Загальна постановка задачі лінійного програмування та її особливості

Лінійне програмування – це наука про методи дослідження та знаходження найбільших та найменших значень лінійної функції, на змінні якої покладено лінійні обмеження.

Загальну задачу лінійного програмування (ЗЛП) визначають наступним чином:

Потрібно знайти такий план $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_j^*, \ldots, x_n^*)$, *за якого досягається максимум (мінімум) функції*

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j + \ldots + c_nx_n \to \max(\min) \qquad (1)$$

і який задовольняє системі лінійних обмежень

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n \{\le, =, \ge\} b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n \{\le, =, \ge\} b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n \{\le, =, \ge\} b_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n \{\le, =, \ge\} b_m \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_j \ge 0, \; j = \overline{1,n} \qquad (3)$$

Розв’язок x^* називається ***розв’язком*** задачі або оптимальним планом.

Функція $F(x)$ називається ***цільовою функцією***, яка відображає деякий економічний показник, за яким обирається найкращий план.

Система обмежень (2)-(3) визначає множину точок, яку називають ***множиною припустимих розв’язків (МПР)***

Вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_n)$, координати якого задовольняють системі обмежень (2)-(3), називають **припустимим розв'язком ЗЛП.**

Таким чином, ***множину припустимих розв'язків*** (МДР) ЗЛП утворює сукупність усіх припустимих розв'язків (планів) ЗЛП.

x^* – це ***найкращий план*** з множини припустимих розв'язків ***з точки зору цільової функції*** $F(x)$.

Форми представлення ЗЛП

Задачу лінійного програмування (ЗЛП) представляють у різних формах: у вигляді ***сум, векторній та матричній:***

ЗЛП зручно записувати за допомогою **знака суми**. Вирази (1)-(3) можна подати, відповідно, так:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max\ (\min), \qquad (4)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \{\geq, =, \leq\} b_i \quad (i = \overline{1,m}), \qquad (5)$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,n}). \qquad (6)$$

Матрична форма запису ЗЛП

$$F = CX^T \to \max\ (\min), \qquad (7)$$

$$AX^T \{\le, =, \ge\} B, \qquad (8)$$

$$X \ge 0. \qquad (9)$$

де:

$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ є матрицею коефіцієнтів при змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$;

$X^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ - матриця-стовпець змінних;

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ - матриця-стовпець вільних членів;

$C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ - матриця-рядок коефіцієнтів при змінних у цільовій функції (1).

Векторна форма запису ЗЛП

$$F = (C, X) \rightarrow \max\ (\min) \tag{10}$$

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_n x_n \{\leq, =, \geq\} B\,, \tag{11}$$

$$X \geq 0. \tag{12}$$

де

$X = (x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$ - вектор змінних,

$C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ - вектор коефіцієнтів при змінних у цільовій функції (1)

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{m2} \end{pmatrix},\ \ldots,\ A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

2. ***Канонічна форма ЗЛП***

Вважається, що ЗЛП задано у канонічній формі, якщо виконуються наступні ***вимоги****:*

1). Цільова функція $F(x)$ прагне до мінімуму: $F(x) \to \min$

2). Всі обмеження системи (2) мають бути рівностями.

3). На всі змінні задачі накладаються вимоги невід'ємності.

Тобто ЗЛП у канонічній формі має наступний вигляд:

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, n} \end{cases}$$

Приведення ЗЛП до канонічної форми:

1. Якщо $F(x) \to \max$, то вводять функцію $F'(x) = -F(x) \to \min$

2. Всі обмеження в системі повинні бути рівностями. Якщо:

а) в системі маємо обмеження $\sum a_{ij} x_j \geq b_i$, то для того щоб провести таке обмеження до канонічного виду необхідно ввести додаткову змінну, зі знаком «–» $\sum a_{ij} x_j - x_{n+1} = b_i$.

б) якщо обмеження $\sum a_{ij} x_j \leq b_i$, то введемо додаткову змінну зі знаком «+» $\sum a_{ij} x_j + x_{n+1} = b_i$

3. Нехай x_j – змінна, на яку не покладено умову невід'ємності, тоді замінимо цю змінну на різницю двох нових невід'ємних змінних наступним чином: $x_j = x_j^1 - x_j^2$, при цьому $x_j^1, x_j^2 \geq 0$.

3. Властивості множини припустимих розв’язків ⍰ в ЗЛП

Властивості МПР задачі лінійного програмування:

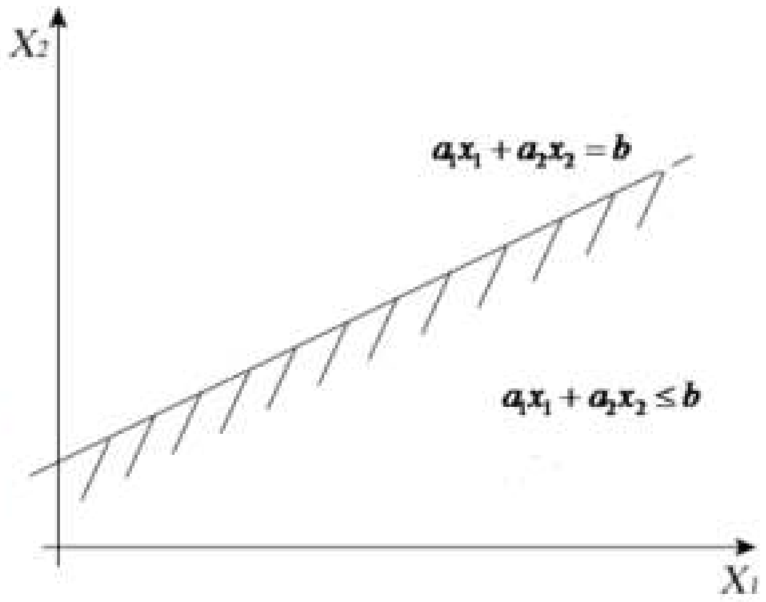
1) МПР є ***багатогранною*** множиною;
2) МПР – це ***опукла множина***;
3) МПР як опуклій множині належать всі лінійні комбінації будь-якої кількості її точок.
4) множина припустимих розв’язків є опуклою комбінацією її кутових точок.

Гіперплощиною n-вимірного простору називається множина точок, яка задовольняє рівнянню: $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b$.

Гіперплощина є простором, розмірність якого на одиницю менше за n .

Напівпростором n-вимірного простору називається множина точок, яка задовольняє нерівності: $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b$. Очевидно, що будь-яка гіперплощина є перетином двох на півпросторів.

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b \\ \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \ge b \end{cases} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b .$$



Багатогранною множиною називається множина точок, яка є перетином напівпросторів.

Множина точок називається ***опуклою***, якщо з будь-якими двома своїми точками вона містить і всі точки відрізка, що їх з'єднує.

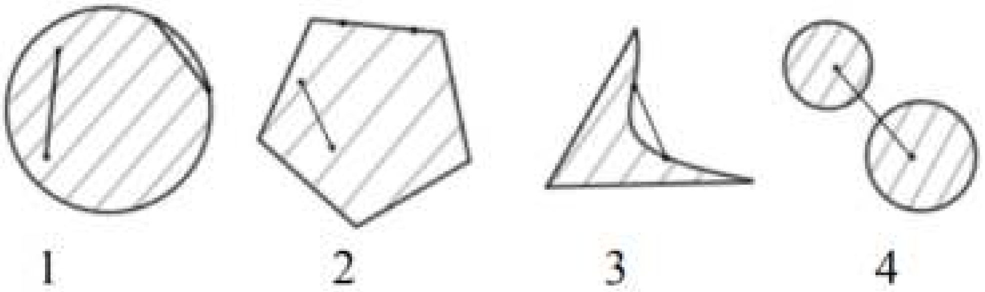


Рис.1. Приклади множин точок: 1,2 – опуклі множини;
3,4 – не опуклі множини

Якщо розглядається відрізок X_1X_2, то будь-яку точку цього відрізку можна представити у вигляді:

$$X = \lambda \cdot X_1 + (1-\lambda) \cdot X_2, \qquad \text{де } \lambda \text{ – це деяке число, } \lambda \in [0;1].$$

Ця формула визначає *лінійну опуклу комбінацію* точок X_1 і X_2.

З цього <u>випливає</u>, що множина точок є *опуклою*, якщо вона з двома будь-якими своїми точками містить також і їх лінійну опуклу комбінацію.

Кутова точка X – це точка, яку неможна представити у вигляді лінійної опуклої комбінації двох різних відмінних від неї точок.

Основна теорема лінійного програмування

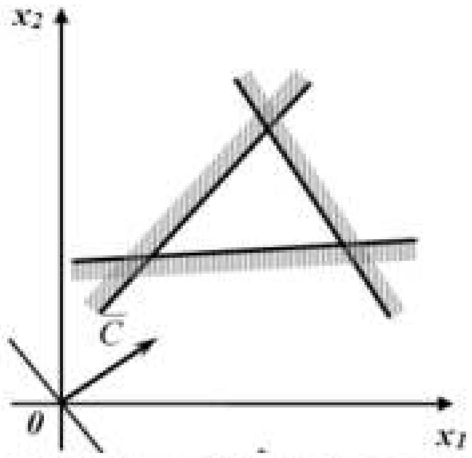
1. Якщо цільова функція ЗЛП набуває екстремального значення на МПР, то вона набуває його у кутовій точці.

2. Якщо ж цільова функція набуває екстремального значення більш, ніж в одній точці, то вона набуває його також в будь-якій їх лінійній комбінації.

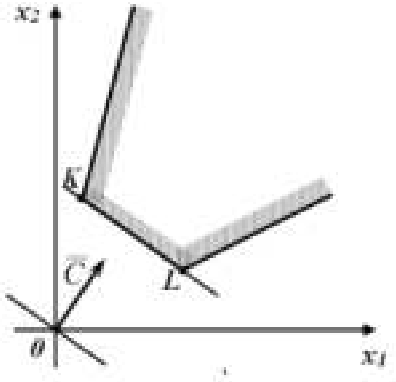
З цього випливає твердження–відповідь на питання:
скільки розв'язків може мати задача лінійного програмування (ЗЛП)?:

1) ЗЛП може *не мати розв'язків*:

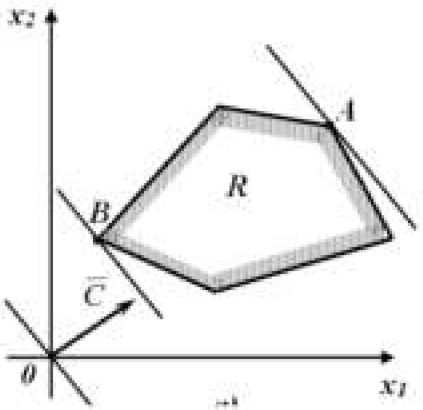
а) у «поганому сенсі» – якщо МПР порожня ($\Omega \in \varnothing$).



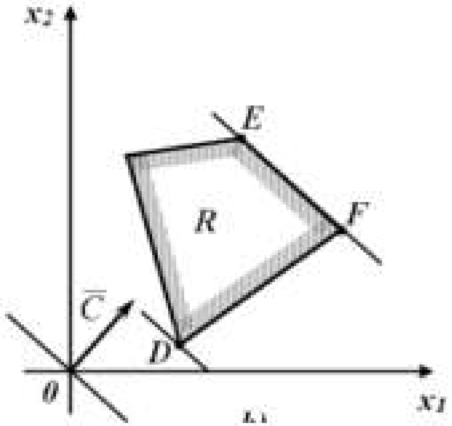
б) у «доброму сенсі» – якщо цільова функція не обмежена на МПР



2) має *один єдиний розв'язок*



3) має *нескінченну кількість розв'язків*



Теорема про структуру координат кутової точки:

якщо система обмежень ЗЛП містить $\boldsymbol{m}$ *лінійно незалежних* обмежень-рівностей, то кутова точка має не більше, ніж m ненульових координат.

Графічний метод розв'язку задачі лінійного програмування

Графічний метод застосовується для розв'язку ***задачі лінійного програмування із двома незалежними змінними***:

знайти найбільше й найменше значення функції

$$f = c_1 x_2 + c_2 x_2$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

При використанні графічного методу застосовуються лінії рівня й градієнт.

Для лінійної функції $f = c_1 x_2 + c_2 x_2$ координатами **градієнта** $\overline{C} = (c_1; c_2)$ є коефіцієнти при змінних x_1 і x_2: $\boxed{\overline{C} = \overline{grad}\, f(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}; \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = (c_1; c_2)}$.

Градієнт показує напрямок зростання цільової функції.

Лінією рівня функції $f(x_1, x_2)$ називається множина всіх крапок (x_1, x_2), у яких значення функції постійно $f(x_1, x_2) = C$. Для лінійної функції $f = c_1 x_2 + c_2 x_2$ всі лінії рівня $\boxed{c_1 x_2 + c_2 x_2 = C}$ є прямими, перпендикулярними градієнту.

Розв'язок $X(x_1, x_2)$ системи лінійних нерівностей (3.2) називається **припустимим**, якщо його координати невід’ємні $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Геометрична постановка ЗЛП із двома змінними: знайти в області припустимих розв’язків задачі точку, через яку проходить лінія рівня $f_{\max}$ (або $f_{\min}$), що відповідає найбільшому (найменшому) значенню цільової функції f.

Алгоритм графічного методу розв'язку задачі лінійного програмування (ЗЛП).

1. Побудувати область припустимих розв'язків (ОПР) задачі відповідно до системи нерівностей $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \end{cases}$.

2. Якщо область припустимих розв'язків непуста, то можна говорити про доцільність знаходження оптимального розв'язку ЗЛП.

3. Будуємо для цільової функції $f = c_1x_2 + c_2x_2$ градієнт $\overline{grad}\, f = (c_1;c_2)$ і фіксовану лінію рівня – пряму $c_1x_2 + c_2x_2 = C_0$.

4. Паралельним переміщенням прямої $f = C_0$ в напрямку вектора $\overline{C} = (c_1, c_2)$ знайдемо першу крапку $A(a_1;a_2)$ «бічна» прямій з областю. Це – крапка мінімуму цільової функції f. Значення функції $f(A)$ є найменшим значенням функції в ОДР.

5. Знайдемо останню крапку $B(b_1;b_2)$ бічні прямій з ОПР. Це - крапка максимуму цільової функції f. Значення функції $f(B)$ є найбільшим значенням цільової функції в області припустимих розв'язків.