Розв'язування основної задачі оптимального керування з допомогою принципу максимуму

Розглянемо основну задачу оптимального керування: серед всіх керувань $\bar{u}(t)=(u_1(t),u_2(t),...,u_m(t))$, для яких фазова траєкторія $\bar{x}(t)=(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t))$ задовольняє умови

$$\frac{dx}{dt}=\bar{f}(t,\bar{x},\bar{u}), \tag{1}$$

$$\begin{cases} \bar{x}(t_0)=\bar{a}=(a_1,a_2,...,a_n), \\ x(t_1)=\bar{b}=(b_1,b_2,...,b_n), \end{cases} \tag{2}$$

$$|\bar{u}(t)|\le u_0=\text{const} \tag{3}$$

знайти оптимальне керування $\bar{u}^*(t)$ та відповідну оптимальну фазову траєкторію $\bar{x}^*(t)$, для яких функціонал якості системи керування

$$I=\int_{t_0}^{t_1} f_0(t,x_1(t),...,x_n(t),u_1(t),...,u_m(t))dt\to\min. \tag{4}$$

Введемо вектор-функцію $\bar{\Psi}=(\psi_0(t),\psi_1(t),...,\psi_n(t))$, координати якої задовольняють лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi_i}{dt}=-\sum\limits_{j=0}^{n}\dfrac{\partial f_j(t,\bar{x},\bar{u})}{\partial x_i}, \\ i=0,1,...,n. \end{cases} \tag{5}$$

При фіксованих початкових значеннях $\bar{\Psi}(t_0)$ існує єдиний розв'язок системи (5).

Функцію

$$H(\bar{\psi},\bar{x},t,\bar{u})=\bar{F}\cdot\bar{\psi}=\sum_{i=0}^{n} f_i\psi_i \tag{6}$$

називають **функцією Гамільтона**.

Якщо зафіксувати значення ψ_i, x_i, t, то скалярний добуток у (6) буде залежати лише від компонентів вектора $\bar{u}$.

Нехай $M\left(\bar{\Psi},\bar{x},t\right)=\max\limits_{\bar{u}\in U} H\left(\bar{\Psi},\bar{x},t,\bar{u}\right)$ при фіксованих значеннях $\bar{\Psi},\bar{x},t$, U – множина допустимих значень керувань: $U=\left\{\bar{u}\left(t\right):\left|\bar{u}\left(t\right)\right|\le U_0\right\}$. Наведено без доведення принцип максимуму, що виражає необхідну умову мінімуму функціоналу якості у основній задачі оптимального керування.

Теорема 1 (принцип максимуму). Нехай $\bar{u}^*\left(t\right)$, $\bar{x}^*\left(t\right)$ – оптимальне керування та відповідний йому оптимальний фазовий вектор у задачі оптимального керування (1) – (4). Існує ненульовий розв’язок $\bar{\Psi}^*\left(t\right)$ системи (5), такий, що у будь-який момент часу $t\in\left[t_0;t_1\right]$ функція Гамільтона $H\left(\bar{\Psi}^*,\bar{x}^*,t,\bar{u}\right)$ аргументу $\bar{u}$ досягає максимуму за всіма $\bar{u}\in U$ при $\bar{u}=\bar{u}^*$, тобто

$$H\left(\bar{\Psi}^*,\bar{x}^*,t,\bar{u}^*\right)=M\left(\bar{\Psi}^*,\bar{x}^*,t\right). \tag{7}$$

Основний зміст принципу максимуму складає рівність (7), згідно з якою оптимальне керування $\bar{u}^*\left(t\right)$ у будь-який момент часу t повинен надавати найбільшого значення функції Гамільтона. Тому з рівності (7) можна визначити $\bar{u}^*\left(t\right)$ як функцію змінних $\bar{\Psi}^*,\bar{x}^*,t$. Підставивши її у рівняння (1) та (5), отримаємо систему $2n+2$ рівнянь з $2n+2$ невідомими функціями $x_0^*\left(t\right)$, $x_1^*\left(t\right),\ldots,x_n^*\left(t\right)$, $\psi_0^*\left(t\right),\ldots,\psi_n^*\left(t\right)$. Невідомі сталі інтегрування у розв'язку цієї системи знаходять з крайових умов (2).

3.2 Постановка задачі оптимального програмного керування

Керування, що діє на об’єкт, називають **програмним**, якщо воно явно залежить лише від часу: $\bar{u}=\bar{u}^*\left(t\right)$.

Нехай стан об’єкта керування моделюється системою звичайних диференціальних рівнянь, що у векторній формі має наступний вигляд:

$$\frac{d\bar{x}}{dt}=\bar{f}\left(t,\bar{x}\left(t\right),\bar{u}\left(t\right)\right). \tag{8}$$

Тут $\bar{x}\left(t\right)=\left(x_1\left(t\right),...,x_n\left(t\right)\right)$ – фазовий вектор, $\bar{u}\left(t\right)=\left(u_1\left(t\right),...,u_m\left(t\right)\right)$ – вектор керування, $\bar{u}\left(t\right)\in U$, де U – задана множина допустимих значень керування, час $t\in\left[t_0;t_1\right]$, $\bar{f}=\left(f_1\left(t,\bar{x},\bar{u}\right),...,f_n\left(t,\bar{x},\bar{u}\right)\right)$.

Момент t_0 початку процесу керування задано, момент t_1 завершення процесу визначається першим моментом досягнення точкою $\left(t, \bar{x}(t)\right)$ деякої заданої поверхні $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\Gamma = \left\{ \left(t_1, \bar{x}(t_1)\right) : h_i\left(t_1, \bar{x}(t_1)\right) = 0, i = 1, ..., l \right\}. \tag{9}$$

Тут $h_i\left(t_1, \bar{x}(t_1)\right), i = 1, ..., l$ – задані функції. Отже, правий кінець фазової траєкторії $\bar{x}(t)$ може рухатися по заданій поверхні Γ і у момент часу t_1 повинна виконуватися умова $h_i\left(t_1, \bar{x}(t_1)\right) = 0, i = 1, ..., l$, $l \leq n+1$. Початкова умова $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$ визначає початковий стан об'єкту керування. Множина U допустимих керувань складається з кусково-неперервних функцій $\bar{u}(t)$. У точках їх розриву значення керування визначається як права границя.

Під **множиною допустимих процесів керування** розуміють множину D допустимих наборів $d = \left(t_1, \bar{x}(t), \bar{u}(t)\right)$. Тут функція $\bar{x}(t)$ є неперервною, кусково-диференційовною, вона задовольняє рівняння (3.15), початкову умову та умову (3.16). На множині D допустимих процесів керування досліджують на екстремум функціонал якості керування

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f_0\left(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)\right) dt + g\left(t_1, x(t_1)\right), \tag{10}$$

де f_0 та g – задані неперервно диференційовні функції своїх аргументів. Доданок $g\left(t_1, x(t_1)\right)$ називають **термінальним членом**.

Потрібно визначити оптимальний процес керування $d^* = \left(t_1^*, \bar{x}^*(t), \bar{u}^*(t)\right)$, що надає екстремум функціоналу (10). Далі розглядатимемо задачу дослідження функціонала якості на мінімум.

Задачу мінімізації функціонала (3.17) при $g \neq 0$ називають **задачею Больца.** Якщо у функціоналі термінальний член відсутній, то маємо **задачу Лагранжа**. Якщо у функціоналі якості відсутній інтегральний член ($f_0 \equiv 0$), то отримуємо **задачу Майєра**. Шукані функції у задачі оптимального програмного керування: $\bar{u}^*(t)$ – **оптимальне керування**, $\bar{x}^*(t)$ – **оптимальна фазова траєкторія**, величина t_1^* – **оптимальний час завершення процесу**.

3.3 Необхідна умова оптимальності

Теорема 2 (принцип максимуму для задачі оптимального програмного керування). Нехай на наборі $d^* = \left(t_1^*, \bar{x}^*(t), \bar{u}^*(t)\right)$ досягається мінімум функціонала (10). Тоді існує така вектор-функція $\bar{\psi}(t) = \left(\psi_1(t), \psi_2(t), ..., \psi_n(t)\right)$, що:

1) у кожній точці неперервності керування $\bar{u}(t)$ функція Гамільтона

$$H\left(t, \bar{\psi}, \bar{x}, \bar{u}\right) = \sum_{j=1}^{n} \psi_j(t) f_j\left(t, \bar{x}, \bar{u}\right) - f_0\left(t, \bar{x}, \bar{u}\right) \tag{11}$$

досягає максимуму по керуванню, тобто

$$\max_{\bar{u} \in U} H\left(t, \bar{\psi}, \bar{x}, \bar{u}\right) = H\left(t, \bar{\psi}, \bar{x}^*, \bar{u}^*\right); \tag{12}$$

2) виконується **умова трансверсальності**

$$\delta g\left(t_1^*\right) - H\left(t_1^*\right)\delta t_1 + \sum_{j=1}^{n} \psi_j\left(t_1^*\right)\delta x_{j1} = 0 \tag{13}$$

для будь-яких варіацій δt_1 та δx_{j1}, що задовольняють систему

$$\begin{cases} h_i\left(t_1^*, \bar{x}^*\left(t_1^*\right)\right) = 0, \\ \delta h_i\left(t_1^*, \bar{x}^*\left(t_1^*\right)\right) = 0, \\ i = 1, 2, ..., l. \end{cases} \tag{14}$$

У рівностях (13) та (14) варіації δg та δh_i у точці t_1^* визначаються за формулами;

$$\delta g = \frac{\partial g}{\partial t_1} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_j} \delta x_{j1}, \tag{15}$$

$$\delta h_i = \frac{\partial h_i}{\partial t_1} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \delta x_{j1}; \tag{16}$$

Вирази (15) та (16) обчислюються у точці t_1^*.

3) Функції $\bar{x}^*(t)$ та $\bar{\psi}^*(t)$ задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx_j}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial \psi_j} = f_j\left(t, \overline{x}, \overline{u}\right), \\ \dfrac{d\psi_j}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_j}, \\ j = 1, 2, ..., n. \end{cases} \tag{17}$$

Функції $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n$ називають **допоміжними змінними**, а систему (17) – **системою канонічних рівнянь**. Рівняння $\dfrac{d\psi_j}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_j}$, $j = 1, 2, ..., n$, утворюють **спряжену систему рівнянь.**

Компоненти вектор-функції $\overline{x}^*\left(t\right)$ – функції $x_j^*\left(t\right)$ повинні задовольняти задані крайові умови:

$$x_j^*\left(t_0\right) = x_{j0},\ j = 1, 2, ..., n. \tag{18}$$

Якщо момент t_0 початку процесу керування та початковий стан $\overline{x}\left(t_0\right)$ не задані, а разом з кінцевим станом $\overline{x}\left(t_1\right)$ визначаються співвідношеннями

$$h_i\left(t_0, \overline{x}\left(t_0\right), t_1, \overline{x}\left(t_1\right)\right) = 0,\ i = 1, 2, ..., l, \tag{19}$$

то термінальний член функціонала якості звичайно задають у вигляді різниці

$$g_1\left(t_1, \overline{x}\left(t_1\right)\right) - g_0\left(t_0, \overline{x}\left(t_0\right)\right). \tag{20}$$

Умова трансверсальності набуває вигляду:

$$\begin{gathered} \left(\delta g_1\left(t_1^*\right) - H\left(t_1^*\right)\delta t_1^* + \sum_{j=1}^{n} \psi_j\left(t_1^*\right)\delta x_{j1}\right) - \\ -\left(\delta g_0\left(t_0^*\right) - H\left(t_0^*\right)\delta t_0^* + \sum_{j=1}^{n} \psi_j\left(t_0^*\right)\delta x_{j0}\right) = 0. \end{gathered} \tag{21}$$

У рівностях (21) $x_{j0} = x_j\left(t_0\right), x_{j1} = x_j\left(t_1\right)$. При $t = t_0^*$ та $t = t_1^*$ виконуються також умови:

$$\begin{cases} \delta h_i\left(t_0^*, \bar{x}^*\left(t_0^*\right), t_1^*, \bar{x}^*\left(t_1^*\right)\right) = 0, \\ h_i\left(t_0^*, \bar{x}^*\left(t_0^*\right), t_1^*, \bar{x}^*\left(t_1^*\right)\right) = 0, \\ i = 1, 2, \ldots, l. \end{cases} \tag{22}$$

Розв’язком задачі тут є набір $\left(t_0^*, t_1^*, \bar{x}^*(t), \bar{u}^*(t)\right)$, що містить оптимальні моменти початку та завершення процесу керування, а також оптимальну фазову траєкторію та оптимальне керування.

Якщо для керування $\bar{u}$ обмеження відсутні, то максимум функції Гамільтона шукають з допомогою необхідних та достатніх умов безумовного екстремуму функції.

Якщо модель об’єкта керування описується лінійними диференціальними рівняннями, а функціонал якості є квадратичним, то принцип максимуму є необхідною та достатньою умовою оптимальності процесу керування.

3.4 Алгоритм застосування принципу максимуму

Алгоритм застосування принципу максимуму для задачі оптимального програмного керування складається з наступних етапів:

1. Скласти функцію Гамільтона

$$H\left(t, \bar{\psi}, \bar{x}, \bar{u}\right) = \sum_{j=1}^{n} \psi_j f_j\left(t, \bar{x}, \bar{u}\right) - f_0\left(t, \bar{x}, \bar{u}\right). \tag{23}$$

2. З умови максимуму функції Гамільтона по всім допустимим керуванням знайти оптимальне програмне керування $\bar{u}^*(t)$.

3. Скласти систему канонічних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = \dfrac{\partial H}{\partial \psi_i} = f_i\left(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)\right), \\ \dot{\psi}_i(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i}, \\ i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{24}$$

4. З умови трансверсальності (21) отримуємо відсутні крайові умови для рівнянь (24). При цьому варіації $\delta t_0, \delta t_1, \delta x_{j0}, \delta x_{j1},\ j=1,2,...,n$, повинні задовольняти систему (14). Варіації δg та δh_j визначаються за формулами:

$$\delta g_1 = \frac{\partial g}{\partial t_1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} \delta x_{i1},\ \delta g_0 = \frac{\partial g}{\partial t_0} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} \delta x_{i0}\ , \tag{25}$$

$$\delta h_j = \frac{\partial h_j}{\partial t_0} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h_j}{\partial x_{i0}} \delta x_{i0} + \frac{\partial h_j}{\partial t_1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h_j}{\partial x_{i1}} \delta x_{i1}\,. \tag{26}$$

5. Розв'язати отриману крайову задачу для системи канонічних рівнянь (24), визначити $\bar{u}^*(t),\ \bar{x}^*(t)$, за необхідності t_0^*, t_1^*.

Приклад 1. Задано модель об'єкта керування $\dot{x} = u(t)$, $x(0)=0$, $x(1)=\frac{1}{2}$ з функціоналом якості $I = \int_0^1 \left(x^2+u^2\right)dt \to \min$. Знайти оптимальне керування $u^*(t)$ та оптимальну фазову траєкторію $x^*(t)$, на яких досягається мінімум функціонала якості.

Розв'язання. Запишемо функцію Гамільтона. $f_0 = x^2 + u^2$, $f_1 = u$, $g_1 = g_0 = 0$. $H = \psi_1 f_1 - f_0 = \psi_1 u - x^2 - u^2$. Знаходимо максимум функції Гамільтона по керуванню u, якщо обмеження на керування відсутні.

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \psi_1 - 2u = 0 \Rightarrow u^* = \frac{\psi_1}{2}.$$

Оскільки $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -2 < 0$, то u^* надає максимум по керуванню функції Гамільтона. Запишемо систему канонічних рівнянь (3.31).

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1 = u, \\ \dot{\psi}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = 2x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\psi_1}{2}, \\ \dot{\psi}_1 = 2x. \end{cases}$$

Отримали систему лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Розв'яжемо її, звівши до одного рівняння. Диференціюючи перше з рівнянь системи по t, отримуємо:

$$\ddot{x} = \frac{1}{2}\dot{\psi}_1 = x\,.$$

Характеристичне рівняння $k^2-1=0$ має корені $k_{1,2}=\pm1$. Розв'язком цього рівняння є функція $x(t)=C_1\mathrm{ch}t+C_2\mathrm{sh}t$. З заданих крайових умов знаходимо:

$$x(0)=C_1=0,\ x(1)=C_2\mathrm{sh}1=\frac{1}{2}\Rightarrow C_2=\frac{1}{2\mathrm{sh}1}.$$

Отже, $x=x^*=\frac{\mathrm{sh}t}{2\mathrm{sh}1}$, $u=u^*=\dot{x}^*=\frac{\mathrm{ch}t}{2\mathrm{sh}1}$. Оскільки поведінка об'єкта керування моделювалася лінійним диференціальним рівнянням, а функціонал якості є квадратичним, то принцип максимуму є не лише необхідною, але й достатньою умовою оптимальності. Тому знайдені фазова траєкторія та керування є оптимальними.

Відповідь: $x^*=\frac{\mathrm{sh}t}{2\mathrm{sh}1}$, $u^*=\frac{\mathrm{ch}t}{2\mathrm{sh}1}$.

<u>Приклад 2.</u> Модель об'єкта керування має вигляд: $\dot{x}=u$, $x(0)=1$, $x(t_1)=t_1-1$, $I=\frac{1}{2}\int_0^{t_1}u^2dt+4x(t_1)\to\min$. Знайти оптимальне керування та оптимальну фазову траєкторію.

Розв'язання. Оскільки функціонал якості містить інтегральний та термінальний члени, то маємо задачу Больца. Функція Гамільтона для задачі має вигляд:

$$H=\psi_1 f_1-f_0=\psi_1 u-\frac{u^2}{2}.$$

Знайдемо максимум цієї функції по керуванню u.

$$\frac{\partial H}{\partial u}=\psi_1-u=0\Rightarrow u^*=\psi_1,\ \frac{\partial^2 H}{\partial u^2}=-1<0.$$

У точці $u^*=\psi_1$ досягається максимум. Канонічні рівняння набувають вигляду:

$$\begin{cases}\dot{x}=u=\psi_1,\\ \dot{\psi}_1=-\dfrac{\partial H}{\partial x}=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\psi_1=C\\ \dot{x}=C\end{cases}\Rightarrow x(t)=Ct+A.$$

З крайової умови $x(0)=1$ знаходимо:

$$x(0)=A=1\Rightarrow x(t)=Ct+1.$$

Запишемо для даної задачі умову трансверсальності (3.28). Вона має наступний вигляд:

$$\delta g_1(t_1) - H(t_1)\delta t_1 + \psi_1 \delta x_1 = 0.$$

Тут функція Гамільтона $H(t_1) = \left(\psi_1 u - \frac{u^2}{2}\right)\Bigg|_{t=t_1} = C^2 - \frac{C^2}{2} = \frac{C^2}{2}$. За формулою (3.3) $\delta g_1(t_1) = 4\delta x_1$. Тоді умова трансверсальності набуває вигляду:

$$4\delta x_1 - \frac{C^2}{2}\delta t_1 + C\delta x_1 = 0 \Rightarrow (4+C)\delta x_1 - \frac{C^2}{2}\delta t_1 = 0.$$

Зв'язок між величинами δx_1 та δt_1 знаходимо, використовуючи умови на рухомій межі $t = t_1$:

$$x_1 - t_1 + 1 = 0 \Rightarrow \delta x_1 - \delta t_1 = 0 \Rightarrow \delta x_1 = \delta t_1.$$

Отже, з умови трансверсальності отримуємо:

$$\left(4 + C - \frac{C^2}{2}\right)\delta t_1 = 0 \Rightarrow 4 + C - \frac{C^2}{2} = 0 \Rightarrow C^2 - 2C - 8 = 0.$$

Коренями останнього квадратного рівняння є значення $C_1 = -4$, $C_2 = -2$. Нехай $C = -2$. Тоді $x(t) = x^*(t) = 1 - 2t, u = u^* = -2$. Значення t_1^* знаходимо з умови перетину кривої $x(t_1) = t_1 - 1$, по якій рухається гранична точка, та фазової траєкторії у точці $t = t_1$:

$$t_1 - 1 = 1 - 2t_1 \Rightarrow t_1 = t_1^* = \frac{2}{3}.$$

Розглянемо випадок, коли $C = 4$. Отримуємо:

$$x(t) = x^*(t_1) = 4t + 1, u(t) = u^*(t) = \dot{x}^* = 4,$$

$$t_1 - 1 = 4t_1 + 1 \Rightarrow t_1 = t_1^* = -\frac{2}{3} < 0.$$

Оскільки $t_1 > 0$, то при $C = 4$ задача не має розв'язку.

Відповідь: $x^*(t) = 1 - 2t, u^* = -2$, $t \in \left[0; \frac{2}{3}\right]$.