Лекція 3

Симплекс-метод розв'язання задач лінійного програмування

Симплекс-метод – це універсальний метод, який може бути реалізовано як ручним, так і комп'ютерним способом.

Суть ***Симплекс-методу*** полягає в послідовному цілеспрямованому русі по опорним базисним планам ЗЛП з метою їх покращення та покращення значень цільової функції до тих пір, поки не буде знайдене найкраще рішення.

Загальна схема симплекс-методу

I. Підготовчий етап.

1) приведення до канонічної форми;
2) приведення до переважної форми.
3) побудова першої симплексної таблиці;

II. Перевірка плану на оптимальність:

Якщо план не є оптимальним:

III. Перехід до іншого опорного базисного плану (не гіршого) та повернення на II етап.

Якщо план є оптимальним:

IV. Формування розв'язку задачі.

I. Підготовчий етап.

1. Канонічна форма задачі

$$F(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b, i=\overline{1,m} \\ x_j \ge 0;\ j=\overline{1,n} \end{cases} \qquad (1)$$

2. Переважна форма ЗЛП існує, коли всі обмеження задачі мають переважний вигляд: задача містить змінну з коефіцієнтом, що дорівнює 1, якщо всі інші обмеження містять цю змінну з коефіцієнтом 0 за умов невід'ємності правої частини.

$$X_i + \sum_{j=m+1}^{n} a_j x_j = b_i, i=\overline{1,m}$$

Приклад:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \\ 6x_2 + 4x_3 + x_4 = 25 \end{cases}$$

x_1, x_4 – переважні (базисні) змінні.

Інші змінні називаються *вільними*.

Перехід до переважного вигляду здійснюється наступним шляхом:

Метод приведення до переважного виду.

До лівих частин обмежень рівнянь, які не мають переважного виду, додають фіктивні змінні z_i. До цільової функції змінні z_i входять з коефіцієнтом M у випадку розв'язання задачі на $\min$ і з коефіцієнтом $-M$, для задачі на $\max$, де M – нескінченно велике додатнє число

Отримана задача називається M-задачею, яка відповідає вихідній. Вона завжди має переважний вид.

Нехай вихідна задача ЛП має вид (1), та жодне з обмежень не має переважної змінної. M -задача запишеться так:

$$\overline{F} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - (+) \sum_{i=1}^{m} M z_i \to \max(\min) \qquad (2)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + z_i = b_i, \quad (i = \overline{1,m}) \\ x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,n}), \ \ z_i \geq 0 \ \ (i = \overline{1,m}) \end{cases} \qquad (3)$$

Задача (2)-(3) має переважний вид. Її початковий опорний план

$$X_0 = (0;0;...;0;b_1;b_2;...;b_m)$$

Якщо деякі з рівнянь задачі (1) мають переважний вид, то в них не потрібно вводити фіктивні змінні.

✌ **Теорема *про зв'язок розв'язку М-задачі та вихідної задачі*** **:** *Якщо в оптимальному плані* $X^* = (x_1; x_2;...;x_n; z_2; z_2;...; z_m)$ *M –задачі (2)–(3) всі фіктивні змінні* $z_i = 0 \ \ (i = \overline{1,m})$, *то план* $X = (x_1; x_2;...; x_n)$ *є оптимальним планом задачі (1) Якщо в оптимальному плані M - задачі хоча б одна з фіктивних змінних відмінна від нуля, то вихідна задача не має припустимих планів, тобто її система обмежень несумісна.*

3) побудова першої симплексної таблиці;

Нехай задача лінійного програмування має переважний вид, при чому базисними являються перші m змінних

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad b_i \geq 0 \ \ (i = \overline{1,m})$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,n})$$

За даними задачі заповнюється перша симплекс-таблиця:

БП	$C_Б$	B	x_1	x_2	…	x_m	x_{m+1}	…	x_j	…	x_n
			c_1	c_2	…	c_m	c_{m+1}	…	c_j	…	c_n
x_1	c_1	b_1	1	0	…	0	$a_{1,m+1}$	…	a_{1j}	…	a_{1n}
x_2	c_2	b_2	0	1	…	0	$a_{2,m+1}$	…	a_{2j}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_m	c_m	b_m	0	0	…	1	$a_{m,m+1}$	…	a_{mj}	…	a_{mn}
ЦФ		Δ_0	0	0	…	0	Δ_{m+1}	…	Δ_j	…	Δ_n

Де

$$\Delta_0 = C_Б \cdot B$$

$$\Delta_j = C_Б A_j - c_j \qquad (j = \overline{1,n})$$

Останній рядок симплекс-таблиці називають індексним рядком (рядком цільової функції). Число Δ_0 — *значення цільової функції* для початкового опорного плану X_0. Числа Δ_j називаються *оцінками вільних змінних*.

4) перевірка умови оптимальності.

Теорема: *якщо вихідна задача розв'язується на* ***max*** *і для деякого опорного плану всі оцінки* Δ_j $(j=\overline{1,n})$ *додатні* ($\Delta_j \geq 0$)*, то такий план оптимальни, якщо на min то оцінки* Δ_j $(j=\overline{1,n})$ *відємні* ($\Delta_j \leq 0$)

Якщо план не задовольняє критерію оптимальності, то може бути покращений.

ІІ. Перехід до негіршого опорного плану:

Для **отримання нового опорного плану** необхідно змінити базис, тобто одну з базисних змінних віднести до вільних і на її місце поставити нову базисну змінну.

Для *знаходження змінної, яку потрібно ввести в базис* визначають стовпчик, який задовольняє умові $\max\limits_{\Delta_j<0}|\Delta_j|$, де $j=\overline{1,n}$ (для задачі, яка розв'язується на max). Нехай $\Delta_k = \max\limits_{\Delta_j<0}|\Delta_j|$. Назвемо стовпчик X_k *вирішальним стовпчиком*.

Для *визначення змінної, яку необхідно вивести з базису* знаходять відношення елементів стовпчика В до відповідних додатних елементів вирішального стовпчика. А потім серед цих відношень обирають мінімальні, тобто

$$\min_{a_{ik}>0}\left\{\frac{b_i}{a_{ik}}\right\} = \frac{b_l}{a_{lk}}$$

Отже змінна x_l повинна бути видалена з базису. Рядок l називають *вирішальним рядком,* а елемент a_{lk} – *вирішальним елементом.*

Необхідно заповнити нову симплекс-таблицю.

<u>Правила переходу до нової симплекс-таблиці:</u>

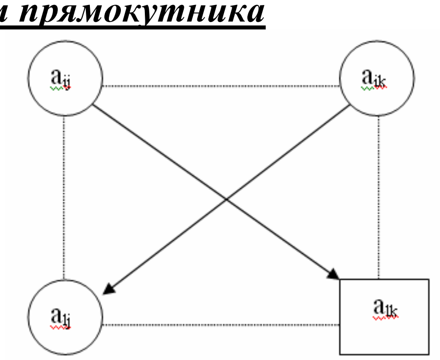
1. Елементи вирішального рядка ділимо на вирішальний елемент і записуємо у відповідних клітинках нової таблиці.

$$b_l^{'} = \frac{b_l}{a_{lk}}; \qquad a_{lk}^{'} = \frac{a_{lj}}{a_{lk}} \qquad (j=\overline{1,n})$$

2. Елемент вирішального стовпчика в новій таблиці дорівнюють нулю, за виключенням

$$a_{lk}^{'} = 1; \qquad a_{ik}^{'} = 0 \qquad (i \neq k),\ \ a_{lk}^{'} = 1.$$

3. Щоб знайти будь-який інший елемент нової симплекс-таблиці, необхідно скористатися ***<u>правилом прямокутника</u>***



Для цього у вихідній таблиці виділяють прямокутник, вертикалями якого слугують необхідні для виділення елементи. Діагональ, яка містить вирішальний та шуканий елементи нової таблиці, називається головною, а інша — побічною. Щоб отримати елемент $a_{ij}^{'}\ (i \neq l,\ j \neq k)$ нової симплекс-таблиці, необхідно з добутку кутових елементів головної діагоналі відняти добуток кутових елементів побічної діагоналі і поділити на вирішальний елемент.

$$b_i^{'} = \frac{b_i a_{lk} - b_l a_{ik}}{a_{lk}}; \qquad a_{ij}^{'} = \frac{a_{ij} a_{lk} - a_{lj} a_{ik}}{a_{lk}}$$

$$i \neq l; \quad j \neq k.$$

За цим же правилом обчислюються й елементи індексного рядка

$$\Delta_j^{'} = \frac{\Delta_j a_{lk} - \Delta_k a_{lj}}{a_{lk}}$$

$$\Delta_0^{'} = \frac{\Delta_0 a_{lk} - \Delta_k a_{ej}}{a_{lk}}$$

IV етап. Запис рішення

За останньою симплексною таблицею кількість та якість рішення визнач:

1. Якщо в індексному рядку оптимальної симплекс-таблиці при розв’язуванні задачі на $\max$, всі оцінки вільних змінних є додатними, то знайдений оптимальний план єдиний.
2. Якщо в індексному рядку оптимальної симплекс-таблиці, міститься хоча б одна нульова оцінка, яка відповідає вільній змінній, то задача лінійного програмування має нескінченну множину оптимальних розв’язків.
3. Якщо в індексному рядку симплексної таблиці задачі ЛП на $\max$ міститься від’ємна оцінка $\Delta_k < 0$, а у відповідному стовпчику змінної x_k немає жодного додатного елемента, то цільова функція на множині припустимих розв’язків не обмежена зверху.
4. Якщо в оптимальному плані M - задачі хоча б одна з фіктивних змінних відмінна від нуля, то вихідна задача не має припустимих розв’язків, тобто система обмежень несумісна.