Заняття 1
Про поняття відстані в елементарній та вищій математиці. Метрики, квазіметрики асиметрики

1) Про поняття відстані в елементарній та вищій математиці

Одним із найважливіших понять в сучасній математиці є поняття відстані. Його використовують і як основу для побудови загальних теорій, і для розв'язування конкретних задач.

На перший погляд це поняття здається цілком зрозумілим. Майже кожний старшокласник спробує довести, що він розуміє смисл цього поняття. Та й людина, яка майже забула шкільну геометрію, скоріш за все, буде стверджувати, що вона добре знає, що це таке. Разом з тим все набагато складніше.

Навіть у повсякденному житті в поняття «відстань» вкладається різний смисл. Наприклад, пілот літака скоріш за все вимірює відстань «по прямій», яка сполучає пункти відправки та прибуття. Водій авто буде рахувати довжину шляху від A до B вздовж доріг, які можуть суттєво відхилятись від прямої лінії.

Поняття «відстань» наповнюється різним смислом в залежності від того, на якій множині об'єктів воно розглядається і як визначене.

Приклад. Розглянемо відстань на поверхні сфери радіуса R. Визначимо відстань між точками M та N сфери як довжину меншої з дуг великого кола сфери, що проходить через ці точки (рис.1), тобто

$$\varrho_S(M,\ N) \leqslant \pi R$$

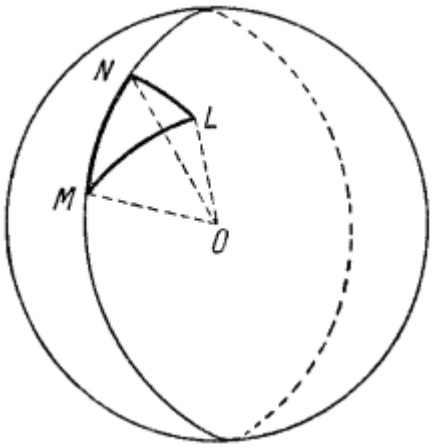

Рисунок 1 – Відстань на сфері

Звичайну відстань (або, інакше, **евклідову**) між точками $A(x_1, y_1)$ та $B(x_2, y_2)$ **на площині** визначають наступним чином:

- з'єднуємо точки A та B відрізком,
- знаходимо довжину відрізка AB. Ця довжина записується формулою

$$\rho_1(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \qquad (1)$$

Виведення цієї формули легко надати за допомогою рис.2.

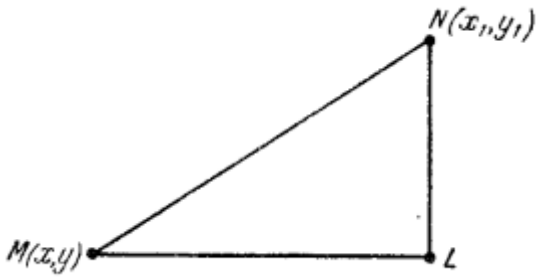

Рисунок 2 – Обгрунтування формули (1)

Приклад недоцільності використання цієї формули для визначення відстані: у місті з «правильною забудовою» (рис.3) відстань між A та B природно визначити як довжину найкоротшого шляху по вуляцях міста.

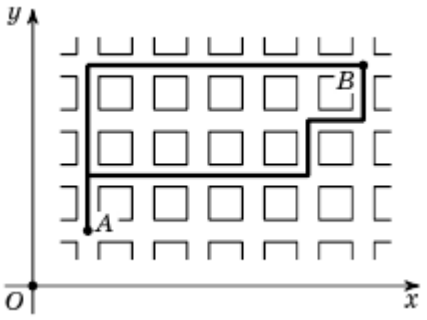

Рисунок 3 – До попереднього прикладу

Вигляд цієї відстані у координатах наступний

$$\rho(A,B)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2| \qquad (2)$$

2) **Метрики**

В університетських курсах прийняте наступне аксіоматичне визначення:

Метрикою (або відстанню) на довільній не порожній множині M називається дійсна функція $\rho(x,y)$, яка визначена для всіх $x,y\in M$ і задовольняє аксіомам:

1. Для будь – яких $x,y\in M$ $\rho(x,y)\geq 0$ (аксіома невід'ємності);
2. $\rho(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$ (аксіома тотожності);
3. Для будь – яких $x,y\in M$ $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ (аксіома симетрії);
4. Для будь – яких $x,y,z\in M$ $\rho(x,y)\leq\rho(x,z)+\rho(y,z)$ (аксіома нерівність трикутника).

Якщо на множині M зафіксована деяка метрика $\rho(x,y)$, то пара (M,ρ) називається метричним простором.

Наведена у визначенні система аксіом метрики є **залежною**, а саме, досить прийняти тільки аксіоми 2 та 4, тому що аксіоми 1 та 3 являються їх наслідками.

Дійсно, якщо в аксіомі 4 покладемо $y = x$, використаємо аксіому 1, то отримаємо $\rho(x,x) \le \rho(x,z) + \rho(x,z) \Rightarrow 0 \le 2 \cdot \rho(x,z) \Rightarrow 0 \le \rho(x,z)$, тобто має місце невід'ємність функції $\rho(x,y)$.

Далі, покладемо в аксіомі 4 $z = x$, отримаємо $\rho(x,y) \le \rho(x,x) + \rho(y,x) \Rightarrow \rho(x,y) \le \rho(y,x)$. Запишемо аксіому 4 у вигляді $\rho(y,x) \le \rho(y,z) + \rho(x,z)$ і замінимо z на y, отримаємо $\rho(y,x) \le \rho(y,y) + \rho(x,y) \Rightarrow \rho(y,x) \le \rho(x,y)$. Таким чином, маємо подвійну нерівність $\rho(x,y) \le \rho(y,x) \le \rho(x,y)$, з якої і випливає $\rho(x,y) = \rho(y,x)$, тобто має місце аксіома симетрії функції $\rho(x,y)$.

Незважаючи на те, що можна було б в означенні метрики обмежитись двома аксіомами, майже завжди віддають перевагу системі із чотирьох наведених вище аксіом, тому що вона містить більше властивостей метрики (відстані).

Розглянемо ряд прикладів метрики на площині. Точки площини будемо задавати координатами. Нехай точка A має координати (x_1, y_1), точка B - координати (x_2, y_2). Задамо три функції: $\rho_1(A,B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, $\rho_2(A,B) = \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)$, $\rho_3(A,B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$.

Наведемо для прикладу доведення нерівності трикутника для другої метрики. Виберемо будь – які три точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Нехай $|x_1 - x_2| \ge |y_1 - y_2|$. Це означає, що $\rho_2(A,B) = \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|) = |x_1 - x_2| = |x_1 - x_3 + x_3 - x_2|$, звідки за властивістю модуля маємо $\rho_2(A,B) \le |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|$.

Очевидно також, що $|x_1 - x_3| \le \max\{|x_1 - x_3|, |y_1 - y_3|\} = \rho(A,C)$, $|x_3 - x_2| \le \max\{|x_3 - x_2|, |y_3 - y_2|\} = \rho(C,B)$. Після додавання двох останніх

нерівностей однакового смислу отримаємо $\rho_2(A,B) \le \rho_2(A,C) + \rho_2(C,B)$, що й потрібно було довести.

Завдання 2 (для самостійної роботи 1). Описати фізичний смисл метрики $\rho_2(A,B) = \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)$ на площині.

Завдання 3 (для самостійної роботи 1). Записати вигляд формул $\rho_1(A,B), \rho_2(A,B), \rho_3(A,B)$ для точок $A(x_1, y_1, z_1)$ та $B(x_2, y_2, z_2)$ простору. Зробити рисунок, подібний до рисунку 4, для обгрунтування формули для метрики $\rho_1(A,B)$ між точками простору.

Одним з перших понять теорії метричних просторів є поняття відкритої кулі $B_r(O)$ з центром в точці $O(x_0, y_0)$ і радіусом r. Так називається множина точок метричного простору, відстань від кожної з яких до точки O не перевищує r, тобто $B_r(O) = \{X : \rho(X, O) \le r\}$.

Відносно розглянутих метрик відкриті кулі мають відповідний вигляд, наведений на рисунку 4.

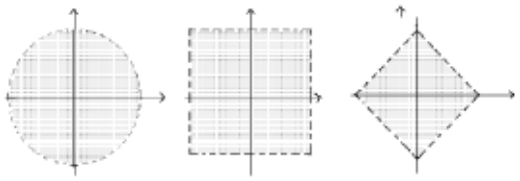

Рисунок 4 – Відкриті кулі

Множина в метричному просторі називається відкритою, якщо вона містить кожну свою точку разом із деякою відкритою кулею з центром в цій точці.

Для дослідження деяких питань, зокрема питання неперервності відображень метричних просторів, важливо знати не саму метрику, а систему

відкритих множин метричного простору. Цікаво зазначити, що розглянуті вище три метрики на площині задають одну і ту саму систему відкритих множин. Цей факт стає досить зрозумілим із рисунка 5.

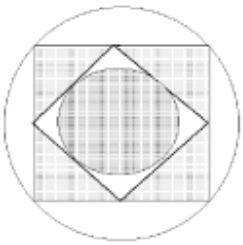

Рисунок 5 – Еквівалентність метрик

Не виходячи за рамки елементарної математики, можна отримати, що $\rho_1(A,B) \le \rho_3(A,B)$. При $x_1 = y_1 = 0$ остання нерівність рівносильна алгебраїчній нерівності $\sqrt{x^2 + y^2} \le |x| + |y|$. Аналогічно, з нерівності $\rho_2(A,B) \le \rho_1(A,B)$ при $x_1 = y_1 = 0$ отримаємо нерівність $\max\{|x|,|y|\} \le \sqrt{x^2 + y^2}$. Отже, між різними метриками на одній і тій же множині може існувати певний зв'язок, за допомогою якого можна отримати вже відомі й навіть нові факти.

3) **Квазіметрики**

Означення. Відображення $\rho : M \times M \to R$ називають квазіметрикою на *M*, якщо для а визначена для будь – яких $x, y, z \in M$ виконуються аксіоми:

1. $\rho(x,y) \ge 0$ (аксіома невід'ємності);
2. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ (аксіома симетрії);
3. $\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(y,z)$ (аксіома нерівність трикутника).

Якщо на множині *M* зафіксована деяка квазіметрика $\rho(x,y)$, то пара (M,ρ) називається квазіметричним простором.

Приклад. С- множина комплексних чисел, $\rho : C \times C \to R$ визначається рівністю $\rho(z,\lambda) = |\mathrm{Re}\, z - \mathrm{Re}\, \lambda|$.

4) **Асиметрики**

Розглянемо математичну структуру близьку до метричної – асиметрику.

Означення 2.5 Функція $\rho: X \times X \to R_+$ називається *асиметрикою* у множині X, якщо виконуються наступні умови:

а) $\rho(x, y) = 0$, тоді та тільки тоді,коли $x = y$;

б) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho, (z, y)$ для будь-яких $x, y, z \in X$.

З означення випливає, що асиметрика задовольняє умовам 1), 2) та 4) з означення метрики, але не задовольняє умові 3).

Найпростішим **прикладом** асиметрики є найменша довжина шляху автомобіля між точками в місті, в якому є вулиці з одностороннім рухом.

Нехай функція $\rho: X \times X \to R$ є асиметрикою, тоді функція $\tilde{\rho}: (x, y) = \\ = \rho(x, y) + \rho(y, x)$ метрика на множині X.

Доведення. Дано функцію $\tilde{\rho}(x, y) = \rho(x, y) + \rho(y, x)$. Доведемо аксіоми метрики:

а) Відомо, що ρ – асиметрика. $\rho(x, y) = 0$ тоді та тільки тоді, коли $x = y$ за аксіомою а) з означення 2.1. Так само, $\rho(y, x) = 0$ тоді та тільки тоді, коли $x = y$. Нехай $x = y$, тоді $\rho(x, y) = 0$ та $\rho(y, x) = 0$. Отже, $\tilde{\rho}(x, y) = \rho(x, y) + \rho(y, x)$.

З іншого боку з $\tilde{\rho}(x, y) = 0$ випливає $\rho(x, y) + \rho(y, x) = 0$, звідки $\rho(x, y) = 0$ та $\rho(y, x) = 0$, так як $\rho(x, y) \geq 0$. Таким чином $x = y$, аксіому доведено.

б) Розглянемо функцію $\tilde{\rho}(y, x)$. Видно, що $\tilde{\rho}(y, x) = \rho(y, x) + \\ + \rho(x, y) = \tilde{\rho}(x, y)$. Оскільки ρ – асиметрика, то ознака симетричності доведена.

в) Доведемо аксіому нерівності трикутника: $\tilde{\rho}(x, y) \leq \tilde{\rho}(x, z) + \tilde{\rho}(z, y)$. Маємо, що $\rho(x, y) + \rho(y, x) \leq \rho(x, z) + \rho(z, x) + \rho(z, y) + \rho(y, z) = \tilde{\rho}(x, z) + \\ + \tilde{\rho}(z, y)$. Тобто з цього випливає, що $\tilde{\rho}(x, y) \leq \tilde{\rho}(x, z) + \tilde{\rho}(z, y)$, де ρ –

асиметрика. Аксіому доведено. Функція $\tilde{\rho}:(x,y) \to \rho(x,y) + \rho(y,x)$ є метрикою на множині X. Твердження доведено.

Твердження 2.3 Нехай A, B – многокутники на площині. Покладемо $a_{\triangle}(A,B) = S(B) - S(A \cap B) = S(B \setminus A)$, де $S(C)$ – площа многокутника C. Вираз $a_{\triangle}$ є асиметрикою на множині всіх плоских многокутників.

Перевіримо аксіоми асиметрики. а) $a_p(A,B) = 0$, звідси випливає, що $S(B \setminus A) = 0$, то з цього випливає, що $A = B$. З іншого боку, якщо $A = B$, то $A \cap B = 0$ й це означає, що $S(B \setminus A) = 0$. Отже, $a_p(A,B) = 0$. Аксіому доведено.

б) Перевіримо аксіому нерівності трикутника, яка має вигляд $a_p(A,B) \leq a_p(A,C) + a_p(C,B)$. Маємо $S(B \setminus A) \leq S(C \setminus A) + +S(B \setminus C) = a_p(A,C) + a_p(C,B)$, звідки видно, що $a_p(A,B) \leq a_p(A,C) + +a_p(C,B)$, тобто аксіому доведено. Тобто $a_{\triangle}$ є асиметрикою на множині всіх плоских многокутників.

Означення 2.7 Пара (X, ρ), де $\rho.$ – асиметрика в X, називається *асиметричним простором*. Відомо, що будь-який метричний простір є асиметричним. У асиметричному просторі кулі (відкриті та замкнені) та сфери визначаються так само, як й в метричному просторі [1].