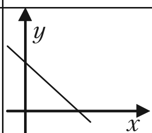
:

3.2.6. Основні елементарні функції

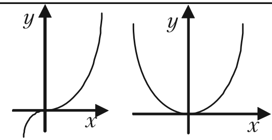
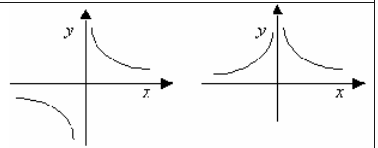
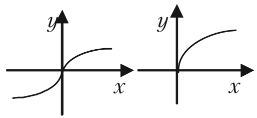
I. Лінійною називається функція виду $y = ax + b$, де а, $b \in R$. Властивості

X	**Y**	**Парність**	**Монотонність**	**Періодичність**	**Графік**
$(-\infty;+\infty)$	$(-\infty;+\infty)$	Загального виду (ні парна, ні непарна), $a \neq 0$; якщо $a=0$ – парна	$a>0$ – зростаюча; $a<0$ – спадна; $a=0$ – стала	Неперіодична при $a \neq 0$, $a=0$ – періодична з будь-яким періодом	 Пряма лінія

II. Функція $y = x^a$, де a — будь-яка дійсна стала, називається ***степеневою***.

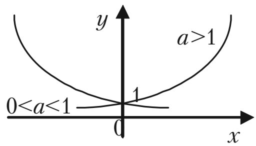
Наведемо властивості степеневої функції, які залежать від показника a:

1. $x^0 = 1,\ x \neq 0$.
2. $x^a x^b = x^{a+b}$.
3. $x^a : x^b = x^{a-b}$.
4. $\left(x^a\right)^b = x^{ab}$.
5. $(xy)^a = x^a y^a$.

Показник степеня	*X*	*Y*	Парність	Монотонність	Періодичність	Графік
$a = n$, $n \in N$	$(-\infty;+\infty)$	$(-\infty;+\infty)$, якщо n – непарне; $(0;+\infty)$, якщо n – парне;	Непарна, якщо n – непарне; парна, якщо n – парне	Зростаюча на $(-\infty;+\infty)$, якщо n – непарне; спадна на $(-\infty;0]$ і зростаюча на $[0;+\infty)$, якщо n – парне	Неперіодична	 n – непарне n – парне
$a = -n$, $n \in N$	$(-\infty;0) \cup (0;+\infty)$	$(-\infty;0) \cup (0;+\infty)$, якщо n – непарне; $(0;+\infty)$, якщо n – парне	Непарна, якщо n – непарне; парна, якщо n – парне	Якщо n – парне, зростаюча на $(-\infty;0)$ і спадна на $(0;+\infty)$; якщо n – непарне, спадна на $(-\infty;0) \cup (0;+\infty)$	Неперіодична	 n - непарне n - непарне
$a = 1/n$, $n \in N$	$(0;+\infty)$, якщо n – парне; $(-\infty;+\infty)$, якщо n – непарне	$(0;+\infty)$, якщо n – парне; $(-\infty;+\infty)$, якщо n – непарне	Непарна, якщо n – непарне; загального виду (ні парна, ні непарна), якщо n – парне	Зростаюча на $(-\infty;+\infty)$, якщо n – непарне; зростаюча на $(0;+\infty)$, якщо n – парне	Неперіодична	 n – непарне n – парне

III. Функція $y = a^x$, якщо $a>0$, $a \neq 0$, називається ***показниковою функцією.***

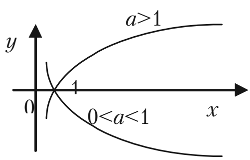
Властивості

X	*Y*	**Парність**	**Монотон-ність**	**Періодич-ність**	**Графік**
$(-\infty;+\infty)$	$(-\infty;0)$	Загально-го вигля-ду (ні пар-на, ні не-парна)	Якщо $a>1$ – зро-стаюча на $(-\infty;+\infty)$; якщо $0<a<1$ – спадаюча на $(-\infty;+\infty)$	Неперіо-дична	

Основні формули:

1. $a^0 = 1,\ a \neq 0$.
2. $a^x a^y = a^{x+y}$.
3. $a^x : a^y = a^{x-y}$.
4. $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$.
5. $(ab)^x = a^x b^x$.

IV. Функція $y = \log_a x$, якщо $a > 0$, $a \neq 1$, називається ***логарифмічною функцією***. Логарифмічна та показникові функція взаємо обернені.

X	*Y*	**Парність**	**Монотонність**	**Періодич-ність**	**Графік**
$(0;+\infty)$	$(-\infty;+\infty)$	Загального вигляду (ні парна, ні непарна)	Якщо $a>1$ – зростаюча на $(0;+\infty)$; якщо $0<a<1$ – спадаюча на $(0;+\infty)$	Неперіо-дична	

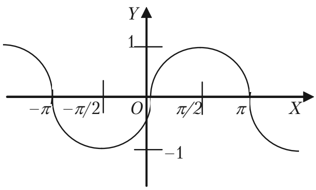
Основні формули:

1. $\log_a 1 = 0,\ a > 0,\ a \neq 1$.
2. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.
3. $\log_a a = 1$.
4. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$.
5. $\log_{a^r} b^p = \dfrac{p}{r}\log_a b$.

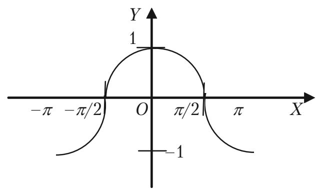
V. Функції $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \text{tg}\, x$, $y = \text{ctg}\, x$ називаються ***тригонометричними.***

Функ-ція	***X***	***Y***	**Парність**	**Монотонність**	**Періодич-ність**
$y=\sin x$	$(-\infty;+\infty)$ $[\frac{\pi}{2}+2\pi n;$ $\frac{3\pi}{2}+2\pi n]$	$[-1;\ 1]$	Непарна	Зростаюча на $[0;\ \frac{\pi}{2}]$; спадна на $[\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n]$	Періодична $T=\ 2\pi n$; $T_{\min}=2\pi$
$y=\cos x$	$(-\infty;+\infty)$	$[-1;\ 1]$	Парна	Зростаюча на $[-\pi+2\pi n;2\pi n]$; спадна на $[2\pi n;\pi+2\pi n]$	Періодична $T=\ 2\pi n$; $T_{\min}=2\pi$
$y=\text{tg}\, x$	$(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;$ $\frac{\pi}{2}+2\pi n)$	$(-\infty;+\infty)$	Непарна	Зростаюча	Періодична $T=\ \pi n$; $T_{\min}=\pi$
$y=\text{ctg}\, x$	$(\pi n;\ \pi+\pi n)$	$(-\infty;+\infty)$	Непарна	Спадна	Періодична $T=\ \pi n$; $T_{\min}=\pi$

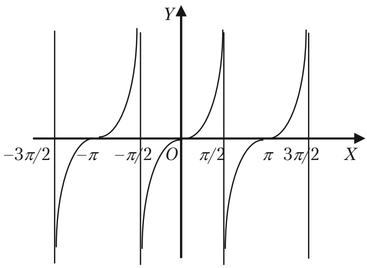
Графіки



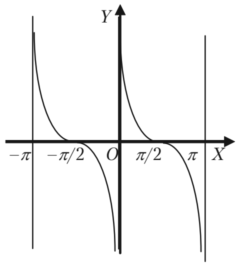
$y = \sin x$



$y = \cos x$



$y = \text{tg}\, x$



$y = \text{ctg}\, x$

Основні формули:

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$

2. $1 + \mathrm{tg}^2 = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; $\quad 1 + \mathrm{ctg}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$; $\quad \mathrm{tg}\, x\, \mathrm{ctg}\, x = 1.$

3. $\sin 2x = 2\sin x \cos x$;

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1-2\sin^2 x$;

$$\mathrm{tg}\, 2x = \frac{2\,\mathrm{tg}\, x}{1-\mathrm{tg}^2 x}.$$

4. $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$; $\quad \cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}.$

5. $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$; $\quad \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$;

$$\mathrm{tg}\, 3x=\frac{3\,\mathrm{tg}\, x-\mathrm{tg}^3 x}{1-3\,\mathrm{tg}^2 x}.$$

6. $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos y \sin x;$

$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y.$

7. $\mathrm{tg}(x \pm y) = \dfrac{\mathrm{tg}\, x \pm \mathrm{tg}\, y}{1 \mp \mathrm{tg}\, x\, \mathrm{tg}\, y}.$

8. $\sin x \cos y = \dfrac{1}{2}[\sin(x + y) + \sin(x - y)]$;

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)];$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)].$$

9. $\sin x + \sin y = 2 \sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$;

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2};$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2};$$

$$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}.$$

10. $$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}; \qquad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}};$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}; \qquad \operatorname{ctg} x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}.$$

11. $$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \cos\alpha; \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp\sin\alpha;$$

$$\sin(\pi \pm \alpha) = \mp\sin\alpha; \qquad \cos(\pi \pm \alpha) = -\cos\alpha;$$

12. $$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp\operatorname{ctg}\alpha; \qquad \operatorname{tg}(\pi \pm \alpha) = \pm\operatorname{tg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp\operatorname{tg}\alpha; \qquad \operatorname{ctg}(\pi \pm \alpha) = \pm\operatorname{ctg}\alpha.$$

VI. Функції $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ називаються ***оберненими тригонометричними функціями***. Вони є оберненими до функцій $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

Функція	*X*	*Y*	Парність	Монотонність	Періодичність
$y = \arcsin x$	$[-1;\ 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$	Непарна	Зростаюча	Неперіодична
$y = \arccos x$	$[-1;\ 1]$	$[0;\pi]$	Ані парна, ані непарна	Спадна	Неперіодична
$y = \mathrm{arctg}\, x$	$(-\infty;+\infty)$	$\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$	Непарна	Зростаюча	Неперіодична
$y = \mathrm{arcctg}\, x$	$(-\infty;+\infty)$	$[0;\ \pi]$	Ані парна, ані непарна	Спадна	Неперіодична

Основні формули:

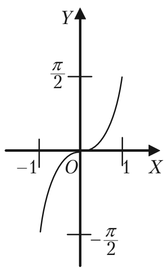
1. $\arcsin\alpha = -\arcsin(-\alpha) = \frac{\pi}{2}\arccos\alpha = \mathrm{arctg}\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}.$

2. $\arccos\alpha = \pi - \arccos(-\alpha) = \frac{\pi}{2} - \arcsin\alpha = \mathrm{arcctg}\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}.$

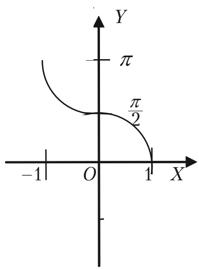
3. $\mathrm{arctg}\alpha = -\mathrm{arctg}(-\alpha) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arcctg}\alpha = \arcsin\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}.$

4. $\mathrm{arcctg}\alpha = \pi - \mathrm{arcctg}(-\alpha) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\alpha = \arccos\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}.$

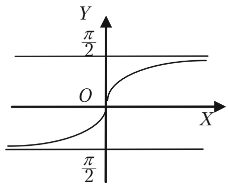
Графіки



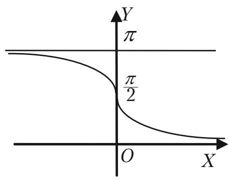
$y = \arcsin x$



$y = \arccos x$



$y = \mathrm{arctg}\ x$



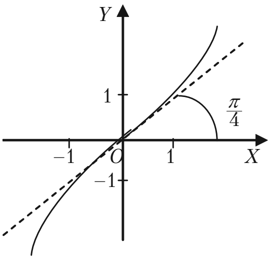
$y = \mathrm{arcctg}\ x$

VII. Функції $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^{-x} + e^{x}}{2}$, $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^{-x} - e^{x}}{2}$ називаються ***гіперболічним косинусом і синусом***, а функції $\operatorname{th} x = \dfrac{e^{-x} - e^{x}}{e^{x} + e^{-x}}$, $\operatorname{cth} x = \dfrac{e^{-x} + e^{x}}{e^{x} - e^{-x}}$ відповідно ***гіперболічним тангенсом і котангенсом***.

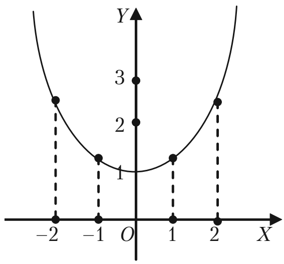
Для гіперболічних функцій справджуються співвідношення:

1. $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.
2. $\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$.
3. $\operatorname{th} x \operatorname{cth} x = 1$.
4. $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.

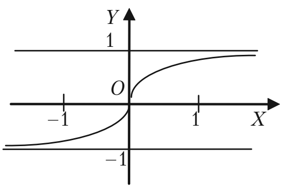
Наведемо графіки головних гіперболічних функцій:



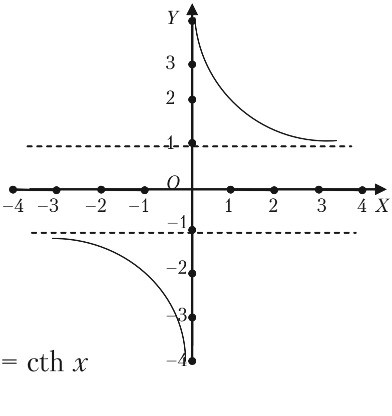
$y = \operatorname{sh} x$



$y = \operatorname{ch} x$



$y = \operatorname{th} x$



$y = \operatorname{cth} x$

3.2.7. Елементарні функції

Із основних елементарних функцій решту елементарних функцій дістають:

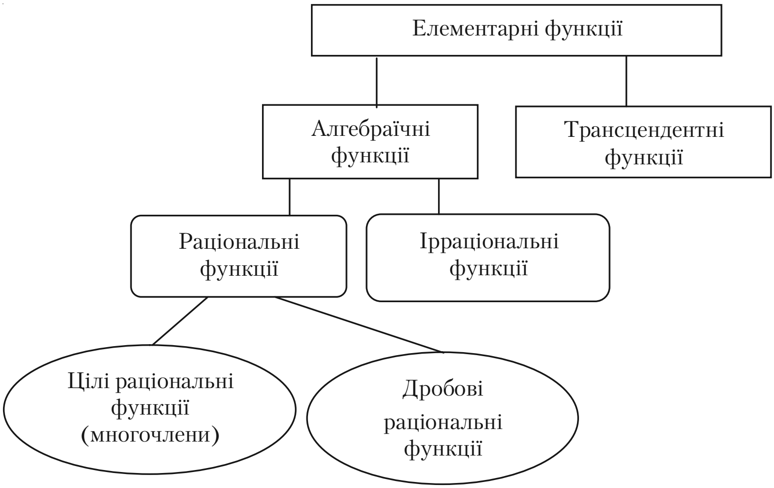
1) за допомогою алгебраїчних дій;

2) побудовою складної (складеної) функції.

Функції, які дістають з основних елементарних функцій за допомогою скінченого числа алгебраїчних дій і скінченого числа операцій, що полягають у побудові складної функції, називаються елементарними.

Скажімо, $y = \dfrac{(x\cos x)^4}{x+6^{8x}} + \sqrt[17]{6^x} + 5$ — елементарна функція.

Класифікація функцій



Функція $y = P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$; $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$ називається ***многочленом n-го степеня***.

Наприклад, $y = ax^2 + a_1x + 67$, $a, a_1 \in R$.

Функція $y = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}$ називається ***дробово-раціональною функцією***.

Функція, до складу дій над аргументом якої входить дія добування кореня, називається ***ірраціональною функцією***.

3.2.8. Деякі неелементарні функції

1. $y = |x|$ — абсолютне значення, або модуль числа (рис. 3.16).
2. $y = [x]$ — ціла частина числа (рис. 3.17).
3. $y = \{x\}$ — дробова частина числа (рис. 3.18).

4. $y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ -1, & x < 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ — знак числа (рис. 3.19).

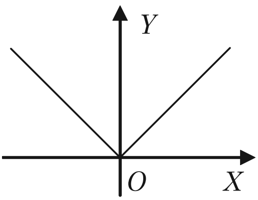


Рис. 3.16.

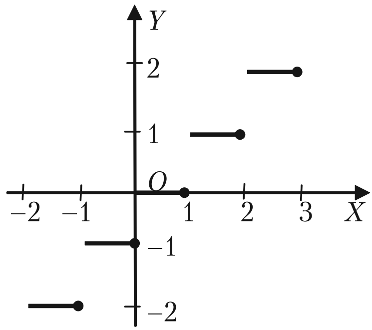


Рис. 3.17.

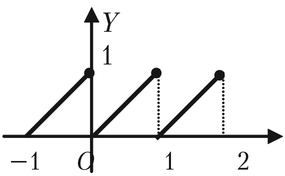


Рис. 3.18.

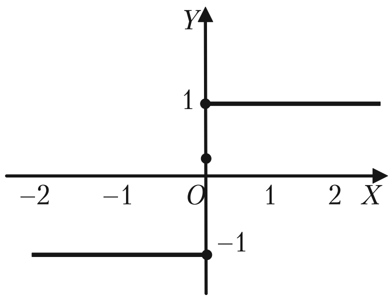


Рис. 3.19.