Заняття 2

Введення поняття відстані у векторно-аксіоматичній теорії евклідової геометрії

План лекції:

1) Аксіоматика Вейля евклідового простору.
2) Наслідки аксіом скалярного добутку векторів.
3) Введення прямокутної декартової системи координат. Відстань між двома точками в декартових координатах.
4) Розв'язання метричних задач евклідової геометрії.

1. Аксіоматика Вейля евклідового простору

Основні об'єкти: точка, вектор

1. Аксіоми додавання векторів

Основне відношення ρ_1: $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V \to \bar{x} + \bar{y} \in V$

1.1. Додавання векторів комутативне.

1.2. Додавання векторів асоціативне.

1.3. Існує вектор $\bar{0} \in V$ такий, що для будь-якого $\bar{x} \in V$ виконано $\bar{x} + \bar{0} = \bar{x}$.

1.4. Для будь-якого $\bar{x} \in V$ існує вектор $\bar{x}' \in V$ такий, що $\bar{x} + \bar{x}' = \bar{0}$.

2. Аксіоми добутку вектора на число

Основне відношення ρ_2: $\forall \bar{x} \in V, \forall \lambda \in R \to \lambda \bar{x} \in V$

2.1. $(\forall \bar{x}, \bar{y} \in V)(\forall \lambda \in R)\, \lambda(\bar{x} + \bar{y}) = \lambda \bar{x} + \lambda \bar{y}$.

2.2. $(\forall \bar{x} \in V)(\forall \lambda, \mu \in R)\, (\lambda + \mu)\bar{x} = \lambda \bar{x} + \mu \bar{x}$.

2.3. $(\forall \bar{x} \in V)(\forall \lambda, \mu \in R)\, (\lambda \mu)\bar{x} = \lambda(\mu \bar{x})$.

2.4. $(\forall \bar{x} \in V) 1 \cdot \bar{x} = \bar{x}$.

3. Аксіома розмірності

3.1. Існує три лінійно незалежних векторів. Будь-які чотири вектори лінійно залежні.

$M = \{V, R, \rho_1, \rho_2, 1.1-3.1\}$ – структура тривимірного векторного простору

4. Аксіоми скалярного добутку

Основне відношення ρ_3: $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V \to (\bar{x}, \bar{y}) \in R$

4.1. $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V \ (\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{y}, \bar{x})$.

4.2. $(\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in V)(\bar{x} + \bar{y}, \bar{z}) = (\bar{x}, \bar{z}) + (\bar{y}, \bar{z})$.

4.3. $(\forall \bar{x}, \bar{y} \in V)(\forall \lambda \in R)\, \lambda(\bar{x}, \bar{y}) = (\lambda \bar{x}, \bar{y})$.

4.4. $\forall \bar{x} \in V, \ \bar{x} \neq \bar{0} \ (\bar{x}, \bar{x}) > 0, \quad (\bar{x}, \bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$.

$M = \{V, R, \rho_1, \rho_2, \rho_3, 1.1-4.4\}$ – структура тривимірного векторного евклідового простору

5. Аксіоми відкладання векторів

Основне відношення: ρ_4: $\forall A, B \in T \to \overline{AB} \in V$

5.1. Для будь-якої точки $A \in T$ і будь-якого ненульового вектора $\bar{x} \in V$ існує єдина точка $B \in T$ така, що $\overline{AB} = \bar{x}$.

5.2. Аксіома трикутника. Для будь-яких трьох точок $A, B, C \in T$ справедлива рівність $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

$M = \{V, T, R, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, 1.1-5.2\}$ - структура тривимірного точково-векторного евклідового простору

Питання. 1) Чи є поняття відстані в аксіоматичній теорії евклідової геометрії, побудованій на базі системи аксіом Вейля, основним, чи воно означається?

2) Як в аксіоматичній теорії евклідової геометрії, побудованій на базі системи аксіом Вейля, вводиться поняття відстані?

2. Наслідки з аксіом групи скалярного добутку.

Довжиною вектора називається квадратний корінь з його скалярного квадрату: $|\bar{x}|=\sqrt{\bar{x}^2}$. Якщо $|\bar{x}|=1$, то вектор називається одиничним.

Для будь-яких векторів $\bar{x}$ та $\bar{y}$ має місце нерівність Коші-Буняковського $(\bar{x},\bar{y})\le|\bar{x}|\cdot|\bar{y}|$.

Кутом між векторами $\bar{x}$ та $\bar{y}$ називається число φ, що визначається формулою $\cos\varphi=\dfrac{(\bar{x},\bar{y})}{|\bar{x}||\bar{y}|}$.

Два вектора $\bar{x}$ та $\bar{y}$ називаються *ортогональними*, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю.

Базис $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3$ називається *ортонормованим*, якщо виконується умова $(\bar{e}_i,\bar{e}_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\ne j\end{cases}$. Існування ортонормованого базису випливає з третьої та четвертої груп аксіом Вейля.

3. Введення прямокутної декартової системи координат. Відстань між двома точками в декартових координатах.

Нехай $(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$ – ортонормований базис. Зафіксуємо точку O і розглянемо репер $(O,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$. Будь-якій точці M евклідового простору відповідає радіус-вектор $\overline{OM}=x_1\bar{e}_1+x_2\bar{e}_2+x_3\bar{e}_3$, тобто точці M відповідає впорядкована трійка чисел (x_1,x_2,x_3), і навпаки.

Таким чином, встановлюється взаємно однозначна відповідність між впорядкованими трійками дійсних чисел та точками простору. Назвемо цю відповідність декартовою системою координат.

В декартових координатах вектор, що задається точками $A(a_1,a_2,a_3)$ та $B(b_1,b_2,b_3)$, має координати $\overline{AB}=(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)$.

Відстанню d між точками $A(a_1, a_2, a_3)$ та $B(b_1, b_2, b_3)$ називається довжина вектора $\overline{AB}$, тобто $d = \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{\overline{AB}^2}$.

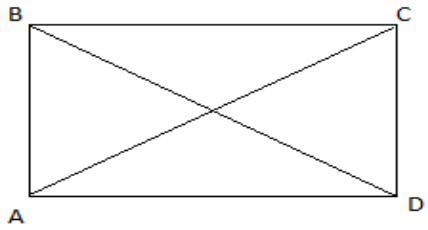
В декартових координатах довжина вектора $\overline{AB}$, а, отже, і відстань між точками $A(a_1, a_2, a_3)$ та $B(b_1, b_2, b_3)$, обчислюється за формулою

$$d = \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}\ .$$

Питання. Чи задовольняє означення відстані в цій аксіоматичній теорії аксіомам метрики?

4. Розв'язання метричних задач евклідової геометрії в аксіоматичній теорії Вейля

Задача 1. Довести, що діагоналі прямокутника рівні між собою.



Доведення. Розглянемо прямокутник $ABCD$ з діагоналями AC та BD. Доведемо, що $AC = BD$.

Виразимо вектори діагоналей через вектори сторін прямокутника за аксіомою 5.2:

$$\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} \text{ та } \overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD}.$$

Знайдемо скалярні квадрати обох векторів, отримаємо

$$AC^2 = \overline{AD}^2 + 2(\overline{AD}, \overline{DC}) + \overline{DC}^2 \text{ та } \overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + 2\left(\overline{BC}, \overline{CD}\right) + \overline{CD}^2.$$

Оскільки $ABCD$ – прямокутник, то $(\overline{AD},\overline{DC})=0$, $(\overline{BC},\overline{CD})=0$, $AD=BC$ та $AB=CD$. З цього випливає, що знайдені скалярні квадрати векторів рівні, а значить і довжини цих векторів рівні, тобто $AC=BD$. Доведено.

Задача 2. Користуючись системою аксіом Вейля евклідової планіметрії довести, що для будь-яких трьох точок A,B,C справедлива нерівність трикутника: $|AB|\leq|AC|+|CB|$.

Доведення. За аксіомою 5.2 для будь-яких точок A,B,C вірна рівність $\overline{AB}=\overline{AC}+\overline{CB}$. Тоді $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+2(\overline{AC},\overline{CB})+\overline{CB}^2$. За нерівністю Коші-Буняковського для будь-яких векторів маємо $(\overline{AC},\overline{CB})\leq\left|\overline{AC}\right|\cdot\left|\overline{CB}\right|$. Отже, $\left|\overline{AB}\right|^2=\left|\overline{AC}\right|^2+2(\overline{AC},\overline{CB})+\left|\overline{CB}\right|^2\leq\left|\overline{AC}\right|^2+2\left|\overline{AC}\right|\cdot\left|\overline{CB}\right|+\left|\overline{CB}\right|^2=\left(\left|\overline{AC}\right|+\left|\overline{CB}\right|\right)^2$, звідки і отримаємо $|AB|\leq|AC|+|CB|$.

5. Задачі для самостійного розв'язання

1. Довести теорему Піфагора в аксіоматичній теорії Вейля евклідової геометрії.

2. Довести в аксіоматичній теорії Вейля евклідової геометрії, що медіана рівнобедреного трикутника є його бісектрисою та висотою.