Заняття 4,5

Аксіоматична побудова геометрії псевдоевклідової площини

План:

1. Система аксіом псевдоевклідової площини (неевклідова). Властивості векторів. Базиси.
2. Аналітична геометрія прямих псевдоевклідової площини.

1. Система аксіом псевдоевклідової площини. Властивості векторів. Базиси.

Аксіому 4.4 ($\forall \bar{a} \neq \bar{0} \quad \bar{a}^2 > 0$) аксіоматики Вейля евклідової площини замінимо іншою аксіомою, яку позначимо 4.4^*.

Аксіома 4.4^*. Існують принаймні два ненульових вектори $\bar{a}$ й $\bar{b}$ таких, що $\bar{a}^2 < 0$, $\bar{b}^2 > 0$.

Всі інші аксіоми аксіоматики Вейля залишимо без змін. Отримана аксіоматика визначає нову площину, яку називають **псевдоевклідовою площиною** й позначають ${}^1R_2$. Геометрію цієї площини називають псевдоевклідовою геометрією або геометрією Мінковського.

Питання. Про яку ще неевклідову геометрію ви знаєте? Як утворюється її аксіоматика?

Оскільки всі аксіоми афінної площини переносяться на псевдоевклідову площину, то й всі поняття та теореми афінної геометрії мають місце в псевдоевклідовій геометрії. Однак своїми **метричними властивостями** псевдоевклідова площина суттєво відрізняється від евклідової площини.

Вектори $\bar{a}$ й $\bar{b}$, що задовольняють аксіому 4.4^*, утворюють векторний базис псевдоевклідової площини, оскільки має місце

Теорема 1.1 Ненульові вектори, скалярні квадрати яких мають різні знаки, лінійно незалежні.

Доведення. Нехай $\bar{a}^2 < 0$ й $\bar{b}^2 > 0$. Якби виконувалась рівність $\bar{a} = \lambda \bar{b}$ при $\lambda \neq 0$, то $\bar{a}^2 = \lambda^2 \bar{b}^2$, що є суперечністю.

Означення 1.1 Вектори називаються **ортогональними**, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю.

Теорема 1.2 Якщо вектори $\bar{m}$ та $\bar{n}$ ортогональні вектору $\bar{p} \neq \bar{0}$, то вони лінійно залежні (колінеарні).

Доведення. Виведемо спочатку необхідну та достатню умову для колінеарності векторів $\bar{m}$ та $\bar{n}$.

Рівність $x\bar{m} + y\bar{n} = \bar{0}$ домножимо скалярно спочатку на вектор $\bar{m}$, а потім на вектор $\bar{n}$, отримаємо

$$\begin{cases} x\bar{m}^2 + y\bar{m}\bar{n} = 0, \\ x\bar{m}\bar{n} + y\bar{n}^2 = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Ця система має ненульовий розв'язок (x, y) тоді й тільки тоді, коли

$$\begin{vmatrix} \bar{m}^2 & \bar{m}\bar{n} \\ \bar{m}\bar{n} & \bar{n}^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Ця рівність і є критерієм колінеарності векторів $\bar{m}$ та $\bar{n}$.

Далі, відповідно аксіомі 3.1 $x\bar{m} + y\bar{n} + t\bar{p} = \bar{0}$ при $x^2 + y^2 + t^2 \neq 0$. Якщо б $x = y = 0$, то $t = 0$ (так як $\bar{p} \neq \bar{0}$), що неможливо. Тому $x^2 + y^2 \neq 0$. Рівність $x\bar{m} + y\bar{n} + t\bar{p} = \bar{0}$ домножимо скалярно спочатку на вектор $\bar{m}$, а потім на вектор $\bar{n}$, врахуємо, що $\bar{m}\bar{p} = \bar{n}\bar{p} = 0$, отримаємо систему (1.1), яка має ненульовий розв'язок. Рівність нулю її визначника доводить, що вектори $\bar{m}$ та $\bar{n}$ колінеарні. **Теорема доведена.**

Якщо $\bar{r} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b} \neq \bar{0}$, де $\bar{a}^2 < 0$, а $\bar{b}^2 > 0$, то можливі всі три випадки: $\bar{r}^2 > 0$, $\bar{r}^2 < 0$, $\bar{r}^2 = 0$.

Означення 1.2 Ненульові вектори, скалярні квадрати яких дорівнюють нулю, називаються **ізотропними векторами**.

Теорема 1.3 Для кажного вектора $\bar{r}$ існує ортогональний йому ненульовий вектор.

Доведення. Покладемо $\bar{r} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b}$. Ортогональний йому вектор $\bar{p}$ будемо шукати у вигляді $\bar{p} = x\bar{a} + \bar{b}$. Вимога $\bar{p}\bar{r} = 0$ приводить до наступного рівняння відносно *x*:

$$\left(\alpha\bar{a}^2 + \beta\bar{a}\bar{b}\right)x + \alpha\bar{a}\bar{b} + \beta\bar{b}^2 = 0.$$

При $\alpha\bar{a}^2 + \beta\bar{a}\bar{b} = 0$, що рівносильно $\bar{a}\bar{r} = 0$, очевидно, що в якості шуканого вектора $\bar{p}$ виступає вектор $\bar{a}$. Якщо ж $\alpha\bar{a}^2 + \beta\bar{a}\bar{b} \neq 0$, то знаходимо

$$x = -\frac{\alpha\bar{a}\bar{b} + \beta\bar{b}^2}{\alpha\bar{a}^2 + \beta\bar{a}\bar{b}}$$

й тому

$$\bar{p} = \bar{b} - \frac{\alpha\bar{a}\bar{b} + \beta\bar{b}^2}{\alpha\bar{a}^2 + \beta\bar{a}\bar{b}}\bar{a} \tag{1.2}$$

Суттєво, що $\bar{p} \neq \bar{0}$, так як інакше вектори $\bar{a}$ й $\bar{b}$ були б лінійно залежні. **Теорема доведена.**

Теорема 1.4 Скалярні квадрати ненульових неізотропних ортогональних векторів мають різні знаки.

Доведення. Користуючись виразом (1.2), знаходимо

$$\bar{p}^2 = \frac{\left(\left(\beta\bar{b}^2 - \alpha\left(\bar{a}\bar{b}\right)\right)\bar{a} + \left(\alpha\bar{a}^2 + \beta\left(\bar{a}\bar{b}\right)\right)\bar{b}\right)^2}{\left(\alpha\bar{a}^2 + \beta\left(\bar{a}\bar{b}\right)\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(\bar{a}^2\bar{b}^2 - \left(\bar{a}\bar{b}\right)^2\right)\left(\alpha\bar{a} + \beta\bar{b}\right)^2}{\left(\alpha\bar{a}^2 + \beta\left(\bar{a}\bar{b}\right)\right)^2} = \frac{\bar{a}^2\bar{b}^2 - \left(\bar{a}\bar{b}\right)^2}{\left(\alpha\bar{a}^2 + \beta\left(\bar{a}\bar{b}\right)\right)^2}\bar{r}^2$$

Легко бачити, що дріб, що стоїть перед $\bar{r}^2$ в отриманому виразі, завжди від'ємний, оскільки його чисельник від'ємний ($\bar{a}^2 < 0, \bar{b}^2 > 0$, $\left(\bar{a}\bar{b}\right)^2 > 0$), а знаменник додатний. Отже, числа $\bar{p}^2$ та $\bar{r}^2$ мають різні знаки. ■

Наслідок. Неізотропні ненульові ортогональні вектори лінійно незалежні.

Означення 1.3 Вектори, скалярні квадрати яких додатні, називаються **евклідовими векторами** псевдоевклідової площини. Вектори з від'ємними скалярними квадратами називаються **псевдоевклідовими.**

Теоремами 1.3 та 1.4 обгрунтоване існування нескінченної множини ортогональних базисів псевдоевклідової площини, в кожному з яких один вектор евклідів, а інший псевдоевклідів.

Нехай $(\bar{p},\bar{q})$ – деякий ортогональний базис площини, причому $\bar{p}^2<0$, $\bar{q}^2>0$. Нормуємо вектори цього базиса, поклавши

$$\frac{\bar{p}}{\sqrt{-\bar{p}^2}}=\bar{i},\quad \frac{\bar{q}}{\sqrt{\bar{q}^2}}=\bar{j}. \tag{1.3}$$

Тоді $\bar{i}^2=-1,\ \bar{j}^2=1,\ \bar{i}\bar{j}=0$.

Ортогональний базис $(\bar{i},\bar{j})$, в якому вектори задовольняють умови $\bar{i}^2=-1,\quad \bar{j}^2=1,$ називається **ортонормованим векторним базисом псевдоевклідової площини.**

Домовимось зображати точки псевдоевклідової площини точками евклідової площини з тими ж самими координатами. Псевдоевклідова площина за своїми афінними властивостями не відрізняється від евклідової, однак **метричні властивості** цих площин **істотно розрізняються**. Це видно хоча б на прикладі кола, яке на псевдоевклідовій площині визначимо як сукупність всіх точок, віддалених на одну й ту саму псевдоевклідову відстань *r* від даної точки – центра кола.

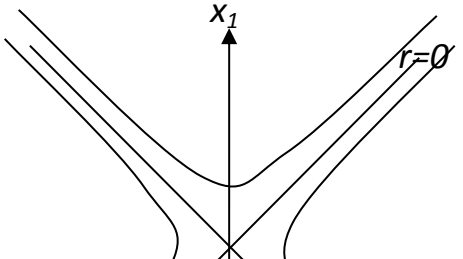
Якщо центр збігається з початком координат $O(0,0)$, то за означенням рівняння кола має вигляд

$$-(x_1)^2+(x_2)^2=r^2.$$

Радіус кола може бути дійсним $(r=a)$, тоді $-(x_1)^2+(x_2)^2=a^2$. Якщо радіус кола уявний, тобто $r=ia$, де $a\in R$, то $-(x_1)^2+(x_2)^2=-a^2$. У випадку, коли радіус $r=0$, маємо $-(x_1)^2+(x_2)^2=0$.

Таким чином на ${}^1R_2$ існує три види кіл. На евклідовій площині вони зображаються

- парою прямих, що перетинаються в початку координат - коло нульового радіуса;
- гіперболою з дійсною віссю Ox_2 – коло дійсного радіусу;
- гіперболою з дійсною віссю Ox_1 – коло уявного радіусу (Рис. 1.2).



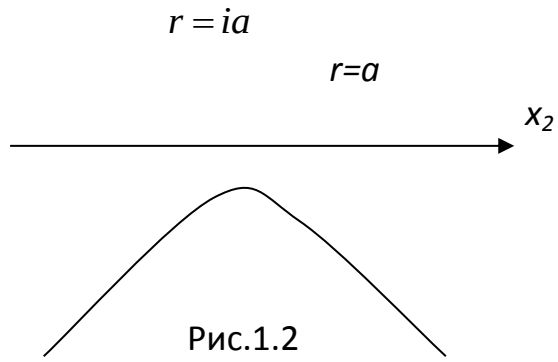


Рис.1.2

Нерівність Коші-Буняковського

Нагадаємо, що для будь-яких двох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ *евклідової* площини має місце нерівність

$$\left(\vec{a}\vec{b}\right)^2 \le \vec{a}^2\vec{b}^2, \tag{1.4}$$

Теорема. Для будь-яких двох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ псевдо*евклідової* площини

$$\left(\vec{a}\vec{b}\right)^2 \ge \vec{a}^2\vec{b}^2, \tag{1.5}$$

причому знак рівності має місце лише для колінеарних векторів.

Завдання. Довести нерівність, користуючись методом координат та властивостями векторів псевдоевклідової площини.

Вимірювання кутів

Відповідно до нерівності (1.5) маємо $\frac{(\vec{a}\vec{b})^2}{\vec{a}^2\vec{b}^2} \geq 1$. Тому, приймаючи до уваги, що гіперболічний косинус не менший за одиницю, доцільно прийняти наступне означення.

Означення. *Кутом між неізотропними векторами* $\vec{a}$ й $\vec{b}$ називається число φ, для якого

$$ch\varphi = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}. \qquad (1.6)$$

В силу (1.5) $ch^2\varphi \geq 1$, однак $ch\varphi$, обчислений за формулою (1.6), може виявитись від'ємним числом, що для дійсних значень φ не має місця. Тому будемо розглядати також й уявні кути між векторами псевдоевклідової площини.

Приклад. Гіперболічний косинус кута між неізотропними векторами $\bar{a} = (1,2)$ та $\bar{b} = (0,4)$ дорівнює

$$ch\varphi = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \frac{-1\cdot 0 + 2\cdot 4}{\sqrt{-1^2+2^2}\cdot\sqrt{-0^2+4^2}} = \frac{8}{\sqrt{3}\cdot 4} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Зазначимо, що кут з вершиною в початку координат має дійсну міру (або, просто, є дійсним), якщо його сторони лежать в одному з кутів між ізотропними прямими, які теж проходять через початок координат. Кут є уявним, якщо його сторони належать різним кутам між цими ізотропними прямими. В частинному випадку, кут, сторони якого належать різним типам, завжди має комплексну міру.

Нагадаємо, що

$$chi\alpha = \cos\alpha \text{ и } \cos i\alpha = ch\alpha. \qquad (1.7)$$

Для ортогональних неізотропних векторів $\vec{a}$ й $\vec{b}$ маємо

$$\vec{a}\vec{b} = 0 \Leftrightarrow ch\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{2}i. \qquad (1.8)$$

2. Аналітична геометрія прямих псевдоевклідової площини

Оскільки кожна пряма визначається своїм напрямним вектором, то на псевдоевклідовій площині існує три типи прямих.

- евклідові прямі. Напрямний вектор є вектором дійсної довжини. Наприклад, координатна пряма з напрямним вектором $\vec{e}_2$;
- псевдоевклідові прямі. Напрямний вектор є вектором уявної довжини. Наприклад, координатна пряма з напрямним вектором $\vec{e}_1$;
- ізотропні прямі. Напрямний вектор є ізотропним вектором. Наприклад, пряма з напрямним вектором $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

Відстань від точки до прямої

Під відстанню від точки до заданої прямої будемо розуміти довжину (в сенсі псевдоевклідової геометрії) перпендикуляра, опущеного з цієї точки на задану пряму.

Твердження. Для прямої $ax + by + c = 0$ псевдоевклідової пдощини вектор $\bar{n}(-a, b)$ є ортогональним до цієї прямої.

Доведення. Дійсно, якщо $M(x, y)$ – довільна точка прямої $ax + by = 0$, то $\bar{n} \cdot \overline{OM} = -(-ax) + by = 0$, тобто вектор $\bar{n}$ ортогональний до будь-якого вектора, паралельного прямій $ax + by = 0$, а значить і до паралельної їй прямої $ax + by + c = 0$.

Теорема. Відстань від точки $M_0(x_0, y_0)$ до площини $ax + by + c = 0$ обчислюється за формулою

$$\left|M_0M_1\right| = \frac{\left|ax_0 + by_0 + c\right|}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Доведення. Якщо пряма m задана загальним рівнянням $ax+by+c=0$, то рівняння перпендикулярної їй прямої h, яка містить дану точку $M_0(x_0,y_0)$, має вигляд

$$b(x-x_0)+a(y-y_0)=0. \qquad (2.6)$$

Координати ортогональної проєкції $M_1(x_1,y_1)$ точки M_0 на пряму m (Рисунок 2.5) знаходяться з системи рівнянь

$$\begin{cases} ax+by+c=0, \\ b(x-x_0)+a(y-y_0)=0. \end{cases}$$

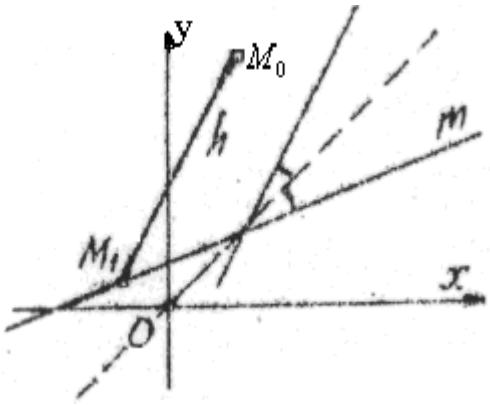


Рисунок 2.5 – Координати ортогональної проєкції

Оскільки $|M_0M_1|^2=-(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2$, то будемо шукати одразу x_1-x_0 й y_1-y_0. Перше рівняння системи запишемо у вигляді $ax+b(y-y_0)+c=-by_0$. Тоді з отриманої системи знаходимо

$$y_1-y_0=\frac{b(ax_0+by_0+c)}{a^2-b^2}.$$

Далі з другого рівняння отримаємо $x_1-x_0=\frac{a(y_1-y_0)}{-b}=\frac{-a(ax_0+by_0+c)}{a^2-b^2}$.

Остаточно

$$|M_0M_1| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{-a^2 + b^2}}. \qquad (2.7)$$

Висновки: Тип відстані від точки до прямої характеризується знаком підкореневого виразу $-a^2 + b^2$, тобто типом заданої прямої m. Відстань буде

- ***уявною*** у випадку евклідової прямої (тоді перпендикулярна пряма є псевдоевклідовою);
- ***дійсною*** у випадку псевдоевклідової прямої;
- ***нескінченно великою*** у випадку ізотропної прямої.

Завдання. 1) Записати рівняння координатних прямих та прямої з напрямним вектором $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

2) Навести приклади рівнянь інших прямих, до якого типу вони належать?

3) На псевдоевклідовій площині задано точки $A(6,1)$, $B(4,2)$, $C(2,2)$. Знайти довжину вектора $\overline{AB}$ та кут між векторами $\overline{AB}$ та $\overline{AC}$.