оцінок параметрів рівнянь структурної форми на основі співвідношення $Y = AX + B$, де A і B — параметри структурних рівнянь, a — матриця оцінок параметрів зведеної форми моделі.

3. Метод 2МНК

Якщо рівняння структурної форми моделі неідентифіковані, то для оцінки параметрів моделі застосовується двокроковий метод найменших квадратів (2МНК). Система рівнянь для обчислення оцінок двокроковим методом найменших квадратів буде виглядати наступним чином:

$$\begin{pmatrix} Y_1'X(X'X)^{-1}X'Y_1 & Y_1'X_1 \\ X_1'Y_1 & X_1'X_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1'X(X'X)^{-1}X'Y \\ X_1'Y \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

Де

Y – вектор залежної або ендогенної змінної;

Y_1 – матриця поточних ендогенних змінних, які входять у праву частину рівняння;

X – матриця всіх пояснювальних або екзогенних змінних;

X_1 – матриця пояснювальних або екзогенних змінних даного рівняння;

$\hat{A}$ – вектор оцінок структурних параметрів, які стосуються змінних матриці

$Y_1; \hat{B}$ – вектор оцінок структурних параметрів, які стосуються змінних матриці X_1 .

Оператор оцінювання 2МНК буде виглядати наступним чином:

$$\begin{bmatrix} \hat{A} \\ \hat{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1'X(X'X)^{-1}X'Y_1 & Y_1'X_1 \\ X_1'Y_1 & X_1'X_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y_1'X(X'X)^{-1}X'Y \\ X_1'Y \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Дисперсія залишків для кожного рівняння має вигляд:

$$\sigma_{u_s}^2 = \frac{1}{n-k-m+1} u_i' u_i \quad (5.9)$$

Матриця коваріацій параметрів кожного рівняння визначається на основі співвідношення:

$$asy \text{ var} \begin{bmatrix} \hat{A} \\ \hat{B} \end{bmatrix} = \sigma_{u_s}^2 \begin{pmatrix} Y_1'X(X'X)^{-1}X'Y_1 & Y_1'X_1 \\ X_1'Y_1 & X_1'X_1 \end{pmatrix}^{-1} \quad (5.10)$$

4. Метод 3МНК

Трикроковий метод найменших квадратів (3МНК), на відміну від попередніх, призначений для одночасного оцінювання параметрів всіх рівнянь моделі. Оператор оцінювання 3МНК матиме вигляд:

$$\hat{\delta} = \begin{bmatrix} (S_{11}^2)^{-1} Z_1' (X'X)^{-1} X' Z_1 & \dots & (S_{1r}^2)^{-1} Z_1' (X'X)^{-1} X' Z_r \\ \dots & \dots & \dots \\ (S_{r1}^2)^{-1} Z_r' (X'X)^{-1} X' Z_1 & \dots & (S_{rr}^2)^{-1} Z_r' (X'X)^{-1} X' Z_r \end{bmatrix}^{-1} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^r (S_{1j}^2)^{-1} Z_1' X (X'X)^{-1} X' Y_j \\ \dots \\ \sum_{j=1}^r (S_{rj}^2)^{-1} Z_r' X (X'X)^{-1} X' Y_j \end{bmatrix}, \quad (5.11)$$

Де

$\hat{\delta} = \begin{pmatrix} \hat{A} \\ \hat{B} \end{pmatrix}$ – оцінки параметрів моделі;

$Z_s = (Y_s X_s)$ ($s = \overline{1, r}$) – Z_s — змінні моделі в правій частині s -го рівняння;

S_{sj}^2 – дисперсії залишків для кожного рівняння, які є наближеною оцінкою σ_{sj}^2 .

11. Щоб застосувати ЗМНК на практиці необхідне виконання таких вимог:

- 1) розпочинаючи оцінювати параметри моделі, слід вилучити всі тотожності;
- 2) виключити з системи кожне неідентифіковане рівняння;
- 3) за наявності серед рівнянь системи точно ідентифікованих та надідентифікованих ЗМНК доцільно застосовувати до кожної з груп рівнянь окремо.

5. Фіктивні змінні та моделі з фіктивними змінними

На практиці досить часто серед економічних показників, розглядуваних як пояснювальні змінні моделі, можуть бути й такі, які не можна виміряти кількісно, але вони істотно впливають на рівень зв'язку між залежною та пояснювальними змінними. Такі змінні дістали назву «фіктивних змінних».

Фіктивні змінні – це певним чином сконструйовані змінні, які описують якісні ознаки, показники, а також відображають змінні в таких чинниках, як ефект зрушення в часі, сезонність чи зміни у просторі або ж включаються як змінні, що замінюють множину інших пояснювальних змінних.

Види моделей з фіктивними змінними:

- 1) Модель містить як фіктивні, так і кількісні пояснювальні змінні. Такі економетричні моделі називають ANCOVA – моделями (моделями коваріаційного аналізу).
- 2) Економетричні моделі, що містять у правій частині лише фіктивні змінні, називають ANOVA – моделями (моделями дисперсійного аналізу).
- 3) Економетрична модель, в якій залежна змінна є фіктивною, а пояснювальні змінні можуть бути як кількісними, так і якісними (LPM-модель).
- 4) Модель з фіктивною залежною змінною (Logit-модель).



Теми доповідей

1. Практичне використання моделей ANCOVA та ANOVA.
2. Аналітичне обґрунтування фінансової стійкості та фінансових результатів промислових підприємств за допомогою Logit-моделей та LPM-моделей.
3. Порівняння покрокової регресії, лінійної одно факторної та багатфакторної регресії та регресії з фіктивними змінними



Контрольні запитання

1. Дайте перелік основним крокам непрямого методу найменших квадратів
2. Які особливості мають методи 2МНК та 3МНК?
3. Які основні регресійні моделі з фіктивними змінними Вам відомі?



Одноваріантні запитання («Так» чи «Ні»)

1. ANCOVA модель – модель, яка містить як фіктивні, так і кількісні пояснювальні змінні.

2. Економетрична модель, в якій залежна змінна є фіктивною, а пояснювальні змінні можуть бути як кількісними, так і якісними називається LPM-моделлю.
3. Трикроковий метод найменших квадратів (3МНК), на відміну від інших, призначений для одночасного оцінювання параметрів всіх рівнянь моделі.
4. Якщо рівняння структурної форми моделі неідентифіковані, то для оцінки параметрів моделі застосовується двокроковий метод найменших квадратів (2МНК).
5. Алгоритм НМНК складається з чотирьох кроків.



Тестові завдання для самоконтролю

1. Модель містить як фіктивні, так і кількісні пояснювальні змінні:
 - а) ANCOVA – модель;
 - б) ANOVA – модель;
 - в) LPM-модель;
 - г) Logit-модель.
2. Економетричні моделі, що містять у правій частині лише фіктивні змінні:
 - а) ANCOVA – модель;
 - б) ANOVA – модель;
 - в) LPM-модель;
 - г) Logit-модель.
3. Економетрична модель, в якій залежна змінна є фіктивною, а пояснювальні змінні можуть бути як кількісними, так і якісними:
 - а) ANCOVA – модель;
 - б) ANOVA – модель;
 - в) LPM-модель;
 - г) Logit-модель.
4. Модель як фіктивні, так і кількісні пояснювальні змінні:

- а) ANCOVA – модель;
- б) ANOVA – модель;
- в) LPM-модель;
- г) Logit-модель.

5. Якщо рівняння структурної форми моделі неідентифіковані, то для оцінки параметрів моделі застосовується:

- а) НМНК;
- б) ЗМНК;
- в) МНК;
- г) немає правильної відповіді.

Завдання

1. Маємо дані, які складаються з 6 спостережень:

Y	0	0	0	1	1	1
X	-1	-2	0	1	1	1

Необхідно: оцінити лінійну модель ймовірності за допомогою МНК. Розрахувати R^2 ; розрахувати псевдо- R^2 , засноване на коректних прогнозах; розрахувати кількість випадків правильного віднесення до відповідної групи, застосовуючи правило класифікації: група I ($y = 1$), якщо $y > 0,5$; група II ($y = 0$), якщо $y \leq 0,5$; зіставити частку правильного потрапляння та коефіцієнт детермінації.

2. Необхідно побудувати економетричну модель на основі системи одночасних структурних рівнянь, яка включає два регресійні рівняння: прибутку та інвестицій.

Місяці	Прибуток, гр. од.	Інвестиції, гр. од.	Основні виробничі фонди, гр. од.	Фонд робочого часу (людино-днів)	Процентна ставка, %
1	39	62	22	104	20
2	41	65	25	109	19
3	38	57	17	99	22
4	42	66	27	114	20
5	44	69	28	116	21
6	49	58	20	110	23

7	44	72	32	119	18
8	45	70	30	116	17,5
9	48	75	34	114	17
10	51	79	35	120	16
11	49	77	33	124	15,5
12	54	82	37	119	14
13	55	80	37	129	16
14	57	75	39	129	15,5
15	56	83	38	132	14
16	54	81	36	130	15
17	59	87	40	124	13
18	61	92	42	134	12
19	62	95	43	137	11
20	64	97	42	139	10

3. Вибірка, що складається з 950-ти спостережень, в якій $y = 1$, якщо заробітна платня працівника нижче 5 дол. на годину, тобто працівник низькооплачуваний, ($y = 0$ – в іншому випадку). Передбачається, що рівень заробітної платні залежить від певних факторів: x_1 – освіта, років; x_2 – стать (1 – жіноча, 0 – чоловіча); x_3 – досвід роботи, років. У табл. 6.3 наведені коефіцієнти, отримані у ході оцінювання логіт-моделі за допомогою нелінійного МНК.

Таблиця 1 – Коефіцієнти логіт-моделі

1	x_1	x_2	x_3
5,87	-0,56	1,26	-0,06

Потрібно визначити на основі логіт-моделі оцінку ймовірності для чоловіка та для жінки, які мають 12 років освіти і 15 років досвіду роботи, стати низькооплачуваними працівниками.

ТЕРМІНОЛОГІЧНИЙ СЛОВНИК

А

Автокореляція – статистичний термін, що описує кореляцію між значеннями однієї змінної у різні моменти часу в часовому ряді.

Альтернативна гіпотеза – це гіпотеза, яка випробовується на відмінність від нульової гіпотези.

Б

Багатовимірна регресія – регресійна модель, що використовується для пояснення залежності між залежною змінною та двома чи більше незалежними змінними.

Бета-коефіцієнт – коефіцієнт, який вимірює наскільки змінюється залежна змінна при зміні на одиницю незалежної змінної, утримуючи інші змінні постійними.

В

Векторна авторегресійна модель (VAR) – модель, що використовується для аналізу взаємозалежності між кількома часовими рядами.

Відсоткова помилка – величина, яка показує відсоток відхилення між спостерігаємою величиною та передбаченою моделлю.

Г

Гетероскедастичність – нерівномірність дисперсії випадкових величин у регресійній моделі.

Гребнева регресія (Ridge regression) – метод регресійного аналізу, що використовується для управління мультиколінеарністю шляхом додання штрафу до коефіцієнтів.

К

Коефіцієнт детермінації (R-squared) – статистичний показник, який вимірює частку варіації залежної змінної, яку можна пояснити незалежними змінними у регресійній моделі.

Кореляційна матриця – таблиця, що містить коефіцієнти кореляції між усіма парами змінних у моделі.

Л

Лінійна регресія – модель, яка використовується для аналізу зв'язку між залежною змінною та однією чи кількома незалежними змінними.

Лагова змінна – змінна, яка використовується у моделі для включення впливу попередніх значень змінної.

М

Множинна регресія – регресійний аналіз, що використовує кілька незалежних змінних для пояснення залежної змінної.

Модель ARIMA – модель для прогнозування часових рядів, яка поєднує авторегресійні, інтегровані та ковзані середні компонентів.

Н

Нульова гіпотеза – це гіпотеза, яка вважається стандартною чи базовою і не має впливу на результати тестування, до якої порівнюють альтернативну гіпотезу.

О

Оцінка методу найменших квадратів (OLS) – це метод, який використовується для знаходження параметрів регресійних моделей шляхом мінімізації суми квадратів відхилень між спостережуваними значеннями та значеннями, передбаченими моделлю.

Омнібус-тест – статистичний тест, який використовується для перевірки загальної адекватності моделі, перевіряючи значущість коефіцієнтів моделі одночасно.

П

Параметр – це числовий чи кількісний показник, який характеризує певні характеристики моделі або процесу, наприклад, коефіцієнти регресії у лінійній регресії.

Попереднє умовне прогнозування – техніка в економетрії, яка використовує інформацію про минулі значення змінної для прогнозування майбутніх значень цієї змінної.

Р

Регресійний аналіз – статистичний метод, що використовується для вивчення взаємозв'язків між залежною змінною та однією або декількома незалежними змінними.

Регресійна модель – математичне вираження змінних у регресійному аналізі.

С

Сезонність – регулярні коливання часових рядів, що повторюються через фіксовані проміжки часу.

Стандартизація – процес приведення даних до стандартної шкали або форми.

Т

Тест Чоу для структурного зміщення – статистичний тест, що використовується для перевірки наявності структурного зміщення в часовому ряді, яке може бути викликане впливом важливих подій або змін у системі.

Тренд – довгостроковий рух часового ряду, що характеризує загальну спрямованість або тенденцію зростання або спаду.

Ф

Функція кореляції – статистичний метод, який вимірює ступінь взаємозв'язку між двома змінними у часовому ряді.

Ц

Центральна гранична теорема – теорема, що стверджує, що середнє значення великої кількості незалежних випадкових змінних має нормальний розподіл

Ч

Часовий ряд – послідовність спостережень за відповідною змінною або величиною впродовж певного періоду часу.

Ш

Шум – випадкова компонента в моделі, яка представляє непередбачувані чи випадкові впливи, які не можна пояснити або передбачити моделлю.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Основна:

1. Березька К. М. Економетрика: Основи теорії та комп'ютерний практикум для студентів економічних спеціальностей денної та заочної форм навчання. Тернопіль : ЗУНУ, 2022. 152 с.
2. Кобець В.М. Економетрика в RSTUDIO : навч. посіб. Київ : Олді+, 2021. 132 с.
3. Козьменко О. В. Економіко-математичні методи та моделі (економетрика) : навч. посіб. Суми : Університетська книга, 2018. 406 с.
4. Кузьмичов А.І. Економетрія. (З використанням засобів Exel) : навч. посіб. Київ : Ліра-К, 2020. 214 с.
5. Asteriou D., Hall S.G. Applied Econometrics. London: Red Globe Press, 2021. 555 p.
6. Chang C.-L. (ed.) Applied Econometrics. MDPI, 2019. 224 p.
7. Hansen B.E. Econometrics University of Wisconsin, 2022. 1043 p.
8. Hong Yongmiao. Foundations Of Modern Econometrics: A Unified Approach World Scientific Publishing, 2020. 523 p.
9. Lee C.F., Chen H.Y., Lee J. Financial Econometrics, Mathematics and Statistics: Theory, Method and Application. Springer, 2019. 656 p.

Додаткова:

1. Shapurov O. Mechanisms of digitalization of economic processes of entities in the metallurgical industry: strategic vector and prospects. Scientific space: integration of traditional and innovative processes : Scientific monograph. Riga, Latvia : "Baltija Publishing", 2023. 560-593 p. URL: <https://doi.org/10.30525/978-9934-26-310-1-22>
2. Vagonova O., Metelenko N., Shapurov O., Chornobaev V. Efficiency and internationalization of mining and metallurgical groups of Ukraine. Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu, 2023, № 2. pp. 177-183. URL: <https://doi.org/10.33271/nvngu/2023-2/177>

3. Шапуров О.О. Проблеми сталого розвитку та його вплив на формування промислового потенціалу суб'єктів господарювання гірничо-металургійного сектору. Transformation of Ukraine's economy: formation of an inclusive economy system and functionality of financial inclusion : Scientific monograph. Riga, Latvia : «Baltija Publishing», 2023. P.369-377 URL: <https://doi.org/10.30525/978-9934-26-321-7-16>

ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Hansen B.E. Econometrics University of Wisconsin, 2022. 1043 p.
2. Hong Yongmiao. Foundations Of Modern Econometrics: A Unified Approach World Scientific Publishing, 2020. 523 p.
3. Диха М.В., Мороз В.С. Економетрія : навч. посіб. Київ : Центр навчальної літератури, 2019. 206 с.
4. Здрок В.В. Основи економетричних досліджень : навч. посіб. МОНМСУ. Львів : ЛНУ ім. Івана Франка, 2015. 360 с.
5. Руська Р.В. Економетрика : навч. посіб. Тернопіль : Тайп, 2012. 224 с.
6. Рязанцева В.В. Економетрія. Моделювання макроекономічних процесів : навч. посіб. Київ : КНЕУ, 2018. 388.
7. Скрипник А.В., Жерліцин Д.М., Нам'ясенко Ю.О. Економетрика з R : навч. посіб. Київ : ФОП Ямчинський О.В., 2020. 248 с.
8. Черняк О.І., Харламова Г.О., Слушаєнко Н.В. Практикум з економетрики : навч. посіб. МОНМСУ. Київ : ВПЦ «Київський університет», 2013. 184 с.

Навчальне видання
(українською мовою)

Шапуров Олександр Олександрович
Клопов Іван Олександрович
Мержинський Євген Костянтинович

ЕКОНОМЕТРІЯ

Навчальний посібник
для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра
спеціальності «Фінанси, банківська справа, страхування та фондовий ринок»
освітньо-професійної програми
«Фінанси держави та підприємницьких структур»

Рецензент *В. Г. Воронкова*
Відповідальний за випуск *Ю.В. Дятлова*
Коректор *О. В. Пєтухова*