

ВСТУП

Технологічні процеси в різних галузях промисловості мають в своєму єстві теплотехнічну основу і якість продукції визначається протіканням теплових процесів.

Прагнення до збільшення якості зумовлює необхідність управління і регулювання теплових процесів. Термічна обробка грає значну роль у виробництві всіх будівельних матеріалів. У металургії її тривалість складає 80-90% тривалості всього технологічного циклу. При виробництві сталі, чавуну, прокату ці показники ще вищі. Велике значення термообробки повинне приділятися як технологічній операції, удосконалювальній процес структурних перетворень і що забезпечує споживчі властивості виробів, що нагріваються. Особливо це видно при виготовленні керамічних матеріалів, сушці теплоізоляції. Термообробка забезпечує додання матеріалам якісно нових властивостей. Тепломасообмінні процеси можуть стати причиною погіршення якості і появи браку. Враховуючи важливість і складність процесів, є необхідність їх всестороннього вивчення, яке можливе на базі створених моделей, тобто характеристики тепломасобмінних процесів можна вивчати за допомогою досліджень.

Експериментальні дослідження. Часто найбільш точну інформацію про досліджуваний процес можна отримати при натурному експерименті. За допомогою експериментальних досліджень на установці можна визначити поведінку об'єкту в натурних умовах. Частенько дослідження дорогі, проте можна використовувати проведення експериментів на маломасштабних моделях, але отриману інформацію необхідно екстраполювати на натурний об'єкт. А загальні правила екстраполяції відсутні. Крім того, на маломасштабних моделях не завжди можна відтворити всі властивості об'єкту, що також знижує цінність отриманих

результатів. Потрібно пам'ятати, що у багатьох випадках виміри утруднені і вимірювальне устаткування може давати похибку та має погрішність.

Теоретичні дослідження. Тут визначаються результати рішення задачі згідно використовуваної математичної моделі, а не характеристики дійсного фізичного процесу. Для тих, що цікавлять нас фізичних процесів математична модель складається з диференціального рівняння (або системи диференціальних рівнянь) теплопровідності в частинних похідних::

$$c_p \cdot \frac{dT}{d\tau} = -\text{div}q + q_v$$

Закон Фур'є:

$$q = -\lambda \cdot \text{grad}T$$

Підставляючи, отримаємо:

$$c_p \cdot \frac{dT}{d\tau} = \text{div}(-\lambda \cdot \text{grad}T) + q_v$$

У прямокутних координатах для постійних властивостей рівняння набуває вигляду:

$$c_p \cdot \frac{dT}{d\tau} = \frac{d}{dx} \left(\lambda \cdot \frac{dT}{dx} \right) + \frac{d}{dy} \left(\lambda \cdot \frac{dT}{dy} \right) + \frac{d}{dz} \left(\lambda \cdot \frac{dT}{dz} \right) + q_v$$

Прийнявши $a = \frac{\lambda}{c_p}$, маємо:

$$\frac{dT}{d\tau} = a \left(\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{d^2T}{dy^2} + \frac{d^2T}{dz^2} \right) + \frac{q_v}{c_p}$$

Або

$$\frac{dT}{d\tau} = a \nabla^2 T + \frac{q_v}{c_p}$$

Диференціальне рівняння виведене на підставі загальних законів фізики і встановлює зв'язок між часовою і просторовою зміною температури

тіла. Аби вибрати рішення, що характеризує конкретний даний процес, необхідно до цього диференціального рівняння додати додаткові умови, що включають геометричні, фізичні і крайові умови.

Геометричні умови складаються із завдання форми і лінійних розмірів тіла.

Фізичні умови задають теплофізичні властивості матеріалів (щільність, теплопровідність, теплоємність, об'ємна щільність теплового потоку).

Крайові умови складаються з початкових і граничних умов. Початкові умови задаються для нестационарних завдань, в яких відбувається зміна температури в часі і полягають в завданні розподілу температури усередині тіла у момент часу, вибраний за початковий. Граничні умови відображають взаємодію довкілля з поверхнею тіла.

Способи завдання крайових умов.

Завдання початкових умов полягає в тому, що для деякого моменту часу $\tau = \tau_0$ ($\tau_0=0$) задається функція просторових координат:

$$T(x,y,z,\tau)|_{\tau=\tau_0}=f(x,y,z).$$

Простий вигляд початкових умов:

$$T(x,y,z,\tau)|_{\tau=\tau_0}=\text{const}.$$

Граничні умови можуть бути задані різними способами.

Граничні умови I-го роду: задається розподіл температури на поверхні S тіла як функція координат і часу:

$$T(x,y,z,\tau) = \Psi(x,y,z,t), \text{ де } x,y,z \in S$$

До граничних умов I-го роду можна віднести завдання розігрівання і охолодження системи при заданій зміні температури на границі або при дуже інтенсивному теплообміні на поверхні, коли температура поверхні дуже близька до температури середовища. Наприклад $\Psi(x,y,z,\tau) = 0$ однорідно відносно температури.

Граничні умови II-го роду: задається розподіл щільності теплового потоку на поверхню тіла як функція координат і часу:

$$q_s = \varphi(x,y,z,\tau); \quad x,y,z \in S .$$

За законом Фур'є:

$$-\lambda \cdot \left(\frac{dT}{dn} \right)_s = \varphi(x,y,z,\tau) ,$$

де \mathbf{n} - внутрішня нормаль до поверхні тіла.

У окремому випадку, коли q_s залишається постійною для будь-якого моменту часу в будь-якій точці поверхні $q_s = q_0 = \text{const}$. В разі теплоізолюваної поверхні $q_s = 0$.

Граничні умови III-го роду: на поверхню тіла задається залежність q_s унаслідок теплопровідності з боку тіла від температури поверхні тіла T_s і довкілля T_{oc} :

$$q_s = \pm \alpha (T_s - T_{oc}) \quad \text{або} \quad -\lambda \cdot \frac{dT}{dn} = \pm \alpha (T_s - T_{oc})$$

Це аналітичний запис граничних умов III-го роду.

Граничні умови IV-го роду: відповідає теплообміну поверхні тіла з довкіллям, конвективному теплообміну тіла з рідиною або теплообміну між дотичними твердими тілами, коли температура дотичних поверхонь однакова: $T_{1s}=T_{2s}$:

$$\lambda_1 \frac{\delta T_1}{\delta n} = \lambda_2 \frac{\delta T_2}{\delta n} .$$

Існують і інші види граничних умов. Наприклад, якщо тіло піддається нагріву випромінюванням з боку зовнішнього середовища, то граничні умови на поверхні тіла в цьому випадку задаються у вигляді:

$$-\lambda \left(\frac{\delta T}{\delta n} \right) \Big|_s = \varepsilon \cdot c_0 \cdot \left[\left(\frac{T_s}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{oc}}{100} \right)^4 \right].$$

Класифікація крайових завдань.

Якщо математична модель процесу відома, то потрібно знати, які величини задані, а які визначені. Залежно від цього виникаючі завдання можна розділити на 2 види:

- пряме завдання: визначити температурне поле, якщо відоме диференціальне рівняння і повністю задані додаткові умови, що визначають крайове завдання;
- зворотне завдання: визначити граничні умови або коефіцієнти, що входять в основне диференціальне рівняння, якщо відомий математичний опис процесу і температурне поле.

Крім того крайові завдання можна розділити на лінійні і нелінійні. Рівняння називають лінійним, якщо воно лінійне відносно шуканої функції і її похідних. Якщо хоч би один член рівняння є нелінійним, то і все завдання не лінійне. Залежно від того, в якому рівнянні і в якому членові рівняння зосереджена нелінійність, крайові завдання можна класифікувати таким чином:

- Крайове завдання з нелінійністю I-го роду: від температури залежить лінійно або нелінійно теплопровідність, щільність, теплоємність.
- Крайове завдання з нелінійністю II-го роду: від температури залежить тепловий потік на поверхню q_s .
- Крайове завдання з нелінійністю III-го роду: від температури нелінійно залежить об'ємна щільність теплового потоку q_v .

Класифікація методів вирішення крайових завдань.

По різних ознаках розділяють методи рішення. Одна з них – форма, в якій представлені результати рішення крайової задачі. Рішення у вигляді формули, яка дозволяє по заданому значенню аргументу здобути значення шуканої функції. Таке рішення називають рішенням в аналітичному вигляді.

За допомогою чисельних методів рішення може бути отримане у вигляді числових значень функцій в деяких заданих значеннях аргументу.

Аналітичне рішення є наочнішим в порівнянні з чисельним і по ньому можна проаналізувати вплив всіх чинників на результат рішення. Чисельні методи дають можливість вирішувати складні крайові завдання, недоступні для вирішення аналітичними методами.

Аналітичні методи можна розділити на:

I. Класичні методи:

1. Метод розділення змінних (метод Фур'є).
2. Метод джерел (метод Гріна).

II. Методи інтегральних перетворень:

1. У кінцевих межах.
2. У безконечних межах.

III. Наближені методи вирішення нелінійних завдань:

1. Варіаційні методи (метод Конторовича, метод Біо, метод Рітца).
2. Метод лінеаризації (метод дозволяє звести нелінійне завдання до лінійного).
3. Проекційні методи.
4. Методи зведення крайового завдання до рівняння іншого типу.

Чисельні методи можна розділити на:

I. Методи кінцевих різниць.

II. Варіаційно-різницеві.

III. Статистично - імовірнісні.

Чисельні методи.

Математичне формулювання закону збереження енергії.

Стосовно теплових процесів і установок будь-який з фізичних законів тих, що описують їх дії зводиться до законів збереження енергії (енергії, кількості руху, закон Фур'є і так далі), які виражені у вигляді диференціальних рівнянь. У кожному рівнянні як залежна змінна використовується деяка фізична величина і відображає баланс між різними

чинниками, що впливають на цю змінну. Наприклад, закон збереження енергії можна представити у вигляді:

$$\text{div}(\rho u h) = \text{div}(k \text{ grad} T) + S_h,$$

де: ρ – щільність;

u – швидкість руху;

h – питома ентальпія;

k – коефіцієнт теплопровідності;

T – температура;

S_h – об'ємна швидкість виділення теплоти.

Якщо рахувати $u=0$, то отримаємо рівняння стаціонарної теплопровідності:

$$\text{div}(k \text{ grad} T) + S_h = 0$$

Диференціальне рівняння описує теплообмін і гідродинаміку, що підкоряються узагальненому закону збереження і виразив залежну змінну через \mathbf{F} (в даному випадку температура), можна отримати узагальнене диференціальне рівняння, що представляє фізичний сенс тепломасобмінних процесів (рис. 1.1).

$$\frac{\delta}{\delta T}(\rho F) + \text{div}(\rho u F) = \text{div}(k \cdot \text{grad} F) + S$$

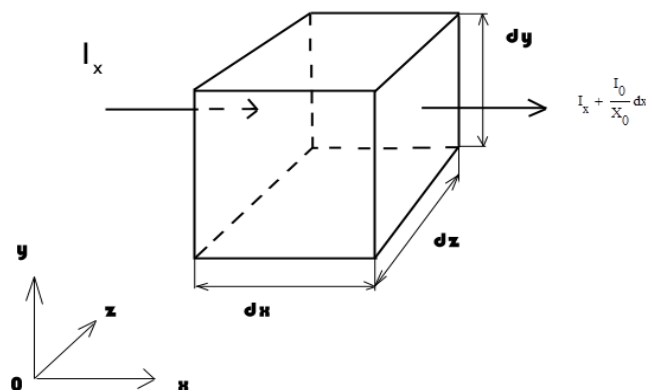


Рисунок 1.1 - Баланс потоків через контрольний об'єм

Потік впадаючий через одну поверхню площею $d\mathbf{y}d\mathbf{z}$, позначимо через I_x (складова вектора \mathbf{I}), а потік, витікаючий через протилежну поверхню, позначимо

$$I_x + \left(\frac{\partial I_x}{\partial x} \right) dx$$

Таким чином, чисте виділення через майданчик поверхні рівне

$$\left(\frac{\partial I_x}{\partial x} \right) dx dy dz$$

Розглядаючи аналогічним чином потоки у напрямі x , y і z , а також враховуючи що $d\mathbf{x} * d\mathbf{y} * d\mathbf{z}$ – це величина об'єму, отримуємо чисте виділення на одиницю об'єму:

$$\frac{\partial I_x}{\partial x} + \frac{\partial I_y}{\partial y} + \frac{\partial I_z}{\partial z} = \text{div}(\vec{I})$$

Ідея чисельних методів.

У аналітичному вигляді можна отримати вирішення лише невеликої частини завдань, що мають практичний інтерес. Крім того, ці рішення часто містять безконечні ряди, спеціальні функції, трансцендентні рівняння.

Але рівень розвитку чисельних методів і наявність потужних ЕОМ дозволяють майже для будь-якого практичного завдання скласти математичну модель і провести її чисельне дослідження.

Приклад. Хай нам потрібно отримати розподіл температури намальованої області (рис.1.2).



Рисунок 1.2 - Сітка для чисельного розрахунку поля температур

Припустимо, що досить знати температуру в дискретних точках області. Знаходимо значення температури у вузлових точках сітки, на яку розбивають область. При цьому для невідомих значень температури записуються і вирішуються алгебраїчні рівняння. Саме це вправа, пов'язана з вирішенням алгебраїчних рівнянь, а не диференціальних робить чисельні методи широко застосовними.

Переваги чисельних методів:

- 1) Низька вартість (машинний час дешевший за експеримент);
- 2) Швидкість (за день можна прорахувати сотні варіантів);
- 3) Повнота інформації (доступна вся область визначення змінних);
- 4) Можливість матмодельовання як реальних, так і ідеальних умов.

Недоліки чисельних методів:

- 1) Чисельне рішення дає кількісне вираження закономірностей, властивих математичній моделі;
- 2) Навпаки, при натурних дослідженнях спостерігається сама дійсність, тобто якщо матмодель не відповідає явищу, що вивчається, то з допомогою навіть дуже хорошої методики можна отримати не потрібні результати.

Єство чисельних методів.

Як основні невідомі в чисельному методі розглядаються значення залежної змінної в кінцевому числі точок (сітковими вузлами або вузловими точками) розрахункової області. Метод включає здобуття системи алгебраїчних рівнянь для цих невідомих і алгоритму вирішення цих рівнянь. Розглядаючи значення у вузлових точках, замінюють безперервну інформацію, що міститься в точному вирішенні диференціального рівняння, дискретними значеннями. Таким чином, дискретизують розподіл залежної змінної (наприклад, температуру) і цей клас чисельних методів називають *методами дискретизації*.

Дискретним аналогом називають алгебраїчне рівняння, що зв'язує значення F в деякій групі вузлових точок. Це рівняння виходить з диференціального рівняння, що описує зміну F , і, отже, воно несе ту ж фізичну інформацію, що і диференціальне рівняння. Передбачається, що при дуже великому числі вузлових точок вирішення дискретних рівнянь зближується з точним рішенням відповідного диференціального рівняння. Дискретні аналоги можуть бути різними, що є наслідком різних припущень про характеристику профілю залежної змінної і способів здобуття аналогів.

Методи здобуття дискретних аналогів

1. Використання рядів Тейлора. Звичайна процедура здобуття звичайних різницевих рівнянь полягає в апроксимації похідних в

диференціальних рівняннях обрізаними рядами Тейлора. Розглянемо вузлові точки, використовувані при розкладанні в ряд Тейлора (рис.1.3).

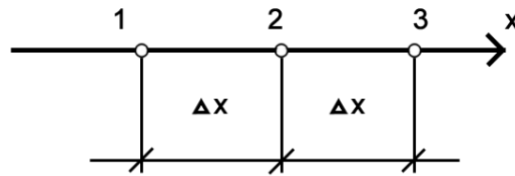


Рисунок 1.3 - Використання рядів Тейлора

Розкладання в ряд Тейлора біля вузлової точки **2** дає наступні формули:

$$F_1 = F_2 - \Delta x \left(\frac{dF}{dx}\right)_2 - \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \left(\frac{d^2 F}{dx^2}\right)_2 - \dots$$

$$F_3 = F_2 + \Delta x \left(\frac{dF}{dx}\right)_2 + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \left(\frac{d^2 F}{dx^2}\right)_2 + \dots$$

Відкидаючи члени обох рядів, починаючи з 4-го, віднімаючи і складаючи рівняння, отримаємо:

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)_2 = \frac{F_3 - F_1}{2\Delta x}$$

$$\left(\frac{d^2 F}{dx^2}\right)_2 = \frac{F_1 + F_3 - 2F_2}{(\Delta x)^2}$$

Підставляючи ці вирази в диференціальне рівняння, отримуємо звичайне різницеве рівняння.

Недоліки:

- 1) Ненаглядно, не сприяє поняттю фізичного сенсу;
- 2) Відкидаються члени ряду, що може привести до істотної погрішності (якщо $F(x)$ не поліном).

Варіаційний метод.

Для повного розуміння необхідно знати основи варіаційного числення. Коротко: у варіаційному численні показано, що вирішення даних диференціальних рівнянь еквівалентне мінімізації відповідної величини – функціонала. Ця еквівалентність називається варіаційним принципом. Шуканий дискретний аналог виходить з умов мінімуму функціонала відносно значень залежної змінної у вузлових точках.

Недоліки:

- 1) Математична складність;
- 2) Застосовується не для всіх диференціальних рівнянь.

Метод зважених нев'язок.

Представимо диференціальне рівняння у вигляді $L(F)=0$. Передбачимо, що наближене вирішення F має вигляд полінома:

$$\bar{F} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_mx^m,$$

де a_i – невідомі параметри. Підставимо F в диференціальне рівняння і виділимо нев'язку $R=L(F)$. Цей залишок необхідно зробити малим. Хай

$$\int wRdx = 0,$$

де w – вагова функція. Інтеграл береться по даній області. Вибираючи послідовність вагових функцій, можна отримати кількість рівнянь, достатню для знаходження параметрів. Вирішивши отриману систему алгебраїчних рівнянь для невідомих параметрів, знайдемо наближене вирішення диференціального рівняння. Вибираючи різні класи вагових функцій, отримаємо різні версії методу, що мають свої назви. Простою ваговою функцією є $w=1$. За допомогою такої функції можна побудувати систему рівнянь, розбиваючи розрахункову область на підобласті або контрольні об'єми. Вагова функція одночасно дорівнює **1** в одній підобласті і **0** у всіх

інших. Це **метод контрольного об'єму**. Інтеграл від нев'язки за кожним контрольним обсягом дорівнює 0.

Метод контрольного об'єму.

Основна ідея методу: розрахункову область розбивають на деяке число контрольних об'ємів, що не перетинаються, таким чином, що кожна вузлова точка міститься в одному контрольному об'ємі.

Диференціальне рівняння інтегрують за кожним контрольним об'ємом. Для обчислення інтегралів використовують кускові профілі, які описують зміну F між вузловими точками. В результаті знаходять дискретний аналог диференціального рівняння, в який входять значення F в декількох вузлових точках.

Важлива властивість методу – інтегральне збереження таких величин як маса, енергія і так далі на будь-якій групі контрольних об'ємів і отже у всій області, незалежно від числа точок (навіть на грубій сітці). Інтерполяційні файли або профілі необхідні лише для розрахунку інтегралів. Після здобуття дискретного аналога припущення щодо характеру профілів можна не враховувати.

Приклад:

Постановка стаціонарного одновимірного завдання теплопровідності.

Розглянемо таке завдання, описуване рівнянням

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda \cdot \frac{dT}{dx} \right) + S = 0 \quad (1)$$

де S – швидкість виділення теплоти в одиниці об'єму або джерельний член рівняння.

Для одновимірного завдання вважаємо, що розміри контрольного об'єму в напрямі y і z дорівнюють 1 (рис. 1.4), тобто $V = \Delta x * 1 * 1$

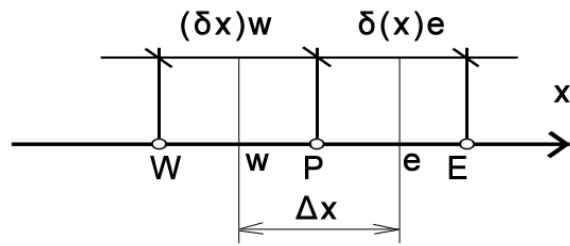


Рисунок 1.4 - Шаблон вузлових точок для одновимірного завдання

Інтегруючи рівняння (1) по контрольних об'ємах отримаємо

$$\left(\lambda \frac{dT}{dx}\right)_e - \left(\lambda \frac{dT}{dx}\right)_w + \int_w^e S dx = 0 \quad (2)$$

Припущення про вигляд профілю (рис. 1.5)

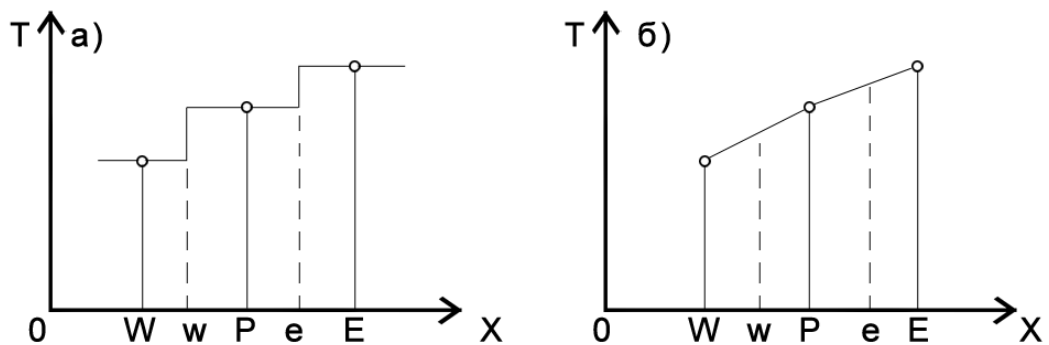


Рисунок 1.5 - Прості апроксимації профілів: а) ступінчастий профіль; б) кусково-лінійний.

У простому випадку передбачається, що значення T у вузловій точці зберігається для всього контрольного об'єму, що її оточує. Це припущення наводить до ступінчастого профілю (рис. 5 а). Для такого профілю dT/dx на границях контрольного об'єму не визначена. Ця трудність не виникає для кусково-лінійного профілю (рис. 5 б), в якого зміна T між вузловими точками описується лінійними інтерполяційними функціями.

Здобуття дискретного аналога.

Використовуючи для визначення dT/dx в рівнянні (2) Кусково-лінійний профіль, отримаємо:

$$\frac{\lambda_e(T_E - T_P)}{(\delta x)_e} - \frac{\lambda_w(T_P - T_w)}{(\delta x)_w} + \bar{S}\Delta x = 0, \quad (3)$$

де \bar{S} - середнє за контрольним обсягом значення S . Перепишемо в наступному вигляді:

$$a_p T_p = a_e T_e + a_w T_w + B, \quad (4)$$

$$\text{де } a_e = \frac{\lambda_e}{(\delta x)_e}; a_w = \frac{\lambda_w}{(\delta x)_w}; a_p = a_e + a_w; b = \bar{S}\Delta x \quad (5)$$

Рівняння (4) - це стандартний запис дискретного аналога. У лівій частині цього рівняння знаходиться температура T_p в центральній вузловій точці, а в правій – температури в сусідніх точках і постійна B . Відзначимо, що немає необхідності використовувати однакові профілі для всіх членів рівняння.

Правила побудови дискретного аналога.

Сітка. Для вузлових точок, показаних на рис. 3, немає необхідності, аби відрізки $(\delta x)_e$ та $(\delta x)_w$ були рівні. Дійсно, використання нерівномірної сітки часто бажано, оскільки дозволяє ефективніше завантажувати ЕОМ. Число вузлових точок, необхідне для необхідної точності і вибраного методу, повинне розподілятися в розрахунковій області відповідно до природи вирішуваного завдання.

Нелінійність. Дискретним аналогом (4) є лінійне алгебраїчне рівняння і система таких рівнянь вирішувана. Але на практиці часто завдання нелінійні. Самі коефіцієнти (5) залежатимуть від T . У таких випадках використовують ітерації.

Етапи ітераційного процесу:

- 1) Вибір початкового наближення або оцінка значень T у всіх вузлових точках.
- 2) Розрахунок попереднього значення коефіцієнтів в дискретному аналогу на основі початкового профілю температури.
- 3) Рішення номінальне лінійної системи алгебраїчних рівнянь, що дає нові значення T .
- 4) Повернення до другого етапу і повторення процесу до тих пір, поки подальше наближення (ітерації) перестануть давати скільки-небудь істотні зміни в значеннях T .

Рішення, що сходиться, є дійсно коректним вирішенням нелінійних рівнянь, хоча його і знаходять за допомогою методів вирішення лінійних рівнянь.

Апроксимація джерелового члена. Розглянемо джереловий член рівняння (3). Часто S є функцією T . Формально ми можемо враховувати лише лінійну залежність. Запишемо середнє значення \bar{S} у вигляді:

$$\bar{S} = S_c + S_p T_p,$$

де S_c є постійною складовою S , S_p - коефіцієнт. Дискретний аналог з лінеаризованим джереловим членом матиме такий же вигляд, як і (4), але з іншими коефіцієнтами:

$$a_p T_p = a_E T_E + a_W T_W + b,$$

$$\text{де } a_E = \frac{\lambda_e}{(\delta x)_e}; a_W = \frac{\lambda_w}{(\delta x)_w}; a_p = a_E + a_W - S_p \Delta x; b = S_c \Delta x \quad (6)$$

Лінеаризація джерелового члена. Якщо S є нелінійною функцією T , то функцію треба лінеаризувати, тобто визначити значення S_c і S_p , які можуть самі залежати від T . В процесі кожного ітераційного циклу S_c і S_p перераховуються з врахуванням нових значень T . Існує багато способів розкладання заданого вираження для S на S_c і $S_p T_p$. Потрібно дотримуватися правила $S_p \leq 0$. Наприклад променистий теплообмін:

$$\text{Хай } S = A(T_0^4 - T^4) = B - AT^4.$$

Можна: $S_c=B$, $S_p = -AT_p^{*3}$ (символ T_p^* використовується для позначення T_p на рівні нульової ітерації (початкове значення)). Це розкладання – коректна лінеаризація, але погано сходиться.

Спосіб, що рекомендується:

$$\begin{aligned} S &= S^* + \frac{dS^*}{dT} (T_p - T_p^*) = B - AT_p^{*4} - AT_p^{*3} (T_p - T_p^*) = B - AT_p^{*4} - 4AT_p^{*3} T_p + 4AT_p^{*4} = \\ &= B + 3AT_p^{*4} - 4AT_p^{*3} T_p \Rightarrow S_c = B + 3AT_p^{*4}; S_p = -4AT_p^{*3} \end{aligned}$$

Цей рекомендований спосіб лінеаризації джерелового члена звикористанням ітераційного циклу на відміну від попереднього сходиться завжди.

Граничні умови. Розглянемо рисунок 1.6. Точки можна розділити на внутрішні і граничні. Якщо на лівій границі задані граничні умови I-го роду (тобто T_b – відомо), то не виникає труднощів і не вимагається додаткових рівнянь.

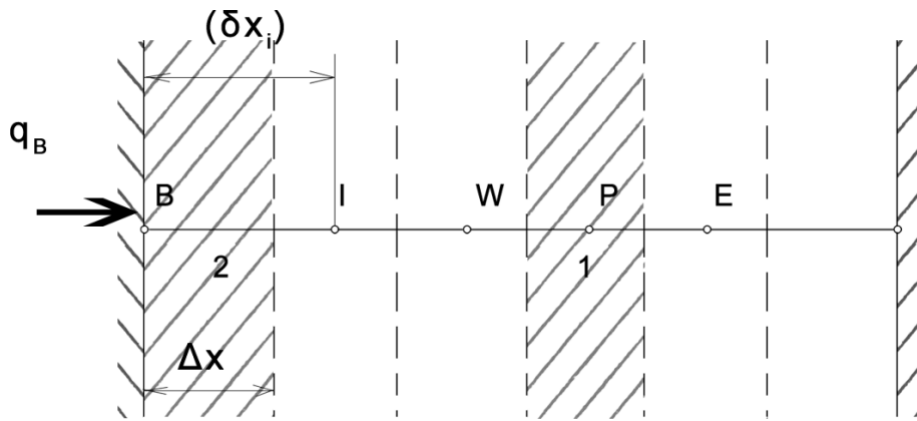


Рисунок 1.6 - Контрольний об'єм внутрішніх і граничних точок:
1-типовий контрольний об'єм; 2-половинний контрольний об'єм.

Для рівнянь типів граничних умов необхідне рівняння для граничної точки. Це рівняння можна отримати, інтегруючи диференціальне рівняння (1) за половинним контрольним об'ємом:

$$q_B - q_i + (S_c + S_p T_p) \Delta x = 0$$

Підставимо замість

$$q_i = \frac{\lambda_i (T_B - T_I)}{(\delta x)_i}$$

Тоді

$$q_B - \frac{\lambda_i (T_B - T_I)}{(\delta x)_i} + (S_c + S_p T_p) \Delta x = 0.$$

Якщо заданий тепловий потік q_B (граничні умови II-го роду), то дискретний аналог для T_B :

$$a_B T_B = a_I T_I + b, \text{ де } a_I = \frac{\lambda_i}{(\delta x)_i}; b = S_c \Delta x + q_B; a_B = a_I - S_p \Delta x;$$

Якщо задані граничні умови III-го роду ($q_B = \alpha(T_{o.c.} - T_B)$), то рівняння для T_B запишеться:

$$a_B T_B = a_I T_I + b, \text{ де } a_I = \frac{\lambda_i}{(\delta x)_i}; b = S_c \Delta x + \alpha T_{o.c.}; a_B = a_I - S_p \Delta x + \alpha;$$

Правила побудови дискретного аналога:

Правило 1. Відповідність потоків на границях контрольних об'ємів.

Вираження потоку через кордон для двох прилеглих контрольних об'ємів, при записі дискретного аналога для цих об'ємів має бути одним і тим же. Ця вимога очевидна, оскільки інакше буде порушений баланс теплоти.

Правило 2. Позитивність коефіцієнтів.

Виходячи з фізичного єства процесу теплопровідності, збільшення значення T в одній вузловій точці повинне, за інших рівних умов, привести до збільшення (а не зменшення) значення в сусідній вузловій точці. Тоді, як видно з рівняння (4), із збільшення T_p при збільшенні T_E витікає, що коефіцієнти a_E і a_p повинні мати однаковий знак. Домовимося, що вони позитивні. Правило 2 – всі коефіцієнти завжди мають бути позитивними.

Правило 3. Від'ємність коефіцієнта при лінеаризації джерелового члена.

З визначення коефіцієнтів (6) видно, що коефіцієнт a_p може стати від'ємним за рахунок S_p . Цього можна повністю уникнути, зажадавши, аби S_p не був позитивним. Правило 3 – при лінеаризації источникового члена у вигляді $\bar{S} = S_c + S_p T_p$ коефіцієнт S_p завжди має бути від'ємним або рівним нулю.

Вирішення лінійних алгебраїчних рівнянь.

Рішення можна отримати за допомогою стандартного методу виключення Гаусса. Для рівнянь такого простого вигляду процес виключення перетворюється на дуже зручний алгоритм Томаса або ТДМА (3-х діагональний матриця алгоритм), званий методом прогону. Всі ненульові коефіцієнти матриці коефіцієнтів групуються уздовж 3-х діагоналей матриці.

Для зручності запису алгоритму введемо деякі позначення. Привласнимо вузловим точкам (рис. 5) номери $1, 2, 3, \dots, N$. Номери 1 і N відносяться до точок на границі. Дискретний аналог запишемо у вигляді

$$a_i T_i = b_i T_{i+1} + c_i T_{i-1} + d_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (7)$$

Температура T_i пов'язана з сусідніми значеннями T_{i+1} і T_{i-1} . Для точок на границях маємо:

$$c_1=0 \text{ и } b_N=0 \quad (8),$$

звідки витікає, що температури T_0 и T_{N+1} не матимуть сенсу (для граничних умов I-го роду рівняння для граничної точки в звичайній формі, лише $a_1=1$, $b_1=c_1=0$, $d_1=T_1$). Записані умови означають, що T_1 відома залежно від T_2 . Рівняння для $i=2$ є співвідношенням між T_1 , T_2 і T_3 . Але оскільки T_1 може бути виражена через T_2 , це співвідношення зводиться до співвідношення між T_2 і T_3 . Іншими словами T_2 можна виразити через T_3 . Процес підстановки можна продовжувати до тих пір, поки значення T_N не буде виражено через T_{N+1} . Але оскільки T_{N+1} не існує, ми набуваємо чисельного значення T_N . Це дозволяє почати процес зворотної підстановки, в якому T_{N-1} вийде з T_N , T_{N-2} з T_{N-1} , ..., T_2 – з T_3 і T_1 – з T_2 . Це і складає єство алгоритму 3-хдіагональної матриці.

Хай при прямій підстановці маємо залежність

$$T_i = P_i T_{i+1} + Q_i \quad (9)$$

після того, як отримане

$$T_{i-1} = P_{i-1} T_i + Q_{i-1} \quad (10)$$

Підставляючи (4) в (1), отримаємо

$$a_i T_i = b_i T_{i+1} + c_i (P_{i-1} T_i + Q_{i-1}) + d_i \quad (11),$$

яке можна привести до вигляду (9):

$$(a_i - c_i P_{i-1}) T_i = b_i T_{i+1} + c_i Q_{i-1} + d_i,$$

звідки

$$T_i = \frac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}} T_{i+1} + \frac{d_i + c_i Q_{i-1}}{a_i - c_i P_{i-1}}$$

Ці рекурентні співвідношення визначають P_i та Q_i через P_{i-1} та Q_{i-1} . На початку рекурентного процесу (при $C_1=0$) маємо $P_1=b_1/a_1$; $Q_1=d_1/a_1$. На іншому кінці послідовності P_i, Q_i маємо $b_N=0$. Це дає $P_N=0$ і з (9) отримуємо $T_N=Q_N$. З цієї миті здійснюється зворотна підстановка і з допомогою рівняння (9) визначаємо температури T_{N-1} , потім T_{N-2} і так далі. Метод прогону дуже зручний для вирішення алгебраїчних рівнянь, які можна представити у вигляді (7). На відміну від загальних матричних методів TDMA вимагає машинної пам'яті і машинного часу, пропорційних N , а не N^2 або N^3 .

Нестационарна одновимірна теплопровідність.

Запишемо нестандартне одновимірне рівняння теплопровідності для зручності без джерелового члена і вважатимемо

$$\rho c \frac{\delta T}{\delta \tau} = \frac{\delta}{\delta x} \left(\lambda \frac{\delta T}{\delta x} \right) \quad (12)$$

Оскільки час – однонаправлена координата, рішення отримаємо, просуваючись в часі від заданого початкового розподілу температури. Точка відліку, на типовому часовому кроці по заданих значеннях T у вузлових

точках для часу τ потрібно визначити \mathbf{T} для часу $\tau + \Delta\tau$. Старі (задані) значення \mathbf{T} у вузлових точках позначимо T_p^0, T_E^0, T_w^0 , а нові (невідомі) значення для часу $\tau + \Delta\tau - T_p^1, T_E^1, T_w^1$.

Дискретний аналог отримаємо шляхом інтеграції рівняння (12) по контрольних об'єму, показаному на рис. 3 (шаблон для одновимірного завдання) і по часовому інтервалу від τ до $\tau + \Delta\tau$:

$$\rho c \int_w^e \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \frac{\delta T}{\delta \tau} d\tau dx = \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w^e \frac{\delta}{\delta x} \left(\lambda \frac{\delta T}{\delta x} \right) dx d\tau \quad (13)$$

Для представлення члена передбачимо, що значення \mathbf{T} у вузловій точці поширене на весь контрольний об'єм, тоді

$$\rho c \int_w^e \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \frac{\delta T}{\delta \tau} d\tau dx = \rho c \Delta x (T_p^1 - T_p^0) \quad (14)$$

Слідуючи способу апроксимації члена в стаціонарному випадку, отримуємо

$$\rho c \Delta x (T_p^1 - T_p^0) = \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \left[\frac{\lambda_e (T_E - T_p)}{(\delta x)_e} - \frac{\lambda_w (T_p - T_w)}{(\delta x)_w} \right] d\tau \quad (15)$$

На даному етапі необхідно ввести припущення відносно зміни в часі від τ до $\tau + \Delta\tau$ температур T_p, T_E, T_w . Можливі різні припущення і одне з них має наступний вигляд:

$$\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} T_p d\tau = [f T_p^1 + (1-f) T_p^0] \Delta\tau, \quad (16)$$

де f – ваговий коефіцієнт, що змінюється від 0 до 1 . Використовуючи аналогічні співвідношення для інтегралів від T_E до T_w з рівняння (15) знаходимо:

$$\rho c \frac{\Delta x}{\Delta \tau} (T_p^1 - T_p^0) = f \left[\frac{\lambda_e (T_E^1 - T_p^1)}{(\delta x)_e} - \frac{\lambda_w (T_E^1 - T_p^1)}{(\delta x)_w} \right] + (1-f) \left[\frac{\lambda_e (T_E^0 - T_p^0)}{(\delta x)_e} - \frac{\lambda_w (T_E^0 - T_p^0)}{(\delta x)_w} \right]$$

Перетворюючи цей вираз, опустимо індекс 1 і запам'ятаємо, що T_p, T_E, T_w - нові значення \mathbf{T} для часу $\tau + \Delta \tau$:

$$a_p T_p = a_E [f T_E + (1-f) T_E^0] + a_w [f T_w + (1-f) T_w^0] + [a_p^0 - (1-f) a_E - (1-f) a_w] T_p^0, \quad (17)$$

де $a_E = \frac{\lambda_e}{(\delta x)_e}; a_w = \frac{\lambda_w}{(\delta x)_w}; a_p^0 = \rho c \frac{\Delta x}{\Delta \tau}; a_p = f a_E + f a_w + a_p^0$.

Явна схема, схема Кранка-Ніколсона і повністю неявна схема.

Для певних конкретних значень \mathbf{f} отримаємо різні схеми: для $\mathbf{f}=0$ отримуємо явну схему, для $\mathbf{f}=0,5$ – схему Кранка-Ніколсона і для $\mathbf{f}=1,0$ – повністю неявну схему для параболічних диференціальних рівнянь. Різні значення \mathbf{f} можна інтерпретувати як характеристику зміни \mathbf{T}_p від τ (рис.1.7).

Явна схема по суті передбачає, що старе значення T_p^0 існує в межах всього часового кроку, за винятком точки $\tau + \Delta \tau$. Неявна схема передбачає, що в момент τ T_p різко змінюється від T_p^0 до T_p^1 , а потім залишається рівною на всьому часовому кроці.

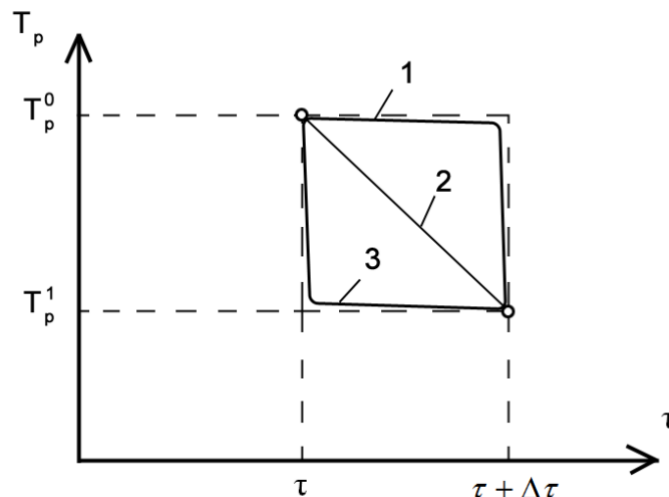


Рисунок 1.7 - Зміна температури в часі для:

1-явної схеми; 2- схеми Кранка-Ніколсона; 3- повністю неявної схеми

Схема Кранка-Ніколсона передбачає лінійну зміну T_p . Для явної схеми ($f=0$) рівняння (17) має вигляд:

$$a_p T_p = a_E T_E^0 + a_w T_w^0 + (a_p^0 - a_E - a_w) T_p^0$$

Видно що T_p є явно певною температурою на перед часовому шарі, що йде, і не залежить від T_E і T_w . Схема зручна, але має ряд обмежень. За правилом про позитивні коефіцієнти (Правило 2), розглядаючи коефіцієнт T_p^0 , маємо:

$$a_p^0 - a_E - a_w > 0 \Rightarrow a_p^0 > a_E + a_w$$

якщо

$$\lambda = \text{const і } \Delta x = (\delta x)_e = (\delta x)_w,$$

отримаємо

$$\frac{\rho c \Delta x}{\Delta \tau} > \frac{\lambda}{\Delta x} + \frac{\lambda}{\Delta x} \Rightarrow \Delta \tau < \frac{\rho c (\Delta x)^2}{2} \quad (18).$$

Якщо це рівняння порушиться, то можуть виникнути фізично неправдоподібні результати, оскільки з від'ємності коефіцієнтів виходить, що збільшення T_p^0 призводить до зниження T_p^1 . Рівняння (18) – критерій стійкості явної схеми.

У схемі Кранка-Ніколсона при великих $\Delta \tau$ також коефіцієнт при T_p^0 може стати негативним, що приведе до фізично неправдоподібних рішень. До того ж дискретний аналог для цієї схеми громіздкий. Тому перевага віддається повністю неявній схемі, оскільки лише при $f=1$ коефіцієнт при від'ємний.

Запишемо рівняння (17) в повністю неявному вигляді (з источниковим членом, який приклад що зменшується за часом):

$$a_p T_p = a_E T_E + a_w T_w + b$$

$$\text{де } a_E = \frac{\lambda_e}{(\delta x)_e}; a_w = \frac{\lambda_w}{(\delta x)_w}; a_p^0 = \rho c \frac{\Delta x}{\Delta \tau}; b = S_p \Delta x + a_p^0 T_p^0, a_p = a_E + a_w + a_p^0 - S_p \Delta x.$$

Видно, що при $\tau \rightarrow \infty$ маємо стаціонарний дискретний аналог.

Основним принципом повністю неявної схеми є те, що в межах всього кроку за часом температура приймається рівною новому значенню T_p . Якщо λ залежить від T , він повинен перераховуватися через T_p в ітераційному процесі так само, як і в стаціонарному завданні. Інші моменти стаціонарного завдання також застосовні і для нестаціонарної.

Дво- і тривимірні завдання теплопровідності.

Дискретний аналог для двох вимірів.

Частина двовимірної сітки показана на рисунок 1.8.

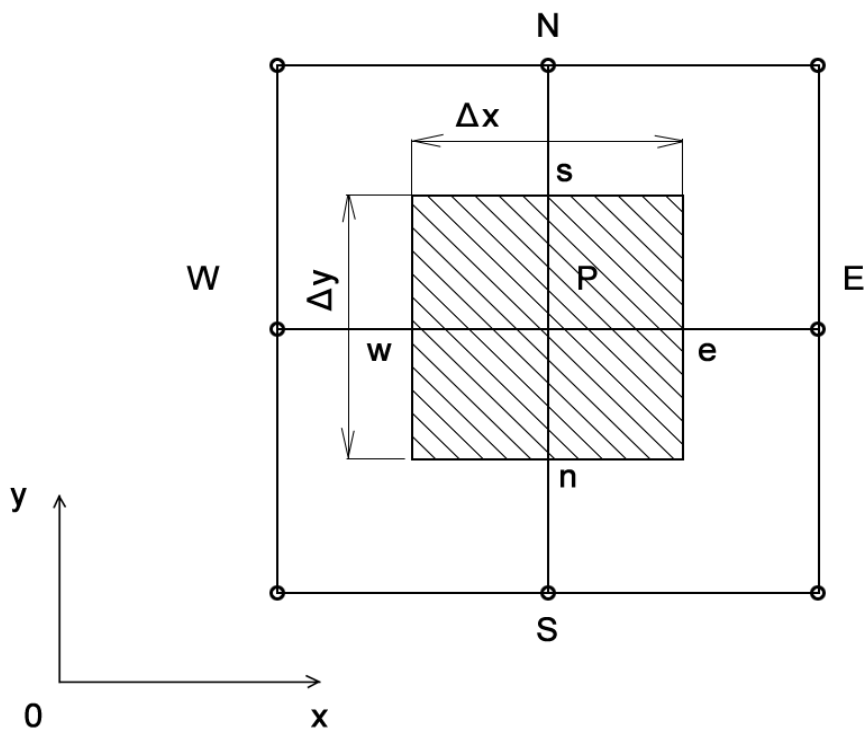


Рисунок 1.8 - Контрольний об'єм (заштрихована область для двовимірного випадку).

Раніше було показано, як розрахувати тепловий потік на межі контрольного об'єму між точками P і E . Передбачимо, що набутого значення q_e поширене на всю поверхню площею $\Delta y * 1$. Інтенсивність перенесення теплоти через інші поверхні контрольного об'єму можна визначити так само.

В цьому випадку диференціальне рівняння

$$\rho c \frac{\delta T}{\delta \tau} = \frac{\delta}{\delta x} \left(\lambda \frac{\delta T}{\delta x} \right) + \frac{\delta}{\delta y} \left(\lambda \frac{\delta T}{\delta y} \right) + S$$

можна швидко привести до вигляду

$$a_p T_p = a_E T_E + a_w T_w + a_N T_N + a_S T_S + b$$

де $a_E = \frac{\lambda_e \Delta y}{(\delta x)_e}; a_w = \frac{\lambda_w \Delta y}{(\delta x)_w}; a_N = \frac{\lambda_N \Delta x}{(\delta y)_N}; a_S = \frac{\lambda_S \Delta x}{(\delta y)_S}; a_p^0 = \rho c \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta \tau}; b = S_p \Delta x \Delta y + a_p^0 T_p^0,$
 $a_p = a_E + a_w + a_N + a_S + a_p^0 - S_p \Delta x \Delta y$

Добуток $\Delta x \Delta y$ є контрольним об'ємом.

Дискретний аналог трьох вимірів.

Для побудови тривимірної конфігурації додамо ще точки **T** і **B** (вгору і вниз) на осі **Z**. Дискретний аналог має вигляд:

$$a_p T_p = a_E T_E + a_w T_w + a_N T_N + a_S T_S + a_T T_T + a_B T_B + b$$

де $a_E = \frac{\lambda_e \Delta y \Delta z}{(\delta x)_e}; a_w = \frac{\lambda_w \Delta y \Delta z}{(\delta x)_w}; a_N = \frac{\lambda_N \Delta z \Delta x}{(\delta y)_N};$
 $a_S = \frac{\lambda_S \Delta z \Delta x}{(\delta y)_S}; a_T = \frac{\lambda_t \Delta x \Delta y}{(\delta z)_t}; a_B = \frac{\lambda_b \Delta x \Delta y}{(\delta z)_b};$
 $a_p^0 = \rho c \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta \tau}; b = S_p \Delta x \Delta y \Delta z + a_p^0 T_p^0,$
 $a_p = a_E + a_w + a_N + a_S + a_T + a_B + a_p^0 - S_p \Delta x \Delta y \Delta z$

Фізичний сенс коефіцієнтів дискретного аналога. Коефіцієнти $a_E, a_w, a_N, a_S, a_T, a_B$ є провідністю між точкою **P** і відповідними їй сусідніми точками. Член $a_p^0 T_p^0$ - внутрішня енергія (віднесена до $\Delta \tau$), що міститься в

контрольному об'ємі в момент τ . Постійний член \mathbf{b} складається з цієї внутрішньої енергії і потужності тепловиділення в контрольному об'ємі, \mathbf{b} що є результатом дії джерела \mathbf{S}_c . Коефіцієнт \mathbf{a}_p в центральній точці є сумою всіх сусідніх коефіцієнтів (включаючи a_p^0 , який теж є коефіцієнтом сусідньої за часом точки) і містить вклад від лінеаризованого джерелового члена.

Багатовимірні дискретні аналоги здобуваються за допомогою прямого поширення результатів, отриманих при розгляді одновимірного завдання. Єдиною процедурою, яка не може бути безпосередньо поширена на багатовимірне завдання, є метод прогону. Прямі методи вирішення алгебраїчних рівнянь (без ітерацій) стають складними і вимагають набагато більше машинної пам'яті і часу. Альтернатива прямим методам – ітераційні.

Метод Гауса-Зейделя (Г-З).

Полягає в почерговому зверненні до сіткових вузлів в певному порядку. У міру звернення до вузлових точок значення температури в пам'яті машини в розрахованій точці замінюється на нове, при цьому у всіх сусідніх точках температура має значення останнє в ітераційному сенсі. Метод простий, але не завжди сходиться.

Приклад 1:

$$T_1 = 0.4T_2 + 0.2$$

$$T_2 = T_1 + 1$$

	1	2	3			...	∞
T1	0	0.2	0.68	0.872	0.949	0.980	1.0
T2	0	1.2	1.68	1.872	1.949	1.980	2.0

Приклад 2:

$$T_1 = T_2 - 1$$

$$T_2 = 2.5T_1 - 0.5$$

T1	0	-1	-4	-11.5	...
T2	0	-3	-10.5	-29.25	...

Метод змінних напрямів.

Метод змінних напрямів є комбінацією методу прогону (ТДМА), використовуваного для одновимірних завдань, і методу Гауса-Зейделя. Виберемо сіткову лінію, тобто лінію, що складається з вузлових точок, наприклад, у напрямі осі Y (рис.1.9). Передбачимо, що відомі значення температур на сусідніх вузлових лініях, і вирішимо одновимірне завдання уздовж вибраної лінії. При цьому напрям можна міняти, тобто узяти уздовж вісі X . Інформація з границь області відразу переноситься у всередину. За рахунок цього збіжність методу висока.

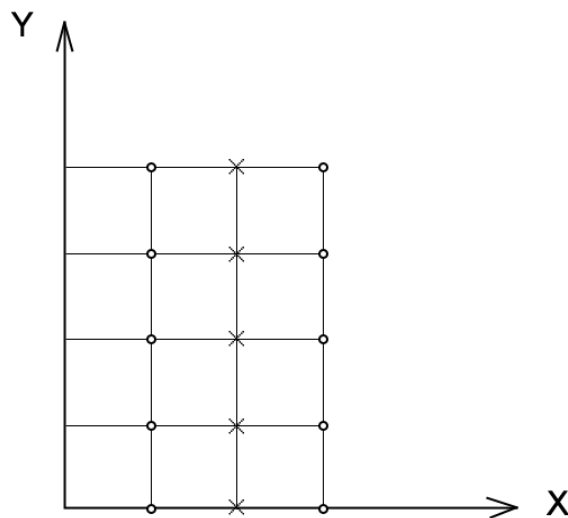


Рисунок 1.9 - Ілюстрація методу змінних напрямів

Розташування граней контрольного об'єму.

Виведення дискретного аналога в загальному вигляді зроблене так, що він може бути застосований для будь-якого випадку розташування граней контрольного об'єму. З безлічі можливих варіантів розглянемо два альтернативних.

Спосіб 1. Грані проводяться посередині між вузловими точками. Якщо сітка нерівномірна, то вузлова точка не є геометричним центром контрольного об'єму (рис. 1.10).

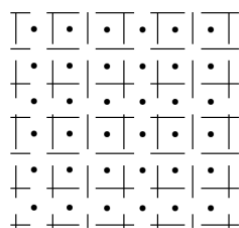


Рисунок 1.10 - Розташування граней посередині між вузловими точками

Спосіб 2. Спочатку наносяться грані контрольного об'єму, а потім визначаються вузлові точки як геометричний центр контрольного об'єму (рис. 1.11). Якщо сітка нерівномірна, то грань контрольного об'єму лежить не посередині між вузловими точками. Якщо сітка рівномірна, то обоє способу рівнозначні за винятком граничних областей.

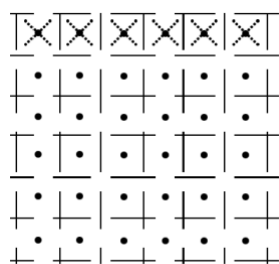


Рисунок 1.11 - Розташування граней для вузлових точок, як геометричних центрів контрольного об'єму

Недоліком 2-го способу є погрішність при розрахунку теплових потоків, оскільки ми використовуємо для цього лінійний графік температури.

Для 1-го способу недоліком є те, що значення у вузловій точці не можна вважати характерним для контрольного об'єму, що внесе погрішність, якщо $\lambda_{\text{ср}}$ залежить від температури.

Основною перевагою 2-го способу є наочність його представлення. Оскільки контрольний об'єм є основною одиницею даного методу, зручніше спочатку відобразити грані контрольного об'єму, а потім розташувати вузлові точки. Наприклад, для твердих тіл грань необхідно провести в площині їх з'єднання. Аналогічно можуть бути здолані розриви в граничних умовах:

грані контрольного об'єму розташовуються так, щоб в межах контрольного об'єму не було розривів.

Розглянемо розташування контрольного об'єму поблизу границь розрахункової області (рис. 1.12).

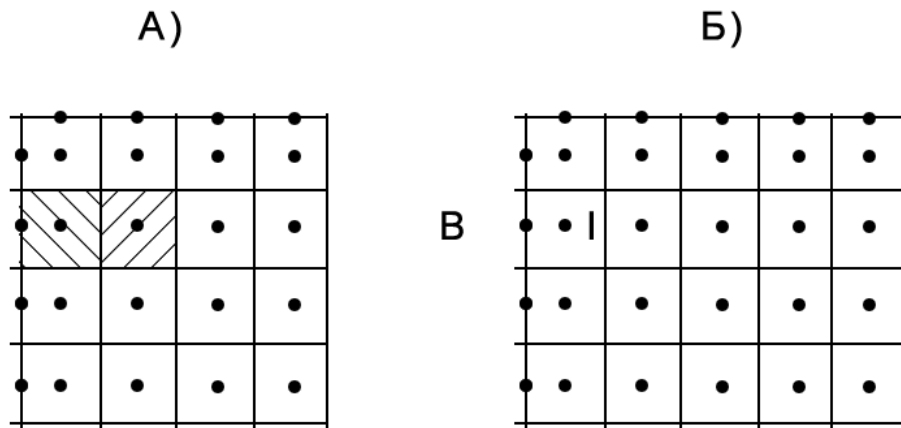


Рисунок 1.12 - Розташування контрольного об'єму поблизу границь розрахункової області

Для способу 1 (рис. 1.12А) маємо на кордоні половинний контрольний об'єм.

Для способу 2 (рис. 1.12Б) зручніше запам'ятати контрольний об'єм. Розташовуємо граничні вузлові точки на поверхнях, що примикають до граней контрольного об'єму. Типова грань i розташована не посередині між вузловими точками: граничною точкою \mathbf{B} і точкою \mathbf{I} , а проходить через точку \mathbf{B} . Якщо передбачити, що контрольний об'єм нульової товщини примикає до точки \mathbf{B} , то розташування поверхні i по відношенню до точок \mathbf{B} і \mathbf{I} відповідатиме основній властивості способу 2. В цьому випадку немає необхідності для дискретного аналогу для граничного контрольного об'єму, оскільки граничні умови можуть використовуватися безпосередньо на межі i .

Метод джерел. Миттєве точечне джерело.

У початковий момент часу $\tau = 0$ в необмеженому тілі при початковій нульовій температурі $\mathbf{T}_0=0$ в нескінченно малий об'єм $\Delta x \Delta y \Delta z = dx dy dz$ поміщена кількість теплоти \mathbf{Q} (Дж). Теплофізичні властивості тіла постійні протягом всього процесу і не залежать від температури. Поєднаємо з

елементом об'єму початок системи координат по **XYZ**. Тоді процес поширення тепла миттєвого точкового джерела **Q** виразиться в рівняння

$$T(\tau, R) = \frac{Q}{c\rho(4\pi\alpha\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{R^2}{4\alpha\tau}\right) \quad (19)$$

де $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ - сферичний радіус-вектор відстані від точки 0 до точки з координатами **xuz**.

Миттєве лінійне джерело теплоти.

Необмежене теплопровідне тіло знаходиться при температурі $T_0=0$ в початковий момент часу $\tau=0$ в лінійному елементі об'єму, що представляє безконечну призму з нескінченно малою підставою **dx dy** і з віссю, співпадаючою з віссю **OZ** на якій зосереджена теплота з рівномірною лінійною інтенсивністю **Q₁** (Дж/м). Процес поширення теплоти миттєвого лінійного джерела виходить накладенням процесу (19) безконечного числа точок і джерел, розташованих уздовж осі **OZ** і вносячих елементарні кількості теплоти $Q=Q_1 dz$:

$$T(\tau, R) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q}{c\rho(4\pi\alpha\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{R^2}{4\alpha\tau}\right) dz = \frac{Q}{c\rho(4\pi\alpha\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4\alpha\tau}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{4\alpha\tau}\right) dz$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{4\alpha\tau}\right) dz = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{z}{4\alpha\tau}\right)^2 dz \frac{\sqrt{4\alpha\tau}}{\sqrt{4\alpha\tau}} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{z}{4\alpha\tau}\right)^2 \frac{dz}{\sqrt{4\alpha\tau}} \sqrt{4\alpha\tau} = \sqrt{4\alpha\tau} \Rightarrow \quad (20)$$

$$T(\tau, R) = \frac{Q}{c\rho 4\pi\alpha\tau} \exp\left(-\frac{r^2}{4\alpha\tau}\right)$$

де $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Температурне поле є плоскорадіальним, тобто залежить лише від радіус-вектору **r**. В усіх точках **r** температура однакова.

Миттєве плоске джерело.

У безкінечному теплопровідному тілі миттєве плоске джерело вноситься до початкового моменту часу $\tau = 0$ в плоскому елементі об'єму, що є безкінечним шаром товщиною dx і співпадаючий з площиною YOZ кількість теплоти Q_2 (Дж/м²), рівномірно розподілені за площею шару. Розрахункову формулу отримуємо, інтегруючи в безкінечних межах (19) по $dydz$:

$$T(\tau, R) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_2}{c\rho(4\pi\alpha\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{R^2}{4\alpha\tau}\right) dydz = \frac{Q_2}{c\rho(4\pi\alpha\tau)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha\tau}\right) \quad (21)$$

де $r = \sqrt{x^2}$

Розподілені і безперервнодіючі джерела.

Джерела тепла, розподілені будь-яким чином по поверхні або за об'ємом тіла, можна представити як сукупність зосереджених точкових, лінійних або плоских джерел, що безперервно діють. Також можна представити як сукупність миттєвих джерел, розподілених відповідним чином по проміжку часу дії джерела. Процеси поширення тепла безперервнодіючими і розподіленими джерелами, описуються виразами, отримуваними накладеннями елементарних рішень.

Принцип накладення. У тілі діє ряд зосереджених джерел. Вважаємо, що нелінійність відсутня. Як відомо, сума будь-якого числа приватних вирішень лінійного диференціального рівняння також задовольняє цьому рівнянню, тому теплота кожного джерела поширюється по тілу незалежно від дії інших джерел, тобто так, як теплота від одиночного джерела. Принцип накладення полягає в тому, що температура в процесі поширення тепла при спільній дії ряду джерел розглядається як сума температур від дії кожного джерела окремо.

Вирівнювання початкового розподілу температури.

Початковий розподіл температури $T(x, y, z, 0) = T_0(x, y, z)$. Цю умову можна розглядати як сукупність миттєвих елементарних джерел, розподілених відповідним чином за об'ємом тіла

$$dQ = \rho dV_c T : dQ(x, y, z) = c\rho T_0(x', y', z') dx' dy' dz' \quad (22)$$

де dQ – кількість тепла, зосереджена в елементі об'єму необмеженого тіла в точки x', y', z' .

Його розглядатимемо як миттєве джерело, прикладене в початковий момент часу $\tau = 0$ (рис. 1.13). Це елементарна кількість тепла поширюється відповідно до рівняння (19):

$$dT = \frac{dQ}{c\rho(4\pi\alpha\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{R^2}{4\alpha\tau}\right) \quad (23)$$

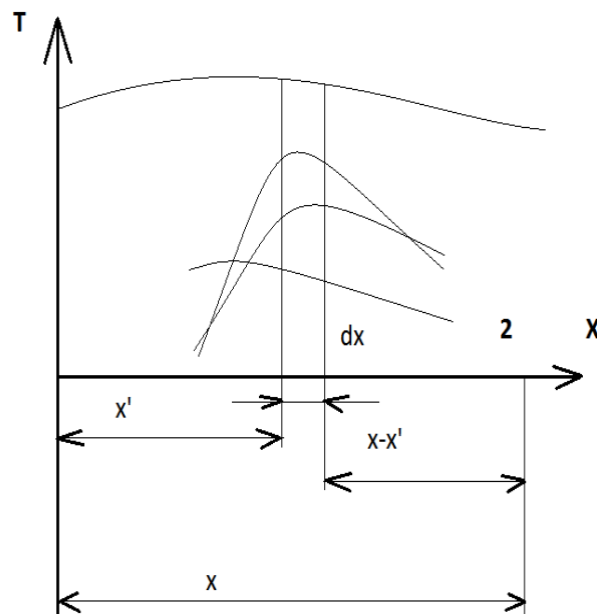


Рисунок 1.13 - Вирівнювання початкового розподілу температури

Квадрат відстані від джерела в точці $x'y'z'$ до точки тіла xuz виразиться

$$R'^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$$

За принципом накладення температура $T(x,y,z)$ в процесі поширення тепла від початкового розподілу $T_0(x',y',z')$ дорівнює сумі температур від всіх елементарних кількостей тепла dQ , розподілених за об'ємом тіла V відповідно до рівняння

$$T(x, y, z, \tau) = \int dT \quad (24)$$

Елементарні кількості тепла dQ підсумовуються по трьох просторових координатах x' , y' і z' , що визначають початкову температуру T_0 в межах від $(-\infty)$ до $(+\infty)$ по кожній з них. Підставляючи (22) і (23) в (24), отримаємо

$$T(x, y, z) = \frac{T(x', y', z')}{(4\pi\alpha\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left[-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}{4\alpha\tau}\right] dx' dy' dz'$$

Так само виражаються процеси поширення теплоти від початкового плоского розподілу температур $T_0(xy)$ і початкового лінійного розподілу $T_0(z)$.

Процес поширення тепла в обмеженому тілі.

У необмеженому тілі теплота поширюється вільно відповідно до закону теплопровідності. На поверхні обмеженого тіла задаються певні умови теплообміну з довкіллям, що спотворюють процес поширення тепла. Цей процес можна представити як частину процесу відповідної області необмеженого тіла, в якому введені додаткові джерела теплоти, що надають на процес розповсюдження тепла таку ж дію, як і умови в граничних площинах (рис.1.14).

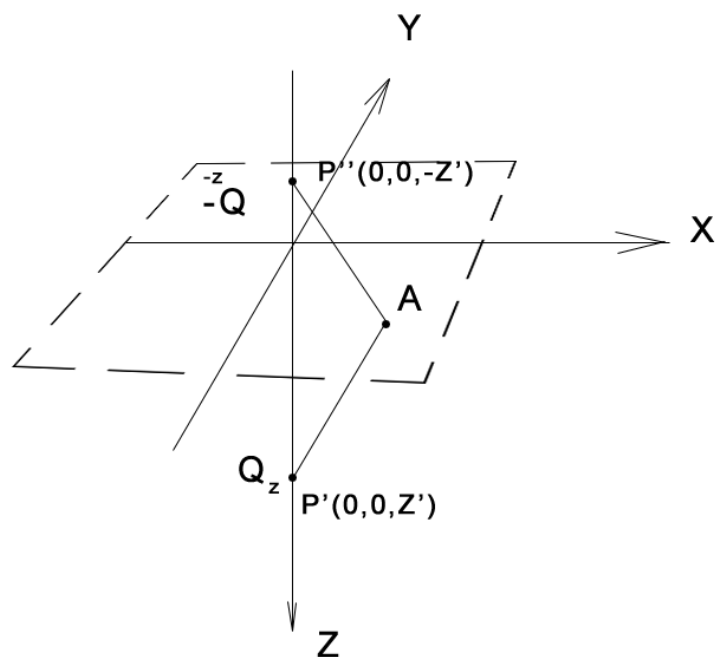


Рисунок 1.14 - Процес розповсюдження тепла в обмеженому тілі.

Граничні умови 1-го роду, ізотермічна границя: напівбезкінечне тіло в необмеженому просторі по одну сторону від площини z $T_n=0$, на границі ізотермічна умова $T_{z=0}=0$. У довільній крапці $P'(0;0;z')$ прикладене миттєве джерело теплоти Q ; у необмеженому тілі процес описується рівнянням (19).

Ізотермічну умову шуканого процесу врахуємо, відкидаючи граничні умови і ввівши додаткове джерело теплоти, рівне по величині джерелу P' , але зворотнє по знаку (так званий стік тепла). Миттєвий стік ($\tau=0$) прикладений в точці $P''(0;0;-z')$, що представляє дзеркальне відображення в точці P' відносно граничної площини XOY . Вочевидь, що в будь-якій точці A площини XOY необмеженого тіла є площиною симетрії для точок P' і P'' . Температури від джерела і стоку буду рівні по величині, але зворотні по знаку, оскільки відстані r' і r'' від т.А до джерела і стоку рівні, тому при спільній дії джерела P' і стоку P'' температура в площині XOY буде у весь час процесу залишатися рівною 0 . Процес поширення теплоти запишеться таким чином:

$$T(x, y, z, \tau) = \frac{Q}{c\rho(4\pi\alpha\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4\alpha\tau}\right) \left[\exp\left(-\frac{(z'-z)^2}{4\alpha\tau}\right) - \exp\left(-\frac{(z'+z)^2}{4\alpha\tau}\right) \right]$$

Аналогічне вираження для граничних умов 2-го роду (адіабатні):
замість $-Q$ і $+Q$ для забезпечення адіабатних умов необхідно ввести
додаткове джерело теплоти в т. P'' . Взаємна дія цих джерел на точку, що
лежить в площині $XY=0$:

$$T(x, y, z, \tau) = \frac{Q}{c\rho(4\pi\alpha\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4\alpha\tau}\right) \left[\exp\left(-\frac{(z'-z)^2}{4\alpha\tau}\right) - \exp\left(-\frac{(z'+z)^2}{4\alpha\tau}\right) \right]$$

Якщо джерело на поверхні, то

$$T(x, y, z, \tau) = \frac{2Q}{c\rho(4\pi\alpha\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{r^2}{4\alpha\tau}\right), \text{ де } .$$

Забезпечення граничних умов на поверхні пластини.

Маємо пластину кінцевої товщини і необмежених розмірів; на поверхні
пластини адіабатні граничні умови (рис. 1.15). Хай в точці $P(0;0;z')$ діє
миттєве точкове джерело. Необхідно визначити температуру довільної точки
пластини.

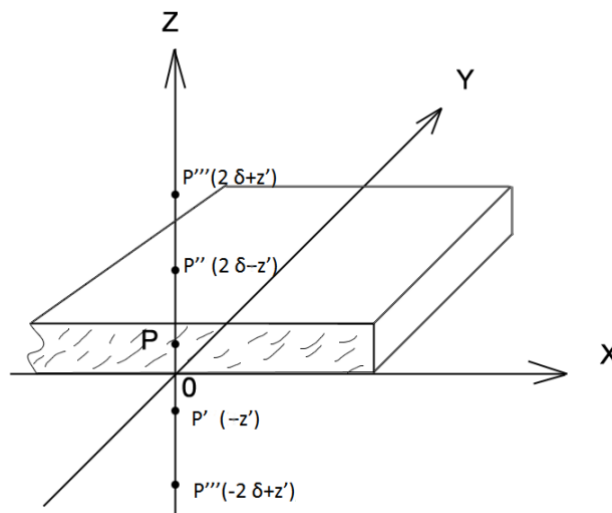


Рисунок 1.15 - Визначення температури довільної точки пластини

Задачу вирішуємо за принципом віддзеркалення. Це джерело
відбивається в площинах $z=0$ і $z=\delta$, де δ – товщина пластини, внаслідок чого
на осі OZ вводяться джерела в точках P' з координатою $(-z')$ і $P''(2\delta - z')$. Ці
відбиті джерела у свою чергу відбиваються в площинах $z=\delta$ і $z=0$, внаслідок
чого з'являються джерела $+Q$ в точках $P'''(2\delta + z')$ і $P''''(-2\delta + z')$.

Продовжуючи процес поперемінного віддзеркалення додаткових джерел в обох обмежувальних площинах, отримуємо по осі **OZ** два безкінечних ряда джерел **+Q** з аплікатами $(2n\delta + z')$ і $(2n\delta - z')$. Рівняння поширення теплоти запишеться

$$T(x, y, z, \tau) = \frac{2Q}{c\rho(4\pi\alpha\tau)^{\frac{3}{2}}} \left(\sum_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-R_n^2}{4\alpha\tau}} + e^{\frac{-R_n'^2}{4\alpha\tau}} \right),$$

де $R_n^2 = x^2 + y^2 + (z + 2n\delta + z')^2$; $R_n'^2 = x^2 + y^2 + (z + 2n\delta - z')^2$;

де **n** – цілі числа, включаючи **0**.

Температурне поле обмеженої по ширині пластини при нагріві змінними джерелами теплоти.

Прийmemo пластину, обмежену по вісі **OX** і необмежену по вісі **OY** (рис. 1.16). На поверхні діє джерело. Відстань від джерела до обмежуючих площин **I**₁ і **I**₂. Завдання вирішується методом віддзеркалення. Добудовуємо до необмеженої пластини, вводяться відбиті джерела.

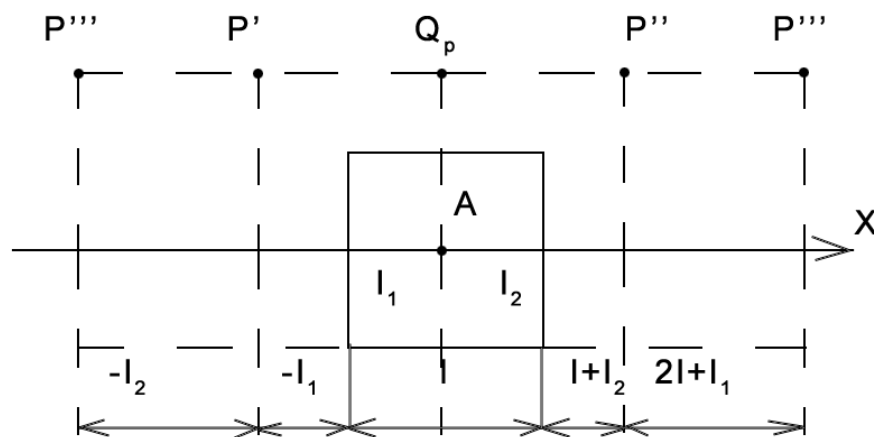


Рисунок 1.16 - Пластина, обмежена по вісі **OX** і необмежену по вісі **OY**

В результаті послідовного віддзеркалення отримуємо послідовність безкінечного числа джерел по горизонталі і підсумовуючи температурні поля від основного і всіх відбитих джерел в необмеженій пластині, визначаємо температуру в заданій точці. У багатьох теплотехнічних розрахунках тепловий потік є змінним в часі. Крім того може бути різний розподіл

питомого теплового потоку по координатах $q = q_0 \exp(-kx^2)$. При змінному в часі q розрахунок температурних полів по методу джерел виробляється з використанням принципу накладення (рис. 1.17).

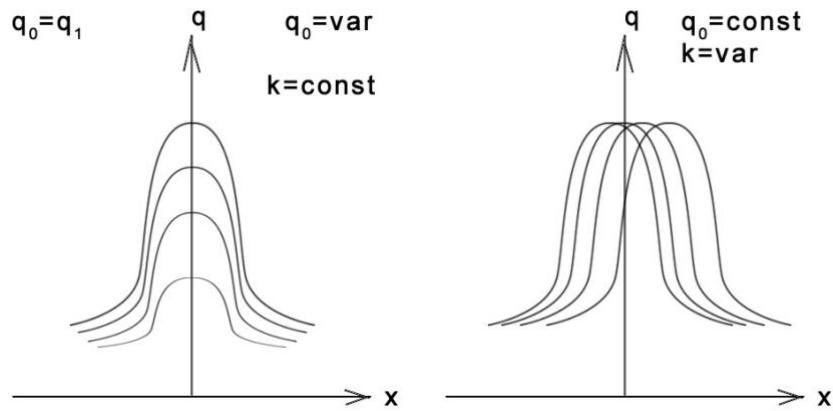


Рисунок 1.17 - Принцип накладення

Хай заданий характер розподілу потужності. Будуємо задану теплову дію змінних джерел. Представляємо як суму окремих джерел, що діють у відповідний час. Підсумовуванням температурних полів від трьох замінюючих джерел, що діють у відповідний час, отримуємо температурне поле від джерела змінної потужності.

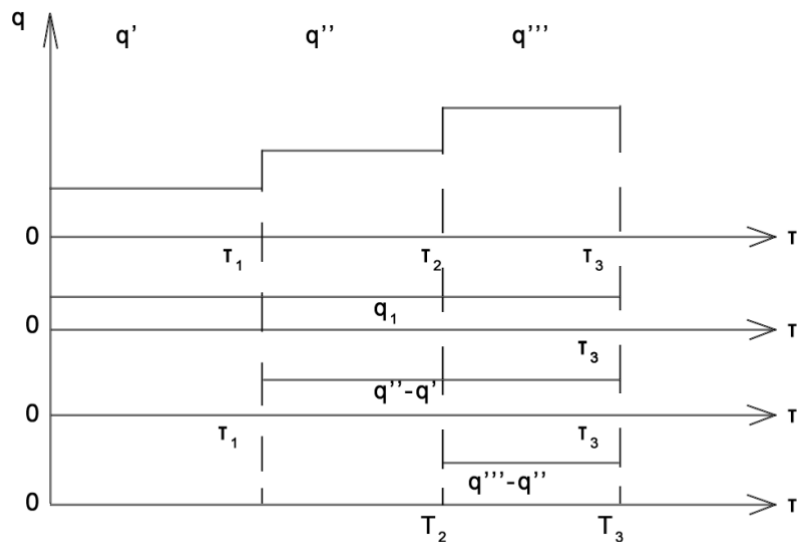


Рисунок 1.18 - Температурне поле від джерела змінної потужності при розподілі потужності та заданій тепловій дії змінних джерел

Метод розділення змінних.

Метод розділення змінних полягає в тому, що знаходиться частинне вирішення T_1 , що задовольняє диференціальному рівнянню теплопровідності і граничним умовам, а потім за принципом накладення складається ряд цих рішень:

$$T = C_1 T_1 + C_2 T_2 + \dots + C_n T_n \quad (25)$$

де C_n - коефіцієнти, знаходяться з початкових умов. Приватне вирішення T шукається у вигляді добутків двох функцій, одна з яких θ залежить від координат, інша v - лише від часу:

$$T = \theta(x, y, z)v(\tau); \quad \frac{\delta T}{\delta \tau} = a \nabla^2 T \quad (26);$$

$$\theta(x, y, z)v'(\tau) = v(\tau)a \nabla^2 T \theta(x, y, z) \quad (27);$$

$$\frac{v'(\tau)}{v(\tau)} = a \frac{\nabla^2 \theta(x, y, z)}{\theta(x, y, z)} = \text{const} \quad (28);$$

Рівність (28) повинна виконуватися для будь-яких значень τ і (x, y, z) , а це можливо лише тоді, коли ліва і права частини незмінні ($=\text{const}$).

Розглянемо їх окремо:

$$\frac{v'(\tau)}{v(\tau)} = D \quad (29)$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{d\tau} \frac{1}{v} = D \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int D d\tau \Rightarrow \ln v = D\tau \Rightarrow v = e^{D\tau} \quad (30)$$

$D > 0$, тоді $T \rightarrow \infty$. D не може бути більше 0, якщо менше 0 рівність $D = -a\mu^2$, а тоді рішення

$$v = e^{-a\mu^2 \tau} \quad (31).$$

Тепер розглянемо праву частину:

$$a \frac{\nabla^2 \theta(x, y, z)}{\theta(x, y, z)} = D \quad (32)$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \theta(x, y, z) = -\mu^2 \theta(x, y, z) \Rightarrow \nabla^2 \theta(x, y, z) + \mu^2 \theta(x, y, z) = 0 \quad (33)$$

А це - завдання Штурма-Ліувіля.

Рішення (9) називають власними функціями завдання, μ^2 - власна частина. Хай власна функція відома, тобто $\theta(x, y, z)$ знайдена, тоді приватне рішення запишеться у вигляді:

$$T = e^{-a\mu^2 \tau} \theta(x, y, z) c \quad (34).$$

Даючи постійним C і μ різні значення, отримаємо незліченну безліч частинних рішень. За принципом накладення загальне рішення дорівнюватиме сумі приватних рішень. Постійні μ набувають певних значень, які визначаються граничними умовами, а постійні C визначаються з початкових умов. Якщо завдання одновимірне, то отримуємо звичайне диференціальне рівняння 2-го порядку:

$$\frac{d^2 \theta(x)}{dx^2} + \mu^2 \theta(x) = 0.$$

Рішення знаходиться як сума 2-х частинних рішень:

$$\theta = \varphi(x, \mu) + \psi(x, \mu)$$

де φ, ψ - лінійно залежні функції.

Таким чином, перше частинне рішення можна записати:

$$T_1 = c_1 e^{-a\mu_1^2 \tau} \varphi(\mu_1 x) + D_1 e^{-a\mu_1^2 \tau} \psi(\mu_1 x),$$

а друге

$$T_2 = c_2 e^{-a\mu_2^2 \tau} \varphi(\mu_2 x) + D_2 e^{-a\mu_2^2 \tau} \psi(\mu_2 x).$$

Загальне рішення:

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-a\mu_n^2 \tau} \varphi(\mu_n x) + \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-a\mu_n^2 \tau} \psi(\mu_n x).$$

Операційний метод.

Розглянемо на прикладі диференціальне рівняння теплопровідності при використанні внутрішнього джерела теплоти:

$$\frac{dT(x, y, z, \tau)}{d\tau} = a \nabla^2 T(x, y, z, \tau) + \frac{1}{c\rho} W(x, y, z, \tau) \quad (35)$$

Застосуємо перетворення Лапласа до $\tau = 0$ - початковому розподілу температури. Відомо, що $T(x, y, z, 0) = U(x, y, z)$. Введемо наступні позначення

$$L[T(x, y, z, \tau)] = \int_0^{\infty} T(x, y, z, \tau) e^{-s\tau} d\tau = \overset{\infty}{T}(x, y, z, S) \quad (36)$$

де $\overset{\infty}{T}(x, y, z, S)$ - зображення оригінала.

Застосуємо (36) до (35):

$$L\left[\frac{dT(x, y, z, \tau)}{d\tau}\right] = aL[\nabla^2 T(x, y, z, \tau)] + \frac{1}{c\rho} L[W(x, y, z, \tau)] \quad (37).$$

Оскільки перетворення виробляємо по змінній τ , то зображення похідної по координатах рівно похідній від зображення

$$L[\nabla^2 T(x, y, z, \tau)] = \nabla^2 L[T(x, y, z, \tau)] = \nabla^2 \overset{\infty}{T}(x, y, z, S).$$

По основній теоремі про зображення зображення від похідної за часом рівно похідній від зображення мінус значення функції при $\tau = 0$, розділеному на S :

$$L\left[\frac{\delta T(x, y, z, \tau)}{\delta \tau}\right] = \frac{\delta T(x, y, z, S)}{\delta S} - \frac{u(x, y, z)}{S}$$

Запишемо рівняння (37), заздалегідь домножив на S :

$$S \overset{\infty}{T}(x, y, z, S) - u(x, y, z) - a \nabla^2 \overset{\infty}{T}(x, y, z, S) - \frac{1}{c\rho} \overset{\infty}{W}(x, y, z, S) = 0 \quad (38)$$

Хай відоме вирішення рівняння (38):

$$\overset{\infty}{T}(x, y, z, S) = F(x, y, z, S)$$

Для того, щоб знайти рішення для оригінала функції T , необхідно скористатися зворотним перетворенням Лапласа:

$$T(x, y, z, \tau) = L^{-1}[F(x, y, z, S)] = f(x, y, z, \tau) \quad (39)$$

У загальному випадку зворотне перетворення шляхом інтеграції в комплексній площині, але в більшості випадків можна обмежитися таблицею зображень відомих функцій. Якщо рішення (38) викликає затруднення, то треба зробити перетворення по координатах x, y, z .

Приклад.

Дано напівобмежене тіло при $T=T_0$ – довгий стержень, бічна поверхня якого теплоізована. Обмежуюча поверхня (торець) нагрівається постійним тепловим потоком $q_s = \text{const}$. Зміна температури відбувається в

одному напрямі. Знайти розподіл температури по даному напрямку у будь-який момент часу

$$\frac{\delta T(x, \tau)}{\delta \tau} = a \frac{\delta^2 T(x, \tau)}{\delta x^2} \quad (40)$$

Граничні умови:

за часом:

$$T(x, 0) = T_0 = \text{const} \quad (41);$$

по координатах:

$$\lambda \frac{\delta T(0, \tau)}{\delta x} + q_s = 0 \quad (41);$$

$$T(\infty; \tau) = T_0 \quad (42);$$

$$\frac{\delta T(\infty, \tau)}{\delta x} = 0 \quad (43);$$

$$S \overset{\infty}{T}(x, S) - T_0 = a \frac{\delta^2 \overset{\infty}{T}}{\delta x^2} = 0 \quad (44).$$

Отримаємо звичайне диференціальне рівняння:

$$\overset{\infty}{T}'' - \frac{S}{a} \overset{\infty}{T} + \frac{1}{a} T_0 = 0 \Rightarrow \overset{\infty}{T}'' - \frac{S}{a} (\overset{\infty}{T} - \frac{T_0}{S}) = 0 \quad (45).$$

Загальне рішення для зображень

$$\overset{\infty}{T} - \frac{T_0}{S} = A_1 e^{\sqrt{\frac{S}{a}} x} + B_1 e^{-\sqrt{\frac{S}{a}} x} \quad (46).$$

Граничні умови (41) і (43) для зображень можна записати

$$\lambda T'(0, S) + \frac{q_c}{S} = 0 \quad (47);$$

$$T(\infty, S) = 0 \quad (48).$$

З (48), оскільки при $x \rightarrow \infty$ температурний градієнт прагне до $\mathbf{0}$, витікає, що:

$$0 = \sqrt{\frac{S}{a}} A_1 e^{\sqrt{\frac{S}{a}} x} - \sqrt{\frac{S}{a}} B_1 e^{-\sqrt{\frac{S}{a}} x},$$

тобто при $x \rightarrow \infty$ $A_1 = 0$; тоді рівняння (46) має вигляд:

$$T - \frac{T_0}{S} = B_1 e^{-\sqrt{\frac{S}{a}} x}.$$

Постійну B_1 знаходимо з (47):

$$\lambda \left(-\sqrt{\frac{S}{A}}\right) B_1 e^{-\sqrt{\frac{S}{A}} 0} + \frac{q_s}{S} = 0 \Rightarrow B_1 = \sqrt{a} \frac{q_s}{\lambda S^{3/2}}.$$

Рішення (46) набирає вигляду рішення в області зображення:

$$T - \frac{T_0}{S} = \sqrt{a} \frac{q_s}{\lambda S^{3/2}} e^{-\sqrt{\frac{S}{a}} x}.$$

Скористаємося таблицею зображень

$$L^{-1}\left[\frac{1}{S^{i+\frac{1}{2}n}} e^{-b\sqrt{S}}\right] = (4\tau)^{\frac{n}{2}} i^n \operatorname{erfc} \frac{k}{2\sqrt{\tau}}. \quad T = T_0 = \sqrt{4\tau} i \operatorname{erfc} \frac{x}{\sqrt{a4a\tau}}.$$

Деякі формули пов'язані з інтегралом помилок Гауса:

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx;$$

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erfc}^0(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Cos і **Sin** перетворення Фур'є:

$$\tilde{T}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} T(x) \cos(\alpha x) dx \quad \text{перетворення Фур'є} \quad \tilde{T}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} T(\alpha) \cos(\alpha x) d\alpha ;$$

$$\tilde{T}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} T(x) \sin(\alpha x) dx \quad \text{перетворення Фур'є} \quad \tilde{T}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} T(\alpha) \sin(\alpha x) d\alpha .$$