Симплекс-метод

розв'язання задач лінійного програмування

Симплекс-метод – це універсальний метод, суть якого полягає в послідовному цілеспрямованому русі по опорним базисним планам задачі лінійного програмуваня з метою їх покращення та покращення значень цільової функції до тих пір, поки не буде знайдене найкраще рішення, який може бути реалізовано як ручним, так і комп'ютерним способом.

Загальна схема симплекс-методу

I. Підготовчий етап.

1) приведення до канонічної форми;

2) приведення до переважної форми.

3) побудова першої симплексної таблиці;

II. Перевірка плану на оптимальність:

Якщо план не є оптимальним:

III. Перехід до іншого опорного базисного плану (не гіршого) та повернення на II етап.

Якщо план є оптимальним:

IV. Формування розв’язку задачі.

I. Підготовчий етап.

1. Канонічна форма задачі

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b, i = 1, m \\ x_j \geq 0; j = 1, n \end{cases}$$

І. Підготовчий етап.

2. Переважна форма ЗЛП

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$

$$\begin{cases} X_i + \sum\limits_{j=m+1}^{n} a_j x_j = b_i, i = 1, m \\ x_j \geq 0; j = 1, n \end{cases}$$

М-задача

$$\overline{F} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - (+) \sum_{i=1}^{m} M z_i \rightarrow \max (\min)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + z_i = b_i , \quad (i = \overline{1,m})$$

$$x_j \geq 0 \; (j = \overline{1,n}), \quad z_i \geq 0 \; (i = \overline{1,m})$$

Теорема про зв'язок розв'язку М-задачі та вихідної задачі :

Якщо в оптимальному плані $X^* = (x_1; x_2; ...; x_n; z_2; z_2; ...; z_m)$ *М – задачі всі фіктивні змінні* $z_i = 0 \ (i = \overline{1, m})$, *то план* $X = (x_1; x_2; ...; x_n)$ *є оптимальним планом вихідної задачі*

Якщо в оптимальному плані М - задачі хоча б одна з ***фіктивних змінних відмінна від нуля****, то вихідна задача не має припустимих планів, тобто її система обмежень несумісна.*

I. Підготовчий етап.

3. Побудова першої симплексної таблиці

БП	$C_Б$	B	x_1	x_2	$\dots$	x_m	x_{m+1}	$\dots$	x_j	$\dots$	x_n
			c_1	c_2	$\dots$	c_m	c_{m+1}	$\dots$	c_j	$\dots$	c_n
x_1	c_1	b_1	1	0	$\dots$	0	$a_{1,m+1}$	$\dots$	a_{1j}	$\dots$	a_{1n}
x_2	c_2	b_2	0	1	$\dots$	0	$a_{2,m+1}$	$\dots$	a_{2j}	$\dots$	a_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_m	c_m	b_m	0	0	$\dots$	1	$a_{m,m+1}$	$\dots$	a_{mj}	$\dots$	a_{mn}
ЦФ		Δ_0	0	0	$\dots$	0	Δ_{m+1}	$\dots$	Δ_j	$\dots$	Δ_n

$$\Delta_0 = C_Б \cdot B$$

$$\Delta_j = C_Б A_j - c_j \qquad (j = \overline{1,n})$$

Δ_0 – *значення цільової функції*

Δ_j – *оцінками вільних змінних.*

II. Перевірка плану на оптимальність:

Теорема:

якщо вихідна задача розв'язується на **min** *і для деякого опорного плану всі оцінки* Δ_j $(j=\overline{1,n})$ *від'ємні* $(\Delta_j \le 0)$, *то такий план оптимальний*

ІІІ. Перехід до не гіршого опорного плану:

Для *знаходження змінної, яку* *потрібно ввести в базис* визначають стовпчик, який задовольняє умові $\max\limits_{\Delta_j<0}\left|\Delta_j\right|$

Назвемо X_k стовпчик **вирішальним** стовпчиком.

Для *визначення змінної, яку необхідно вивести з базису* знаходять відношення елементів стовпчика ***B*** до відповідних додатних елементів вирішального стовпчика X_k. А потім серед цих відношень обирають мінімальні, тобто

$$\min_{a_{ik}>0}\left\{\frac{b_i}{a_{ik}}\right\}=\frac{b_l}{a_{lk}}$$

Рядок l називають ***вирішальним рядком***, а елемент

<u>Правила переходу до нової симплекс-таблиці:</u>

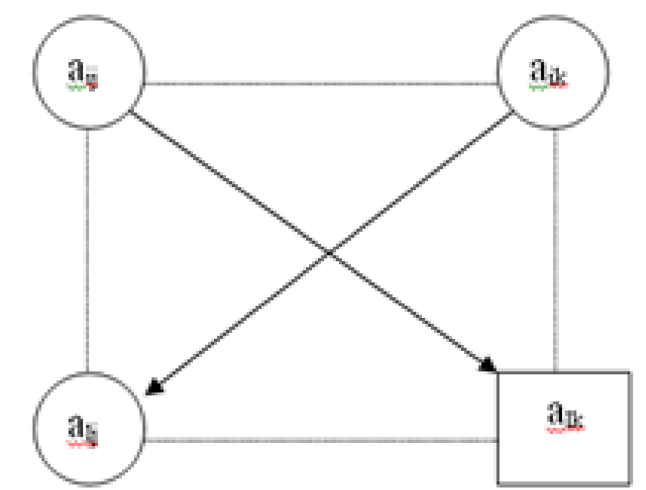
1. Елементи вирішального рядка ділимо на вирішальний елемент і записуємо у відповідних клітинках нової таблиці.

$$b_l^{'} = \frac{b_l}{a_{lk}}; \qquad a_{lk}^{'} = \frac{a_{lj}}{a_{lk}} \qquad (j = \overline{1,n})$$

2. Елемент вирішального стовпчика в новій таблиці дорівнюють нулю, за виключенням

$$a_{lk}^{'} = 1; \qquad a_{ik}^{'} = 0 \qquad (i \neq k), \ \ a_{lk}^{'} = 1.$$

3. Щоб знайти будь-який інший елемент нової симплекс-таблиці, необхідно скористатися ***<u>правилом прямокутника</u>***



У вихідній таблиці виділяють прямокутник. Діагональ, яка містить вирішальний та шуканий елементи нової таблиці, називається головною, а інша – побічною.

Щоб отримати елемент $a_{ij}^{'}$ $(i \neq l,\; j \neq k)$ нової симплекс-таблиці, необхідно з ***добутку кутових елементів головної діагоналі відняти добуток кутових елементів побічної діагоналі і поділити на вирішальний елемент***.

$$b_i^{'} = \frac{b_i a_{lk} - b_l a_{ik}}{a_{lk}}; \qquad a_{ij}^{'} = \frac{a_{ij} a_{lk} - a_{lj} a_{ik}}{a_{lk}} \qquad \Delta_j^{'} = \frac{\Delta_j a_{lk} - \Delta_k a_{lj}}{a_{lk}}$$

$$i \neq l; \qquad j \neq k.$$

$$\Delta_0^{'} = \frac{\Delta_0 a_{lk} - \Delta_k a_{ej}}{a_{lk}}$$

IV етап. Запис рішення

За ***останньою симплексною*** таблицею кількість та якість рішення ***визначають:***

1. Якщо в індексному рядку оптимальної симплекс-таблиці при розв’язуванні задачі на min, всі ***оцінки вільних змінних від'ємні***, то знайдений ***оптимальний план єдиний***.
2. Якщо в індексному рядку оптимальної симплекс-таблиці, ***міститься хоча б одна нульова оцінка, яка відповідає вільній змінній***, то задача лінійного програмування має ***нескінченну множину оптимальних розв’язків.***
3. Якщо в індексному рядку симплексної таблиці задачі ЛП на min міститься додатня оцінка , а у відповідному стовпчику змінної немає жодного додатного елемента, то ***цільова функція на множині припустимих розв’язків не обмежена зверху***.
4. Якщо в оптимальному плані М-задачі ***хоча б одна з фіктивних змінних відмінна від нуля,*** то вихідна задача ***не має припустимих розв’язків, тобто система обмежень несумісна***.