

Міністерство освіти і науки України
Запорізька державна інженерна академія



В.О. Рахуба
О.М. Барішенко

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НА ЕОМ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Частина 1

*для студентів ЗДІА
спеціальності 6.05020201 “Автоматизоване управління технологічними
процесами”*

Запоріжжя
2012

Математичне моделювання на ЕОМ. Навчальний посібник для студентів ЗДІА спеціальності “Автоматизоване управління технологічними процесами” денної та заочної форми навчання /Укладачі: Рахуба В.О., Барішенко О.М. – Запоріжжя, 2012. – 78 с.

Навчальний посібник призначений для студентів спеціальності «Автоматизоване управління технологічними процесами», які вивчають курс «Математичне моделювання на ЕОМ». Посібник містить матеріал, що стосується загальних понять математичного моделювання та задач моделювання на макрорівні, а також 2 завдання до домашніх контрольних робіт та 3 завдання до лабораторного практикуму, які розкривають методи перевірки адекватності моделей та розв’язання задач на мікрорівні моделювання. Наведено перелік необхідних джерел інформації.

ЗМІСТ

ВСТУП	4
ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ	
1. Поняття моделі.....	5
2. Класифікація моделей та їх об'єктів.	8
3. Вимоги до математичних моделей	10
4. Використання ЕОМ для задач моделювання.....	13
5. Рівні моделювання (мікро, макро, мета).....	15
МОДЕЛЮВАННЯ НА МІКРОРІВНІ	
6. Рівняння математичної фізики.....	16
7. Методи розв'язання рівнянь математичної фізики.....	17
8. Вивід рівняння коливань струни.....	18
9. Розв'язання рівняння коливань струни методом поділу змінних.....	21
10. Вивід рівняння теплопровідності.....	26
11. Види крайових умов для задачі теплопровідності.....	29
12. Кінцеворізничні методи розв'язання задач теплопровідності.....	31
13. Домашні контрольні роботи.....	40
13.1 ДКР №1 Перевірка адекватності математичної моделі.....	40
13.2 ДКР №2 Розв'язання рівняння коливань струни методом сіток.....	41
14. Лабораторний практикум.....	43
14.1 Розв'язання рівняння теплопровідності методом поділу змінних.....	43
14.2 Розв'язання рівняння теплопровідності методом кінцевих різниць.....	56
14.3 Розв'язання рівнянь математичної фізики за допомогою засобу PDETOOL системи MATLAB.....	63
ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА	75
Додаток А Таблиця значень критерію Фішера.....	76
Додаток Б Приклад перевірки адекватності моделі.....	78

ВСТУП

Найважливішою вимогою до організації якісного управління різними технологічними процесами є використання математичних моделей цих процесів. Суть математичного моделювання полягає в заміні реального об'єкту відповідною системою математичних відносин, що дозволяє проводити попереднє дослідження поведінки об'єкту за допомогою ЕОМ. Це має велике значення під час розв'язання оптимізаційних задач, наявністю яких характеризується сучасне виробництво. Процес оптимізації лежить в основі всієї інженерної діяльності, оскільки функції фахівця полягають в тому, щоб проектувати нові – ефективніші та дешевші – технічні системи, а також розробляти методи підвищення якості функціонування існуючих систем.

В сучасних економічних умовах нашої країни, коли на першому місці постають питання енерго- та ресурсозбереження, чисельні експерименти на математичних моделях представляють собою необхідну вимогу науково-технічного прогресу.

Тому побудова і вивчення математичних моделей реально існуючих і проєктованих об'єктів є невід'ємною частиною сучасних наукових досліджень, а отже й підготовки фахівця з автоматизованого управління технологічними процесами.

ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

1. ПОНЯТТЯ МОДЕЛІ

Модель – це уявний образ, який створюється суб'єктом з метою отримання та зберігання інформації про об'єкт-оригінал, що вивчається, та описує за допомогою знакових символів, формул і графіків основні характеристики об'єкта, його властивості та зв'язки, суттєві для задачі, розв'язуваної суб'єктом.

Моделювання – це процес представлення об'єкта-оригінала подібною йому моделлю з метою дослідження моделі для отримання інформації про об'єкт.

Задачі моделювання – це опис фізичних процесів та фізичних об'єктів за допомогою одних і тих самих модельних рівнянь.

Моделі бувають фізичні та абстрактні.

Фізичні моделі – це набір конструктивних параметрів (макети).

Абстрактні моделі – це словесно-описові або математичні моделі.

Математична модель – це абстрактна модель, що описана мовою математичних відносин (алгебраїчні, логарифмічні, інтегро-диференційні рівняння).

Приклади математичних моделей:

1). Модель лампи накаливання.

Нехай поставлено задачу визначення величини струму, що забезпечує певну потужність випромінювання лампи. За законом Джоуля-Ленца кількість теплоти, що виділяється струмом в провіднику, пропорційна силі струму, часу його проходження і падінню напруги:

$$Q = IUt = I^2 Rt ,$$

де I — сила струму, А; U — падіння напруги, В; t — час, с.

Із законів термодинаміки відомо, що кількість теплоти, поглинена чи віддана тілом, пропорційна різниці його температур:

$$Q = cm(t_1 - t_2)$$

де c - теплоємність тіла, Дж/кг*С°; m – маса тіла, кг; t_1 -початкова температура тіла, t_2 – кінцева температура тіла, С°.

Тоді температуру, до якою нагрілася лампа, визначимо як

$$t_2 = \frac{(cmt_1 - Q)}{cm}$$

Потужність випромінювання за законом Стефана-Больцмана пропорційна площі поверхні та температурі тіла у четвертому ступені:

$$P = S\varepsilon\sigma T^4,$$

де S – площа поверхні, м²; ε – ступінь чорноти; σ – константа Стефана-Больцмана, Вт/(м²·К⁴); T – температура тіла, С°.

Таким чином, у спрощеному вигляді математична модель лампи накаливання представляє собою наступну сукупність рівнянь:

$$Q = I^2 Rt$$

$$T = \frac{(cmt_1 - Q)}{cm} \tag{1.1}$$

$$P = S\varepsilon\sigma T^4$$

У цій моделі вхідною величиною виступає величина струму, а вихідною є потужність випромінювання.

2). За статистичними даними вченими була побудована математична модель здоров'я людини:

$$Z = 0,2C + 0,2E + 0,1M + 0,5CЖ \tag{1.2}$$

де Z – здоров'я, C – спадкоємність, E – екологія, M – медицина, $CЖ$ – спосіб життя (емоційний стан, харчування, шкідливі звички, спорт, режим праці та відпочинку).

3). Математична модель також може бути представлена за допомогою таблиці. Прикладом виступає отримана за статистичними даними залежність продажу одиниць продукції від середньої заробітної плати населення:

$$\begin{array}{ll} 1000 \text{ грн} & 15 \text{ шт} \\ 1500 \text{ грн} & 20 \text{ шт} \\ 2000 \text{ грн} & 23 \text{ шт} \end{array} \tag{1.3}$$

Тобто моделлю можна назвати вираз, який характеризується наявністю чотирьох компонентів: об'єкта-оригінала; суб'єкта; задачі, що вирішується суб'єктом; мови опису об'єкту (диференційні, алгебраїчні або логарифмічні рівняння, графіки, таблиці тощо).

У зв'язку з цим вяснімо, чи являється моделлю наступне рівняння:

$$A = \frac{d^2x}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} + x(t) = ku(t) \quad (1.4)$$

Даний вираз не є моделлю, оскільки відсутні об'єкт та задача, що розв'язується.

Щоб рівняння (1.4) стало моделлю, присвоїмо кожній його букві фізичний зміст. Нехай $u(t)$ - вхідна напруга електричного ланцюга, $x(t)$ – вихідна напруга, t - час, k - коефіцієнт передачі, $A = Lc, B = Rc$, де R, L, c – відповідно опір, індуктивність та ємність ланцюга. Тоді об'єктом є електричний ланцюг виду:

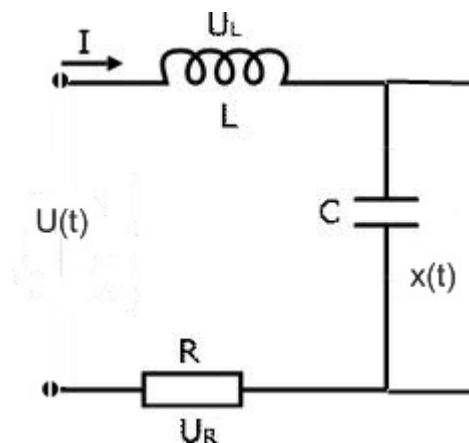


Рис. 1.1. Електричний ланцюг

2. КЛАСИФІКАЦІЯ МОДЕЛЕЙ ТА ЇХ ОБ'ЄКТІВ

В залежності від внутрішніх властивостей розрізняють:

- Непереривні моделі та об'єкти - такі, у яких параметри на виході є непереривними функціями (струми, напруги, концентрації, тиски тощо). Ці об'єкти описуються системами алгебраїчних та інтегро-диференціальних рівнянь.
- Детерміновані - такі, у яких параметри на виході є дискретними функціями (різні автомати, світлофори, реле, банкомати). Такі об'єкти описуються логарифмічними рівняннями або виразами теорії автоматів.
- Стаціонарні – мають функції, що не змінюються з часом.
- Нестационарні - змінюють свої властивості з часом.
- Об'єкти з розподіленими параметрами характеризуються фактором протяжності у просторі (наприклад, суцільні середовища). Ці моделі представляють собою системи диференціальних рівнянь у приватних похідних. Для них незалежними параметрами є координати та час.
- Об'єкти із зосередженими параметрами не враховують протяжність об'єкта. У цьому випадку моделі є системами звичайних диференціальних рівнянь. Незалежним параметром виступає тільки час.
- Багатовимірні моделі – поля розподілів величин (наприклад, поле напруженості, поле скоростей)
- Одновимірні моделі мають розподіл функції тільки в одному напрямку.

В залежності від внутрішніх властивостей та поставленої задачі розрізняють:

- Детерміновані – такі, у яких не враховується фактор випадковості.
- Стохастичні – враховується фактор випадковості.
- Динамічні - враховують не тільки зміни функцій об'єкта з часом, але й фактор наслідків, тобто передісторію процесу до початку дослідження. Це інертність тіл, яку називають пам'яттю об'єктів.
- Статичні – не враховують фактор наслідків.

- Лінійні - такі, у яких параметри на виході об'єкта лінійно залежать (накладаються) від параметрів на вході.
- Нелінійні - враховують непостійні коефіцієнти, похідні або інтеграли величин, що досліджуються.

В залежності від методів отримання розрізняють:

- Аналітичні – такі, для яких використовується відомий математичний апарат.
- Статистичні – побудовані шляхом обробки статистичних даних.
- Змішані – коефіцієнти цих моделей (побудованих аналітичним шляхом) обчислюються за статистичними даними

За цими класифікаційними ознаками охарактеризуємо моделі (1-4):

- 1- неперервна, стаціонарна, з зосередженими параметрами, одновимірна, детермінована, статична, лінійна, аналітична
- 2- неперервна, стаціонарна, з зосередженими параметрами, одновимірна, детермінована, статична, лінійна, статистична
- 3- дискретна, стаціонарна, з зосередженими параметрами, одновимірна, детермінована, статична, лінійна, статистична
- 4- неперервна, стаціонарна, з зосередженими параметрами, одновимірна, детермінована, динамічна, нелінійна, аналітична

3. ВИМОГИ ДО МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

3.1. Адекватність

Адекватність моделі свідчить про її відповідність реальному процесу (параметри на виході моделі та об'єкту повинні співпадати з певною точністю). Перевірка адекватності регресійних моделей зазвичай здійснюється за критерієм Фішера:

$$F_{розр} = \frac{S_{ад}^2}{S_y^2}, \quad (3.1)$$

де $S_{ад}^2$ - оцінка дисперсії адекватності; S_y^2 - оцінка дисперсії відтворюваності експерименту.

Оцінка дисперсії адекватності визначається за наступною формулою:

$$S_{ад}^2 = \frac{1}{N - B} \sum_{j=1}^N (\bar{y}_j - y_j)^2, \quad (3.2)$$

де B – число значимих коефіцієнтів регресійної моделі;

N – кількість експериментів (наборів досліджень, проведених за одних і тих самих умов);

\bar{y}_j - розрахункове значення функції відгуку для j -го експерименту (значення вихідного параметра, розраховане за моделлю);

y_j - середнє експериментальне значення функції відгуку (вихідного параметра) у j -му експерименті.

Оцінка дисперсії відтворюваності визначається за наступною формулою:

$$S_y^2 = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^k (y_{jt} - \tilde{y}_j)^2}{N(k-1)}, \quad (3.3)$$

де k – число паралельних досліджень (проведених за одних і тих самих умов);

y_{jt} - значення функції відгуку в t -му експерименті (з даного набору паралельних досліджень);

\tilde{y}_j - середнє значення функції відгуку для даного набору паралельних досліджень;

Якщо $F_{розр} < F_{крит}$, то гіпотеза про адекватність моделі приймається.

Критичне значення критерію Фішера $F_{крит}$ береться з таблиці А.1 розподілу Фішера (додаток А) за числом ступенів свободи для чисельника $f = N - B$, знаменника $f = N(k - 1)$ та рівня значущості α .

Рівень значущості для інженерних розрахунків береться 0,05 чи 0,1.

Адекватність моделі експериментальним даним, отриманим в умовах пасивного експерименту, коли розрахунок дисперсії відтворюваності неможливий унаслідок відсутності паралельних дослідів, розраховується наступним чином. У даних умовах для перевірки адекватності доцільно скористатися емпіричною залежністю (при рівні значущості 0,05):

$$\frac{S_y^2}{S_{зал}^2} \geq 5 \dots 10 \quad (3.4)$$

де S_y^2 – оцінка дисперсії функції відгуку;

$S_{зал}^2$ – залишкова дисперсія.

Оцінки дисперсії розраховуються за наступними формулами:

$$S_y^2 = \frac{\sum_{j=1}^N (y_j - \bar{y})^2}{N - 1}, \quad (3.5)$$

де

$$\bar{y} = \frac{\sum_{j=1}^N y_j}{N} \quad (3.6)$$

$$S_{\text{зал}}^2 = \frac{\sum_{j=1}^N (\bar{y}_j - y_j)^2}{N - k - 1} \quad (3.7)$$

де N - число експериментів;

y_j - значення вихідного параметра в j -му експерименті;

\bar{y}_j - значення вихідного параметра, розраховане для j -го експерименту за математичною моделлю;

k – число чинників в експерименті.

Якщо умова (3.4) виконується, то гіпотезу про адекватність синтезованої моделі результатам пасивного експерименту слід прийняти.

3.2. Точність

Точність моделі характеризується відносною похибкою:

$$\varepsilon_m = \sqrt{\sum_{j=1}^n \varepsilon_j^2} \quad \text{або} \quad \varepsilon_m = \max |\varepsilon_j| \quad (3.8)$$

де ε_j - похибка моделі за j -м параметром, що обчислюється як

$$\varepsilon_j = \frac{\bar{y}_j - y_j}{y_j} \quad (3.9)$$

3.3. Універсальність

Під універсальністю розуміють здатність моделі враховувати найбільшу кількість і якість параметрів.

3.4. Економічність

Економічність моделі характеризує наскільки раціонально при розрахунках за моделлю використовується машинний час на обсяг пам'яті.

4. ВИКОРИСТАННЯ ЕОМ ДЛЯ ЗАДАЧ МОДЕЛЮВАННЯ

Особливістю комп'ютерного математичного моделювання є перенесення математичної моделі у середовище ЕОМ і перехід від аналітичних методів до чисельних методів. На практиці це означає дискретизацію безперервних змінних і функцій, а також заміну всіх нескінченно малих і нескінченно великих величин деякими кінцевими величинами. Таке представлення дозволяє описати і перенести будь-які математичні моделі у середовище деякої мови програмування або готової прикладної програми для подальшої роботи з ними.

Таким чином, створюється модель у вигляді програми або призначеного для користувача документа. Проводяться тестування моделі з метою з'ясування її працездатності і адекватності. По завершенню створюють інструменти роботи з моделлю (інтерфейс) та отримують результати моделювання в графічному вигляді.

Найбільш використовуваними прикладними програмами для задач математичного моделювання є: MathCad, Matlab, Maple.

Важливою перевагою комп'ютерного моделювання є можливість імітації реальних процесів.

Імітаційне моделювання — метод, що дозволяє будувати моделі, які описують процеси так, як вони проходили б насправді. До імітаційного моделювання вдаються, коли:

- дорого або неможливо експериментувати на реальному об'єкті;
- неможливо побудувати аналітичну модель: у системі є час, причинні зв'язки, наслідок, нелінійності, стохастичні (випадкові) змінні;
- необхідно імітувати поведінку системи в часі.

Мета імітаційного моделювання полягає у відтворенні поведінки досліджуваної системи на основі результатів аналізу найбільш істотних взаємозв'язків між її елементами або, іншими словами, — у розробці симулятора досліджуваної області для проведення різних експериментів.

Імітаційне моделювання дозволяє імітувати поведінку системи в часі. Причому перевагою є те, що часом в моделі можна управляти: уповільнювати у випадку з

процесами, що протікають надто швидко, і прискорювати для моделювання систем з повільною мінливістю.

Найбільш поширеними програмами для імітаційного моделювання є Simulink (прикладна програма Matlab), Comsol, GPSS, iThink.

Сучасне виробництво складних і унікальних виробів, як правило, супроводжується комп'ютерним тривимірним імітаційним моделюванням.

5. РІВНІ МОДЕЛЮВАННЯ

В залежності від складності об'єкту та, відповідно, від ступеню абстракції по відношенню до нього розрізняють три рівня моделювання: мікро-, макро- та метарівень.

Мікрорівень характеризується найменшим ступенем абстракції. Використовується для моделювання суцільних середовищ (рідини, газу, тверді тіла). Математичні моделі на цьому рівні представляють собою системи диференціальних рівнянь у приватних похідних.

Макрорівень має більший ступень абстракції. Використовується для моделювання дискретних, кінцевих об'єктів (машини, агрегати, будови). Математичні моделі на цьому рівні - це системи звичайних диференціальних рівнянь.

Метарівень характеризується найбільшим ступенем абстракції, що дозволяє моделювати великі масові явища (соціальні, психологічні та інші процеси у суспільстві), великі об'єднання підприємств. Математичним апаратом також є системи звичайних диференціальних рівнянь.

МОДЕЛЮВАННЯ НА МІКРОРІВНІ

6. РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

При моделюванні на мікрорівні як об'єкти дослідження розглядаються суцільні середовища; таким чином, цей підхід дозволяє описати поведінку об'єктів з розподіленими параметрами, тобто об'єктів, що мають протяжність в просторі і в часі. В рамках цього підходу всі процеси можуть бути описані трьома диференціальними рівняннями у приватних похідних, званими **рівняннями математичної фізики**. У загальному випадку ці рівняння мають наступний вигляд:

1. Рівняння еліптичного типу:

$$D\Delta c(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t) \quad (6.1)$$

2. Рівняння гіперболічного типу:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} c(\vec{r}, t) = D\Delta c(\vec{r}, t) + f(\vec{r}, t) \quad (6.2)$$

3. Рівняння параболічного типу:

$$\frac{\partial}{\partial t} c(\vec{r}, t) = D\Delta c(\vec{r}, t) + f(\vec{r}, t), \quad (6.3)$$

де $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа, D - коефіцієнт; c – функція, що відшукується: польова (6.1), переміщення (6.2), температура (6.3); r – кількість вимірів об'єкта; f - функція, що описує джерела досліджуваної фізичної величини.

Рівняння (6.1) описує електричні та магнітні поля, броунівський рух, адіабатичні процеси тощо. Рівняння (6.2) описує поперечні коливання у струні, подовжні коливання у стрижні, крутильні коливання валу, електричні коливання у проводах при протіканні змінного струму, коливання звуку, рідини та газу. Рівняння (6.3) описує процеси протікання теплових потоків у суцільних середовищах, процеси фільтрації рідини та газу крізь пористі середовища.

Для двох змінних (координата та час) ці рівняння виглядають наступним чином:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \text{ - рівняння Лапласа (еліптичного типу);}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \text{ - хвильове рівняння (гіперболічного типу);}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \text{ - рівняння теплопровідності (параболічного типу).}$$

7. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Існують аналітичні (точні) та числові (приблизні) методи розв'язання диференціальних рівнянь у приватних похідних.

До аналітичних належать наступні методи: поділу змінних, функцій Грина, кінцевих інтегральних перетворень, ітераційний, джерел.

Числові – це кінцеворізничні методи, яких є багато різновидів (їх відмінності полягають у шаблонах сіток). Можна виділити метод кінцевих елементів, інтегро-інтерполяційні методи, економічні схеми тощо.

Вибір методу визначається видом рівняння, умовами задачі, вимогами до стійкості, сходи мості та швидкості обчислень.

8. ВИВІД РІВНЯННЯ КОЛИВАНЬ СТРУНИ

У якості струни у математичній фізиці розглядається гнучка пружна нитка. Розглянемо струну довжини l , жорстко закріплену на кінцях. Нехай у початковий момент часу струна горизонтальна, тобто не має деформації. Відтягнемо струну, а потім відпустимо її; або надамо швидкості точкам струни поштовхом; або відтягнемо її. У всіх цих випадках струна буде робити коливні рухи.

Завданням дослідження є встановлення закону руху точок струни, тобто визначення значення функції $U(x,t)$ у будь-який момент часу.

Розглянемо струну:

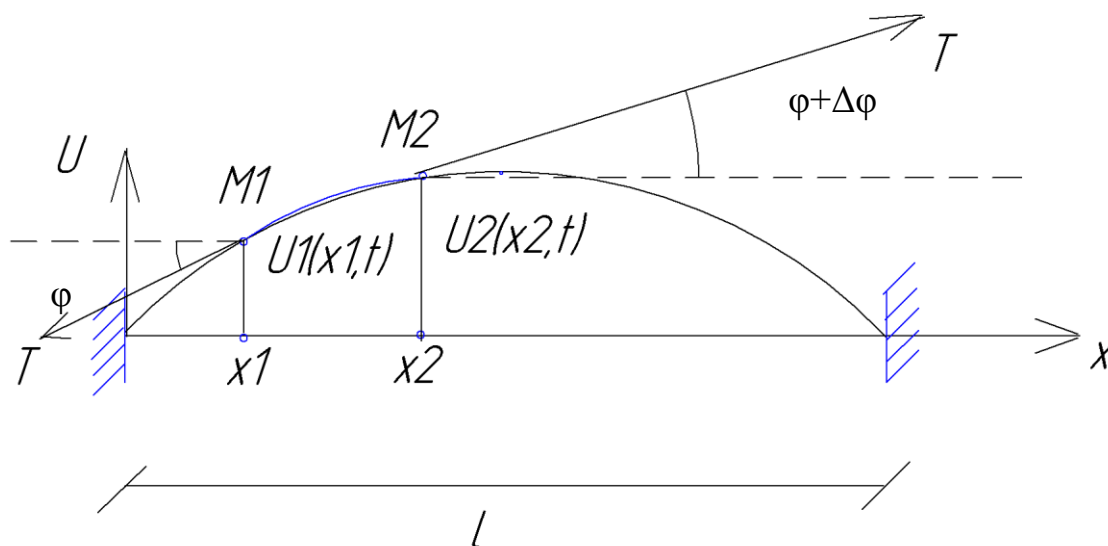


Рис. 8.1. Струна, якій надали коливного руху

Основні спрощення задачі:

1. Натяг точок струни у кожному перетині є однаковим.
2. Внутрішні сили натягу направлені по дотичній к формі струни.
3. Коливання точок струни здійснюються у площині XOY : $U(x,t)$ перпендикулярна x , тоді такі коливання вважаються **малими**, тобто переміщення U сумірне з товщиною струни.

Для виводу рівняння виділимо зі струни елементарну дільницю довжиною Δx (відрізок $M1M2$). Складемо для нього рівняння енергії у вигляді принципу Д'Аламбера:

$$\bar{F}^a + \bar{R} + \bar{I} = 0 \quad (8.1)$$

де \bar{F}^a - рівнодіюча зовнішніх сил;

\bar{R} - рівнодіюча внутрішніх сил;

\bar{I} - сила інерції.

Оскільки на струну не діють зовнішні сили,

$$\bar{R} = -\bar{I} \quad (8.2)$$

Розпишемо силу інерції за другим законом Ньютона:

$$\bar{R} = -(-m\bar{W}) = m\bar{W} \quad (8.3)$$

Оскільки коливання малі, то дугу M1M2 можна в проекціях на вісь x замінити відрізком прямої $\Delta x = x_2 - x_1$.

Тепер спроекуємо внутрішні реакції T на вісь U :

$$-T \sin \varphi + T \sin(\varphi + \Delta\varphi) = mW \quad (8.4)$$

Перетворимо ліву частину рівняння (8.4), вважаючи, що якщо коливання малі, то малі і кути φ , і тоді синуси можна замінити на тангенси:

$$T(\operatorname{tg}(\varphi + \Delta\varphi) - \operatorname{tg}\varphi) = T \left[\frac{\partial U(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} \right] \quad (8.5)$$

Різницю перших похідних у квадратних дужках можна замінити другою похідною за теоремою Лагранжа:

$$T \left[\frac{\partial U(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} \right] = T \frac{\partial^2 U(x + \Theta * \Delta x, t)}{\partial x^2} \Delta x, \quad (8.6)$$

де $0 < \Theta < 1$ - похибка, яка приблизно дорівнює нулю (мала другого порядку).

Тоді ліву частину рівняння (8.3) можна записати у вигляді: $T \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} \Delta x$.

Силу інерції складемо для елементарної ділянки довжиною Δx та масою Δm . Нехай щільність матеріалу струни дорівнює ρ , тоді

$$\Delta m = \rho * \Delta x * 1 * 1 = \rho \Delta x \quad (8.7)$$

Оскільки прискорення є другою похідною переміщення $W = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$, то, підставляючи отримані результати у рівняння (8.3), запишемо:

$$T \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} \Delta x = \rho \Delta x \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (8.8)$$

Звільнімося від Δx , розділимо обидві частини рівняння (8.8) на ρ та позначимо $a^2 = \frac{T}{\rho}$. Тоді

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (8.9)$$

Отримане модельне рівняння коливань струни відносно невідомої функції переміщень $U(x,t)$ має безліч рішень. Для того, щоб задача мала єдине рішення, введемо **крайові умови**, для чого складемо граничні та початкові умови задачі:

$$\Gamma.у.: \begin{cases} U(0,t) = 0 \\ U(l,t) = 0 \end{cases} \quad (8.10)$$

$$\Pi.у.: \begin{cases} U(x,0) = f(x) \\ \left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases} \quad (8.11)$$

Хвильове рівняння (8.9) разом з крайовими умовами (8.10) та (8.11) має єдине рішення і така задача має назву **крайової**.

9. РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯННЯ КОЛИВАНЬ СТРУНИ МЕТОДОМ ПОДІЛУ ЗМІННИХ

Розглянемо рівняння коливань струни (8.9) разом з крайовими умовами (8.10) та (8.11). Рішення будемо шукати у вигляді добутку двох незалежних функцій:

$$U(x, \tau) = X(x) \cdot T(\tau) \quad (9.1)$$

Підставимо рішення (9.1) у рівняння (8.9):

$$XT'' = a^2TX'' \quad (9.2)$$

Розділимо обидві частини рівняння (9.2) на a^2TX :

$$T''/a^2T = X''/X \quad (9.3)$$

Таким чином, ліва частина (9.3) залежить тільки від T , а права – тільки від X . Тоді це рівняння можливе тільки, коли обидві частини дорівнюють одній і тій самій константі, яку ми позначимо $-\lambda$. Тоді $T''/a^2T = X''/X = -\lambda$.

Прирівняємо обидві частини рівняння до $-\lambda$, отримуємо:

$$\begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0 \\ T'' + a^2 \lambda T &= 0 \end{aligned} \quad (9.4)$$

Рівняння (9.4) представляють собою однорідні диференціальні рівняння другого порядку, кожне з яких залежить тільки від однієї змінної. Розв'яжемо перше з цих рівнянь:

$$X'' + \lambda X = 0$$

$$X = e^{nx}$$

$$n^2 e^{nx} + \lambda e^{nx} = 0$$

$$n^2 + \lambda = 0$$

$$n^2 = -\lambda$$

$$n_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}i$$

Оскільки корені уявні, загальне рішення рівняння має вигляд:

$$X = A \cos \sqrt{\lambda}x + B \sin \sqrt{\lambda}x \quad (9.5)$$

Аналогічно, складаючи характеристичне рівняння для другого виразу системи (9.4), отримаємо рішення у вигляді:

$$T = C \cos a\sqrt{\lambda}t + D \sin a\sqrt{\lambda}t \quad (9.6)$$

Тоді рішення (9.1) має вигляд:

$$U(x,t) = (A \cos \sqrt{\lambda}x + B \sin \sqrt{\lambda}x)(C \cos a\sqrt{\lambda}t + D \sin a\sqrt{\lambda}t) \quad (9.7)$$

Тут A, B, C, D – константи інтегрування, які знаходять з крайових умов задачі. Для визначення констант A, B скористаймося рівнянням (9.5) та граничними умовами (8.10). Оскільки функція $U(x,t)$ має на краях нульові значення, то, враховуючи, що $T(t)$ в (9.1) не дорівнює нулю, то $X(0) = X(l) = 0$.

Підставимо цю умову в рівняння (9.5):

$$0 = A \cos \sqrt{\lambda}0 + B \sin \sqrt{\lambda}0$$

$$0 = A, \quad A = 0$$

$$0 = 0 \cos \sqrt{\lambda}l + B \sin \sqrt{\lambda}l$$

$$0 = B \sin \sqrt{\lambda}l$$

$$\sin \sqrt{\lambda} l = 0$$

$$\sqrt{\lambda} l = m\pi, \text{ де } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{l} \tag{9.8}$$

Величина λ називається **власним значенням задачі**; функції X та T , які залежать від λ , називаються **власними функціями**, а задача, що розглядається, називається **задачею на власне значення**.

Підставимо значення λ в рівняння (9.5), (9.6), отримаємо:

$$X = B \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$$T = C \cos \frac{an\pi}{l} t + D \sin \frac{an\pi}{l} t$$

Тоді рішення (9.7) запишеться у вигляді:

$$U_n(x, t) = (C_n \cos \frac{an\pi}{l} t + D_n \sin \frac{an\pi}{l} t) * \sin \frac{n\pi}{l} x \tag{9.9}$$

Тут кожному значенню n відповідає своє рішення $U_n(x, t)$. Аналогічно константи C_n, D_n , куди включений коефіцієнт B , також відповідають n -му значенню.

Оскільки вихідне рівняння (8.9) є лінійним, то результат розв'язання задачі може бути отриманий як сума (суперпозиція) рішень (9.9).

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x, t), \text{ тобто}$$
$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos \frac{an\pi}{l} t + D_n \sin \frac{an\pi}{l} t) * \sin \frac{n\pi}{l} x \tag{9.10}$$

Константи C_n, D_n знайдемо з початкових умов (8.11). Підставляючи (8.11) у (9.10), знайдемо:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos \frac{an\pi}{l} 0 + D_n \sin \frac{an\pi}{l} 0) * \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (9.11)$$

Рівняння (9.11) представляє собою ряд Фур'є, для якого коефіцієнти ряду обчислюються за формулами:

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \quad (9.12)$$

Візьмемо похідну за часом від (9.10):

$$\frac{dU}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} (-C_n \frac{an\pi}{l} \sin \frac{an\pi}{l} t + D_n \frac{an\pi}{l} \cos \frac{an\pi}{l} t) * \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (9.13)$$

Підставляючи у рівняння (9.13) другу початкову умову з (8.11), отримуємо:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{an\pi}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (9.14)$$

Коефіцієнти D_n ряду (9.14) визначаються за формулами:

$$D_n \frac{an\pi}{l} = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx, \text{ звідки}$$

$$D_n = \frac{2}{a n \pi} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n \pi}{l} x dx \quad (9.15)$$

Таким чином, знайдене аналітичне (точне) рішення задач (8.9, 8.10, 8.11), яке описується рівнянням (9.10), коефіцієнти якого знаходяться за формулами (9.12, 9.15). Якщо функція $U_n(x, t)$, що відшукується, є двічі диференційованою у заданому інтервалі, то отримане рішення (9.10) є єдиним, а функція $U_n(x, t)$ однозначно визначена.

10. ВИВІД РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Розглянемо стрижень довжиною L з поперечним перетином S , в якому протікає тепловий процес. Уявимо, що бічні стінки стрижня теплоізоляційні, а також, що температура в кожному перетині постійна.

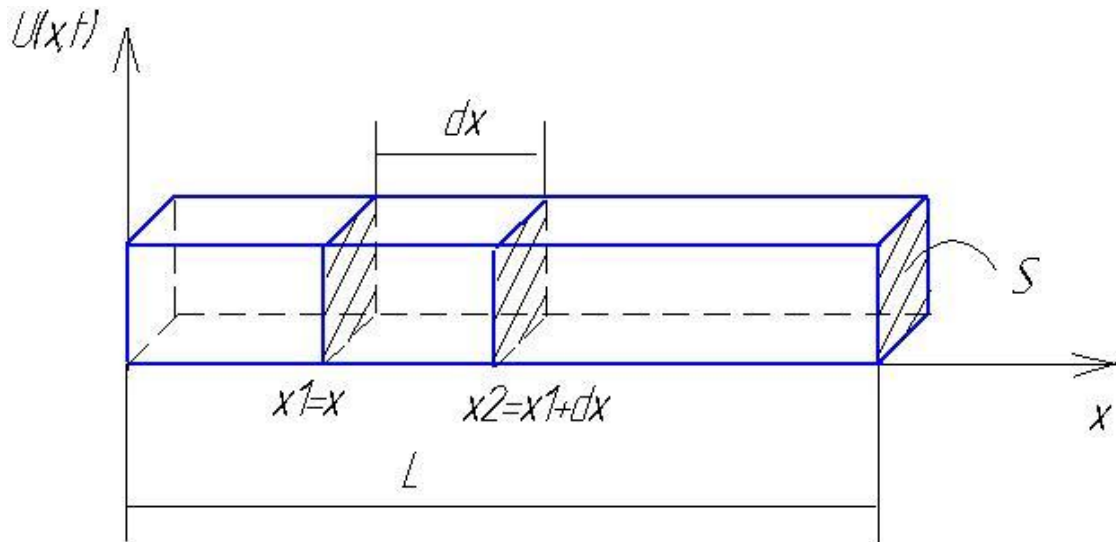


Рис. 10.1. Стрижень, в якому протікає тепловий процес

Для складання модельного рівняння виділимо зі стрижня елементарний відрізок довжиною ΔX і складемо для нього рівняння у вигляді теплового балансу. Досвідом встановлено, що швидкість протікання теплового процесу через перетин S за час Δt дорівнює:

$$q = -k \frac{\partial U}{\partial x} \cdot S \quad (10.1)$$

де $U(x,t)$ – температура в перетині x , k – коефіцієнт теплопровідності матеріалу, рівний кількості теплоти в калоріях, яке витрачається на зміну температури пластинки довжиною 1 см, площею 1 см^2 з різницею температур на краях пластинки 1°C . Причому $0 < k < 1$.

$K=\text{const}$, але при температурах, близьких до температур плавлення, залежить від температури.

З іншого боку швидкість розповсюдження тепла дорівнює:

$$q = \lim \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad (10.2)$$

де ΔQ – тепловий потік, що проходить через даний перетин за час Δt .

Кількість теплоти, що пройшла через перетин стрижня x_1 :

$$\Delta Q_1 = q_1 \Delta t = -k \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=x_1} \cdot S \cdot \Delta t \quad (10.3)$$

Аналогічно кількість теплоти для x_2 :

$$\Delta Q_2 = q_2 \cdot \Delta t = -k \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=x_2} \cdot S \cdot \Delta t \quad (10.4)$$

Приплив тепла через елемент довжиною Δx :

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = -k \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=x_1} \cdot S \cdot \Delta t - (-k \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=x_2} S \Delta t) = k S \Delta t \cdot \left[\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=x_2} - \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=x_1} \right] \quad (10.5)$$

$$k S \Delta t \left[\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_2} - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_1} \right] = k S \Delta t \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Delta x \quad (10.6)$$

Вираз у дужках замінили другою похідною за теоремою Лагранжа.

З іншого боку, ця ж кількість тепла пішла на зміну температури елемента стрижня довжиною Δx , масою Δm на величину ΔU :

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = c \Delta m \Delta U = c \rho \Delta x S \Delta U = c \rho \Delta x S \frac{\partial U}{\partial t} \Delta t \quad (10.7)$$

Зіставляючи формули (10.6) та (10.7), отримаємо:

$$kS\Delta t \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Delta x = c\rho\Delta xS \frac{\partial U}{\partial t} \Delta t \quad (10.8)$$

Тоді $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{k}{c\rho} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, обзначимо $a^2 = \frac{k}{c \cdot \rho}$. Отримуємо модельне рівняння

розповсюдження тепла у стрижні:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (10.9)$$

11. ВИДИ КРАЙОВИХ УМОВ ДЛЯ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Якщо розглядати процес теплопровідності у дуже довгому стрижні, то на невеликому проміжку часу вплив температури на кінцях стрижня практично відсутній. Тоді температура на ділянці, що розглядається, залежить лише від начального розподілу температур. Така задача називається **задачею з початковими умовами (задачею Коши)** для **безкінечного стрижня** і формулюється наступним чином:

Знайти рішення рівняння теплопровідності в області $-\infty \leq x \leq +\infty$, що задовольняє умовам

$$U(x, t_0) = \varphi(x), \quad (11.1)$$

де $\varphi(x)$ - задана функція.

Якщо ділянка, що цікавить дослідника, знаходиться поблизу одного кінця стрижня та значно віддалена від іншого, то ми отримуємо **крайову задачу для полубезкінечного стрижня**, в якій враховується вплив температури лише одного з кінців:

Знайти рішення рівняння теплопровідності в області $-\infty \leq x \leq +\infty$, що задовольняє умовам

$$\begin{cases} u(x, t_0) = \varphi(x), & (0 < x < \infty) \\ u(0, t) = \mu(t), & (t \geq t_0) \end{cases}, \quad (11.2)$$

де $\varphi(x), \mu(t)$ - задані функції.

Якщо момент часу, в який дослідник розглядає систему, достатньо віддалений від початкового, то доцільно знехтувати початковими умовами, оскільки їх вплив на систему з часом слабіє. Таким чином ми приходимо до **крайової задачі без початкових умов**:

Знайти рішення рівняння теплопровідності в області $0 \leq x \leq l$ для інтервалу $-\infty < t$, що задовольняє умовам

$$\begin{cases} u(0, t) = \mu_1(t), \\ u(l, t) = \mu_2(t), \end{cases}, \quad (11.3)$$

де $\mu_1(t), \mu_2(t)$ - задані функції.

У випадку, коли розглядається стрижень обмеженої довжини на інтервалі часу, наближеному до початкового, розв'язуються **крайові задачі для обмеженого стрижня**:

Знайти рішення рівняння теплопровідності в області $0 < x < l$ для інтервалу $0 < t \leq T$, що задовольняє умовам

$$U(x,0) = \varphi(x)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{(0,t)} + \beta_1 U(0,t) = \mu_1(t) \\ \alpha_2 \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{(l,t)} + \beta_2 U(l,t) = \mu_2(t) \end{cases}, \quad (11.4)$$

де $\alpha_i^2 + \beta_i^2 \neq 0$, ($i = 1, 2$), $\mu_1(t), \mu_2(t)$ - задані функції.

Якщо $\alpha_i = 0$, ($i = 1, 2$), тобто на кінці стрижня задана температура, така умова називається **крайовою умовою першого роду**; якщо $\beta_i = 0$, ($i = 1, 2$), тобто на кінці задано тепловий потік, умова має назву **крайової умови другого роду**; якщо α_i та β_i відмінні від нуля, то умова називається **крайовою умовою третього роду**.

В залежності від роду крайових умов розрізняють **першу, другу та третю крайові задачі**.

12. КІНЦЕВОРІЗНИЧНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Побудуємо просторово-часову систему координат для лінійного елемента завдовжки L і розіб'ємо його на частини у вигляді сітки:

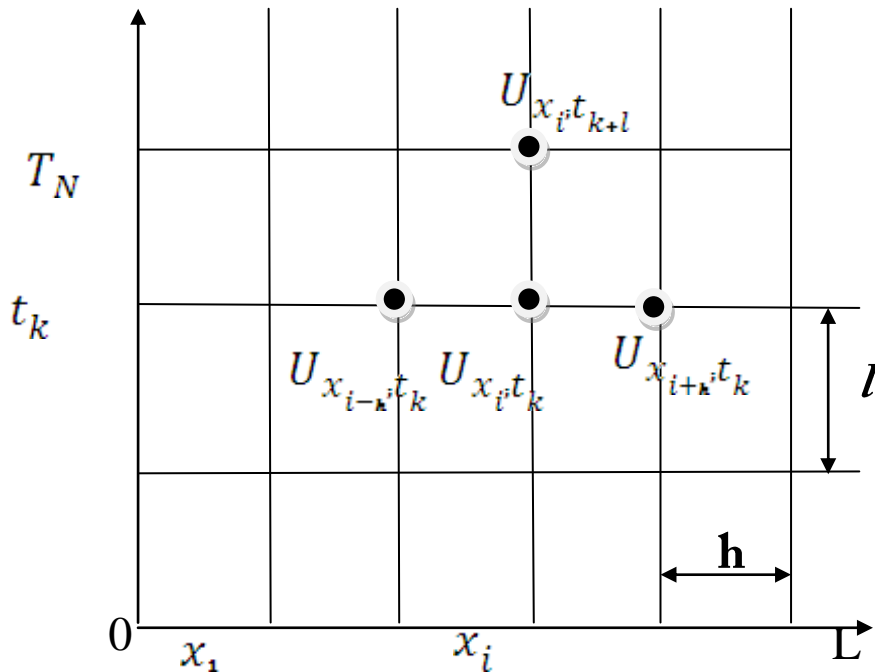


Рис. 12.1. Просторово-часова система координат

$$0 \leq x \leq L$$

$$0 \leq t \leq T$$

$$0 \leq i \leq n$$

$$0 \leq k \leq N$$

$$\frac{L}{n} = h \quad \text{- крок за координатою;}$$

$$\frac{T}{N} = l \quad \text{- крок за часом}$$

Завдання полягає у визначенні значення функції, що відшукується, в кожному перетині в кожен момент часу, тобто у вузлах сітки. Для побудови всієї

функції здійснюється інтерполяція за результатами рішення у вузлових точках. Виберемо з цієї сітки співвідношення її вузлів у вигляді шаблону, показаному на рис. 12.1.

Відомо, що похідні функцій можна замінити їх кінцевими різницями за наступними формулами:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U(x_i; t_{k+1}) - U(x_i; t_k)}{l} \\ \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U(x_{i+h}; t_k) - U(x_i; t_k)}{h} \end{cases} \quad \text{- різниця вперед}$$

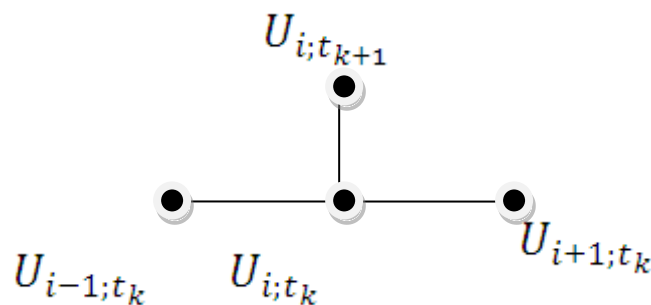
$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U(x_i; t_k) - U(x_{i-h}; t_k)}{h} \quad \text{- різниця назад}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U(x_{i+h}; t_k) - U(x_{i-h}; t_k)}{2h} \quad \text{- центральна різниця}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U(x_{i-h}; t_k) - 2U(x_i; t_k) + U(x_{i+h}; t_k)}{h^2} \quad \text{- друга похідна}$$

12.1. Явна схема

Спростимо отримані результати. Для цього вилучимо координати $x_i; t_k$ та кроки l і h замінимо на одиницю. Тоді шаблон прийме вигляд:



Кінцево-різницеві апроксимації приймуть вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_{i;k+1} - U_{i;k}}{l} \\ \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_{i+1;k} - U_{i;k}}{h} \end{array} \right.$$

Різниця вперед:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_{i;k} - U_{i-1;k}}{h}$$

Різниця назад:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_{i+1;k} - U_{i-1;k}}{2h}$$

Центральна різниця:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{i-1;k} - 2U_{i;k} + U_{i+1;k}}{h^2}$$

Друга похідна:

Розглянемо рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (12.1)$$

з крайовими умовами:

$$\text{Початкові умови (п.у.)} \quad U(x; 0) = \varphi(x) \quad (12.2)$$

$$\text{Граничні умови (гр.у.)} \quad \begin{cases} U(0; t) = \psi_1(t) \\ U(L; t) = \psi_2(t) \end{cases}$$

$$0 \leq x \leq L$$

$$0 \leq t \leq T$$

$$t_0 = 0$$

Замінімо першу і другу похідні в рівнянні (12.1) їх кінцевими різницями:

$$\frac{U_{i;k+1} - U_{i;k}}{l} = a^2 \frac{U_{i-1;k} - 2U_{i;k} + U_{i+1;k}}{h^2} \quad (12.3)$$

Помножимо на l обидві частини рівняння і знайдемо значення функції $U_{i;k+1}$ на кожному наступному шарі з рівняння (12.3).

$$U_{i;k+1} = \left(1 - \frac{2la^2}{h^2}\right) U_{i;k} + \frac{la^2}{h^2} (U_{i-1;k} + U_{i+1;k}) \quad (12.4)$$

Рівняння (12.4) представляє собою **явну схему** для визначення значень функції на кожному наступному $k + 1$ шарі. У якості попереднього шару перший раз приймаються значення функції з початкових умов при $t_0=0$ (12.2). З формули (12.4) витікає, що рішення $U_{i;k+1}$ отримують у тих випадках, коли існує деяке співвідношення між значеннями l і h . Воно витікає з співмножника при $U_{i;k}$ і задовольняє умові:

$$1 - \frac{2la^2}{h^2} \geq 0$$

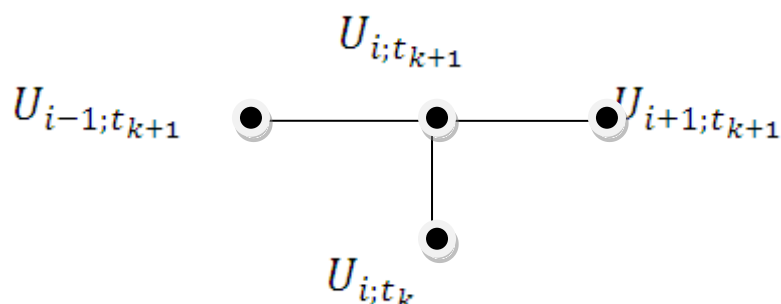
Таким чином, умова стійкості явного методу має вигляд:

$$1 \geq \frac{2la^2}{h^2} \Rightarrow l \leq \frac{h^2}{2a^2}$$

Стійкість – не накопичення помилки методу при переході від шару до шару. Якщо умова стійкості не виконується, то числове рішення віддаляється від точного.

12.1 Неявна схема

Щоб позбавитися нестійкості явного методу використовується співвідношення вузлів у сітці, що зветься **неявним шаблоном**.



Замінімо похідні рівняння теплопровідності кінцевими різницями відповідно до цього шаблону:

$$\frac{U_{i;k+1} - U_{i;k}}{l} = a^2 \frac{U_{i-1;k+1} - 2U_{i;k+1} + U_{i+1;k+1}}{h^2} \quad (12.5)$$

Рівняння (12.5) – алгебраїчне рівняння в неявній формі.

Перетворимо його, зробивши заміну $S = \frac{h^2}{la^2}$

$$-SU_{i;k} = U_{i-1;k+1} + U_{i+1;k+1} - (S + 2)U_{i;k+1} \quad (12.6)$$

$$\begin{cases} U_{0;k+1} = \psi_1(t_{k+1}) \\ U_{n;k+1} = \psi_2(t_{k+1}) \end{cases} \quad (12.7)$$

$$0 \leq i \leq n \quad 0 \leq k \leq n$$

Рішення рівнянь будемо шукати **методом прогонки** (за неявною схемою), згідно якого рішення шукають у вигляді:

$$U_{i;k+1} = a_{i;k+1}(b_{i;k+1} + U_{i+1;k+1}) \quad (12.8)$$

a і b – коефіцієнти, що визначаються в процесі розв'язку.

З (12.8) для $i-1$ точки маємо:

$$U_{i-1;k+1} = a_{i-1;k+1}(b_{i-1;k+1} + U_{i;k+1}) \quad (12.9)$$

Підставляючи (12.9) у (12.6) отримаємо:

$$-SU_{i;k} = a_{i-1;k+1}(b_{i-1;k+1} + U_{i;k+1}) + U_{i+1;k+1} - (S + 2)U_{i;k+1}$$

Звідси знайдемо значення функції $U_{i;k+1}$:

$$[a_{i-1;k+1} - (S + 2)]U_{i;k+1} = -SU_{i;k} - a_{i-1;k+1} * b_{i-1;k+1} - U_{i+1;k+1}$$

$$U_{i;k+1} = \frac{SU_{i;k} + a_{i-1;k+1} * b_{i-1;k+1} + U_{i+1;k+1}}{S+2-a_{i-1;k+1}} = \frac{SU_{i;k} + a_{i-1;k+1} * b_{i-1;k+1}}{S+2-a_{i-1;k+1}} + \frac{1}{S+2-a_{i-1;k+1}} * U_{i+1;k+1} \quad (12.10)$$

Порівнюючи вільні члени рівнянь (12.8) та (12.10) при $U_{i+1;k+1}$ отримуємо:

$$a_{i;k+1} = \frac{1}{S+2-a_{i-1;k+1}} \quad (12.11)$$

$$a_{i;k+1} * b_{i;k+1} = \frac{SU_{i;k} + a_{i-1;k+1} * b_{i-1;k+1}}{S+2-a_{i;k+1}}$$

$$b_{i;k+1} = \frac{SU_{i;k} + a_{i-1;k+1} * b_{i-1;k+1}}{(S+2-a_{i-1;k+1})a_{i;k+1}}$$

$$b_{i;k+1} = SU_{i;k} + a_{i-1;k+1} * b_{i-1;k+1} \quad (12.12)$$

де $i = 2, 3, \dots, n-1$, $k = 1, 2, 3, \dots$

Тобто, значення коефіцієнтів для внутрішніх вузлів сітки визначаються за формулами (12.11– 12.12).

А для граничних коефіцієнтів рішення знайдемо з рівнянь (12.6) та (12.7):

$$-SU_{i;k} = U_{0;k+1} + U_{2;k+1} - (S+2)U_{1;k+1} \quad (12.13)$$

$$U_{1;k+1} = a_{1;k+1}(b_{1;k+1} + U_{2;k+1}) \quad (12.14)$$

Використовуючи першу граничну умову (12.7) з (12.13) знайдемо:

$$U_{1;k+1} = \frac{SU_{1;k} + U_{2;k+1} + \psi_1(t_{k+1})}{S+2} \quad (12.15)$$

Порівнюючи коефіцієнти при однакових функціях у формулах (2.14) та (2.15), отримаємо:

$$a_{1;k+1} = \frac{1}{S+2} \quad (2.16)$$

$$b_{1;k+1} = \frac{SU_{1;k} + \psi_1(t_{k+1})}{(S+2)a_{1;k+1}}$$

$$b_{1;k+1} = SU_{1;k} + \psi_1(t_{k+1}) \quad (2.17)$$

Таким чином, отримані коефіцієнти a і b при $k+1$ (прямий хід), які розраховуються за формулами (12.11), (12.12), (2.16), (2.17).

Знаючи коефіцієнти, визначаємо значення функції на $k+1$, просуваючись з права наліво (зворотний хід) за формулою (12.8), використовуючи в якості першого значення функції другу граничну умову (12.7).

Таким чином отримано метод розв'язання неявних систем алгебраїчних рівнянь, для яких прямий хід полягає у визначенні коефіцієнтів a і b , а зворотній - у визначенні значень функції на $k+1$ шарі.

12.2 Різничні схеми для двовимірних та тривимірних задач

Різничні схеми для двовимірних задач представляють собою схеми розщеплення і використовуються для змішаних процесів, які протікають у суцільних середовищах. Розглянемо рівняння теплопровідності у вигляді:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (12.18)$$

$$U = U(x; y; t) - ?$$

$$\Gamma.y \quad U(x; y; t)|_{\Gamma} = \psi_1(x; y)$$

$$\Pi.y \quad U(x; y; 0) = \psi_2(x; y)$$

Просторово-часову сітку зобразимо у вигляді:

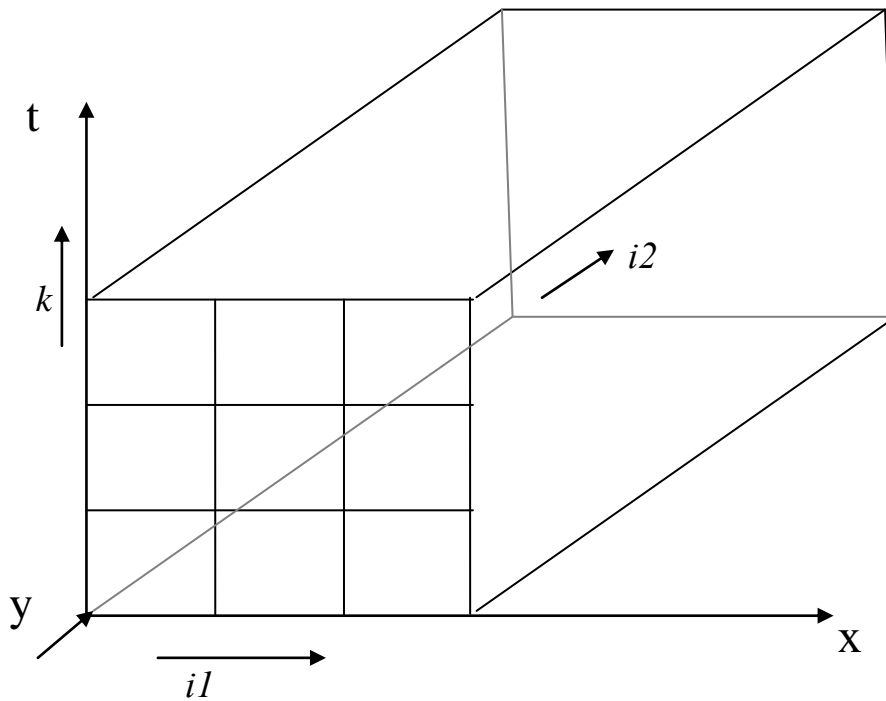


Рис. 12.2. Просторово-часова система координат для двовимірної задачі

Розглянемо функцію $U(x_{i1}; y_{i2}; t_k)$, де

$$i1 = 0, 1, 2 \dots N_1$$

$$i2 = 0, 1, 2 \dots N_2$$

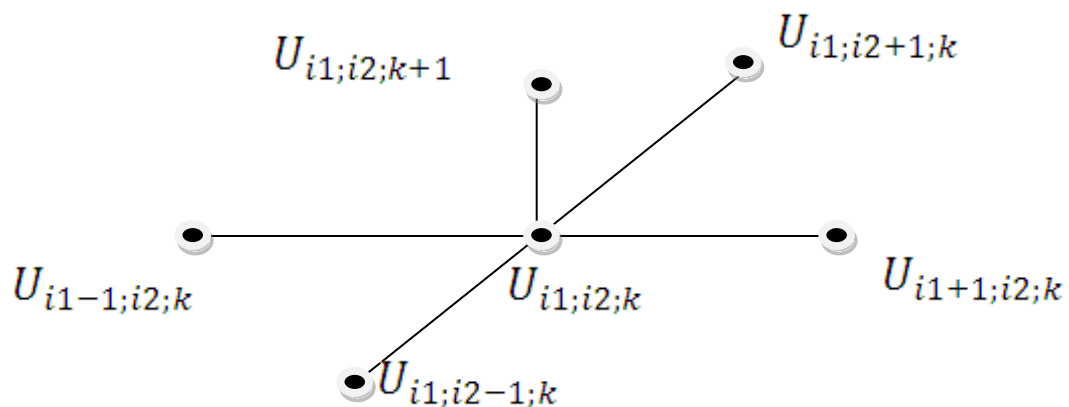
$$k = 0, 1, 2 \dots N_3$$

$$\frac{a}{N_1} = h_x \quad \frac{b}{N_2} = h_y \quad \frac{T}{N_3} = \Delta t$$

$$x_{i1} = i1 * h_x \quad y_{i2} = i2 * h_y \quad t_k = \Delta t * k$$

Для розв'язання задачі (12.18) використовуються явні та неявні шаблони.

Розглянемо явний шаблон:



Замінімо похідні у рівнянні (12.18) їх кінцевими різницями згідно явного шаблону, для чого спочатку введемо спрощення записів рівняння:

$$1) \text{ Оператор Лапласа } \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \Delta$$

$$\text{Тоді } \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad \text{або} \quad \Delta U = \frac{\partial U}{\partial t}$$

$$2) U(x_{i1}; y_{i2}; t_k) = U_{i1;i2;k}$$

3) Різницевий оператор, апроксимуючий другу похідну за x :

$$\lambda_1 U_{i1;i2;k} = \frac{U_{i1-1;i2;k} - 2U_{i1;i2;k} + U_{i1+1;i2;k}}{h_x^2}$$

Різничний оператор, апроксимуючий другу похідну за y :

$$\lambda_2 U_{i1;i2;k} = \frac{U_{i1;i2-1;k} - 2U_{i1;i2;k} + U_{i1;i2+1;k}}{h_y^2}$$

$$\lambda U_{i1;i2;k} = \lambda_1 + \lambda_2$$

Замінімо рівняння (12.18) згідно введених позначень:

$$\frac{U_{i1;i2;k+1} - U_{i1;i2;k}}{l} = \lambda U_{i1;i2;k}$$

Невідомими значеннями є $U_{i1;i2;k+1}$, що відшуковуються за формулами явної схеми пошарово.

13 ДОМАШНІ КОНТРОЛЬНІ РОБОТИ

13.1. ПЕРЕВІРКА АДЕКВАТНОСТІ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ

ЗАВДАННЯ: Перевірити за критерієм Фішера адекватність квадратичної апроксимації експериментальним даним.

Для цього:

1. Ввести в книгу Excel експериментальні дані відповідно до номера варіанту.
2. Обчислити середні значення вихідного параметру для кожного набору паралельних досліджень.
3. Побудувати графік середнього значення вихідного параметру.
4. Апроксимувати графік квадратичною функцією (при наведенні курсору на діаграму обрати пункт динамічного меню «додати лінію тренда», увімкнути опцію «показувати рівняння на діаграмі»).
5. Перевірити адекватність отриманої моделі (квадратичного рівняння на діаграмі) за формулами (3.1) - (3.3).

Варіанти завдання:

x	0	2	4	6	8	10	12
y_1	$3*N$	$5,1*N$	$12,8*N$	$36,8*N$	$60*N$	$90,7*N$	$145*N$
y_2	$2,5*N$	$7*N$	$14,7*N$	$30*N$	$65,2*N$	$98*N$	$138,5*N$
y_3	$3,8*N$	$4,1*N$	$12,4*N$	$37*N$	$67*N$	$102*N$	$137,2*N$

N – номер варіанту.

Приклад виконання завдання для N=25 наведено в табл. Б.1 та на рис. Б.1 (додаток Б).

13.2 РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯННЯ КОЛИВАНЬ СТРУНИ МЕТОДОМ СІТОК

ЗАВДАННЯ: відшукати рішення задачі коливань струни методом Річардсона, яка має наступні початкові та граничні умови:

$$\begin{cases} U(x,0) = \cos x \\ \left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \end{cases} ;$$

$$U(0,t) = U(L,t) = 0$$

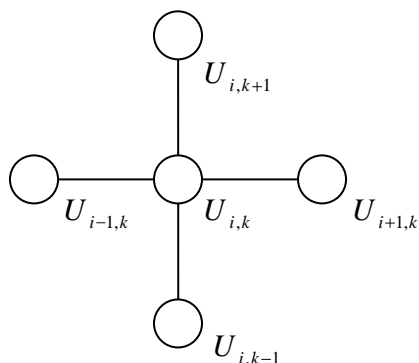
Рішення знайти для чотирьох моментів часу: 0; 0,02; 0,04; 0,06. Струну розділити на 6 частин; $a=1$, $L=1$

МЕТОД РІЧАРДСОНА:

Нехай початкові умови задачі мають вигляд:

$$\begin{cases} U(x,0) = f(x) \\ \left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{t=0} = \Phi(x) \end{cases}$$

Шаблон сітки для обчислення за методом Річардсона, має вигляд:



Щоб отримати рішення задачі на шарі $k+1$, необхідно знати рішення на двох попередніх шарах k та $k-1$. Ці значення знаходяться з початкових умов наступним шляхом:

$$U_{i,0} = f(x_i) \tag{13.1}$$

$$U_{i,1} = \frac{1}{2}(U_{i-1,0} + U_{i+1,0}) + l\Phi(x_i), \text{ де } l - \text{ крок за координатою} \tag{13.2}$$

Значення функції на правому на лівому кінцях струни знаходяться з граничних умов.

На наступних шарах значення функції відшукуються за формулою:

$$U_{i,k+1} = U_{i-1,k} + U_{i+1,k} - U_{i,k-1} \quad (13.3)$$

14 ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ

14.1 РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ТЕПЛА У СТРИЖНІ. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ МЕТОДОМ ПОДІЛУ ЗМІННИХ

ЗАВДАННЯ

1. Вивчити розв'язання одномірного рівняння теплопровідності методом поділу змінних (див. приклад розв'язання).
2. Записати в аналітичному вигляді показаний на рисунку свого варіанту початковий розподіл температури уздовж стрижня з теплоізолюваною бічною поверхнею.
3. Перейти до безрозмірних величин та записати рівняння розповсюдження тепла у стрижні (14.2), початкові умови (14.1) та граничні умови (14.3) для свого варіанту у безрозмірному вигляді (див. приклад розв'язання).
4. Вивести вираз (14.18) для розрахунку коефіцієнтів розкладання функції початкового розподілу температури в ряд Фур'є (див. приклад розв'язання).
5. Скласти програму реалізації розв'язання рівняння теплопровідності для свого варіанту в системі Matlab (див. відомості про команди Matlab):
 - a) Написати підпрограму обчислення функції початкового розподілу $f_1(z)$ (14.6) (вхідна змінна z), побудувати графік цієї функції та шляхом порівняння з графіком свого варіанту переконатися в правильності складання функції;
 - b) Написати підпрограму обчислення коефіцієнта a_n (14.18) (вхідна змінна n);
 - c) Написати підпрограму обчислення функції $T_n(\tau)$ (14.15) (вхідні змінні n, t, a_n);
 - d) Написати підпрограму обчислення функції $Z_n(z)$ (14.14) (вхідні змінні n, z);
 - e) Написати підпрограму обчислення функції $V_n(z, \tau)$ (14.8) (вхідні змінні Z_n, T_n);
 - f) Написати підпрограму обчислення функції $V(z, \tau)$ як суми $V_n(z, \tau)$.
6. Написати сценарій розв'язання рівняння теплопровідності (14.5) з використанням вказаних вище підпрограм, що включає побудову графіків розподілу температури по довжині стрижня для десяти моментів часу, крок 0,01.
7. Дати якісний аналіз процесу розповсюдження тепла в стрижні.

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ МЕТОДОМ ПОДІЛУ ЗМІННИХ

Нехай лівий кінець стрижня з теплоізолюваною бічною поверхнею підтримується при нульовій температурі, а правий теплоізолюваний. Початковий розподіл температури показаний на рисунку 14.1. Треба дослідити зміну цього розподілу з часом.

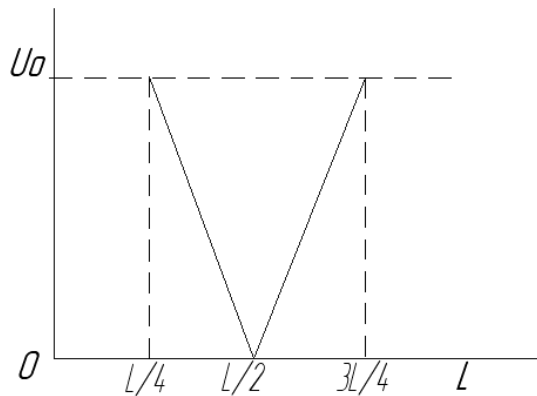


Рис. 14.1. Початковий розподіл температури уздовж стрижня

Підготовчим кроком до вирішення поставленої задачі є визначення крайових умов.

Легко побачити, що функція $f(x) = U|_{t=0}$ задається формулами

$$f(x) = \begin{cases} 0, 0 \leq x < L/4 \\ \alpha_1 x + \beta_1, L/4 \leq x < L/2 \\ \alpha_2 x + \beta_2, L/2 \leq x < 3L/4 \\ 0, 3L/4 \leq x < L \end{cases};$$

Таким чином, треба визначити коефіцієнти рівняння прямої для двох відрізків.

Для визначення коефіцієнтів α_1, β_1 треба скласти систему з двох рівнянь, використовуючи координати початку та кінця відрізка:

$$f(L/4) = U_0, \quad f(L/2) = 0$$

Маємо систему

$$\begin{cases} \alpha_1 L/4 + \beta_1 = U_0 \\ \alpha_1 L/2 + \beta_1 = 0 \end{cases},$$

з якої знаходимо значення коефіцієнтів.

Аналогічним чином визначаємо коефіцієнти α_2, β_2 .

Тоді початковий розподіл температури описується наступною системою:

$$U|_{t=0} = f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < L/4 \\ 4U_0(1/2 - x/L), & L/4 \leq x < L/2 \\ 4U_0(x/L - 1/2), & L/2 \leq x < 3L/4 \\ 0, & 3L/4 \leq x < L \end{cases} \quad (14.1)$$

Щоб дослідити розповсюдження тепла з часом, треба розв'язати рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (14.2)$$

у відповідності до заданих теплових режимів на торцях:

$$U|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \quad (14.3)$$

Таким чином, дане завдання зводиться до розв'язання диференційного рівняння (14.2) за граничних умов (14.3) і початкової умови (14.1).

Для зручності подальших викладень перейдемо до безрозмірних величин:

$$V = U/U_0, \quad \tau = ta^2/L^2, \quad z = x/L \quad (14.4)$$

Враховуючи, що

$$\frac{\partial U}{\partial t} = U_0 \frac{\partial V}{\partial \tau} \frac{a^2}{L^2}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_0}{L^2} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2},$$

рівняння (14.2) та умови (14.1), (14.3) перепишемо у вигляді

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad (14.5)$$

$$V|_{\tau=0} = f_1(z) = \begin{cases} 0, & 0 \leq z < 1/4 \\ 4(1/2 - z), & 1/4 \leq z \leq 1/2 \\ 4(z - 1/2), & 1/2 \leq z \leq 3/4 \\ 0, & 3/4 \leq z < 1 \end{cases} \quad (14.6)$$

$$V|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial V}{\partial z} \right|_{z=1} = 0 \quad (14.7)$$

Розв'язання поставленої задачі методом поділу змінних полягає у наступному.

Будемо шукати розв'язання рівняння (14.5) у вигляді добутку двох функцій

$$V(z, \tau) = Z(z) \cdot T(\tau) \quad (14.8)$$

Підставляючи (14.8) у (14.5), отримуємо

$$ZT' = Z''T,$$

звідки

$$T'/T = Z''/Z \quad (14.9)$$

Останній вираз можливий лише у тому випадку, якщо обидві частини не залежать від z і τ , тобто представляють собою постійну величину. Позначимо її через $(-\lambda^2)$. Тоді з рівняння (14.9) отримуємо два звичайних диференціальних рівняння:

$$T' + \lambda^2 T = 0 \quad (14.10)$$

$$Z'' + \lambda^2 Z = 0 \quad (14.11)$$

Граничні умови (14.7) задовільняються при виконанні умов

$$Z(0) = 0, \quad Z'(1) = 0, \quad (14.12)$$

Розв'яжемо спочатку рівняння (14.11). Для цього складемо характеристичне рівняння, обчислимо його дискримінант та корені. За видом коренів $(\pm \lambda i)$ визначаємо, що рішенням цього рівняння є функція

$$Z(z) = C_1 \cos(\lambda z) + C_2 \sin(\lambda z) \quad (14.13)$$

де C_1 та C_2 – довільні константи інтегрування. Задовольняємо рішення (14.13) умовами (14.12):

$$0 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0$$

$$0 = C_2 \cos \lambda$$

Тоді

$$C_1 = 0, \quad \cos \lambda = 0$$

Звідси

$$\lambda_n = n\pi/2, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

Власним числам λ_n відповідають власні функції

$$Z_n(z) = \sin(n\pi z/2) \quad (14.14)$$

Тепер розв'яжемо рівняння (10) за допомогою поділу змінних:

$$\frac{dT}{d\tau} = -\lambda^2 T$$

Інтегруючи обидві частини, отримаємо

$$\int \frac{dT}{T} = -\lambda^2 \int d\tau, \\ \ln T = -\lambda^2 \tau + C$$

де C – довільна константа інтегрування.

Тоді рішення рівняння (14.10) має вигляд:

$$T_n(\tau) = a_n \exp(-\lambda_n^2 \tau) = a_n \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2}{4} \tau\right) \quad (14.15)$$

Підставляючи вирази (14.14) та (14.15) в формулу (14.8), знайдемо приватні рішення рівняння (14.5), що задовольняють граничним умовам (14.7). При цьому кожному значенню $n = 1, 3, 5, \dots$ буде відповідати рішення

$$V_n(z, \tau) = a_n \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2}{4} \tau\right) \sin(n\pi z/2) \quad (14.16)$$

Сума рішень (14.16) в силу лінійності й однорідності рівняння (14.5) є його рішенням:

$$V(z, \tau) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} a_n \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2}{4} \tau\right) \sin(n\pi z/2) \quad (14.17)$$

Для визначення довільних констант a_n використаємо початкову умову (14.6), з якої слідує

$$\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} a_n \sin(n\pi z/2) = f_1(z)$$

Остання формула показує, що константи a_n є коефіцієнтами розкладу функції $f_1(z)$ в ряд Фур'є за синусами в інтервалі $(0,1)$. Отже,

$$a_n = 2 \int_0^1 f_1(z) \sin(n\pi z/2) dz$$

Підставляючи вираз (14.6) для функції $f_1(z)$ під інтеграл, отримуємо

$$a_n = 8 \left[\int_{1/4}^{1/2} (1/2 - z) \sin(n\pi z/2) dz + \int_{1/2}^{3/4} (z - 1/2) \sin(n\pi z/2) dz \right] \quad (14.18)$$

Швидкість збіжності ряду оцінимо за кількістю членів, які у ньому необхідно вдержати, щоб отримати при $\tau = 0$ початковий розподіл температури.

Графічне рішення рівняння (14.5) з початковою умовою (14.6) та граничними умовами (14.7) представлено на рис.14.2.

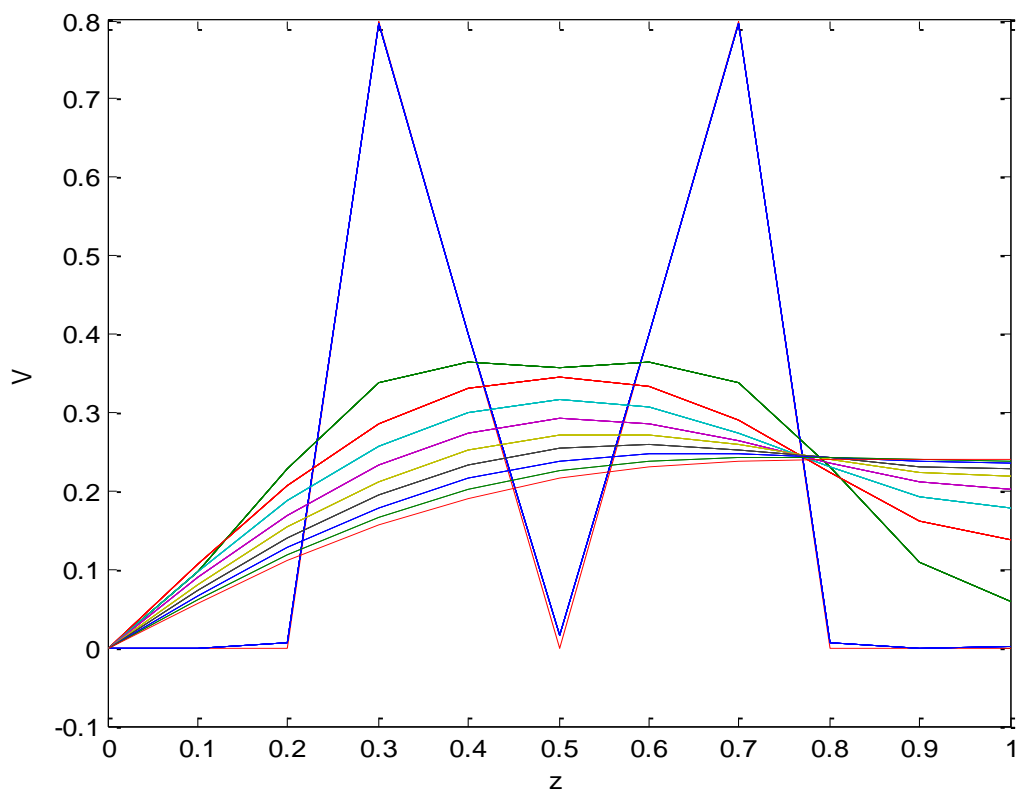


Рис. 14.2. Рішення рівняння теплопровідності у графічному вигляді

АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ МОДЕЛЮВАННЯ

Результати моделювання показують, що в початкові моменти часу відбувається швидке вирівнювання температури у перетинах стрижня, віддалених від країв. Крім того, тепло поширюється до кінців стрижня. Після цього відбувається охолодження стрижня, оскільки його лівий кінець підтримується при нульовій температурі, і тепло буде відходити у холодніше зовнішнє середовище.

ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ

Шифр варіанту завдання складається з трьох цифр. Перша та друга цифри вказують на тип крайової умови відповідно на лівому та правому кінцях стрижня:

1 – на кінці стрижня підтримується температура $U = 0$.

2 – кінець теплоізований, тобто $\frac{\partial V}{\partial \tau} = 0$

Третя цифра означає номер графіка від 1 до 10, на якому показаний початковий розподіл температури уздовж стрижня на рис. 14.3.

Варіанти:

- | | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1) 111; | 2) 122; | 3) 113; | 4) 124; | 5) 215; | 6) 126; |
| 7) 127; | 8) 218; | 9) 119; | 10) 120; | 11) 121; | 12) 211; |
| 13) 123; | 14) 213; | 15) 116; | 16) 216; | 17) 117; | 18) 217; |
| 19) 219; | 20) 110; | 21) 210; | 22) 214; | 23) 114; | 24) 112; |

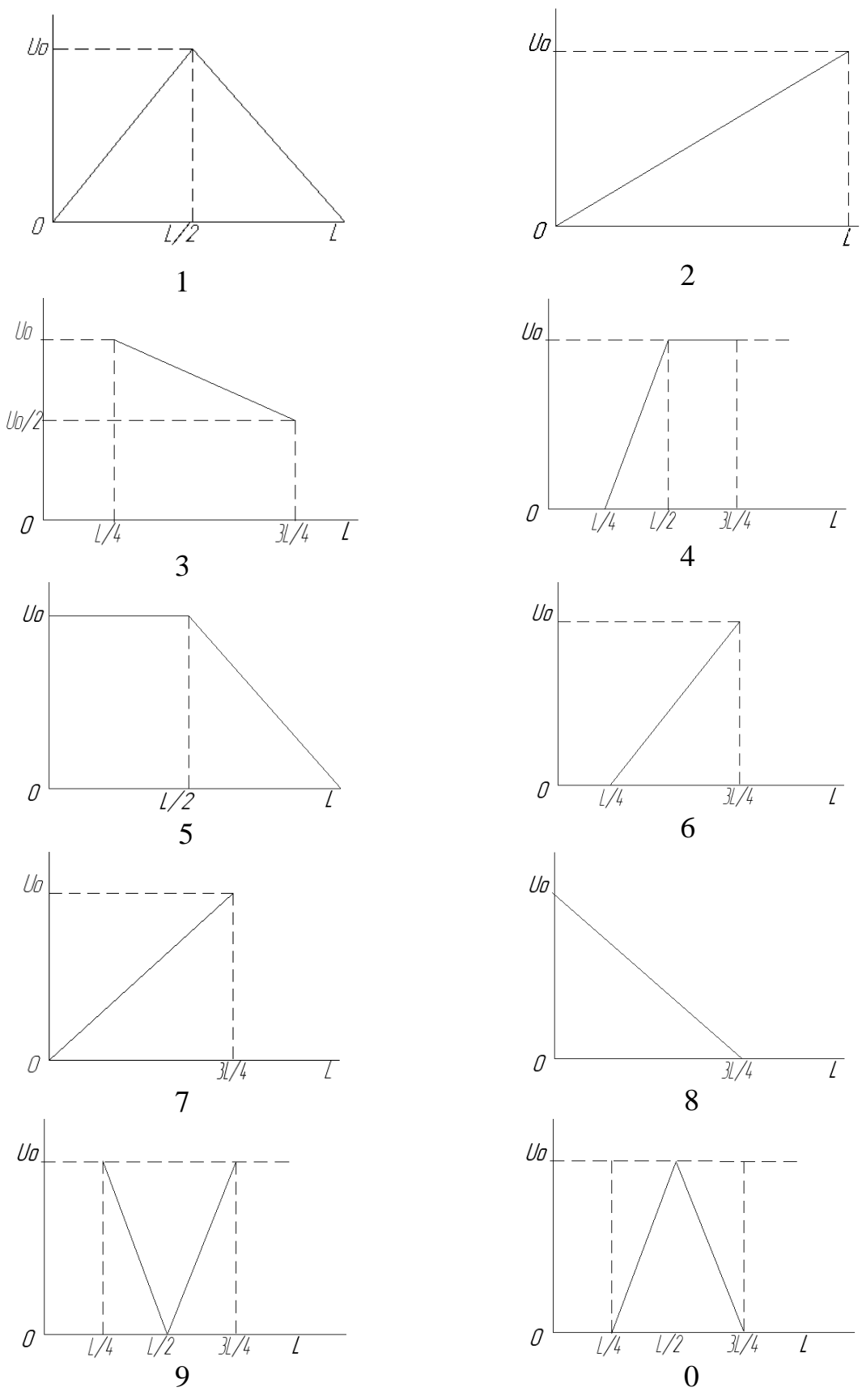


Рис. 14.3. Варіанти початкового розподілу температури у стрижні

ВИД РІШЕННЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ
ДЛЯ РІЗНИХ ВАРІАНТІВ ЗАВДАННЯ

Перші дві цифри варіанту	Вид рішення
11	$V(z, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2 \pi^2 \tau) \sin(n\pi z),$ $a_n = 2 \int_0^1 f(z) \sin(n\pi z) dz$
12	$V(z, \tau) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} a_n \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2}{4} \tau\right) \sin(n\pi z / 2)$ $a_n = 2 \int_0^1 f_1(z) \sin(n\pi z / 2) dz$
21	$V(z, \tau) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} a_n \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2}{4} \tau\right) \cos(n\pi z / 2)$ $a_n = 2 \int_0^1 f_1(z) \cos(n\pi z / 2) dz$

ВІДОМОСТІ ПРО КОМАНДИ СИСТЕМИ MATLAB,
НЕОБХІДНІ ДЛЯ ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ

Керуючі структури мови MATLAB

В MATLAB є два умовних оператори – if та switch. Синтаксис використання if в розгорнутій формі має вид:

if умова

оператори

elseif ще одна умова

оператори

else

оператори

end

Нижче наведений приклад, що виводить на екран надпис 'a is even' для парних чисел a .

```
>> if rem(a,2) == 0
disp('a is even')
end
```

Якщо число a було парне, то отримаємо відповідь: a is even.

У випадку, коли треба задовольнити подвійну умову, використовується знак $\&\&$, наприклад:

```
if exist('myfun.m') && (myfun(x) >= y
```

Для організації циклів використовуються оператори `for` та `while`. Цикл `for` дозволяє повторювати групи команд задану кількість разів. Наприклад, цикл

```
>> for i=1:5
x(i)=0
end
```

привласнює значення 0 першим п'яти елементам вектора x .

Цикл `while` надає можливість повторювати групу операторів нефіксовану кількість разів до виконання логічної умови. Приклад використання `while`: знайти найменше число n , факторіал якого є 100-значним числом.

```
>> n = 1; f=1;
while log10(f) < 100
f=f*n; n = n+1;
end
disp(n 1)
```

Побудова графіків у лінійному масштабі

Синтаксис команди:

```
plot(y)
plot(x, y)
plot(x, y, s)
```

Команда `plot(y)` будує графік елементів одновимірного масиву в залежності від номера елементу. Команда `plot(x, y)` відповідає побудові звичайної функції, коли одновимірний масив `x` відповідає значенням аргументу, а одновимірний масив `y` - значенням функції. Команда `plot(x, y, s)` дозволяє виділити графік функції, вказавши спосіб відображення лінії, спосіб відображення крапок, колір ліній і крапок за допомогою строкової змінної `s`, яка може включати до трьох символів з наступної таблиці:

Тип лінії		Тип крапки		Колір	
Безперервна	-	Крапка	.	Жовтий	y
Штрихова	--	Плюс	+	Фіолетовий	m
Подвійний пунктир	:	Зірка	*	Блакитний	c
Штрих-пунктирна	-.	Коло	o	Червоний	r
		Хрестик	x	Зелений	g
				Синій	b
				Білий	w
				Чорний	k

Якщо колір лінії не вказаний, він вибирається за умовчанням з шести перших кольорів, з жовтого до синього, повторюючись циклічно.

Команда `plot(x1, y1, s1, x2, y2, s2 ...)` дозволяє об'єднати на одному графіку декілька функцій `y1(x1)`, `y2(x2)` ..., визначивши для кожної з них свій спосіб відображення.

Для іменування осей використовуйте команди `xlabel z`; `ylabel V`.

Для додавання кривих на графік після побудови першої кривої використовуйте команду `hold on`.

Числове інтегрування

Обчислювальний алгоритм методу Сімпсона з автоматичним вибором кроку реалізований функцією `quad(name, a, b [,tol, trace])`, де

- `name` – ім'я М-коду-функції, яка задає під інтегральний вираз;
- `a, b` – межі інтегрування;
- `tol` – точність обчислення;

- `trace` – параметр, що дозволяє отримати інформацію про хід обчислень у вигляді таблиці, в стовпцях якої представлено значення кількості обчислень, початкову точку поточного проміжку інтеграції, його довжину і значення інтегралу.

Приклад::

У М-файлі з ім`ям `Simpson.m` пишемо:

```
function y=G(x)
```

```
y=exp(x)-x;
```

```
end
```

Потім у командному вікні викликаємо функцію `quad`:

```
quad('G',-1,0,1.0e-05)
```

Результатом буде:

```
ans =
```

```
1.13212056020538
```

Або ви можете переслати під`інтегральну функцію в `quad` як анонимну функцію `handle F`:

```
F = @(x)1./(x.^3-2*x-5);
```

```
Q = quad(F,0,2);
```

Анонимні функції

Розглянемо функцію $10*x$.

```
h(x) = 10
```

Якщо ви хочете використовувати різні множники, а не тільки 10, ви можете створити змінну `g` (яка спочатку дорівнює 10) та створити нову функцію:

```
h(x) = g * x
```

Потім реалізуйте це завдання через анонимну функцію:

```
g=10;
```

```
h=@(x) g*x;
```

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Рівняння теплопровідності, його фізичний зміст, мета розв'язання.
2. Вивід аналітичного виду функції початкового розподілу температури для свого варіанту.
3. Повний вивід рішення рівняння теплопровідності для свого варіанту (виходячи з крайових умов).
4. Програмна реалізація розв'язання рівняння у середовищі MatLab.
5. Аналіз результатів моделювання.

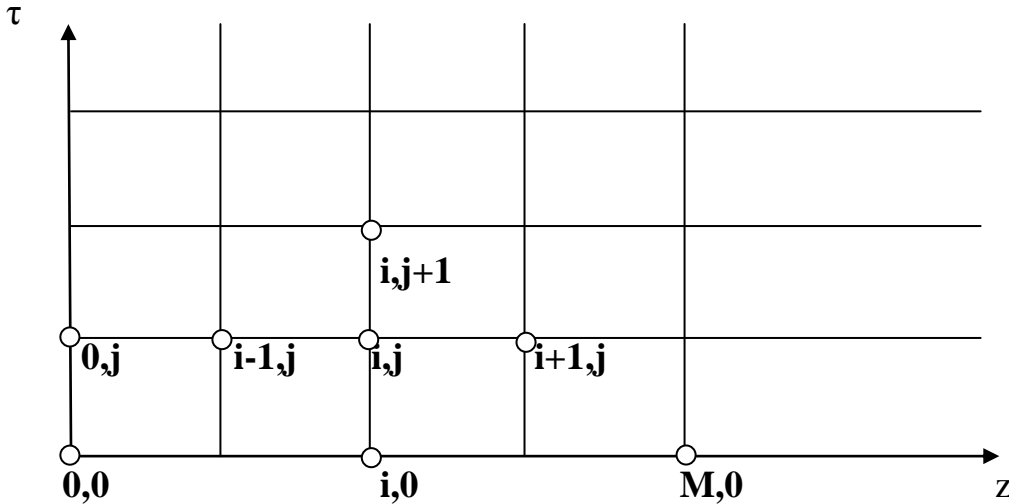
14.2 РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ТЕПЛА У СТРИЖНІ. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ МЕТОДОМ КІНЦЕВИХ РІЗНИЦЬ

ЗАВДАННЯ

1. Вивчити розв'язання одномірного рівняння теплопровідності методом кінцевих різниць (див. приклад розв'язання).
2. Записати у кінцево-різничному вигляді (14.20) початкові умови свого варіанту задачі, записані в аналітичному вигляді (14.1).
3. Записати у кінцево-різничному вигляді (14.21) граничні умови свого варіанту задачі.
4. Скласти програму реалізації розв'язання рівняння теплопровідності для свого варіанту в системі Matlab:
 - a) Створити масив для зберігання значень температури у дев'яти точках уздовж стрижня на нульовому часовому шарі. Написати підпрограму привласнення точкам їх значення у відповідності до початкових умов (14.20) та побудови графіку початкового розподілу температури.
 - b) Написати підпрограму для обчислення значення температури за формулою (14.19) на кожному наступному часовому шарі. При цьому врахувати, що значення температури у точках на границях стрижня привласнюються у відповідності до граничних умов (14.21).
 - c) Написати сценарій розв'язання рівняння теплопровідності з використанням вказаних вище підпрограм, що завершується виводом значень температури у кожній точці сітки у вигляді таблиці (див. табл. 14.1) та побудовою тривимірного графіку залежності температури стрижня від координати та часу (див. рис. 14.4).
5. Дати якісний аналіз процесу розповсюдження тепла в стрижні.
6. Порівняти точність та час розв'язання задачі методами, реалізованими у першому та другому практикумах (див. порівняння методів).

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ МЕТОДОМ КІНЦЕВИХ РІЗНИЦЬ

Для приблизного розв'язання задачі (14.5) - (14.7) використаємо прямокутну сітку, по вісі абсцис якої будемо відкладувати координату за довжиною стрижня, а по вісі ординат – час.



Видно, що

$$z_i = i\Delta z, i = 0, 1, 2, \dots, M, \Delta z = 1/M,$$

$$\tau_j = j\Delta \tau, j = 0, 1, 2, \dots$$

Використовуючи формули чисельного диференціювання

$$\frac{\partial V(z, \tau)}{\partial \tau} \approx \frac{V(z, \tau + \Delta \tau) - V(z, \tau)}{\Delta \tau} \quad (\text{різниця вперед})$$

$$\frac{\partial^2 V(z, \tau)}{\partial z^2} \approx \frac{V(z + \Delta z, \tau) - 2V(z, \tau) + V(z - \Delta z, \tau)}{\Delta z^2},$$

представимо рівняння (14.5) у різничному вигляді:

$$\frac{V_{i,j+1} - V_{i,j}}{\Delta \tau} = \frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{\Delta z^2},$$

Звідси знайдемо значення температури на кожному наступному часовому шарі:

$$V_{i,j+1} = r(V_{i+1,j} + V_{i-1,j}) + (1-2r)V_{i,j}, \quad (14.19)$$

де $V_{i,j} = V(i\Delta z, j\Delta \tau)$, $r = \frac{\Delta \tau}{\Delta z^2} = M^2 \Delta \tau$

Крайові умови у кінцево-різничній формі матимуть вигляд:

$$V_{i,0} = \begin{cases} 0, 0 \leq \frac{i}{M} < \frac{1}{4} \\ 4\left(\frac{1}{2} - z\right), \frac{1}{4} \leq \frac{i}{M} < \frac{1}{2} \\ 4\left(z - \frac{1}{2}\right), \frac{1}{2} \leq \frac{i}{M} < \frac{3}{4} \\ 0, \frac{3}{4} \leq \frac{i}{M} \leq 1 \end{cases} \quad (14.20)$$

$$V_{0,j} = 0, V_{M-1,j} = V_{M+1,j} \quad (14.21)$$

де $V_{M+1,j}$ - температура у фіктивній точці $M+1$ за стрижнем у момент часу j (використовується, коли кінець теплоізований).

Видно, що знаючи значення температури у точках $i-1, i, i+1$ j -го часового шару, можна обчислити значення температури у точках наступного $j+1$ -го часового шару. З початкових умов відомі значення температури на нульовому часовому шарі, а з граничних умов – на лініях $z=0$ та $z=M$. Таким чином, можна послідовно шар за шаром відшукати значення функції V .

Візьмемо $M=8$, тобто розіб'ємо стрижень на вісім частин, а $r=1/6$. Привласнимо точкам нульового часового шару їх значення у відповідності до початкових умов (14.20), а точкам на лініях $z=0$ та $z=M$ – у відповідності до граничних умов (14.21). Тоді, обчислюючи значення функції за формулою (14.19) на кожному наступному часовому шарі, відшукаємо всі потрібні значення температури.

Результати розрахунку у табличній формі представлені в табл.14.1, а у вигляді графіку – на рис. 14.4.

Табл. 14.1

Процес розповсюдження тепла у стрижні
(розв'язання методом кінцевих різниць)

τ/z	0	1/8	1/4	3/8	1/2	5/8	3/4	7/8	1
0	0	0	1	0.5	0	0.5	1	0	0
$\Delta \tau$	0	0.167	0.75	0.5	0.167	0.5	0.75	0.167	0
$2\Delta \tau$	0	0.236	0.612	0.486	0.278	0.486	0.612	0.236	0.005
$3\Delta \tau$	0	0.259	0.53	0.473	0.347	0.473	0.53	0.26	0.082
$4\Delta \tau$	0	0.261	0.436	0.462	0.387	0.461	0.476	0.275	0.141
$5\Delta \tau$	0	0.253	0.436	0.451	0.411	0.45	0.44	0.356	0.169

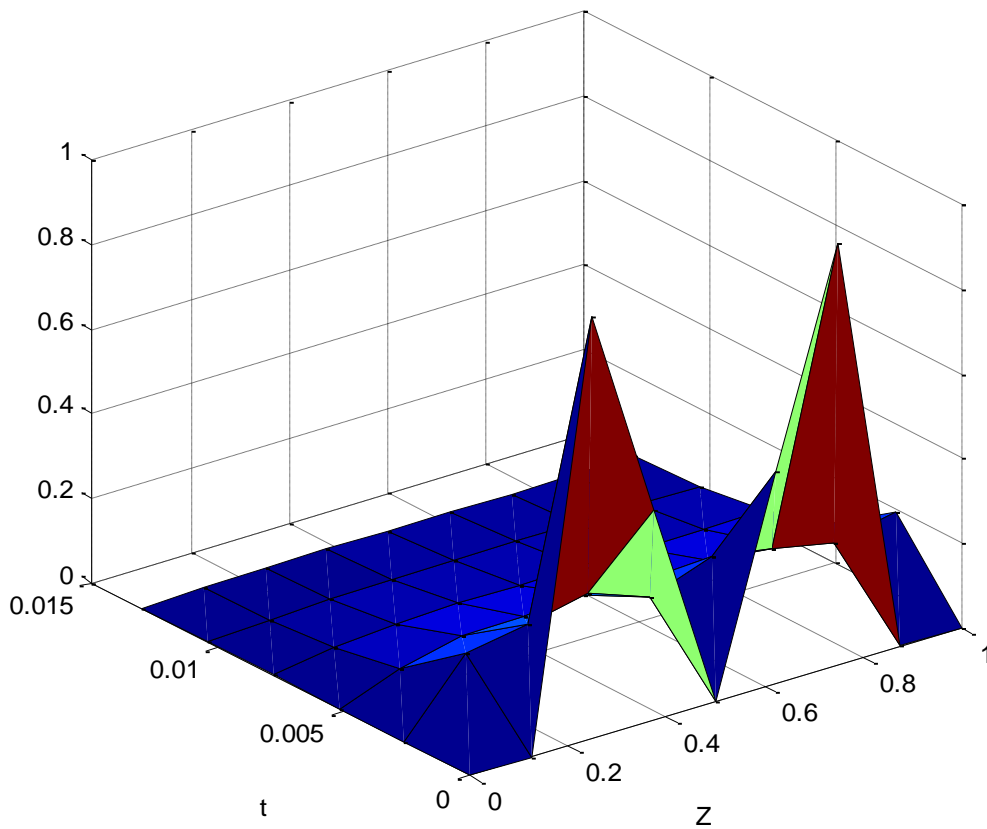


Рис. 14.4. Процес розповсюдження тепла у стрижні у графічному вигляді

ПОРІВНЯННЯ АНАЛІТИЧНОГО ТА ЧИСЕЛЬНОГО МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Метод поділу змінних є аналітичним, тому володіє найбільшою точністю. Метод кінцевих різниць є приблизним, отже його точність можна оцінити у порівнянні до результатів, отриманих шляхом рішення аналітичним методом. Таким чином порівняння точності методів, викладених у першому та другому практикумах, здійснюється шляхом обчислення відносної похибки:

$$\varepsilon = \max |\varepsilon_i|;$$

$$\varepsilon_i = \frac{|V_{ai} - V_{ci}|}{V_{ai}} * 100\% ,$$

де V_{ai} - значення температури у i -й точці стрижня у кінцевий момент часу, обчислене методом поділу змінних (аналітичним); V_{ci} - значення температури у i -й точці стрижня у кінцевий момент часу, обчислене методом кінцевих різниць (чисельним).

ВАРІАНТИ ЗАВДАННЯ

співпадають з практикумом №1.

ВІДОМОСТІ ПРО КОМАНДИ СИСТЕМИ MATLAB, НЕОБХІДНІ ДЛЯ ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ

Побудова тривимірного графіку

У системі MATLAB передбачено декілька команд і функцій для побудови тривимірних графіків. Значення елементів числового масиву розглядаються як z -координати крапок над площиною, визначуваною координатами x і y . Можливі декілька способів з'єднання цих крапок. Перший з них - це з'єднання крапок в перетині (функція `plot3`), другий - побудова сітчастих поверхонь (функції `mesh` і

surf). Поверхня, побудована за допомогою функції mesh, - це сітчаста поверхня, осередки якої мають колір фону, а їх кордони можуть мати колір, який визначається властивістю Edgcolor графічного об'єкту surface. Поверхня, побудована за допомогою функції surf, - це сітчаста поверхня, в якій може бути заданий колір не лише кордону, але і осередку; останнє управляється властивістю Facescolor графічного об'єкту surface.

Синтаксис команди surf:

```
surf(X, Y, Z, C)
```

```
surf(X, Y, Z)
```

Опис:

Команда surf(X, Y, Z, C) виводить на екран сітчасту поверхню для значень масиву Z, визначених на безлічі значень масивів X і Y. Колір осередку визначається масивом C.

Команда surf(X, Y, Z) використовує колір C = Z, тобто колір в цьому випадку пропорційний висоті поверхні.

Обчислення кінцевих різниць та приблизне диференціювання

Синтаксис команди:

```
y = diff(x)
```

```
y = diff(x, n)
```

Опис:

Функція $y = \text{diff}(x)$ обчислює кінцеві різниці. Якщо x - одновимірний масив вигляду $x = [x(1) \ x(2) \dots \ x(n)]$, то $\text{diff}(x)$ - це вектор різниць сусідніх елементів $\text{diff}(x) = [x(2) - x(1) \ x(3) - x(2) \dots \ x(n) - x(n-1)]$. Кількість елементів вектора x на одиницю менше кількості елементів вектора $\text{diff}(x)$. Функція $y = \text{diff}(x, n)$ обчислює кінцеві різниці порядку n , що задовольняють рекурентному співвідношенню $\text{diff}(x, n) = \text{diff}(\text{diff}(x, n-1))$. Апроксимацією похідної n порядку є відношення $\text{diff}(y, n) / \text{diff}(x, n)$.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Рівняння теплопровідності, його фізичний зміст, мета розв'язання.
2. Заміна приватних похідних кінцевими різницями за допомогою сіток.
3. Представлення рівняння теплопровідності та його крайових умов у кінцево-різничній формі.
4. Програмна реалізація розв'язання рівняння у середовищі MatLab.
5. Аналіз результатів моделювання.

14.3. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ ЗА ДОПОМОГОЮ ІНСТРУМЕНТУ PDE TOOLBOX ПАКЕТУ MATLAB

ЗАВДАННЯ

1. Вивчити загальний вигляд рівнянь математичної фізики та методи їх розв'язання (див. розділи 6, 7).
2. За допомогою засобу PDE Toolbox розв'язати рівняння еліптичного типу у відповідності до наведеного прикладу і таким чином придбати навички роботи із цією прикладною програмою.
3. За допомогою засобу PDE Toolbox розв'язати задачу коливань для свого варіанту. Результат представити у вигляді анімованого тривимірного графіку.
4. За допомогою засобу PDE Toolbox відшукати розподіл температури у пластині для свого варіанту. Результат представити у вигляді тривимірного графіку.
5. Дати якісний аналіз результатів моделювання кожного процесу.

ВИКОРИСТАННЯ ЗАСОБУ PDE TOOLBOX ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯННЯ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ

Нехай треба розв'язати двомірне рівняння Пуасона (різновид рівняння еліптичного типу):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (14.22)$$

де x, y - координати, $u(x, y)$ - функція, що відшукується, $f(x, y)$ - деяка неперервна функція, що описується виразом:

$$f(x, y) = e^{-x} + e^{-y} \quad (14.23)$$

на прямокутній області з граничними умовами:

$$\begin{aligned}
u(x_{\min}, y) &= \sin(y^2); \\
u(x_{\max}, y) &= \cos(3y); \\
\left. \frac{du}{dy} \right|_{x, y_{\min}} &= 10 \sin(x^2); \\
\left. \frac{du}{dy} \right|_{x, y_{\max}} &= 10 \sin(6x)
\end{aligned}
\tag{14.24}$$

на границях $x_{\min} = 0; x_{\max} = 1; y_{\min} = -1; y_{\max} = 1$ координатної сітки методом кінцевих елементів з використанням засобу PDE Toolbox.

Дана прикладна програма реалізує метод кінцевих елементів, який передбачає дискретизацію диференціальних рівнянь на так званих триангулярних сітках, тобто на сітках, елементарними осередками яких є трикутники для двох вимірів або призми для трьох вимірів.

Запуск цієї програми здійснюється командою `pdetool`. При цьому на екрані відображається головне вікно програми (рис. 14.5).

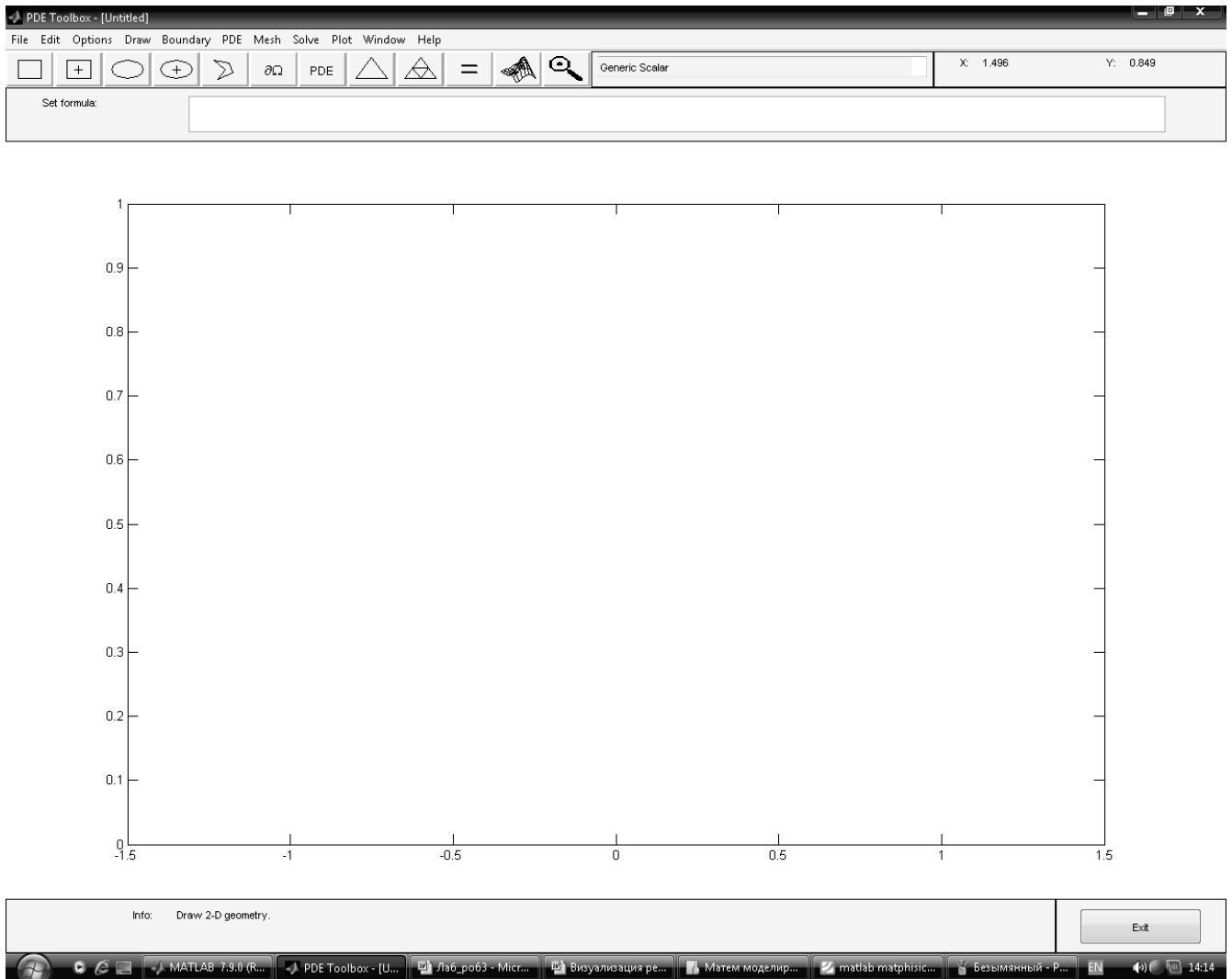



Рис. 14.5. Головне вікно програми PDE Toolbox

Для завдання прямокутної області рішення необхідно натиснути кнопку , після чого навести курсор на робоче поле редактора, натиснути ліву кнопку миші у лівому верхньому куті області, що задається $(0,1)$, та, утримуючи кнопку натиснутою, перемістити курсор у правий нижній кут $(1,-1)$. Прямокутна область буде зафіксована (рис. 14.6).

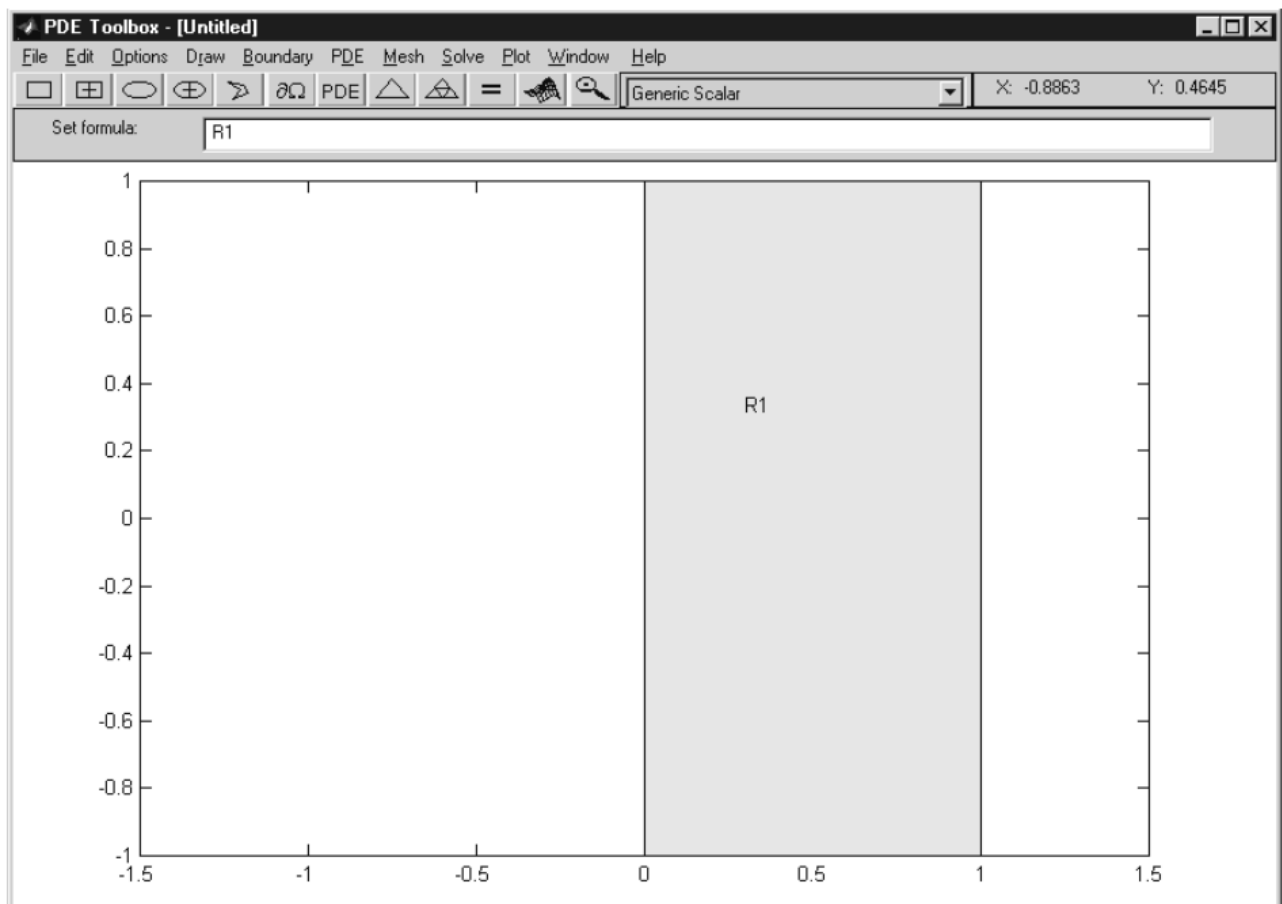


Рис. 14.6. Область розв'язання рівняння

При необхідності корегування координат та розмірів області треба навести курсор на область та двічі клацнути лівою кнопкою. Відкриється вікно редагування параметрів області.

Області довільної форми можуть бути задані аналогічним шляхом з використанням кнопок, що мають зображення прямокутників, еліпсів та полігону. При цьому результуюча область може бути визначена як об'єднання чи різниця декількох областей простої форми. Для цього у полі Set formula вказуються умовні позначення областей, пов'язані знаком «+» у разі об'єднання або «-» у разі різниці.

Для завдання граничних умов необхідно натиснути кнопку з символом $\partial\Omega$, в результаті чого вікно прийме вигляд, показаний на рис. 14.7.

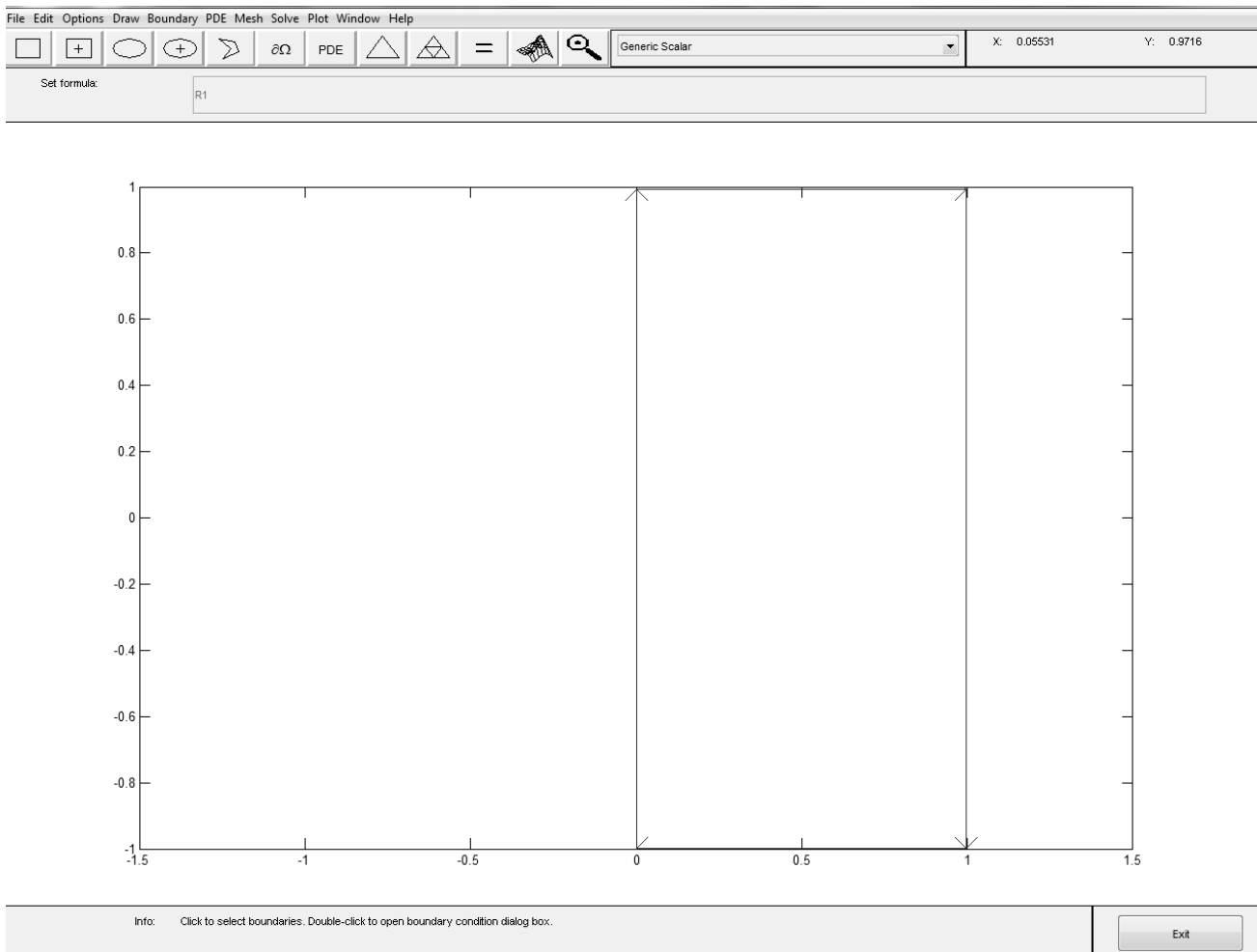


Рис. 14.7. Завдання граничних умов

Всі границі області показані лініями зі стрілками, за умовчанням червоного кольору (задані умови Дирихле). Для редагування граничних умов необхідно двічі клацнути лівою кнопкою миші на обраній границі та внести відповідні зміни в полях вікна. Якщо на певній границі задана функція, слід обирати умови Дирихле, а якщо задана її похідна – то умови Неймана. У нашому прикладі на лівій та правій границях задані умови Дирихле, а на нижній та верхній – Неймана (14.24). На рис. 14.8 та 14.9 показано приклади вводу граничних умов.

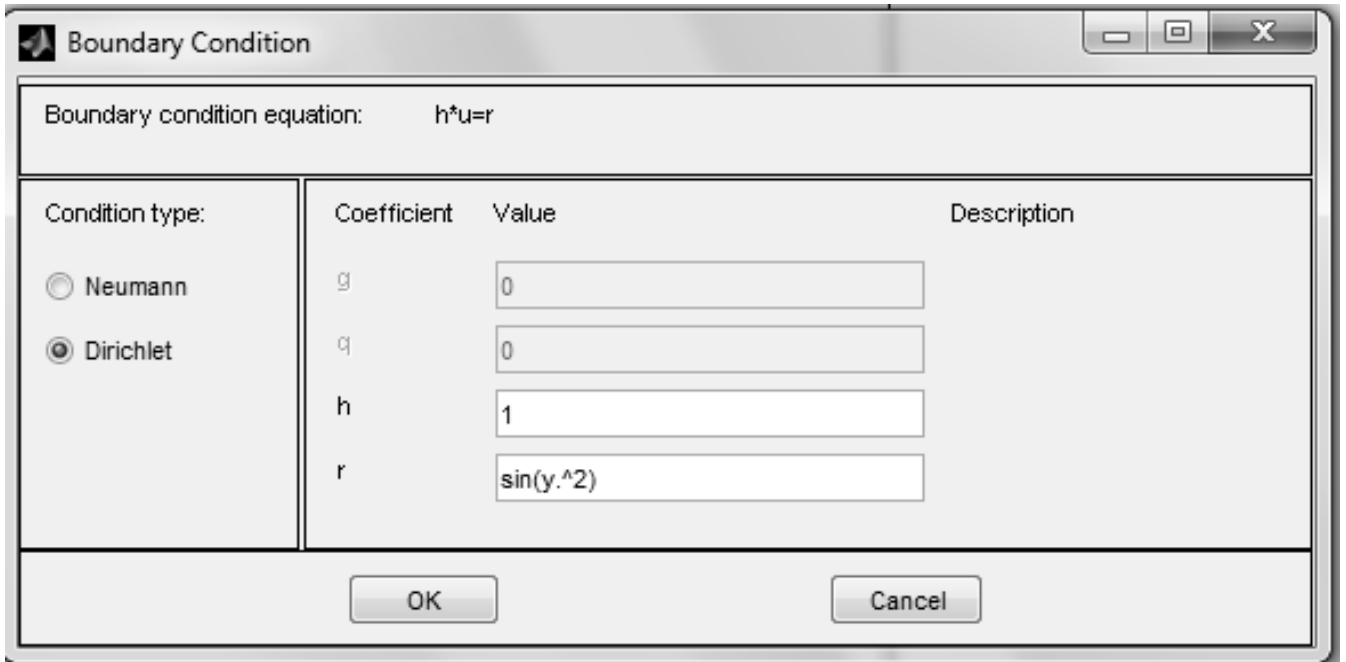


Рис. 8. Завдання граничної умови Дирихле

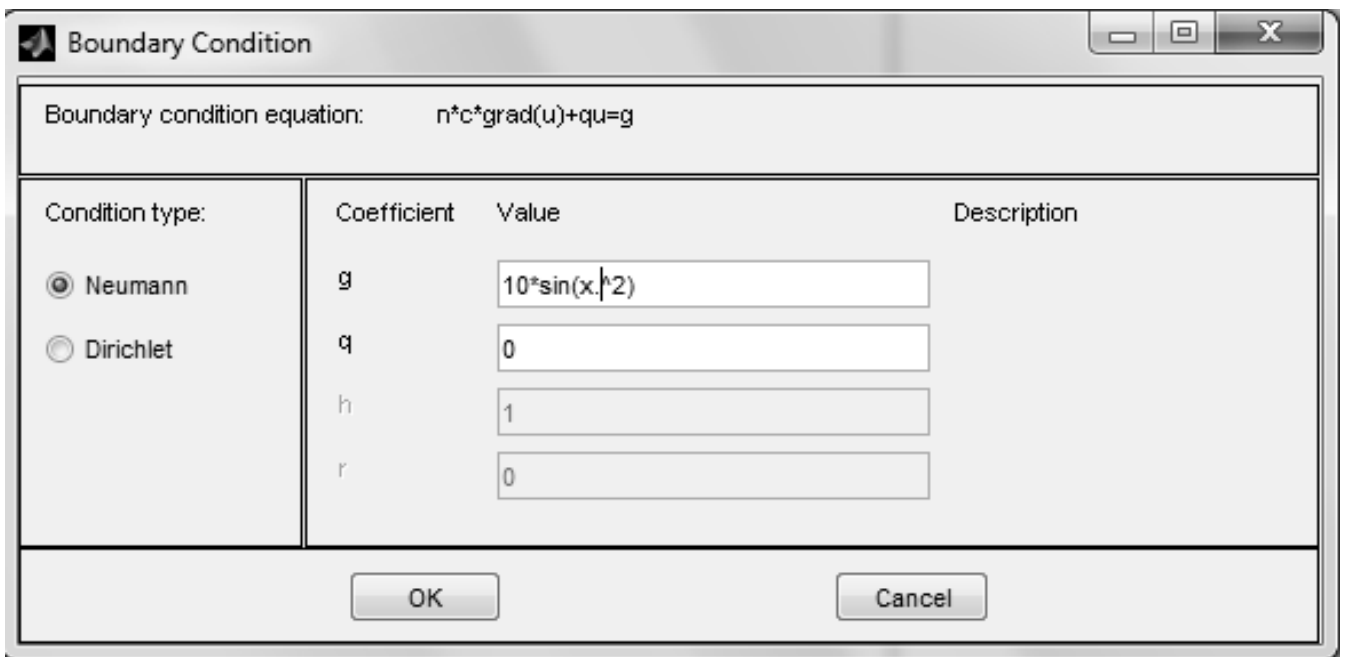


Рис. 14.9. Завдання граничної умови Неймана

Увага: синтаксис вводу вимагає крапку після x та y .

Для завдання типу рівняння та вводу його функцій і коефіцієнтів необхідно натиснути кнопку з символами PDE, після чого внести відповідні зміни в полях вікна редагування (рис. 14.10).

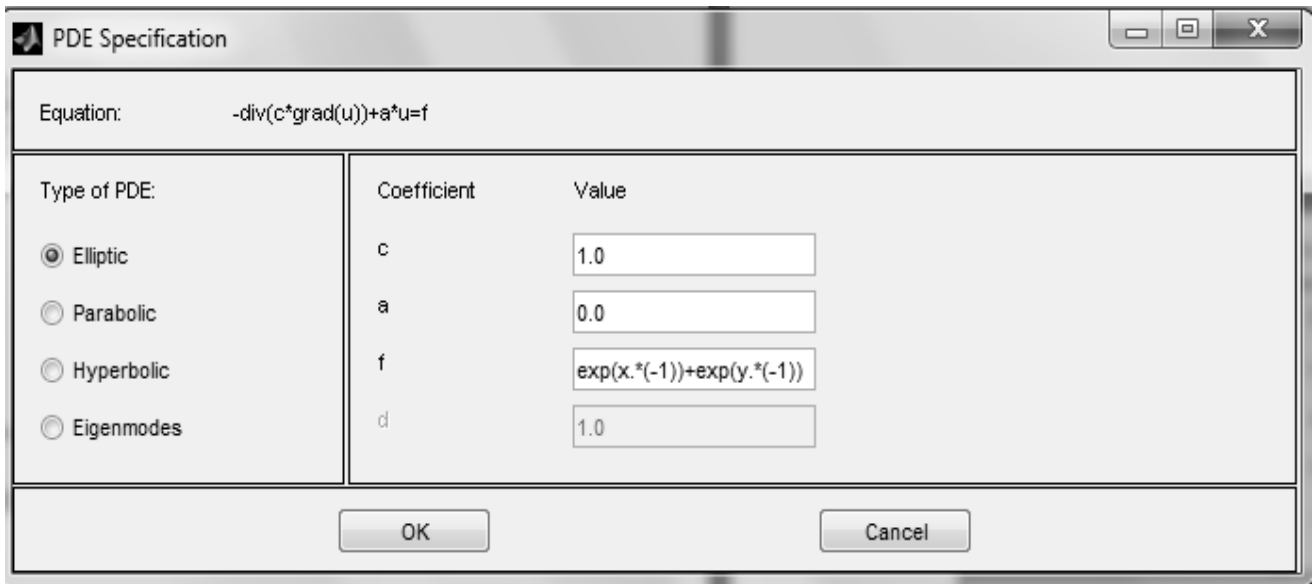






Рис. 14.10. Редагування виду диференційного рівняння

Заповнення цієї форми відбувається на основі рівняння (14.22), у поле f заноситься функція (14.23) відповідно до прийнятого синтаксису.

Формування триангулярної сітки здійснюється натисканням кнопки з символом . При необхідності збільшення числа вузлів сітки слід натиснути кнопку з символом  (рис.14.11).

Розв'язання задачі здійснюється при натисканні кнопки . За умовчанням значення функції рішення виділяються різними кольорами (рис. 14.12). Для графічного виводу рішення задачі у вигляді трьохмірного зображення слід натиснути кнопку з символом , після чого у вікні редагування параметрів зображення ввести необхідні дані, як це показано на рис. 14.13. При активації кнопки Plot на екран буде виведено графік, показаний на рис. 14.14.

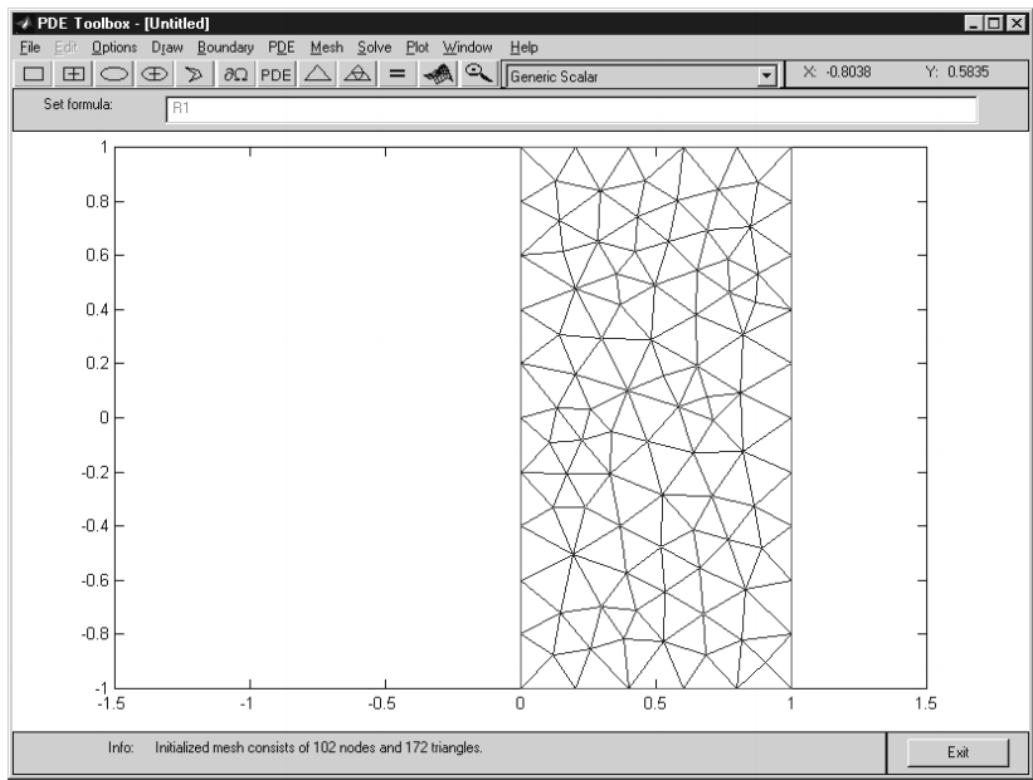


Рис. 14.11. Побудова триангулярної сітки

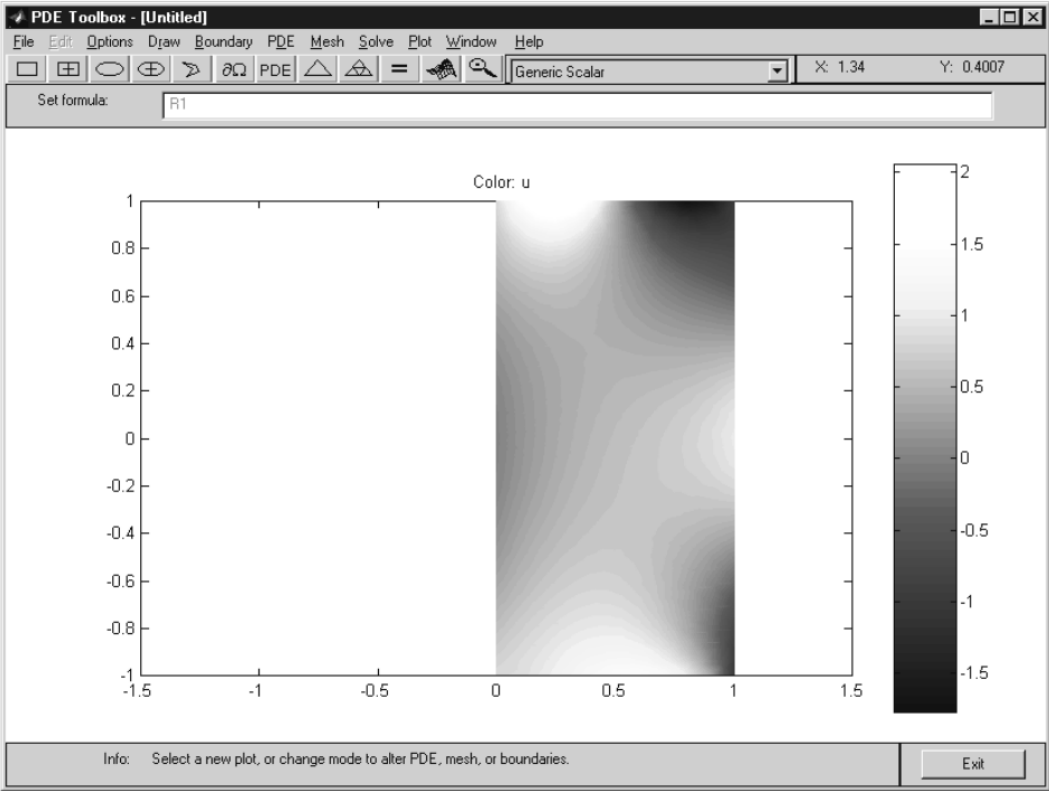


Рис.14.12. Результат розв'язання задачі у двомірному вигляді

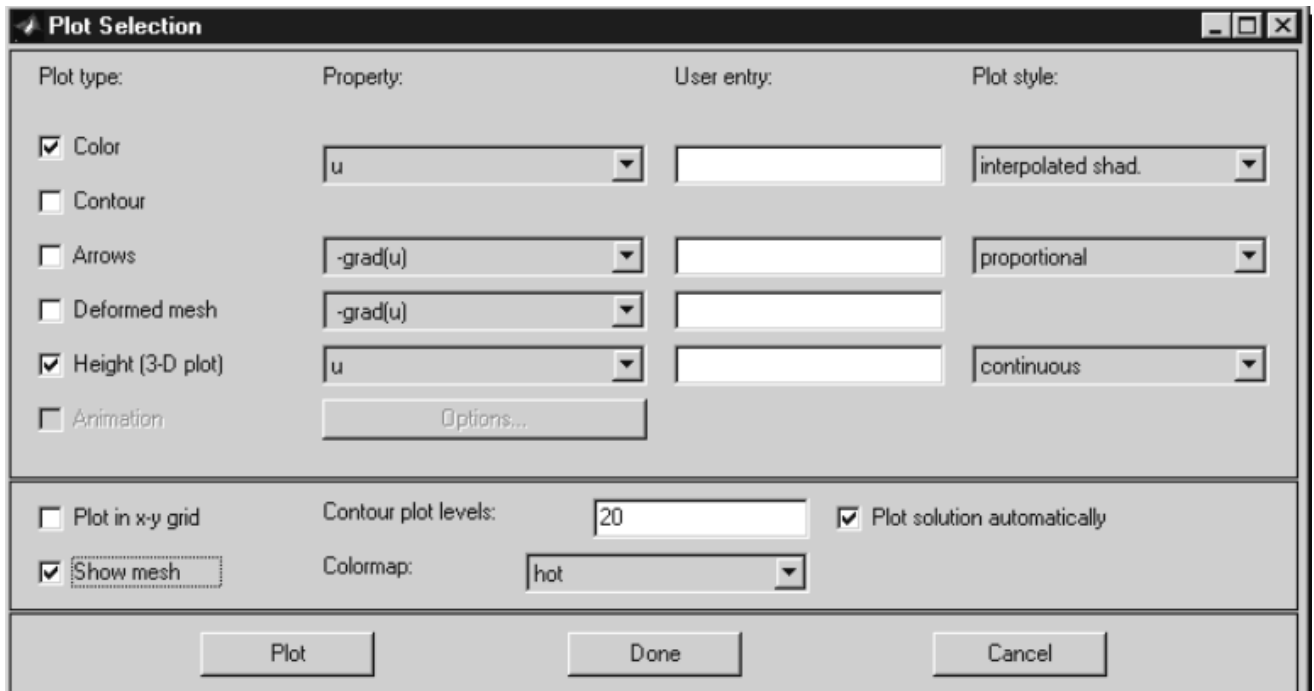


Рис. 14.13. Вікно редагування параметрів зображення

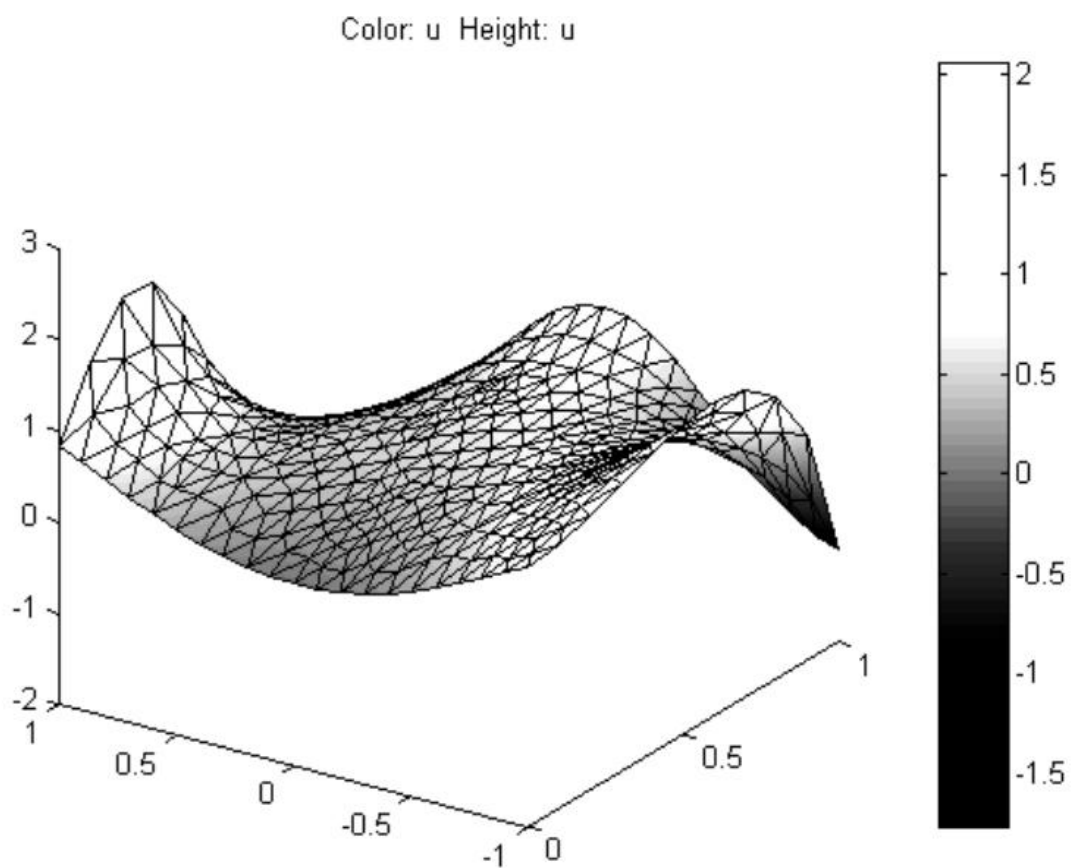


Рис.14.14. Результат розв'язання задачі у трихвимерному вигляді

ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ ДО ЗАДАЧІ КОЛИВАНЬ

Треба отримати графічне рішення наступної задачі коливань.

Закріпленій по контуру (*граничні умови*) однорідній квадратній мембрані із стороною l (*область рішення*) надали форму $u(x,y,0) = \sin(\pi x/l) \cdot \sin(2\pi y/l)$ (*початкові умови*). Рішення знайти для 50 моментів часу. Сторона пластини $l = n$, коефіцієнт при операторі Лапласа $a = 0.5n$, де n – номер варіанту.

При завданні виду рівняння зверніть увагу, що коефіцієнт при похідній за часом позначений літерою **d**, коефіцієнт при операторі Лапласа (похідних за координатами) - літерою **c**, оскільки додаткових умов руху пластини не наведено, коефіцієнт **a** при функції переміщення та функція **f** дорівнюють нулю.

Для вводу початкових умов треба після редагування виду рівняння викликати меню **Solve**→**Parameters** і у рядку $u(t0)$ ввести початкові умови згідно з синтаксисом: крапка після аргументу першого синуса. Для виводу тривимірного анімованого графіку треба у вікні редагування параметрів зображення встановити прапорець **Animation**. У цьому ж вікні вказати **time for plot=50** для завдання 50 моментів часу рішення.

На рис. 14.15 показано фрагмент анімації рішення задачі коливань для $n=30$.

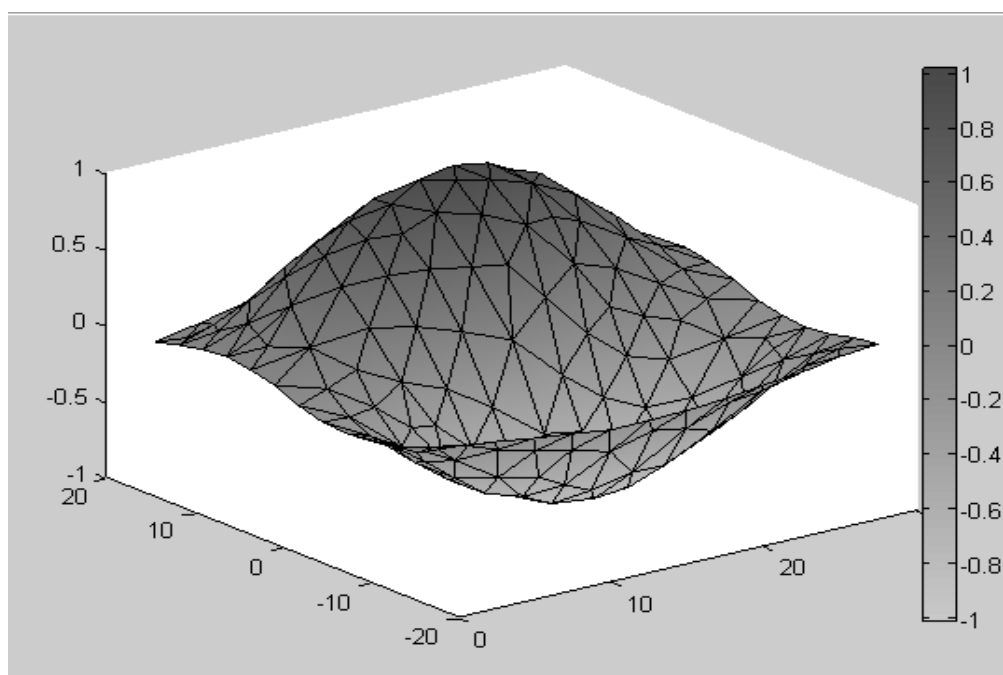


Рис. 14.15 Графічне рішення рівняння гіперболічного типу

ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ ДО ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Треба знайти розподіл температури у прямокутній платині:

$\{(x,y) | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ (область рішення), якщо на її границях підтримується задана температура:

$$u(x,0) = u(x,b) = 0, \quad x \in (0,a),$$

$$u(0,y) = y(b-y), \quad u(a,y) = \sin(\pi y/b), \quad y \in (0,b) \text{ (граничні умови)}.$$

Початковий розподіл температури: $u=x+y$ (початкові умови)

$a=0.5n, b=0.4n$, де n – номер варіанту.

Рішення знайти для 10 моментів часу і представити у вигляді тривимірного графіку (рис. 14.16). На рис. 14.16 показано рішення задачі теплопровідності для $n=30$.

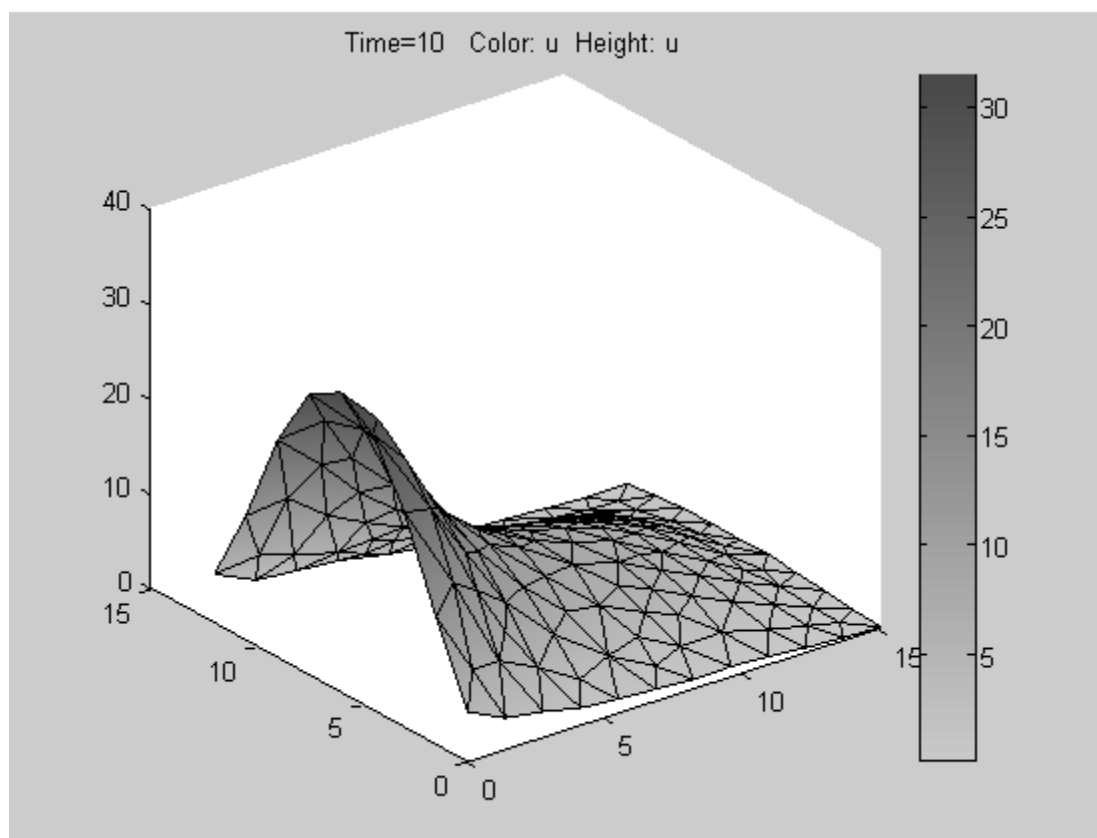


Рис. 14.16. Результат розв'язання рівняння параболічного типу

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Рівняння математичної фізики, їх фізичний зміст, застосування.
2. Методи розв'язання рівнянь математичної фізики.
3. Використання програми PDE Toolbox для розв'язання диференціальних рівнянь у приватних похідних: завдання області рішення, граничних умов (їх види), вибір типу рівняння та завдання його коефіцієнтів, завдання початкових умов задачі та параметрів візуалізації рішення.
4. Аналіз результатів моделювання.

ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Е.А. Рындин, И.Е. Лысенко: Решение задач математической физики в системе MATLAB: учебное пособие. – Таганрог, 2005. – 40 с.
2. Науменко Л. В. Математичні моделі: Методичні вказівки до проведення практичних занять та виконання лабораторних робіт. - Запоріжжя : ЗДІА, 2005. - 46 с.
3. Ратыни А.К. Уравнение теплопроводности: Методические указания. - Иваново : ГОУВПО Иван. гос. хим.-технол. ун-т, 2007.– 21 с.
4. Перестюк М.О., Марінець В.В.: Теорія рівнянь математичної фізики. Наук. посібник. – 2-е видавництво, перероб. І доп. – К.: Либідь, 2001.
5. Brian R, Hunt: Matlab R2007 с нуля: [пер. с англ.]. – М. : лучшие книги, 2008. – 352 с.

Додаток А

Таблиця А.1

Таблиця значень критерію Фішера для рівня значущості 0,05

	f_1										
f_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	245.95
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.43
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.70
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.86
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.62
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	3.94
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.51
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.22
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.01
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.85
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.72
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.62
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.53
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.46
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.40

Продовження таблиці 3.1

16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.35
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.31
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.27
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.23
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.20

f_1 - число ступенів свободи більшої дисперсії, f_2 - число ступенів свободи меншої дисперсії.

Додаток Б

Таблиця Б.1

Розрахунок адекватності математичної моделі в редакторі MS Excel

x	0	2	4	6	8	10	12	
y1	75,00	127,50	320,00	920,00	1500,00	2267,50	3625,00	
y2	62,50	175,00	367,50	750,00	1680,00	2450,00	3495,00	
y3	95,00	102,50	435,00	925,00	1552,50	2550,00	3695,00	
y_sred	77,50	135,00	374,17	865,00	1577,50	2422,50	3605,00	
y_raschetn	256,19	125,17	860,55	2462,33	4930,51	8265,09	12466,07	
								summa raznostey
(y_rasch-y_sred)^2	31930,12	96,63	236568,75	2551463,13	11242676,06	34135857,91	78518561,54	126717154,13
								summa raznostey
(y_sred-y1)^2	6,25	56,25	2934,03	3025,00	6006,25	24025,00	400,00	36452,78
(y_sred-y2)^2	225,00	1600,00	44,44	13225,00	10506,25	756,25	12100,00	38456,94
(y_sred-y3)^2	306,25	1056,25	3700,69	3600,00	625,00	16256,25	8100,00	33644,44
							summa summ	108554,17
Sad	31679288,53							
Sy	7753,869048							
Frasch	4085,610466							
f1	4							
f2	14							
Fkrit	3,11							
Frasch>Fkrit	Модель неадекватна							

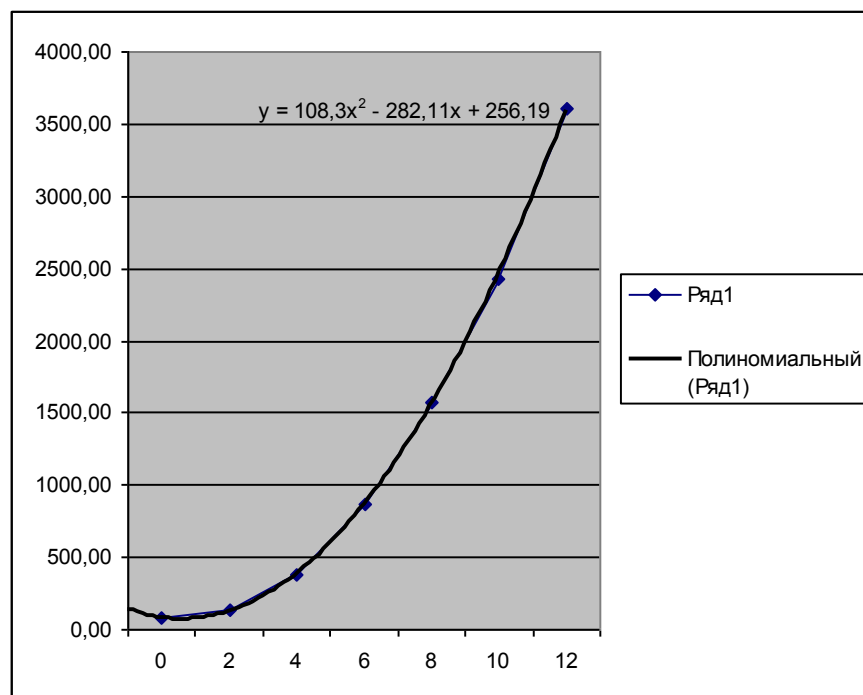


Рис. Б.1 Апроксимація експериментальних даних