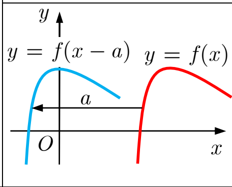
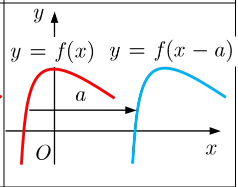
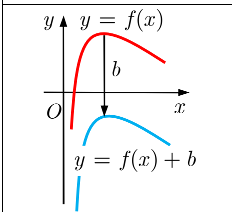
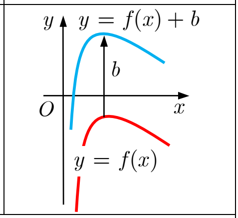
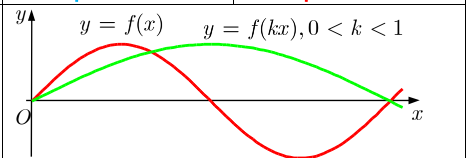
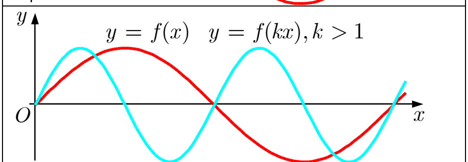
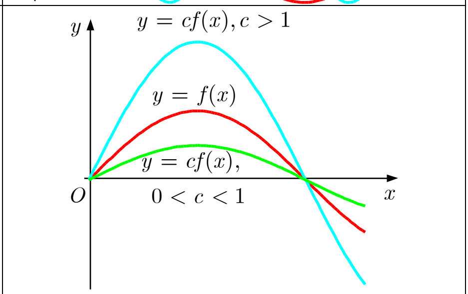
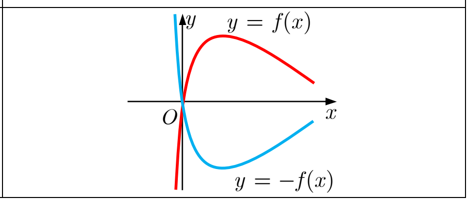
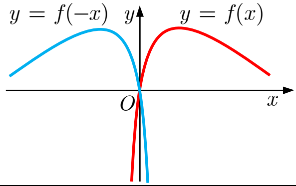
5.15. Геометричні перетворення графіків функцій

<table>
<tr><td rowspan="2">❶ Паралельне перенесення вздовж осі Ox. Щоб побудувати графік $y = f(x-a)$, графік $y = f(x)$ паралельно переносять уздовж осі Ox на a (ліворуч для $a < 0$, праворуч для $a > 0$).</td><td>$a < 0$</td><td>$a > 0$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">❷ Паралельне перенесення вздовж осі Oy. Щоб побудувати графік $y = f(x) + b$, графік $y = f(x)$ паралельно переносять уздовж осі Oy на b (вниз для $b < 0$, вгору для $b > 0$).</td><td>$b < 0$</td><td>$b > 0$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>❸ Стискання (розтягування) вздовж осі Ox. Щоб побудувати графік $y = f(kx)$, графік $y = f(x)$ розтягують у $\frac{1}{k}$ разів $(0 < k < 1)$ уздовж осі Ox чи стискають у k разів $(k > 1)$ вздовж осі Ox</td><td colspan="2">

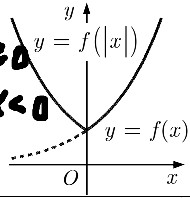

</td></tr>
<tr><td>❹ Стискання (розтягування) вздовж осі Oy. Щоб побудувати графік $y = cf(x)$, графік $y = f(x)$ стискають в $\frac{1}{c}$ разів $(0 < c < 1)$ вздовж осі Oy чи розтягують у c разів $(c > 1)$ вздовж осі Oy.</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>❺ Дзеркальне відбивання відносно осі Ox. Щоб побудувати графік $y = -f(x)$, графік $y = f(x)$ симетрично відбивають відносно осі Ox.</td><td colspan="2">
</td></tr>
</table>

❻ ***Дзеркальне відбивання відносно осі Oy.*** Щоб побудувати графік $y = f(-x)$, графік $y = f(x)$ симетрично відбивають відносно осі Oy.



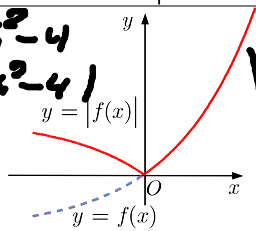
❼ ***Графік функції $y = f(|x|)$.*** Щоб побудувати графік $y = f(|x|)$, частину графіка $y = f(x), x \geq 0$, доповнюють його відбитком відносно осі Oy.

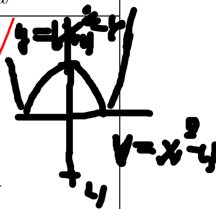
$|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$



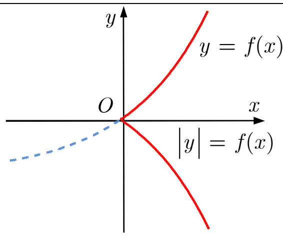
❽ ***Графік функції $y = |f(x)|$.*** Щоб побудувати графік $y = |f(x)|$, частину графіка $y = f(x), y \geq 0$, не міняють, а частину графіка $y = f(x), y < 0$, відбивають відносно осі Ox.

$y = x^2 - 4$
$y = |x^2 - 4|$





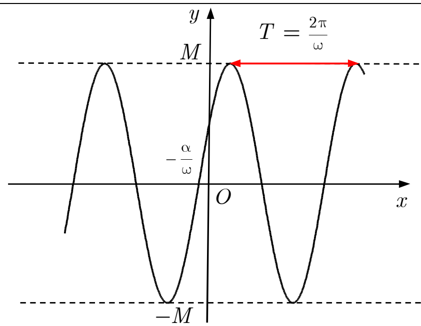
❾ ***Графік рівняння $|y| = f(x)$.*** Щоб побудувати графік $|y| = f(x)$, беруть частину графіка $y = f(x), y \geq 0$, і доповнюють її відбитком відносно осі Ox.



❿ ***Гармонічне коливання***

$$y = M \sin(\omega t + \alpha),$$

де t — час, $M > 0$ — *амплітуда*, $\omega > 0$ — *частота* (колова), $\omega t + \alpha$ — *фаза*, α — *початкова фаза.*



$\sin \omega t \to \sin \omega (t + \frac{\alpha}{\omega}) \to M$

Практикум 5.1. Числові функції

Навчальні задачі

5.1.1. Для функції $f(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$ знайти: $f(0), f(2), \left|f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right|, f(-x)$. Чи існує $f(-1)$?

Розв'язання. [5.1.1.]

[*Підставляючи значення аргументу x у формулу для функції f, дістаємо відповідні значення функції.*]

$$f(0)=\frac{0-2}{0+1}=-2;$$

$$f(2)=\frac{2-2}{2+1}=0;$$

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|=\left|\frac{\frac{1}{2}-2}{\frac{1}{2}+1}\right|=|-1|=1;$$

$$f(-x)=\frac{-x-2}{-x+1}=\frac{x+2}{1-x}.$$

Значення $f(-1)$ не існує, оскільки $-1\notin D(f)=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

5.1.2. Знайти $f(-2), f(0), f(1)$, якщо $f(x)=\begin{cases}1+x, & x\le 0,\\ 2^x, & x>0.\end{cases}$

Розв'язання. ①

[*Визначаємо в які проміжки потрапляють значення аргументу й вибираємо відповідні формули для значень функцій.*]

$$-2\in(-\infty;0]\Rightarrow f(-2)=(x+1)\Big|_{x=-2}=-1;$$

$$0\in(-\infty;0]\Rightarrow f(0)=(x+1)\Big|_{x=0}=1;$$

$$1\in(0;+\infty)\Rightarrow f(1)=2^x\Big|_{x=1}=2.$$

Коментар. ① Маємо кусково-задану функцію, тобто задану різними формулами на різних проміжках.

5.1.3.1. Знайти природну область означення функції

$$f(x)=\sqrt{x-7}+\sqrt{10-x}.$$

Розв'язання. [5.1.4.]

[*Знаходимо природну область означення суми функцій як перетин областей означення доданків.*]

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad f_1(x) = \sqrt{x-7}, f_2(x) = \sqrt{10-x}.$$
$$D(f_1) = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 7 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 7\};$$
$$D(f_2) = \{x \in \mathbb{R} \mid 10 - x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 10\}.$$
$$D(f) = D(f_1) \cap D(f_2) = \{x \in \mathbb{R} \mid 7 \leq x \leq 10\} = [7;10].$$

5.1.3.2. Знайти природну область означення функції $f(x) = \dfrac{\arcsin(x-1)}{\log_2 x}$.

Розв'язання.

[*Знаходимо природну область означення частки функцій як різницю перетину областей означення діленого та дільника і множини тих значень аргументу, де дільник дорівнює нулю.*]

$$f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}, \quad f_1(x) = \arcsin(x-1), f_2(x) = \log_2 x.$$
$$D(f_1) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x - 1 \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\};$$
$$D(f_2) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\};$$
$$X = \{x \in \mathbb{R} \mid \log_2 x = 0\} = \{1\}.$$
$$D(f) = (D(f_1) \cap D(f_2)) \setminus X = (0;1) \cup (1;2].$$

5.1.4. Знайти множину значень функції:

1) $f(x) = x^2 - 8x + 20$; 2) $f(x) = 3^{-x^2}$;

3) $f(x) = 2\sin x - 7$.

Розв'язання.

1. [*Перетворюємо вираз для $f(x)$, виділяючи повний квадрат.*]

$$f(x) = x^2 - 8x + 20 = (x-4)^2 + 4 \geq 4 \quad \forall x \in \mathbb{R};$$
$$E(f) = [4;+\infty).$$

2. $E(-x^2) = (-\infty;0] \Rightarrow E(3^{-x^2}) = E(3^{-x})\Big|_{x\in(-\infty;0]} = [1;+\infty)$.

3. $E(\sin x) = [-1;1] \Rightarrow E(2\sin x) = [-2;2] \Rightarrow E(2\sin x - 7) = [-9;-5]$.

5.1.5.1. Записати в явному вигляді функцію y, яку задано неявно рівнянням $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1, y \leq 0$.

Розв'язання.

[*Виражаємо y з рівняння та враховуємо обмеження на аргумент x.*]

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1\\ y\le 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{y^2}{4}=\dfrac{x^2}{9}-1,\\ y\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\pm2\sqrt{\dfrac{x^2}{9}-1},\\ y\le 0\\ \dfrac{x^2}{9}-1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-\dfrac{2}{3}\sqrt{x^2-9},\\ x^2\ge 9.\end{cases}$$

$$y=-\frac{2}{3}\sqrt{x^2-9}, x\in(-\infty;-3]\cup[3;+\infty).$$

5.1.5.2. Записати в явному вигляді функцію y, яку задано неявно рівнянням $xy=8$.

Розв'язання.

$y=\dfrac{8}{x}, x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty).$

5.1.6.1. Записати в явному вигляді функцію, яку задано параметрично рівняннями: $\begin{cases}x=3t,\\ y=6t-t^2.\end{cases}$

Розв'язання. ①

[*Виражаємо t з одного із рівнянь (у цьому прикладі з 1-го).*]

$$t=\frac{x}{3}.$$

[*Підставляючи знайдене значення параметра у друге рівняння, виключаємо параметр.*]

$$y=2x-\frac{x^2}{9}.$$

Коментар. ① Треба виключити параметр із параметричних рівнянь.

5.1.6.2. Записати в явному вигляді функцію, яку задано параметрично рівняннями $\begin{cases}x=\cos t;\\ y=\cos 2t.\end{cases}$

Розв'язання.

[*Шукаємо можливий зв'язок між виразами $x=x(t)$ та $y=y(t)$.*]

$$y=\cos 2t=2\cos^2 t-1=2x^2-1.$$

$$y=2x^2-1.$$

5.1.7. Знайти значення параметра t, яке відповідає координатам точки $M_0(3;2)$ на лінії $\begin{cases} x = t^2 + 2t, \\ y = t^3 + t. \end{cases}$

Розв'язання.

[*Підставляючи координати точки в параметричні рівняння лінії, дістаємо систему щодо змінної t.*]

$$\begin{cases} 3 = t^2 + 2t, \\ 2 = t^3 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t = -3, \end{array}\right. \\ 2 = t^3 + t \end{cases} \Leftrightarrow t = 1.$$

$t = 1.$

5.1.8.1. Знайти обернену функцію до функції $f(x) = 2x + 5$ і визначити її область означення.

Розв'язання. [5.1.6.]

[***Крок 1.*** *Знаходимо область означення і множину значень функції.*]
$D(f) = \mathbb{R}, E(f) = \mathbb{R}.$

[***Крок 2.*** *З'ясовуємо існування оберненої функції.*]

Оскільки функція f зростає для всіх $x \in \mathbb{R}$, то вона має обернену функцію на $\mathbb{R}$.

[***Крок 3.*** *Знаходимо вираз для оберненої функції, розв'язуючи рівняння $y = f(x)$ щодо x.*]

$$y = 2x + 5 \Leftrightarrow x = \frac{y-5}{2}.$$

[***Крок 4.*** *Записуємо відповідь.*]

Оберненою до $f(x)$ функцією є функція

$$f^{-1}(y) = \frac{y-5}{2}, y \in \mathbb{R}.$$

5.1.8.2. Знайти обернену функцію до функції $f(x) = x^2 + 2$ і визначити її область означення.

Розв'язання.

$D(f) = \mathbb{R},\ E(f) = [2;+\infty).$

Оскільки для будь-якого $y \in (2;+\infty)$ рівняння

$$x^2 + 2 = y$$

має два різних розв'язки

$$x_1 = \sqrt{y^2 - 2} \text{ та } x_2 = -\sqrt{y^2 - 2},$$

то задана функція не має оберненої.

5.1.9.1. Для функцій $f(x) = x^2, g(x) = \sqrt{x}$ знайти суперпозиції: а) $f \circ g$ та б) $g \circ f$, указати їхні області означення.

Розв'язання. [5.1.5.]

[*Знаходимо області означення функцій, які входять до суперпозиції.*]
$D(f) = \mathbb{R}, D(g) = [0;+\infty)$.

А. [*Знаходимо множину значень внутрішньої функції суперпозиції* $f \circ g$.]
$E(g) = [0;+\infty) \subset D(f)$.

[*Знаходимо формулу для суперпозиції функцій.*]

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 = x.$$

[*Знаходимо область означення суперпозиції.*]

$$D(f \circ g) = \{x \in D(g) \mid g(x) \in D(f)\} = [0,+\infty).$$

[*Записуємо відповідь.*]
$(f \circ g)(x) = x, x \in [0,+\infty)$.

Б. [*Так само для* $(g \circ f)(x)$.]
$E(f) = [0;+\infty) \subset D(g)$.

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2} = \left|x\right|.$$

$$D(g \circ f) = \{x \in D(f) \mid f(x) \in D(g)\} = \mathbb{R}.$$

$(g \circ f)(x) = \left|x\right|, x \in \mathbb{R}$.

5.1.9.2. Для функцій $f(x) = \ln(x^2), g(x) = \sin x$ знайти суперпозиції: а) $f \circ g$ та б) $g \circ f$, указати їхні області означення.

Розв'язання. [5.1.5.]

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}, D(g) = \mathbb{R}$.

А. $E(g) = [-1;1]$. $E(g) \setminus \{0\} \in D(f)$.

$$(f \circ g)(x) = \ln(\sin x)^2.$$

$$D(f \circ g) = \{x \in D(g) \mid g(x) \in D(f)\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

$(f \circ g)(x) = \ln(\sin x)^2, x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Б. $E(f) = \mathbb{R} = D(g)$.

$$(g \circ f)(x) = \sin \ln(x^2).$$

$$D(g \circ f) = \{x \in D(f) \mid f(x) \in D(g)\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$(g \circ f)(x) = \sin \ln(x^2), x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

5.1.10.1. Визначити функцію f, яка справджує умову

$$f(x+1)=x^2-3x+2.$$

Розв'язання.

[*Замінюємо змінну.*]

Нехай $x+1=t$, тоді $x=t-1$. Отже,

$$f(t)=f(x+1)=x^2-3x+2=t^2-5t+6\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x)=x^2-5x+6.$$

5.1.10.2. Визначити функцію f, яка справджує умову

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}, x>0.$$

Розв'язання.

Нехай $\frac{1}{x}=t$, тобто $x=\frac{1}{t}, t>0$. Отже,

$$f(t)=f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{t}+\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}=\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}, t>0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x)=\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}, x>0.$$

5.1.11.1. Показати, що функція $f(x)=\log_a x$ справджує функціональне рівняння $f(x_1)+f(x_2)=f(x_1x_2)$.

Розв'язання.

Справді, для будь-яких $x_1>0$ та $x_2>0$ маємо

$$f(x_1)+f(x_2)=\log_a x_1+\log_a x_2=\log_a x_1x_2=f(x_1x_2).$$

5.1.11.2. Показати, що функція $f(x)=a^x$ справджує функціональне рівняння $f(x_1)f(x_2)=f(x_1+x_2)$.

Розв'язання.

Справді, для будь-яких x_1 та x_2 маємо

$$f(x_1)f(x_2)=a^{x_1}a^{x_2}=a^{x_1+x_2}=f(x_1+x_2).$$

Задачі для аудиторної та домашньої роботи

5.1.12. Знайдіть значення: $f(0), f(1), f(-x), f\left(\frac{1}{x}\right), \frac{1}{f(x)}$ для функції:

1) $f(x)=x^2+x-2$; 2) $f(x)=x^3-x^2+3$.

5.1.13. Знайдіть значення: $f(-2), f(0), f(1), f(2)$ для функції:

1) $f(x) = \begin{cases} 2x^3, & x < 0, \\ 3x, & x \geq 0; \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 1, \\ x^3, & x > 1. \end{cases}$

5.1.14. Знайдіть множину Y, на яку функція f відображує множину X, якщо:

1) $f(x) = x^2, X = [-1;2]$; 2) $f(x) = x^3, X = [-2;1]$;

3) $f(x) = \log_3 x, X = (3;27]$; 4) $f(x) = \log_{1/2} x, X = [2;8)$;

5) $f(x) = \dfrac{1}{4^x}, X = (0;1)$; 6) $f(x) = 2^x, X = (-1;2]$.

5.1.15. Знайдіть природну область означення функції:

1) $f(x) = \sqrt{x-2} + \dfrac{1}{x^2 - 4}$; 2) $f(x) = \sqrt{3-x} - \dfrac{1}{x^3 - 27}$;

3) $f(x) = \dfrac{\log_2 x}{\arccos x}$; 4) $f(x) = \dfrac{\log_4(-x)}{\operatorname{arctg}(x+1)}$.

5.1.16. Знайти множину значень функції:

1) $f(x) = -x^2 + 6x - 10$; 2) $f(x) = x^2 + 4x + 9$;

3) $f(x) = 2^{x^2} - 1$; 4) $f(x) = 3^{x^3} + 1$;

5) $f(x) = 3 - 7\cos x$; 6) $f(x) = 7\sin x - 3$.

5.1.17. Запишіть у явному вигляді функцію y, яку задано неявно рівнянням:

1) $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$; 2) $x^2 y = 5$;

3) $2^{x+y} = 4$; 4) $\log_2(y-2) + \log_2 x = 1$.

5.1.18. Запишіть у явному вигляді функцію y, яку задано параметрично рівняннями:

1) $\begin{cases} x = t + 3, \\ y = t^2 + 6t + 10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 3\cos^2 t; \\ y = 2\sin^2 t. \end{cases}$

5.1.19. Знайдіть обернену функцію до функції f та її область означення, якщо:

1) $f(x) = 3x - 4$; 2) $f(x) = -2x + 3$;

3) $f(x) = \sin x, x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$; 4) $f(x) = \cos x, x \in [-\pi; 0]$;

5) $f(x) = \frac{1}{x^2}$; 6) $f(x) = \frac{1}{x^4 + 1}$;

7) $f(x) = 3^{x-4}$; 8) $f(x) = \log_4(x + 2)$.

5.1.20. Знайдіть суперпозиції $f \circ g$ і $g \circ f$, укажіть їхні області означення:

1) $f(x) = 1 - x, g(x) = x^2$; 2) $f(x) = 2^x, g(x) = \log_2 x$;

3) $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0; +\infty), \\ 0, & x \in (-\infty; 0), \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0; +\infty), \\ x^2, & x \in (-\infty; 0). \end{cases}$

5.1.21. Задано $\varphi(x) = x^2, \psi(x) = 3^x$. Знайдіть:

1) $\varphi(\varphi(x)), \varphi(\psi(x))$; 2) $\psi(\psi(x)), \psi(\varphi(x))$.

5.1.22. Задано функції $u = \sin x, v = \log_2 x, w = 1 + x, y = \frac{1}{x}$ та $z = \sqrt{x}$.

Запишіть формулу, що задає суперпозицію:

1) $u \circ v \circ w \circ y \circ z$; 2) $z \circ y \circ w \circ v \circ u$;

3) $w \circ y \circ v \circ z \circ u$; 4) $y \circ v \circ z \circ u \circ w$.

5.1.23. Запишіть функцію за допомогою суперпозиції основних елементарних функцій:

1) $f(x) = \cos^3 2^x$; 2) $f(x) = \sin^2(\log_2 x)$;

3) $f(x) = \log_2 \operatorname{tg} x^3$; 4) $f(x) = 3^{\arcsin^2 x}$.

5.1.24. Визначте, які з точок A та B належать лінії, заданої рівняннями:

1) $\begin{cases} x = t^2 - 1, \\ y = t^3 - t, \end{cases} A(0; 0), B(3; 3)$;

2) $\begin{cases} x = \sin t + 1, \\ y = \cos t - 1, \end{cases} A(0; -1), B(1{,}6; -0{,}2)$.

5.1.25. Для графіка параметрично заданої функції $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} t \in [0; \pi]$ знайдіть:

1) координати точки, яка відповідає значенню параметра $t_0 = \dfrac{\pi}{2}$;

2) значення параметра t, яке відповідає точці $M_0(1; 0)$.

5.1.26. Визначте функцію f, що справджує умову:

1) $f(x-2) = \dfrac{1}{x+1}, x \neq -1$; 2) $f\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}, x \neq 0$;

3) $f(x_1 - x_2) = \cos x_1 \cos x_2 + \sin x_1 \sin x_2$;

4) $f(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2$.

5.1.27. Покажіть, що функція f справджує функціональне рівняння:

1) $f(x+2) - 2f(x+1) + f(x) = 0, f(x) = kx + b$;

2) $f(x)f(-x) = 1, f(x) = a^x$;

3) $f(x_1) + f(x_2) = f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{1 + x_1 x_2}\right), \ f(x) = \lg \dfrac{1+x}{1-x}$.

5.1.28. Побудуйте графік функції:

1) $y = |x| - x$; 2) $y = |x| - (\sqrt{x})^2$;

3) $y = \operatorname{sgn} \cos x$; 4) $y = \operatorname{sgn} \sin x$;

5) $y = \sqrt{1 - \sin^2 x}$; 6) $y = \sqrt{1 - \cos^2 x}$;

7) $y = x^{\log_x (x^2 - 2)}$; 8) $y = \sqrt{2}^{\log_2 x}$;

9) $y = \sin(\arcsin x)$; 10) $y = \arcsin(\sin x)$;

11) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$; 12) $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$.

Відповіді

5.1.12. 1) $f(0) = -2, f(1) = 0, f(-x) = x^2 - x - 2, f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} - 2, \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{x^2 + x - 2}$;

2) $f(0) = 3, f(1) = 3, f(-x) = -x^3 - x^2 + 3, f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{x^2} + 3, \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{x^3 - x^2 + 3}$.

5.1.13. 1) $f(-2) = -16, f(0) = 0, f(1) = 3, f(2) = 6$;
2) $f(-2) = 3, f(0) = -1, f(1) = 0, f(2) = 8$.

5.1.14. 1) $Y = [0;4]$; 2) $[-8;1]$; 3) $Y = (1;3]$; 4) $Y = (-3;-1]$;
5) $Y = \left(\frac{1}{4};1\right)$; 6) $Y = \left(\frac{1}{2};4\right]$.

5.1.15. 1) $D(f) = (2;+\infty)$; 2) $D(f) = (-\infty;3)$; 3) $D(f) = (0;1)$;
4) $D(f) = (-\infty;-1) \cup (-1;0)$.

5.1.16. 1) $E(f) = (-\infty;-1]$; 2) $E(f) = [5;+\infty)$; 3) $E(f) = [0;+\infty)$; 4) $E(f) = (1;+\infty)$;
5) $E(f) = [-4;10]$; 6) $E(f) = [-10;4]$.

5.1.17. 1) $y = \sqrt{1-x^2}, x \in [-1;1]$; 2) $y = \frac{5}{x^2}, x \neq 0$; 3) $y = 2 - x, x \in \mathbb{R}$;
4) $y = \frac{2}{x} + 2, x \in (0;+\infty)$.

5.1.18. 1) $y = x^2 + 1$; 2) $y = 2 - \frac{2x}{3}$.

5.1.19. 1) $f^{-1}(y) = \frac{1}{3}y + \frac{4}{3}, D(f^{-1}) = \mathbb{R}$; 2) $f^{-1}(y) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}y, D(f^{-1}) = \mathbb{R}$;
3) $f^{-1}(y) = -\pi - \arcsin y, D(f^{-1}) = [-1;1]$; 4) $f^{-1}(y) = -\arccos y, D(f^{-1}) = [-1;1]$;
5), 6) не існує; 7) $f^{-1}(y) = \log_3 y + 4, D(f^{-1}) = (0;+\infty)$; 8) $f^{-1}(y) = 4^y - 2, D(f^{-1}) = \mathbb{R}$.

5.1.20. 1) $(f \circ g)(x) = 1 - x^2, x \in \mathbb{R}, (g \circ f)(x) = (1-x)^2, x \in \mathbb{R}$;
2) $(f \circ g)(x) = x, x \in [0;+\infty), (g \circ f)(x) = x, x \in \mathbb{R}$;
3) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0;+\infty), \\ x^2, & x \in (-\infty;0), \end{cases}$ $(g \circ f)(x) = 0, x \in \mathbb{R}$.

5.1.21. 1) $\varphi(\varphi(x)) = x^4, \varphi(\psi(x)) = 3^{2x}$; 2) $\psi(\psi(x)) = 3^{3^x}, \psi(\varphi(x)) = 3^{x^2}$.

5.1.22. 1) $\sin \log_2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$; 2) $\frac{1}{\sqrt{1 + \log_2 \sin x}}$; 3) $1 + \frac{1}{\log_2 \sqrt{\sin x}}$; 4) $\frac{1}{\log_2 \sqrt{\sin(1+x)}}$.

5.1.23. 1) $u \circ v \circ w, u = x^3, v = \cos x, w = 2^x$; 2) $u \circ v \circ w, u = x^2, v = \sin x, w = \log_2 x$;
3) $u \circ v \circ w, u = \log_2 x, v = \operatorname{tg} x, w = x^3$; 4) $u \circ v \circ w, u = 3^x, v = x^2, w = \arcsin x$.

5.1.24. 1) A; 2) A та B. **5.1.25.** 1) $M_0(0;1)$; 2) $t_0 = 0$.

5.1.26. 1) $f(x) = \frac{1}{x+3}$; 2) $f(x) = x^2 - 2$; 3) $f(x) = \cos x$; 4) $f(x) = \sin x$.

Практикум 5.2. Основні характеристики функцій

Навчальні задачі

5.2.1.1. Знайти множину нулів X_0, область додатності X_+ та область від'ємності X_- для функції $f(x) = 1 + x$.

Розв'язання. [5.2.1.]

[*Знаходимо значення* x, *де* $f(x) = 0$.]

$$1 + x = 0;\ x = -1 \Rightarrow X_0 = \{-1\}.$$

[*Знаходимо значення* x, *де* $f(x) > 0$.]

$$x + 1 > 0;\ x > -1 \Rightarrow X_+ = (-1;+\infty).$$

[*Знаходимо значення* x, *де* $f(x) < 0$.]

$$x + 1 < 0;\ x < -1 \Rightarrow X_- = (-\infty;-1).$$

5.2.1.2. Знайти множину нулів X_0, область додатності X_+ та область від'ємності X_- для функції $f(x) = \sin \pi x$.

Розв'язання.

$$\sin \pi x = 0;\ \pi x = \pi k, k \in \mathbb{Z};\ x = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow X_0 = \mathbb{Z}.$$

$$\sin \pi x > 0;\ 2\pi k < \pi x < \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};\ 2k < x < 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$X_+ = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \big(2k; 2k+1\big).$$

$$\sin \pi x < 0 \Leftrightarrow -\pi + 2\pi k < \pi x < 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2k - 1 < x < 2k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_- = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \big(2k-1; 2k\big).$$

5.2.2.1. Визначити, чи є функція $f(x) = 3x^7 - 2x^3 + \sin x$ парною, непарною або загального вигляду?

Розв'язання. [5.2.2, 5.2.3.]

[***Крок 1.*** *Знаходимо область означення функції і перевіряємо її на симетричність відносно точки* 0.]

$D(f) = (-\infty;+\infty)$ є симетричною відносно точки 0.

[***Крок 2.*** *Знаходимо* $f(-x)$.]

$$f(-x) = 3(-x)^7 - 2(-x)^3 + \sin(-x) = -3x^7 + 2x^3 - \sin x.$$

[***Крок 3.*** *Порівнюємо* $f(-x)$ *з* $f(x)$.]

$$f(-x) = -f(x).$$

[***Крок 4.*** *Висновуємо про функцію f.*]
Функція f є непарною.

5.2.2.2. Визначити, чи є функція $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2 - 25}$ парною, непарною або загального вигляду?

Розв'язання.
$D(f) = (-\infty; -5) \cup (-5; 5) \cup (5; +\infty)$ є симетричною відносно точки 0.

$$f(-x) = \frac{\cos(-x)}{(-x)^2 - 25} = \frac{\cos x}{x^2 - 25}.$$
$$f(-x) = f(x).$$

Функція f є парною.

5.2.2.3. Визначити, чи є функція $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$ парною, непарною або загального вигляду?

Розв'язання.
$D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ не є симетричною відносно точки 0.

Функція f є ні парною, ні непарною (є загального вигляду).

5.2.2.4. Визначити, чи є функція $f(x) = 2^x$ парною, непарною або загального вигляду?

Розв'язання.
$D(f) = (-\infty; +\infty)$ є симетричною відносно точки 0.

$$f(-x) = 2^{-x}.$$
$$f(-x) \neq f(x), f(-x) \neq -f(x).$$

Функція f є загального вигляду.

5.2.3.1. З'ясувати, чи є функція $f(x) = 5\cos 7x$ періодичною і визначити її основний період T.

Розв'язання. [5.2.5, 5.7.8.]
Оскільки основним періодом функції $\cos x$ є число $T_0 = 2\pi$, то періодом① функції $f(x) = 5\cos 7x$ є число $T = \dfrac{2\pi}{7}$.

Отже, функція f є періодичною з основним періодом $T = \dfrac{2\pi}{7}$.

Коментар. ① Можна показати, що цей період є основним.
Справді, якщо $T_1 > 0$ — який-небудь інший період цієї функції, то для будь-якого x виконано

$$5\cos 7\left(x + T_1\right) = 5\cos 7x.$$

Тобто $7T_1$ — період функції $\cos t$, де $t = 7x$, і, отже, $7T_1 \geq 2\pi \Rightarrow T_1 \geq \dfrac{2\pi}{7}$.

5.2.3.2. З'ясувати, чи є функція $f(x) = \cos^2 2x$ періодичною і визначити її основний період T.

Розв'язання.
Оскільки

$$\cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2},$$

то період заданої функції збігається з періодом функції $\cos 4x$.
Основним періодом $\cos x$ є число $T_0 = 2\pi$. Отже, основний період функції $\cos 4x$ є число $T = \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$.

Функція f є періодичною з основним періодом $T = \dfrac{\pi}{2}$.

5.2.3.3. З'ясувати, чи є функція $f(x) = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} - 2\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}$ періодичною і визначити її основний період T.

Розв'язання. [5.7.9.]

Основний період функції $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ дорівнює $T_1 = 2\pi$, а основний період функції $\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}$ дорівнює $T_2 = 3\pi$.

Основним періодом функції $f(x) = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} - 2\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}$ є найменше спільне кратне чисел 2π та 3π — число $T = 6\pi$.
Функція f є періодичною з основним періодом $T = 6\pi$.

5.2.3.4. З'ясувати, чи є функція $f(x) = x\sin x$ періодичною і визначити її основний період T.

Розв'язання.
Доведімо, що функція f неперіодична, від супротивного. Нехай $T > 0$ — період функції f. Тоді,

$$f(x+T) = (x+T)\sin(x+T) = x\sin x \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Покладімо в цій рівності $x = 0$:

$$T\sin T = 0 \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} T = 0, \\ T = \pi k, k \in \mathbb{Z}, \end{array}\right. \\ T > 0 \end{cases} \Rightarrow T = \pi k, k \in \mathbb{N}.$$

Отже, період (якщо він існує), може дорівнювати лише πk.

Якщо $x = 2\pi n, n \in \mathbb{N}$, то

$$f(x + 2\pi n) = (x + 2\pi n)\sin(x + 2\pi n) = (x + 2\pi n)\sin x \neq x\sin x.$$

Якщо $x = (2n - 1)\pi, n \in \mathbb{Z}$, то

$$f(x + (2n-1)\pi) = (x + (2n-1)\pi)\sin(x + (2n-1)\pi) =$$
$$= -(x + (2n-1)\pi)\sin x \neq x\sin x.$$

Одержана суперечність доводить, що функція f неперіодична.

5.2.4. Продовжити функцію $f(x) = x^2$, $x \in (0;+\infty)$ на $(-\infty;0]$ так, щоб продовжена функція на $\mathbb{R}$ була: а) парною, б) непарною.

Розв'язання. [5.2.2–5.2.4.]

А. Нехай парним продовженням функції f на всю числову вісь є функція

$$f_{\text{п}}(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0, \\ a, & x = 0, \\ g(x), & x < 0. \end{cases}$$

Для парності функції $f_{\text{п}}$ потрібно, щоб

$$\forall x \in (-\infty;0)\ f_{\text{п}}(x) = g(x) = f_{\text{п}}(-x) = f(-x) = x^2;$$
$$f_{\text{п}}(0) = a = f_{\text{п}}(0) \Rightarrow a \in \mathbb{R}.$$

Отже,

$$f_{\text{п}}(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0, \\ a, & x = 0, a \in \mathbb{R} \text{ (рис. 1)}. \\ x^2, & x < 0. \end{cases}$$

Б. Нехай непарним продовженням функції f на всю числову вісь є функція

$$f_{\text{н}}(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0, \\ a, & x = 0, \\ g(x), & x < 0. \end{cases}$$

Для непарності функції потрібно, щоб

$$\forall x \in (-\infty;0)\ f_{\text{н}}(x) = g(x) = -f_{\text{н}}(-x) = -f(-x) = -x^2;$$
$$f_{\text{н}}(0) = a = -f_{\text{н}}(0) = -a \Rightarrow a = 0.$$