

**ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 7 РОЗРАХУНОК  
ВАЛА НА СТАТИЧНУ  
МІЦНІСТЬ ТА ВИТРИВАЛІСТЬ**

**1.1. Приклад розв'язування задачі**

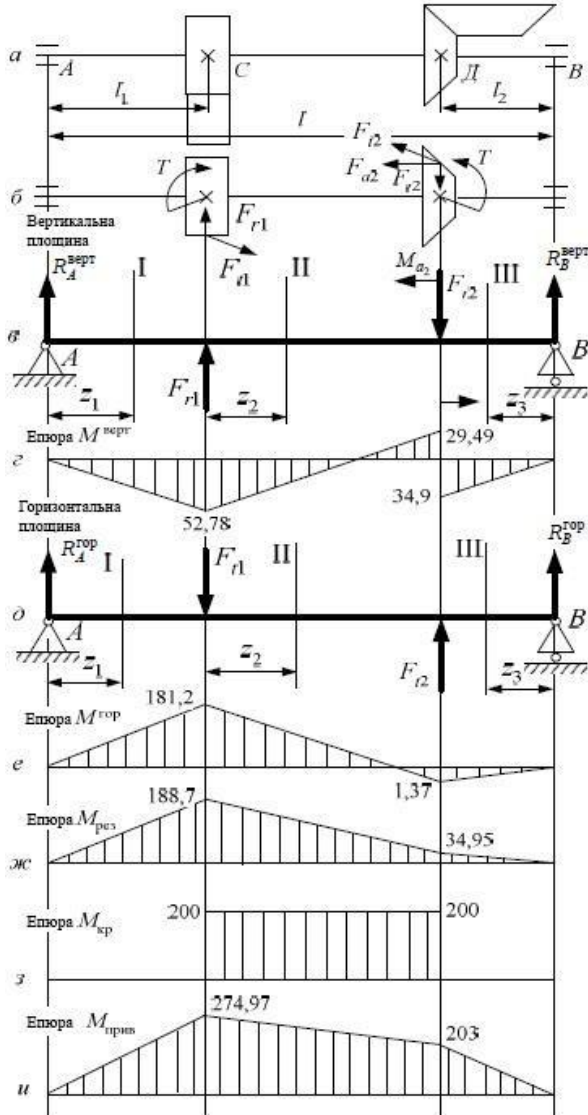


Рисунок 12.1. Вал

За заданим геометричним параметрам вала (рис. 12.1), крутному моменту, розмірами зубчастих коліс потрібно виконати розрахунок вала на статичну міцність і витривалість. Напрямок сил, що діють на вал, визначається розташуванням спряжених зубчастих коліс, показаних на малюнку тонкими лініями.

**Початкові дані:**

- $T_1 = 200 \text{ Нм};$
- $d_1 = 50 \text{ мм};$
- $d_2 = 130 \text{ мм};$
- $l_1 = 50 \text{ мм};$
- $l_2 = 40 \text{ мм};$
- $l_3 = 150 \text{ мм}.$

**Розв'язок**

I. Визначаємо сили, що діють в циліндричній прямозубій та конічній прямозубій передачах (рис. 12.1, а).

В циліндричній прямозубій передачі:

$$F_{t_1} = \frac{2T}{d_1} = \frac{2 \cdot 200}{60 \cdot 10^{-3}} = 6667 \text{ Н}$$

$$F_{r_1} = F_{t_1} \tan \alpha = 6667 \cdot \tan 20^\circ = 2427 \text{ Н}$$

В конічній прямозубій передачі:

$$F_{t_2} = \frac{2T}{d_2} = \frac{2 \cdot 200}{130 \cdot 10^{-3}} = 3077 \text{ Н}$$

$$i = \tan \delta_2 = \frac{1}{\tan \delta_1}; \delta_1 = 26,5^\circ$$

$$F_{r_2} = F_{t_2} \tan \alpha \sin \delta_1 = 3077 \cdot \tan 20^\circ \cdot \sin 26,5^\circ = 498,5 \text{ Н}$$

$$F_{a_2} = F_{t_2} \tan \alpha \cos \delta_1 = 3077 \cdot \tan 20^\circ \cdot \cos 26,5^\circ = 991,3 \text{ Н}$$

II. Визначаємо орієнтовні діаметри вихідних кінців вала з умови міцності при крученні:

$$\tau_{max} = \frac{T_{max}}{W_p} \leq [\tau]$$

де  $\tau_{max}$  – максимальне дотичне напруження;  $T_{max}$  – максимальний крутний момент;  $[\tau]$  – допустиме дотичне напруження, що приймається в межах  $[\tau] = 12\text{--}40 \text{ МПа}$ ;  $W_p \approx 0,2d_3^3$  – полярний момент опору.

Звідки:

$$d = \sqrt[3]{\frac{T_{max}}{0,2 \cdot [\tau]}}$$

Прийнявши  $[\tau] = 25 \text{ МПа}$  визначаємо діаметр вихідного кінця вала:

$$d_{вих} = \sqrt[3]{\frac{200}{0,2 \cdot 25 \cdot 10^6}} = 3,42 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

Приймаємо значення діаметра вала зі стандартного ряду  $d_{\text{вих}} = 34$  мм.

III. Визначаємо діаметр вала в небезпечному перерізі по третій теорії міцності, так як при роботі вал зазнає складних деформацій згину та кручення.

1. Складаємо розрахункову схему вала з усіма діючими на нього силами (рис. 12.1, б).

2. Визначаємо згинальні моменти у вертикальній  $M^{\text{верт}}$  та горизонтальній  $M^{\text{гор}}$  площинах:

а) складаємо розрахункову схему від сил, що діють у вертикальній площині. Підшипники замінюємо шарнірними опорами: одна рухома, інша нерухома (рис. 12.1, в).

Обчислюємо величину опорних реакцій:

$$\sum m_A = 0; F r_1 l_1 - F r_2 (l - l_2) + M_{a_2} + R_B^{\text{верт}} l = 0;$$

$$R_B^{\text{верт}} = \frac{-F r_1 l_1 + F r_2 (l - l_2) - M_{a_2}}{l} =$$

$$= \frac{-2427 \cdot 0,05 + 498,5(0,15 - 0,04) - 64,43}{0,15} = -872,9 \text{ Н}$$

$$\sum m_B = 0; -R_A^{\text{верт}} l - F r_1 (l - l_1) + F r_2 l_2 + M_{a_2} = 0;$$

$$R_A^{\text{верт}} = \frac{-F r_1 (l - l_1) + F r_2 l_2 + M_{a_2}}{l} =$$

$$= \frac{-2427(0,15 - 0,05) + 498,5 \cdot 0,04 + 64,4}{0,15} = -1055,7 \text{ Н}$$

Для перевірки правильності визначення опорних реакцій складаємо рівняння:

$$\sum F_y = 0; R_A^{\text{верт}} + F r_1 - F r_2 + R_B^{\text{верт}} =$$

$$= -1055,7 + 2427 - 498,5 - 872,9 = 0;$$

б) складаємо рівняння згинального моменту у вертикальній площині  $M^{\text{верт}}$ :

ділянка I,  $0 \leq z_1 \leq l_1 = 0,05$  м:

$$M^{\text{верт}} = R_A^{\text{верт}} z_1;$$

$$M_{z_1=0}^{\text{верт}} = 0;$$

$$M_{z_1=0,05 \text{ м}}^{\text{верт}} = -1055,7 \cdot 0,05 = -52,78 \text{ Нм}$$

ділянка II,  $0 \leq z_2 \leq (l - l_1 - l_2) = 0,06$  м:

$$M^{\text{верт}} = R_A^{\text{верт}} (l_1 + z_2) + F r_1 z_2;$$

$$M_{z_2=0}^{\text{верт}} = -1055,7 \cdot 0,05 = -52,78 \text{ Нм};$$

$$M_{z_2=0,06 \text{ м}}^{\text{верт}} = -1055,7 \cdot (0,05 + 0,06) + 2427 \cdot 0,06 = 29,49 \text{ Нм}$$

ділянка III,  $0 \leq z_3 \leq 0,04$  м:

$$M^{\text{верт}} = R_B^{\text{верт}} z_3;$$

$$M_{z_3=0}^{\text{верт}} = 0;$$

$$M_{z_3=0,04\text{ м}}^{\text{верт}} = -872,4 \cdot 0,04 = -34,9 \text{ Нм}$$

Епюри  $M^{\text{верт}}$  наведено на рис 12.1, г.

в) складаємо схему навантажень в горизонтальній площині (рис. 12.1, д) та обчислюємо величину опорних реакцій. Сили малюємо вертикально, так як на розрахунки це не впливає.

$$\begin{aligned} \sum m_A = 0; & -F_{t_1} l_1 + F_{t_2} (l - l_2) + R_B^{\text{гор}} l = 0; \\ R_B^{\text{гор}} & = \frac{F_{t_1} l_1 - F_{t_2} (l - l_2)}{l} = \\ & = \frac{6667 \cdot 0,05 + 3077(0,15 - 0,04)}{0,15} = -34,13 \text{ Н} \\ \sum m_B = 0; & -R_A^{\text{гор}} l - F_{t_1} (l - l_1) - F_{t_2} l = 0; \\ R_A^{\text{гор}} & = \frac{F_{t_1} (l - l_1) - F_{t_2} l}{l} = \\ & = \frac{6667(0,15 - 0,05) - 3077 \cdot 0,04}{0,15} = 3624,1 \text{ Н} \end{aligned}$$

Складаємо рівняння згинального моменту у вертикальній площині  $M^{\text{гор}}$ :

ділянка I,  $0 \leq z_1 \leq l_1 = 0,05 \text{ м}$ :  
 $M^{\text{гор}} = R_A^{\text{гор}} z_1$ ;

$$M_{z_1=0}^{\text{гор}} = 0;$$

$$M_{z_1=0,05\text{ м}}^{\text{гор}} = 3624,13 \cdot 0,05 = 181,2 \text{ Нм}$$

ділянка II,  $0 \leq z_2 \leq (l - l_1 - l_2) = 0,06 \text{ м}$ :  
 $M^{\text{гор}} = R_A^{\text{гор}} (l_1 + z_2) - F_{t_1} z_2$ ;

$$M_{z_2=0}^{\text{гор}} = 3624,13 \cdot 0,05 = 181,2 \text{ Нм};$$

$$M_{z_2=0,06\text{ м}}^{\text{гор}} = 3624,13 \cdot (0,05 + 0,06) - 6667 \cdot 0,06 = -1,37 \text{ Нм}$$

ділянка III,  $0 \leq z_3 \leq 0,04 \text{ м}$ :  
 $M^{\text{гор}} = R_B^{\text{гор}} z_3$ ;

$$M_{z_3=0}^{\text{гор}} = 0;$$

$$M_{z_3=0,04\text{ м}}^{\text{гор}} = -34,13 \cdot 0,04 = -1,37 \text{ Нм}$$

Епюри  $M^{\text{гор}}$  наведено на рис 12.1, е.

г) результуючу епюру згинальних моментів будуємо як геометричну суму ординат від моментів у вертикальній і горизонтальній площинах:

$$M_{\text{рез}} = \sqrt{(M^{\text{верт}})^2 + (M^{\text{гор}})^2}$$

Обчислюємо значення ординат  $M_{\text{рез}}$  в граничних перетинах:

$$M_{\text{рез}(A)} = 0;$$

$$M_{\text{рез}(C)} = \sqrt{(52,78)^2 + (181,2)^2} = 188,7 \text{ Нм};$$

$$M_{\text{рез}(D)} = \sqrt{(34,9)^2 + (1,37)^2} = 34,95 \text{ Нм};$$

$$M_{\text{рез}(B)} = 0.$$

Епюра результуючого згинального моменту – це ламана лінія в просторі.

Для зручності зображення радіуси-вектори цієї ламаної розгортають в одну площину. Якщо епюри  $M_{\text{верт}}$  і  $M_{\text{гор}}$  на якійсь ділянці мають вигляд трикутників з однаковими вершинами, то на цій ділянці епюра  $M_{\text{рез}}$  буде окреслена прямою лінією. На інших ділянках буде опукла в бік нульової лінії крива (12.1, ж);

д) будуємо епюру крутного моменту (рис. 12.1, з). Вал має одну ділянку – CD, на якій  $M_{\text{кр}} = T = 200$  Нм.

е) значення приведенного моменту обчислюємо в характерних точках за третьюю теорією міцності:

$$M_{\text{прив}}^{\text{III}} = \sqrt{M_{\text{рез}}^2 + M_{\text{кр}}^2};$$

$$M_{\text{прив}(A)} = 0;$$

$$M_{\text{прив}(C)} = \sqrt{(188,7)^2 + (200)^2} = 274,97 \text{ Нм};$$

$$M_{\text{прив}(D)} = \sqrt{(34,95)^2 + (200)^2} = 203 \text{ Нм};$$

$$M_{\text{прив}(B)} = 0;$$

Епюра  $M_{\text{прив}}$  наведена на рис. 12.1, и. За епюром  $M_{\text{прив}}$  встановлюється небезпечний перетин вала. В даному випадку небезпечним є перетин, що проходить через точку C, тобто розташований під циліндричним зубчастим колесом;

ж) підбираємо діаметр вала. Матеріал вала знаходиться в плоскому напруженому стані від спільної дії згину та кручення.

Умову міцності записуємо в наступному вигляді:

$$\sigma_{\text{розр}} = \frac{M_{\text{прив}}}{W_x} \leq [\sigma]$$

де  $M_{\text{прив}} = 274,97$  Нм – приведений момент у небезпечному перетині вала;  $W_x \approx 0,1d^3$  – осьовий момент опору;  $d$  – діаметр вала.

Матеріал вала при обертанні зазнає дії змінних напружень. Спочатку визначають орієнтовний діаметр вала по деякому умовно допустимому напруженні:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_B}{k}$$

де  $\sigma_B$  – границя міцності матеріалу;  $k = 8 - 12$  – коефіцієнт запасу міцності.

Цей вал виготовляють зі сталі 45, для якої  $\sigma_B = 800$  МПа:

$$[\sigma] = \frac{800}{10} = 80 \text{ МПа}$$

Розраховуємо величину моменту опору:

$$W_x = \frac{M_{\text{прив}}}{[\sigma]} = \frac{274,97}{80 \cdot 10^6} = 3,44 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 3,44 \text{ мм}^3$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{W_x}{0,1}} = \sqrt[3]{34,4} = 3,25 \text{ см} = 32,5 \text{ мм}$$

Отриманий діаметр округляємо до найближчого стандартного. Приймаємо  $d = 34$  мм.

IV. Перевірку міцності вала при змінних напруженнях виконуємо по тими ж навантаженнями, за якими був виконаний розрахунок на статичну міцність (див. п. III). Для розрахунку використовуємо готові епюри (рис. 12.1, г, е). У небезпечному перерізі (перетин, що проходить через точку  $C$ ) маємо:

$$\begin{aligned} M_{\text{рез}} &= 188,7 \text{ МПа} \\ M_{\text{кр}} &= 200 \text{ МПа} \\ d &= 34 \text{ мм} \end{aligned}$$

Концентраторами напружень в небезпечному перерізі є галтель, шпонка і напружена посадка зубчастого колеса.

1. Обчислюємо величину номінального напруження від результуючого згинального моменту  $M_{\text{рез}}$ :

$$\sigma = \frac{M_{\text{рез}}}{W} = \frac{M_{\text{рез}}}{0,1 \cdot d^3} = \frac{188,7}{0,1 \cdot 34 \cdot 10^{-9}} = 48 \text{ МПа}$$

Обчислюємо величину номінального напруження від крутного моменту  $M_{\text{кр}} = T$ :

$$\tau = \frac{M_{\text{кр}}}{W_p} = \frac{M_{\text{кр}}}{0,2d^3} = \frac{200}{0,2 \cdot 34 \cdot 10^{-9}} = 25,4 \text{ МПа}$$

Нормальні напруження від згинального моменту при обертанні вала змінюються по симетричному циклу:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{max}} &= \sigma = 48 \text{ МПа} \\ \sigma_{\text{min}} &= -\sigma = -48 \text{ МПа} \\ \sigma_m &= 0 \\ \sigma_a &= \sigma = 48 \text{ МПа} \\ R &= \frac{\sigma_{\text{min}}}{\sigma_{\text{max}}} = -1 \end{aligned}$$

Дотичні напруження у нереверсивних валах змінюються по віднульовому циклу:

$$\begin{aligned} \tau_{\text{max}} &= \tau = 25,4 \text{ МПа} \\ \tau_{\text{min}} &= 0 \\ \tau_m &= 0,5\tau = 12,7 \text{ МПа} \\ \tau_a &= 0,5\tau = 12,7 \text{ МПа} \\ R &= \frac{\tau_{\text{min}}}{\tau_{\text{max}}} = 0 \end{aligned}$$

2. Визначаємо величину границь витривалості і коефіцієнтів:

а) границі витривалості знаходимо з табл. 12.1 для сталі з границею міцності  $\sigma_B = 800$  МПа:

$$\sigma_{-1} = 350 \text{ МПа}; \tau_{-1} = 210 \text{ МПа}$$

б) коефіцієнти впливу асиметрії циклу також знаходимо з табл. 12.1:

$$\Psi_\sigma = 0,1; \Psi_\tau = 0$$

Таблиця 12.1

## Границі витривалості та коефіцієнти впливу асиметрії циклу

Марка сталі	Діаметр заготовки, мм	Твердість НВ	$\sigma_B$	$\sigma_T$	$\sigma_{-1}$	$\tau_{-1}$	$\Psi_\sigma$	$\Psi_\tau$
			МПа					
20	60	145	400	240	170	100	0	0
45	Будь який	200	560	280	250	150	0	0
	120	240	800	550	350	210	0,1	0
	80	270	900	650	380	230	0,1	0,05
40X	Будь який	200	730	500	320	200	0,1	0,05
	200	240	800	650	360	210	0,1	0,05
	120	270	900	750	410	240	0,1	0,05
40XH	Будь який	240	820	650	360	210	0,1	0,05
	200	270	920	750	420	250	0,1	0,05

в) концентраторами напружень в небезпечному перерізі є галтель, шпонка і напружена посадка зубчастого колеса. З табл. 12.2 для сталі 45 з  $\sigma_B = 800$  МПа знаходимо:

– для галтелі:  $k_\sigma = 2,28$ ;  $k_\tau = 2,37$ ;

– для шпонки:  $k_\sigma = 2,01$ ;  $k_\tau = 1,88$ ;

– для посадки:  $k_\sigma = 2,09$ ;  $k_\tau = 1,71$ .

Для подальшого розрахунку приймаємо  $k_\sigma = 2,28$ ,  $k_\tau = 2,37$ .

Таблиця 12.2

Коефіцієнти  $k_\sigma$ ,  $k_\tau$ 

$\sigma_B$ , МПа	Галтель		Шпонковий паз		Посадка кілець підшипників кочення		Посадка деталей			
	$k_\sigma$	$k_\tau$	$k_\sigma$	$k_\tau$	$k_\sigma$	$k_\tau$	напружена		ковзаюча	
400	2,07	2,12	1,51	1,20	1,94	1,57	1,45	1,26	1,26	1,14
500	2,12	2,18	1,64	1,37	2,15	1,71	1,61	1,39	1,40	1,23
600	2,17	2,24	1,76	1,54	2,36	1,88	1,77	1,50	1,54	1,32
700	2,23	2,30	1,89	1,71	2,58	1,99	1,94	1,60	1,68	1,49
800	2,28	2,37	2,01	1,88	2,69	2,13	2,09	1,71	1,81	1,50
900	2,34	2,42	2,14	2,05	3,00	2,29	2,26	1,81	1,96	1,59
1000	2,39	2,48	2,26	2,22	3,22	2,43	2,42	1,96	2,10	1,86

г) масштабні коефіцієнти вибираємо з табл. 12.3 для  $d = 34$  мм і вуглецевої сталі:

$$k_M = 0,86; k_M' = 0,8$$

Таблиця 12.3

Масштабні коефіцієнти  $k_M$ ,  $k_M'$ 

Діаметр вала, мм	Вуглецеві сталі		Леговані сталі	
	$k_M$	$k_M'$	$k_M$	$k_M'$
20...30	0,91	0,89	0,83	0,89
30...50	0,86	0,80	0,75	0,80
50...70	0,86	0,75	0,69	0,75
70...100	0,74	0,73	0,66	0,73
100...150	0,69	0,69	0,61	0,69
150...500	0,60	0,60	0,54	0,60

д) коефіцієнти стану поверхні вибираємо з табл. 12.4 для чистового точіння:

$$k_{\Pi} = k_{\Pi}^{\prime} = 0,9$$

Таблиця 12.4

**Коефіцієнти стану поверхні  $k_{\Pi}$ ,  $k_{\Pi}^{\prime}$**

Вид обробки	$\sigma_B = 800, \text{ МПа}$		
	40	80	120
Шліфування	1	1	1
Чистове точіння	0,95	0,90	0,80
Обдирання	0,85	0,80	0,65
Необроблена поверхня	0,75	0,65	0,45

3. Обчислюємо фактичний основний коефіцієнт запасу міцності:

$$S_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\Psi_{\sigma} \sigma_m + \sigma_a \frac{k_{\sigma}}{\tau_{-1} k_M \cdot k_{\Pi}}} = \frac{350}{0 + 48 \cdot \frac{2,28}{210 \cdot 0,86 \cdot 0,9}} = 2,5$$

$$S_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\Psi_{\tau} \tau_m + \tau_a \frac{k_{\tau}}{k_M^{\prime} \cdot k_{\Pi}^{\prime}}} = \frac{210}{0 + 12,7 \cdot \frac{2,37}{1 \cdot 0,8 \cdot 0,9}} = 5,02$$

$$S_0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{S_{\sigma}^2} + \frac{1}{S_{\tau}^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2,5^2} + \frac{1}{5,02^2}}} = 2,2$$

Коефіцієнт запасу міцності не вийшов за допустимі межі  $S_0 = 1,5 - 3$ , отже, діаметр перераховувати не треба.

## 1.2. Завдання для самостійної роботи

### Задача № 1

За заданим геометричним параметрам вала, крутному моменту, розмірами зубчастих коліс виконати розрахунок вала на статичну міцність і витривалість (рис. 12.2). Напрямок сил, що діють на вал, визначається розташуванням спряжених зубчастих коліс, показаних на малюнку тонкими лініями.

Виконайте розрахунок вала на статичну міцність, визначивши при цьому діаметр вала в небезпечному перерізі по третій теорії міцності.

Розрахунок на витривалість виконайте по номінальному навантаженню, що зазначене у таблиці 12.5., а цикл напружень прийміть симетричним для напружень згину та пульсуючим для напружень кручення. Дані для розрахунку взяти з таблиці 12.5.



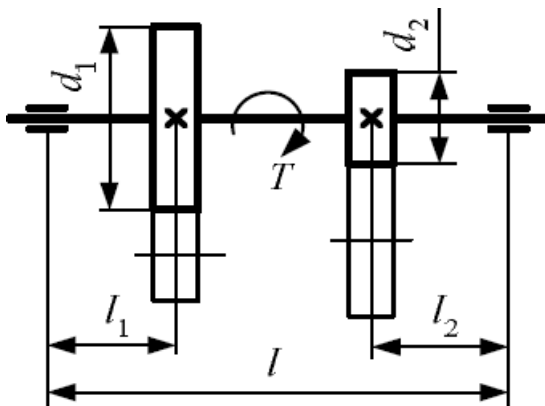


Рисунок 12.2.

Таблиця 12.5

**Вихідні дані для задачі № 1**

Величина	Варіант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T$ , Нм	240	250	260	270	280	290	300	310	320	330
$d_1$ , мм	100	100	110	110	120	120	130	130	140	140
$d_2$ , мм	50	50	55	55	60	60	65	65	70	70
$l_1$ , мм	40	40	40	45	45	45	50	50	50	50
$l_2$ , мм	50	50	50	55	55	50	60	60	60	60
$l$ , мм	180	180	180	190	190	190	200	200	200	200