# ТЕМА 2. ВСТУП ДО АНАЛІЗУ.
# ТЕОРІЯ ГРАНИЦЬ ПОСЛІДОВНЕСТЕЙ.

$x_n = \frac{n}{n+1}$

## 2.1 Поняття границі послідовності

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$

Розглянемо деяку послідовність $\{x_n\}$. Залежно від зростання номера члена послідовності $n$ її члени можуть поводити себе по-різному. Наприклад, для послідовності з загальним членом $x_n = 3n$ з зростанням номера $n$ члени послідовності необмежено зростають, для послідовності, де $x_n = (-1)^n$ ($-1, 1, -1, 1$), її члени по черзі приймають значення 1 та –1, а для послідовності з загальним членом $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ пр. збільшенні номера $n$ її члени стають дедалі ближчими до одиниці. У останньому випадку говорять, що послідовність є збіжною, а число, до якого наближаються члени послідовності з зростанням їх номера, називають границею цієї послідовності. Надамо точне означення поняття границі послідовності.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$

**<u>Означення 2.1</u>**. Число $a$ називають *границею послідовності* $\{x_n\}$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$, яким би малим воно не було, можна визначити такий номер $n_0$, що нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$ виконується для всіх $n > n_0$. Послідовність, що має границю, називають *збіжною*. Якщо послідовність границі не має, то кажуть, що вона є *розбіжною*.

$|x_1 - x_2|$

Те, що послідовність $\{x_n\}$ має своєю границею число $a$, записують так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Використовуючи логічну символіку, означення 2.1 можна записати наступним чином:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : |x_n - a| < \varepsilon\ \forall n > n_0 \qquad (2.1)$$

$|x_n - a| < \varepsilon$, $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$

$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$

$a-\varepsilon \quad a \quad a+\varepsilon$

З геометричної точки зору $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ означає, що який би $\varepsilon$- окіл точки $a$ ми б не взяли, завжди знайдеться такий номер $n_0$, що, починаючи з наступного номера $n_0 + 1$, всі члени послідовності потраплять у цей $\varepsilon$-окіл.

Найпростішим прикладом збіжної послідовності є стала послідовність з загальним членом $x_n = a = const$, для якої $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} a = a$. Дійсно, у цьому випадку $\forall n \in N$ $|x_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon\ \forall \varepsilon > 0$.

**Приклад 2.1**. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{2n} = 0$.

$- x_n$, $- a$

$\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{6}, \ldots$

**Розв'язання**. Згідно з означенням 2.1 границі послідовності

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{2n} = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \left| \frac{3}{2n} - 0 \right| < \varepsilon\ \forall n > n_0.$$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : |x_n| < \varepsilon\ \forall n > n_0$

З нерівності $\left|\frac{3}{2n}-0\right|<\varepsilon$ знаходимо: $\frac{3}{2n}<\varepsilon$, $\frac{3-2n\varepsilon}{2n}<0$. Оскільки $n\in\mathbb{N}$, $+$

то $2n>0$ і повинна виконуватися нерівність $3-2n\varepsilon<0$. Звідси $2n\varepsilon>3$ і $n>\frac{3}{2\varepsilon}$.

$n_0 \in N$

Виберемо натуральне число $n_0=\left[\frac{3}{2\varepsilon}\right]+1>\frac{3}{2\varepsilon}$. $\forall n>n_0$ $\left|\frac{3}{2n}-0\right|<\varepsilon$, тому, згідно з означенням границі послідовності, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{2n}=0$.

$\{q^n\}, |q|<1$

$q=\frac{1}{2}: \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

**Приклад 2.2**. Довести, що при $|q|<1$ $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$.

**Розв'язання**. Спочатку доведемо нерівність $|q|^n<\frac{1}{n(1-|q|)}$. Оскільки $|q|<1$, то при будь-якому натуральному $k<n$ $\underline{|q|^k>|q|^n}$. Застосовуючи цю нерівність, а також формулу суми $n$ членів геометричної прогресії з першим членом 1 та знаменником $q$ ($S_n=\frac{1-q^n}{1-q}$), отримуємо:

$S_n=1+q+q^2+\ldots+q^n=\frac{1-q^n}{1-q}$

$$n|q|^n=|q|^n+|q|^n+\ldots+|q|^n<1+|q|+|q|^2+\ldots+|q|^{n-1}=\frac{1-|q|^n}{1-|q|}.$$

Таким чином, $n|q|^n<\frac{1-|q|^n}{1-|q|}$, звідки $|q|^n<\frac{1}{n(1-|q|)}$. Права частина цієї нерівності з зростанням $n$ наближається до нуля. Дійсно, нерівність $\frac{1}{n(1-|q|)}<\varepsilon$ виконується $\forall n>\frac{1}{\varepsilon(1-|q|)}$.

$1<\varepsilon n(1-|q|)$

Виберемо $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon(1-|q|)}\right]+1$. Оскільки $|q|^n<\frac{1}{n(1-|q|)}$ , то отримуємо, що $\forall n>n_0>\frac{1}{\varepsilon(1-|q|)}$ $|q|^n<\varepsilon$, звідки випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$ при $|q|<1$.

**Приклад 2.3**. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$.

$\lim\limits_{n\to\infty} 2^n \neq 0$

$x_n=\frac{n}{n+1}$, $a=1$

**Розв'язання**. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$, то, за означенням границі послідовності, $\forall\varepsilon>0\quad\exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}:\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon\quad\forall n>n_0$. $\frac{n}{n+1}-1=\frac{-1}{n+1}$, $\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}<\varepsilon$.

Звідси знаходимо, що $n>\frac{1}{\varepsilon}-1<\frac{1}{\varepsilon}$. Вибравши $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, отримаємо, що

$n>\frac{1}{\varepsilon}$, $n_0=$

$\forall n>n_0$ виконується нерівність $\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$.

$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\left|\frac{n-(n+1)}{n+1}\right|$

$\left|-\frac{1}{n+1}\right|=\frac{1}{n+1}$

$-1; 1; -1; \ldots$

**Приклад 2.4**. Довести, що послідовність $x_n = (-1)^n$ є розбіжною.

**Розв'язання**. Доведемо, що послідовність $x_n = (-1)^n$ не має границі. Нехай існує таке число $a$, що $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n = a$. Виберемо $\varepsilon = \frac{1}{2}$. За означенням границі послідовності, отримаємо, що для будь-яких членів цієї послідовності $x_n$ та $x_m$ з достатньо великими номерами виконуються нерівності $|x_n - a| < \frac{1}{2}$, $|x_m - a| < \frac{1}{2}$. Оскільки модуль суми не перевищує суми модулів, то маємо нерівність:

$|a+b| \le |a|+|b|$

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) + (a - x_m)| \le |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Отримали невірну нерівність, оскільки при непарних $n$ та $m$ $x_n = \cancel{x_m} = -1$, $x_m = 1$ і, відповідно $|x_n - x_m| = |-2| = 2 > 1$. Отже, припущення про існування границі послідовності $x_n = (-1)^n$ є невірним, ця границя не існує, тому дана послідовність є розбіжною.

**<u>Означення 2.2</u>**. Послідовність $\{x_n\}$ називають *нескінченно малою*, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Прикладами нескінченно малих послідовностей є $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{3}{2^n}$, оскільки границі цих послідовностей дорівнюють нулю. Послідовність $x_n = \frac{n}{n+1}$ не є нескінченно малою, оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1 \ne 0$ .

**<u>Означення 2.3</u>**. Послідовність $\{x_n\}$ називають *нескінченно великою*, якщо для довільного додатного числа $M$ можна визначити такий номер $n_0$, що для всіх $n > n_0$ виконується нерівність $|x_n| \ge M$ .

Для нескінченно великих послідовностей використовують позначення: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ .

$x_n = 5^n \quad |x_n| = |5^n| = 5^n \ge M$

Прикладами нескінченно великих послідовностей є $x_n = 3n$, $x_n = 5^n$. $n \ge \log_5 M$

**<u>Означення 2.4</u>**. Послідовність $\{x_n\}$ називають *збіжною до* $+\infty$ $(-\infty)$, якщо вона є нескінченно великою і всі її члени, починаючи з деякого номера, є додатними(від'ємними).

$n_0 = [\log_5 M] + 1$

Якщо послідовність $\{x_n\}$ збігається до $+\infty$ $(-\infty)$, то використовують запис: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ ).

Прикладом послідовності, збіжної до $+\infty$ є послідовність з загальним членом $x_n = 1 + 2n$. Послідовність, загальний член якої має вигляд $x_n = 1 - 5n$, є прикладом послідовності, збіжної до $-\infty$.

**Приклад 2.5**. Довести, що при $q>1$ $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$.

**Розв'язання**. Оскільки $q>1$, то $q=1+p$, де $p>0$. Тоді $q^n=(1+p)^n>1+np>np$. Всі члени послідовності $\{q^n\}$ є додатними. Для того, щоб довести рівність $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=+\infty$, потрібно показати, що для довільного додатного числа $M$ можна визначити такий номер $n_0$, що для всіх $n>n_0$ виконується нерівність $|x_n|=x_n\geq M$. З нерівності $np>M$ випливає, що $n>\dfrac{M}{p}=\dfrac{M}{q-1}$. Виберемо $n_0=\left[\dfrac{M}{q-1}\right]+1$. Тоді при $n>n_0$ $np>M$, звідки випливає, що при $n>n_0$ $x_n=q^n>M$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=+\infty$.

## 2.2. Основні теореми про границі послідовностей

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon): \forall n>n_0\ |x_n-a|<\varepsilon$

Сформулюємо без доведення основні теореми, що використовуються при обчисленні границь послідовностей.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

**Теорема 2.1**. Для того, щоб послідовність $\{x_n\}$ збігалася до числа $a$, необхідно та достатньо, щоб послідовність $\{\alpha_n\}$, $\alpha_n=x_n-a$, була нескінченно малою.

$\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$

**Доведення**. Доведемо необхідність. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$. Тоді, за означенням границі, $\forall\varepsilon>0\ \exists \mathrm{n}_0(\varepsilon)$: $|x_n-a|=|(x_n-a)-0|<\varepsilon$ $\forall \mathrm{n}>\mathrm{n}_0(\varepsilon)$. Звідси випливає, що послідовність $\alpha_n=x_n-a$ збігається до нуля, тобто є нескінченно малою.

Доведемо достатність. Нехай послідовність з загальним членом $\alpha_n=x_n-a$ є нескінченно малою. Тоді $\forall\varepsilon>0\ \exists \mathrm{n}_0(\varepsilon)$: $|(x_n-a)-0|=|x_n-a|<\varepsilon$ $\forall \mathrm{n}>\mathrm{n}_0(\varepsilon)$, тобто за означенням 2.1 границі послідовності маємо: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$. Теорему доведено.

**Теорема 2.2**. Якщо послідовності $\{\alpha_n\}$ та $\{\beta_n\}$ нескінченно малі, а послідовність $\{c_n\}$ обмежена, то послідовності $\{\alpha_n+\beta_n\}$ та $\{c_n\cdot\alpha_n\}$ є нескінченно малими.

**Доведення**. Нехай $\varepsilon$ – довільне додатне число. Оскільки $\{\alpha_n\}$ та $\{\beta_n\}$ є нескінченно малими, то знайдуться такі номери $n_1\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ та $n_2\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$, що виконуються нерівності:

$$|\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{2}\ \forall \mathrm{n}>\mathrm{n}_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right),\ |\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2}\ \forall \mathrm{n}>\mathrm{n}_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Отримуємо співвідношення:

$$|\alpha_n+\beta_n|\leq|\alpha_n|+|\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Воно виконується для всіх номерів $n$, які перевищують найбільше з чисел $n_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ та $n_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$. Таким чином, $\{\alpha_n + \beta_n\}$ є нескінченно малою послідовністю.

Доведемо, що послідовність $\{c_n \cdot \alpha_n\}$ також є нескінченно малою. За умовою, послідовність $\{c_n\}$ обмежена, тобто $\exists M > 0\ |c_n| < M\ \forall n \in \mathbb{N}$. Оскільки $\{\alpha_n\}$ є нескінченно малою послідовністю, то існує номер $n_0\left(\frac{\varepsilon}{M}\right)$, такий, що для всіх $n > n_0\left(\frac{\varepsilon}{M}\right)$ $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}$. Тоді для цих $n$ виконується нерівність:

$\cos k\pi = (-1)^k$

$$|c_n \cdot \alpha_n| = |c_n| \cdot |\alpha_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon .$$

Ця нерівність означає, що послідовність $\{c_n \cdot \alpha_n\}$ є нескінченно малою. Теорему доведено.

**Приклад 2.6**. Знайти границю послідовності $x_n = \frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}$. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$0, -1, 0, +1, 0, -1, \ldots$

**Розв'язання**. Послідовність $\alpha_n = \frac{1}{n}$ є нескінченно малою ( $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$), а послідовність $c_n = \cos\frac{n\pi}{2}$ є обмеженою. $|c_n| \le 1$ Оскільки $x_n = \alpha_n \cdot c_n$ – це добуток обмеженої послідовності на нескінченно малу, то $\{x_n\}$ є нескінченно малою послідовністю, тому $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

**Теорема 2.3.** Збіжна послідовність є обмеженою.

**Доведення**. Нехай послідовність $\{x_n\}$ є збіжною, тобто $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a = const$. Тоді, за означенням границі послідовності, маємо:

$|x| < a$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) : |x_n - a| < \varepsilon\ \forall n > n_0 .$$

$-a < x < a$

Нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$ рівносильна нерівності $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, тобто $\forall n > n_0\ |x_n| < |a| + |\varepsilon|$. Нехай тепер $B$ – максимальне з чисел $x_1,\ x_2, \ldots, x_{n_0}$. Тоді $\forall n \in N\ \ |x_n| < A$, де $A$ – максимальне з чисел $B$ та $|a| + |\varepsilon|$. Це означає, що послідовність $\{x_n\}$ є обмеженою. Теорему доведено. $|x_n| < A\ \forall n \in N$

**Теорема 2.4.** Якщо послідовності $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ є збіжними і при цьому $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то послідовність $\{x_n + y_n\}$ також є збіжною і при цьому $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$.

**Доведення**. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то, за теоремою 2.1, послідовності $\alpha_n = x_n - a$ та $\beta_n = y_n - b$ є нескінченно малими. Послідовність $\{\alpha_n + \beta_n\}$ є нескінченно малою як сума двох нескінченно малих послідовностей (теорема 2.2). Оскільки $\alpha_n+\beta_n=(x_n+y_n)-(a+b)$, то з теореми 2.1 випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=a+b$. Теорему доведено.

Використовуючи доведені вище теореми 2.1 – 2.4, можна довести наступні теореми.

**Теорема 2.5.** Якщо послідовності $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ є збіжними і при цьому $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$, то послідовність $\{x_n\cdot y_n\}$ також є збіжною і при цьому $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=ab$.

**Теорема 2.6.** Якщо послідовності $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ є збіжними і при цьому $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b\neq 0$, то послідовність $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ також є збіжною і при цьому $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{a}{b}$.

**Теорема 2.7**. Для того, щоб послідовність $\{\alpha_n\}$ була нескінченно малою, необхідно і достатньо, щоб послідовність $\left\{\dfrac{1}{\alpha_n}\right\}$ була нескінченно великою.

**Доведення**. Необхідність. Нехай $\{\alpha_n\}$ є нескінченно малою послідовністю. Тоді нерівність $|\alpha_n|<\dfrac{1}{M}$ і рівносильна їй нерівність $\left|\dfrac{1}{\alpha_n}\right|>M$ виконуються $\forall n$, починаючи з деякого номера $n_0$. Це й означає, що $\left\{\dfrac{1}{\alpha_n}\right\}$ є нескінченно великою послідовністю.

Достатність. Якщо $\left\{\dfrac{1}{\alpha_n}\right\}$ є нескінченно великою послідовністю, то нерівність $\left|\dfrac{1}{\alpha_n}\right|>\dfrac{1}{\varepsilon}$ ($\varepsilon$ – довільне фіксоване додатне число), а також рівносильна їй нерівність $|\alpha_n|<\varepsilon$ виконуються $\forall n$, починаючи з деякого номера $n_1$. Звідси випливає, що послідовність $\{\alpha_n\}$ є нескінченно малою. Теорему доведено.

**Теорема 2.8**. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$ і $x_n\le z_n\le y_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$.

**Доведення**. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$, то $\forall\varepsilon>0$ можна знайти такі номери $n_1(\varepsilon)$ та $n_2(\varepsilon)$, що $\forall n>n_1$ $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$, а $\forall n>n_2$ виконується нерівність $a-\varepsilon<y_n<a+\varepsilon$. Позначимо через $n_0$ найбільше з чисел $n_1$ та $n_2$. Тоді при $n>n_0$ $x_n$ і $y_n$ потрапляють у $\varepsilon$- окіл точки $a$. З нерівності $x_n\le z_n\le y_n$ випливає, що $z_n$ також потрапляє у цей $\varepsilon$-окіл. Це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$. Теорему доведено.

**Теорема 2.9 (перехід до границі у нерівностях)**. Якщо послідовності $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ є збіжними, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, і при цьому, починаючи з деякого номера, $x_n \le y_n$, то $a \le b$.

**Доведення.** Припустимо, що $a > b$. Тоді існує такий номер $n_0$, що $\forall n > n_0$ $|x_n - a| < \dfrac{a-b}{2}$, $|y_n - b| < \dfrac{a-b}{2}$. Звідси випливає:

$$x_n > a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}, \quad y_n < b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Отримали, що $\forall n > n_0$ $y_n < \dfrac{a+b}{2} < x_n$, що суперечить умові $x_n \le y_n$. Отримана суперечність доводить теорему.

## 2.3 Границя обмеженої монотонної послідовності

Ефективним засобом доведення існування границі послідовності є теорема Больцано– Вейєрштрасса, яку наведемо без доведення.

**Теорема 2.10. (Теорема Больцано – Вейєрштрасса)**. Всяка монотонна обмежена послідовність має границю.

Розглянемо приклади застосування цієї теореми. $x_2 = \sqrt{2+x_1} = \sqrt{2+\sqrt{2}}.$

**Приклад 2.7**. Довести існування границі послідовності, заданої рекурентним способом: $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$. Знайти цю границю. $x_3 = \sqrt{2+x_2} =$

**Розв'язання**. Покажемо обмеженість заданої послідовності. Для цього $= \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ використаємо метод математичної індукції. При $n = 1$ маємо $x_1 = \sqrt{2} < 2$, $x_2 = \sqrt{2 + x_1} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$. Нехай $x_k < 2$. Доведемо, що звідси випливає, що $x_{k+1} < 2$. Дійсно, $x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k} < \sqrt{2+2} = 2$. Отже, за методом математичної індукції $x_n < 2 \; \forall n \in \mathbb{N}$. Отже, послідовність є обмеженою зверху. При цьому $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} > x_n$, тобто послідовність $\{x_n\}$ монотонно зростає. За теоремою Больцано – Вейєрштрасса послідовність $\{x_n\}$ має границю. $\sqrt{2+x_n} > x_n$, $2+x_n > x_n^2$

Позначимо цю границю через $a$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. З рівності $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ випливає, що $x_{n+1}^2 = 2 + x_n$. Перейшовши у цій рівності до границі, отримуємо: $x_n^2 - x_n - 2 < 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}^2 = 2 + \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, тому $a^2 = 2 + a$, звідки $a_1 = -1$, $a_2 = 2$. Оскільки $x_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \ge 0$, тому $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$. $(x_n-2)(x_n+1) < 0$

$0 < x_n < 2$

**Приклад 2.8**. Довести, що послідовність $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$ є збіжною та знайти її границю.

$x_n \to 0$

$n \to \infty$

$\forall n\in N\ x_{n+1}<x_n \quad \{x_n\}\searrow$

**Розв'язання**. Покажемо, що послідовність $\{x_n\}$ монотонно спадає. Запишемо вираз для $x_{n+1}$: $x_{n+1}=\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}=\dfrac{n!}{(n+1)^n}=\overbrace{\dfrac{n!}{n^n}}^{=x_n}\dfrac{n^n}{(n+1)^n}=\dfrac{n^n}{(n+1)^n}\cdot x_n$.

Оскільки $\dfrac{n^n}{(n+1)^n}=\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n<1$ , то $x_{n+1}<x_n\ \forall n\in\mathbb{N}$, тобто ця послідовність монотонно спадає. При цьому $x_n>0\ \forall n\in\mathbb{N}$, тому послідовність $\{x_n\}$ обмежена знизу. За теоремою Больцано – Вейєрштрасса ця послідовність є збіжною. З нерівності $x_n>0$ випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\geq 0$. Можна довести, що $a=0$.

$$\frac{(n+1)^n}{n^n}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\geq 1+n\cdot\frac{1}{n}=2.$$

$(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x$

$x>0, \alpha>0$

Звідси отримуємо, що $\dfrac{n^n}{(n+1)^n}\leq\dfrac{1}{2}$. Отже, $\underline{x_{n+1}\leq\frac{1}{2}x_n}$. Переходячи до границь у лівій та правій частинах останньої нерівності, знаходимо, що $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}\leq\dfrac{1}{2}\overbrace{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}^{=a}$, або $a\leq\dfrac{1}{2}a$. Звідси отримуємо, що $a\leq 0$. Оскільки раніше ми встановили, що $a\geq 0$, то $a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

Використавши теорему Больцано-Вейєрштрасса, можна довести, що

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e. \tag{2.2}$$

Доведено, що число $e$ – ірраціональне, крім того, воно є трансцендентним числом, тобто $e$ не є коренем жодного многочлена з цілими коефіцієнтами. Його наближене значення $e\approx 2{,}7182818...$

## 2.4 Деякі важливі границі послідовностей

**Приклад 2.9**. Показати, що коли $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b\neq 0$, то

$$\lim_{n\to\infty}x_ny_n=\begin{cases}+\infty, & b>0,\\ -\infty, & b<0.\end{cases} \tag{2.3}$$

**Розв'язання**. Нехай $b<0$. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$ і $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$, то знайдуться номери $n_1$ та $n_2$, що $\forall n>n_1\ |y_n-b|<-\dfrac{b}{2}$, $\forall n>n_2\ x_n>-\dfrac{2M}{b}$, де $M$ – довільне фіксоване додатне число. Нехай $n_0$ – найбільше з чисел $n_1$ та $n_2$. Тоді $\forall n>n_0$ виконуються нерівності $y_n<\dfrac{b}{2}$, $x_n>-\dfrac{2M}{b}$, або $-y_n>-\dfrac{b}{2}$, $x_n>\dfrac{2M}{-b}$. Праві і ліві частини двох останніх нерівностей додатні, тому ми їх можемо почленно перемножити. Отримаємо $-x_n y_n > M$, або $x_n y_n < -M \ \forall n > n_0$. Звідси випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = -\infty$. Аналогічно доводиться, що при $b > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = +\infty$.

**Приклад 2.10.** Нехай $k$ – ціле число. Довести, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k} = \begin{cases} 0, k > 0, \\ +\infty, k < 0. \end{cases} \qquad (2.4)$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^k} = 0$ $\quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \in N$
$\forall n > n_0 \ \left|\frac{1}{n^k} - 0\right| < \varepsilon$

**Розв'язання**. Нехай $k > 0$. Тоді нерівність $\left|\frac{1}{n^k}\right| = \frac{1}{n^k} < \varepsilon$ виконується для всіх $n > \left[\frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}\right] + 1$. Дійсно, $\frac{1}{n^k} < \varepsilon \Leftrightarrow n^k > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt[k]{n}}$.

$n^k > \frac{1}{\varepsilon}$
$n > \frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}$, $n_0 = \left[\frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}\right] + 1$

Оскільки $n_0 = \left[\frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}\right] + 1 > \frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}$, то $\forall n > n_0$ $\frac{1}{n^k} = \left|\frac{1}{n^k} - 0\right| < \varepsilon$, тобто, за означенням границі послідовності при $k > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^k} = 0$.

Якщо $k < 0$, то $\frac{1}{n^k} = \frac{1}{\frac{1}{n^{-k}}}$. Вище було доведено, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{-k}} = 0$, оскільки

$\frac{1}{n^{-k}} \to 0$ $\quad \left(\frac{1}{0}\right) = +\infty$

$-k > 0$. Послідовність $\left\{\frac{1}{n^{-k}}\right\}$ є нескінченно малою, а всі її члени є додатними, тому обернена послідовність $\left\{\frac{1}{n^k}\right\}$ за теоремою 2.7 є нескінченно великою. Оскільки всі її члени є додатними, то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^k} = +\infty$ при $k < 0$.

**Приклад 2.11**. Нехай $P_k(n) = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_{k-1} n + a_k$, де $k \in \mathbb{N}$. Довести, що

$n \in N$

$$\lim_{n\to\infty} P_k(n) = \begin{cases} +\infty, a_0 > 0, \\ -\infty, a_0 < 0. \end{cases} \qquad (2.5)$$

**Розв'язання**. Оскільки $P_k(n) = n^k\left(a_0 + \frac{a_1}{n} + \ldots + \frac{a_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{a_k}{n^k}\right)$, $\lim\limits_{n\to\infty} n^k = +\infty$ і з

$\to 0 \quad 0 \to 0$

формули (2.4) випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_0 + \frac{a_1}{n} + \ldots + \frac{a_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{a_k}{n^k}\right) = a_0$, то з формули (2.3) випливає (2.5).

**Приклад 2.12**. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

**Розв'язання**. Нехай $\sqrt[n]{n} = 1 + \alpha_n$. Звідси знаходимо, що

$x_n = a + \alpha_n$

$$n = (1 + \alpha_n)^n = 1 + n\cdot\alpha_n + \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2 + \ldots + \alpha_n^n.$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$

$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + b^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$

З останньої рівності випливає, що $n > 1 + \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2$. Після перенесення одиниці у ліву частину та скорочення на $n-1$, отримаємо $1 > \frac{n}{2}\cdot\alpha_n^2$. Звідси випливає, що $\frac{2}{n} > \alpha_n^2$, або $\sqrt{\frac{2}{n}} > \alpha_n > 0$. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2}{n}} = 0$, то за теоремою 2.8 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$, тобто $\alpha_n$ є нескінченно малою величиною при $n\to\infty$. Тому $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\alpha_n) = 1+0 = 1$. Таким чином, отримали формулу:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1. \qquad (2.6)$$

$n^{\frac{1}{n}} \to (\infty)^0$

**Приклад 2.13**. Довести, що при $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$ та $k > 0,\ s > 0$

$k=3,\ s=10$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+1}{n^{10}-5n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_k}{b_0 n^s + b_1 n^{s-1} + \ldots + b_s} = \begin{cases} a_0/b_0, & k = s, \\ 0, & k < s, \\ +\infty, & k > s,\ a_0/b_0 > 0, \\ -\infty, & k > s,\ a_0/b_0 < 0. \end{cases} \qquad (2.7)$$

**Розв'язання**. Нехай $R(n) = \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_k}{b_0 n^s + b_1 n^{s-1} + \ldots + b_s} = \frac{1}{n^{s-k}}\cdot\frac{a_0 + \overset{\to 0}{\frac{a_1}{n}} + \ldots + \overset{\to 0}{\frac{a_k}{n^k}}}{b_0 + \underset{\to 0}{\frac{b_1}{n}} + \ldots + \underset{\to 0}{\frac{b_s}{n^s}}}$.

$\to \frac{a_0}{b_0}$

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{s-k}} = \begin{cases} 1, & s = k, \\ 0, & s > k, \\ +\infty, & s < k, \end{cases} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{a_0 + \frac{a_1}{n} + \ldots + \frac{a_k}{n^k}}{b_0 + \frac{b_1}{n} + \ldots + \frac{b_s}{n^s}} = \frac{a_0}{b_0},$$

то формула (2.7) випливає з формули (2.4) і з теореми 2.5 про границю добутку послідовностей.

**Приклад 2.14**. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n-1}{2n^3+5n+4}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-3n+7}{2n+5}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-3n+7}{2n^2+n+1}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5-2n^2}{n+2}$.

**Розв'язання**. Для знаходження заданих границь використаємо формулу (2.7) прикладу (2.13):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1 - \overset{\to 0}{\frac{3}{n}} + \overset{\to 0}{\frac{7}{n^2}}}{2 + \underset{\to 0}{\frac{1}{n}} + \underset{\to 0}{\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{2}$$

$k < s$ $\quad : n^3 \quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{2+\frac{5}{n^2}+\frac{4}{n^3}} = \frac{0}{2} = 0$

а) Для границі $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n-1}{2n^3+5n+4}$ $k=2$, $s=3$. Оскільки, то дана границя дорівнює нулю.

б) Маємо $k=2$, $s=1$, $k>s$, $a_0=1$, $b_0=2$, $\frac{a_0}{b_0}>0$, тому $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-3n+7}{2n+5}=+\infty$.

в) Тут $k=s=2$, $a_0=1$, $b_0=2$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-3n+7}{2n^2+n+1}=\frac{a_0}{b_0}=\frac{1}{2}$ .

г) У цьому випадку $k=2$, $s=1$, $k>s$, $a_0=-2$, $b_0=1$, $\frac{a_0}{b_0}<0$, тому $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5-2n^2}{n+2}=-\infty$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-1}{4n^2+2n+3}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$