

Міністерство освіти і науки України
Запорізька державна інженерна академія



В.О. Рахуба
О.М. Барішенко

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НА ЕОМ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Частина 2

*для студентів ЗДІА
спеціальності 6.05020201 “Автоматизоване управління технологічними
процесами”*

Запоріжжя
2012

Математичне моделювання на ЕОМ. Навчальний посібник для студентів ЗДІА спеціальності “Автоматизоване управління технологічними процесами” денної та заочної форми навчання /Укладачі: Рахуба В.О., Барішенко О.М. – Запоріжжя, 2012. – 36 с.

Навчальний посібник призначений для студентів спеціальності «Автоматизоване управління технологічними процесами», які вивчають курс «Математичне моделювання на ЕОМ». Посібник містить матеріал, що стосується основних етапів математичного моделювання на макрорівні, методи дослідження отриманих математичних моделей, а також завдання до домашньої контрольної роботи та завдання до лабораторного практикуму, які розкривають методи розв’язку математичних моделей систем та перевірки їх на обумовленість та стійкість. Наведено перелік необхідних джерел інформації.

ЗМІСТ

| | |
|--|----|
| ВСТУП | 4 |
| 1. ОСОБЛИВОСТІ МОДЕЛЮВАННЯ НА МАКРОРІВНІ | 5 |
| 2. АНАЛОГІЇ ФІЗИЧНИХ ПІДСИСТЕМ | 6 |
| 3. КОМПОНЕНТНІ ТА ТОПОЛОГІЧНІ РІВНЯННЯ..... | 7 |
| 3.1. Аналогії компонентних рівнянь..... | 7 |
| 3.2. Аналогії топологічних рівнянь..... | 9 |
| 4. ЕКВІВАЛЕНТНІ СХЕМИ ТЕХНІЧНИХ ОБ`ЄКТІВ | 10 |
| 5. ТИПИ ЗВ`ЯЗКІВ МІЖ ПІДСИСТЕМАМИ РІЗНОЇ ФІЗИЧНОЇ ПРИРОДИ .. | 13 |
| 6. ОТРИМАННЯ ТОПОЛОГІЧНИХ РІВНЯНЬ НА ОСНОВІ ТЕОРІЇ ГРАФІВ.. | 16 |
| 7. МЕТОД НЬЮТОНА ДЛЯ РОЗВ`ЯЗКУ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ | 20 |
| 8. ІНТЕГРУВАННЯ СИСТЕМ ЗДР ДЛЯ АНАЛІЗУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ | 23 |
| 8.1. Особливості інтегрування ЗДР..... | 23 |
| 8.2. Точність методів інтегрування..... | 24 |
| 8.3. Стійкість методів інтегрування та стійкість систем..... | 25 |
| 8.4. Вибір величини кроку інтегрування..... | 27 |
| 9. ЗАГАЛЬНІ ЕТАПИ ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ..... | 29 |
| 9.1. Побудова аналітичних моделей..... | 29 |
| 9.2. Побудова статистичних моделей..... | 30 |
| 10. МЕТОДИ СПРОЩЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ..... | 30 |
| 11. ДОМАШНЯ КОНТРОЛЬНА РОБОТА..... | 31 |
| 12. ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ..... | 32 |
| ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА | 36 |

ВСТУП

Основним засобом підвищення якості управління різними технологічними процесами є розробка та використання математичних моделей цих процесів. Суть математичного моделювання полягає в заміні реального об'єкту відповідною системою математичних відносин, що дозволяє проводити попереднє дослідження поведінки об'єкту за допомогою ЕОМ. Це має велике значення під час розв'язання оптимізаційних задач, наявністю яких характеризується сучасне виробництво. В сучасних економічних умовах нашої країни, коли на першому місці постають питання енерго- та ресурсозбереження, чисельні експерименти на математичних моделях представляють собою необхідну вимогу науково-технічного розвитку.

При вирішенні переважної більшості технічних задач об'єкти моделювання представляються такими, що мають кінцеву кількість елементів певної довжини та у яких незалежною змінною є тільки час. Розв'язання таких задач охоплює макрорівень моделювання, опису якого присвячений даний посібник.

1. ОСОБЛИВОСТІ МОДЕЛЮВАННЯ НА МАКРОРІВНІ

Математичні моделі процесів на макрорівні моделювання представляють собою системи звичайних диференціальних рівнянь, в яких незалежною змінною є тільки час. Тобто усі технологічні об'єкти розглядаються як сукупність певних елементів, стан яких характеризується фізичними величинами, що залежать тільки від часу і не розподілені у просторі.

Базова ідея синтезу математичної моделі об'єкту на макрорівні полягає у розділенні його на підсистеми різної фізичної природи (електричну, теплову тощо), встановленні зв'язків між цими підсистемами та складенні математичного опису кожної підсистеми і зв'язків між ними.

Таким чином, для здобуття математичних моделей складних систем різної фізичної природи необхідно:

1. Виділити відповідні підсистеми.
2. Скласти їх еквівалентні схеми.
3. Встановити зв'язки між підсистемами.
4. На основі еквівалентних схем виконати моделювання об'єкту.

Моделювання технічних систем здійснюється за допомогою теорії графів та методів фізичних аналогій, вузлового, табличного, змінних стану та узагальненого методу отримання математичних моделей систем (ММС). Ці методи реалізовані у таких програмних продуктах як VisSim, RL, MATLAB, Matrix_M.

Сьогодні процес моделювання складних технічних систем є у значній мірі автоматизованим, що реалізується у системах автоматизованого проектування (САПР).

2. АНАЛОГІЇ ФІЗИЧНИХ ПІДСИСТЕМ

Скласти єдине математичне забезпечення для САПР технічних об'єктів можливо завдяки існуванню аналогій формального опису підсистем різної фізичної природи.

Кожна технічна задача має власний вектор невідомих, які зветься **фазовими змінними**. Наприклад, для електричної підсистеми фазовими змінними є струм та напруга, для механічної поступальної підсистеми – сила та швидкість, тощо.

Через фазові змінні виражаються фізичні властивості об'єкту. Усі існуючі підсистеми різної фізичної природи мають аналогії їхніх фазових змінних та компонент, що відображені у табл. 1.

Таблиця 1

Аналогії фізичних підсистем

| Тип підсистеми | Фазові змінні | | Компоненти | | |
|----------------------------|------------------------|------------------|------------|---------------------|---------------------------|
| | Типу потоку | Типу потенціалу | Типу R | Типу C | Типу L |
| Електрична | Струм I | Напруга U | Опір | Ємність | Індуктивність |
| Механічна поступальна | Сила F | Швидкість v | Тертя | Маса | Пружність |
| Механічна обертальна | Обертальний момент M | Кутова швидкість | Тертя | Момент інерції | Обертальна гнучкість |
| Гідравлічна та пневматична | Витрата | Тиск | Тертя | Гідравлічна ємність | Гідравлічна індуктивність |
| Теплова | Тепловий потік Φ | Температура T | Тепло опір | Теплоємність | - |

3. КОМПОНЕНТНІ ТА ТОПОЛОГІЧНІ РІВНЯННЯ

Модельні рівняння технологічних об'єктів складаються з компонентних і топологічних рівнянь. **Компонентні рівняння** описують функціональні властивості об'єкту та об'єднують у собі різномірні фазові змінні для одного і того ж елементу. **Топологічні рівняння** описують структурні зв'язки об'єкту та об'єднують однорідні фазові змінні для різних елементів.

Компонентні рівняння можуть бути алгебраїчними, диференційними або логічними. Їх отримують теоретичним або логічним шляхом чи на основі експериментів.

Топологічні рівняння будуються на основі теорії графів, за допомогою таблиць тощо.

Для основних елементів технічних підсистем компонентні рівняння є відомими.

3.1. Аналогії компонентних рівнянь

Всі компонентні рівняння будуються за допомогою простих елементів трьох типів:

1. Резистивного типу R . На цих елементах відбувається дисипація (розсіювання) енергії, тобто перетворення її у теплову.
2. Ємкісного типу C , на яких відбувається накопичення потенційної енергії.
3. Індуктивного типу L , на яких відбувається накопичення кінетичної енергії.

Оскільки кожна підсистема має свої фізичні властивості, але аналогічні за функціями властивостям інших підсистем, то окремі елементи цих підсистем описуються однаковими виразами.

Розглянемо ці аналогії на прикладі електричної, механічної поступальної та теплової підсистем.

1. Для електричної підсистеми:

а). рівняння опору (закон Ома): $I = \frac{U}{R}$, де R - електричний опір;

б). рівняння ємності: $I = c \frac{dU}{dt}$, де c - ємність

в). рівняння індуктивності: $U = L \frac{dI}{dt}$, де L - індуктивність

2. Для механічної поступальної підсистеми:

а). рівняння в'язкого тертя: $F = \frac{\nu}{R_m}$, де $\frac{1}{R_m} = \mu$ - механічний опір; тоді

$$F = \mu \nu$$

б). рівняння маси (другий закон Ньютона):

$$F = m \frac{d\nu}{dt} = ma$$

в). рівняння пружності:

$$\nu = Lm \frac{dF}{dt} = \frac{1}{c} \frac{dF}{dt}, \text{ де } Lm - \text{ механічна індуктивність, } c - \text{ коефіцієнт пружності.}$$

Тоді $\frac{dF}{dt} = c\nu = c \frac{dx}{dt}$, де x - деформація. Звідси

$$F = cx$$

3. Для теплової підсистеми (рівняння будуються на основі законів Фур'є та Ньютона відповідно для індуктивного та конвективного теплообміну):

а). щільність теплового потоку для індуктивного теплообміну:

$$\psi = \frac{\lambda}{l} (T_1 - T_2)$$

б). щільність теплового потоку для конвективного теплообміну:

$$\psi = a_{\text{конв}} (T_1 - T_2)$$

Тут λ - коефіцієнт теплопровідності, $a_{\text{конв}}$ - коефіцієнт тепловіддачі через конвекцію, T_1, T_2 - температури на кінцях стрижня.

Домножимо обидві частини рівнянь на площу поперечного перетину:

а). $\Phi_{\text{інд}} = \frac{\lambda ST}{l} = \frac{1}{R_{\text{інд}}} T$, де $R_{\text{інд}} = \frac{l}{\lambda S}$

б). $\Phi_{\text{конв}} = a_{\text{конв}} ST = \frac{1}{R_{\text{конв}}} T$, де $R_{\text{конв}} = \frac{1}{a_{\text{конв}} S}$

3.2. Аналогії топологічних рівнянь

Аналогії топологічних рівнянь засновані на рівняннях рівноваги та неперервності.

1. Для електричної підсистеми (рівняння базуються на законах Кірхгофа):

а). сума струмів у вузлах підсистеми дорівнює нулю:

$$\sum_{k \in p} I_k = 0$$
 - рівняння рівноваги, де I_k - струм k -ї гілки, p - множина номерів

гілок, що належать даному вузлу.

б). сума падінь напруг на окремих гілках замкненого контуру дорівнює нулю:

$$\sum_{i \in q} U_i = 0$$
 - рівняння неперервності, де U_i - падіння напруги на i -й гілці, q -

множина номерів гілок, що входять у контур.

2. Для механічної поступальної підсистеми:

а). принцип Д'Аламбера:

$$\sum_{k \in p} F_k = 0$$
 - рівняння рівноваги

б). принцип додавання швидкостей:

$$\sum_{i \in q} v_i = 0$$
 - рівняння неперервності

3. Для теплової підсистеми:

а). сума теплових потоків у кожному вузлі схеми дорівнює нулю:

$$\sum_{k \in p} \Phi_k = 0$$
, де Φ_k - тепловий потік, що втікає або витікає із вузла.

б). сума різниць температур на кінцевих ділянках теплового контуру дорівнює нулю:

$$\sum_{i \in q} T_i = 0$$

4. ЕКВІВАЛЕНТНІ СХЕМИ ТЕХНІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

Згідно методу фізичних аналогій будь-якій технічній системі можна поставити у відповідність певну формальну **еквівалентну схему**, яка описується такою ж системою рівнянь, що досліджувана технічна система. Тобто використання еквівалентної схеми дозволяє отримати математичний опис реальних компонент системи на основі їх заміни ідеальними наближеннями до них.

Еквівалентні схеми складають з наступних елементів (рис. 4.1):

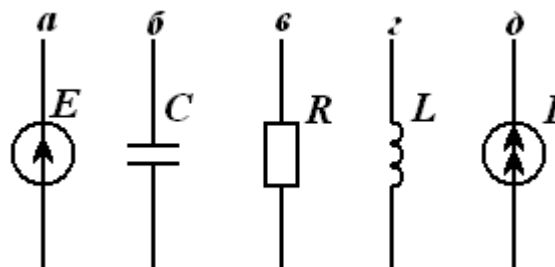


Рис. 4.1. Елементи еквівалентної схеми електричної підсистеми

На рисунку:

а). – джерело типу різниці потенціалів, що описується компонентним рівнянням виду $E = f(Z)$, де Z - час, фазова змінна або константа.

б), в), г) – відповідно елементи типу ємності, опору та індуктивності

д). – джерело типу потоку $I = f(Z)$

Для механічної поступальної підсистеми використовують такі позначення (рис. 4.2):

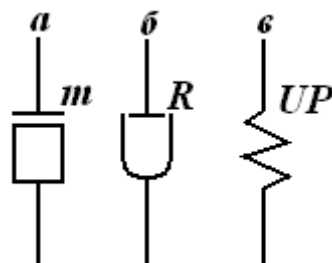


Рис. 4.2. Елементи еквівалентної схеми механічної підсистеми

При побудові еквівалентної схеми спочатку в модельованому об'єкті виділяють елементи, масу яких необхідно врахувати. Такі елементи зображаються двополюсниками (умовне позначення двополюсника дане на рисунках). Перший полюс цього двополюсника з'єднується з базовим вузлом, що відображає інерціальну систему відліку (або систему, яку можна прийняти при розв'язанні конкретної задачі за інерціальну); другий полюс є самою масою (через нього здійснюються всі взаємодії елемента з довкіллям). Далі виділяють елементи тертя і пружності. Елемент тертя включається між тілами, що контактують, елемент пружності – між тілами, що сполучаються пружним зв'язком.

Зовнішні зусилля, що прикладаються до механічної системи, відображуються включенням джерела сили (типа потоку) між базовим вузлом і тим вузлом, до якого підключений елемент маси, що піддається зусиллю.

При складанні еквівалентних схем слід уникати послідовного з'єднання джерела типа I і гілки типа L, а також паралельного з'єднання джерела типа E і гілки типа C. Для усунення таких підключень слід врахувати який-небудь ефект, яким раніше нехтували. Наприклад, при послідовному з'єднанні джерела сили і пружини можна у вузол їх з'єднання підключити елемент маси, відповідний масі пружини, при паралельному з'єднанні джерела тиску і гідравлічної ємкості між ними можна включити елемент місцевого опору, відповідний опору вхідного отвору в ємкості.

Розглянемо приклад механічної поступальної підсистеми. Нехай автомобіль масою m_2 на пружному тросі везе причіп масою m_1 .

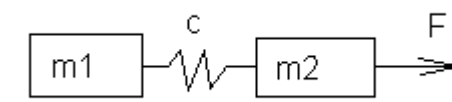


Рис. 4.3. Механічна поступальна підсистема

Масовим елементам (аналогії ємності L) відповідають наступні сили, що діють на них:

$m_2 - F, TR1$ (тертя), C (пружності)

$m_1 - TR2$ (тертя), C (пружності)

Складемо еквівалентну схему (рис. 4.4):

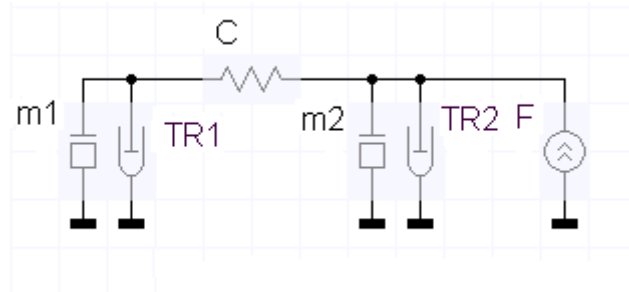


Рис. 4.4. Еквівалентна схема механічної підсистеми

Вузлам схеми відповідають швидкості, гілкам - зусилля.

5. ТИПИ ЗВ'ЯЗКІВ МІЖ ПІДСИСТЕМАМИ РІЗНОЇ ФІЗИЧНОЇ ПРИРОДИ

Зазвичай реальним об'єктом є сукупність різнорідних фізичних підсистем. Згідно з основними етапами здобуття ММС на макрорівні, після складання еквівалентних схем однорідних підсистем слід встановити зв'язки між ними, тобто визначити їх дію одне на одного.

Можна виділити три типи зв'язків:

1) **Трансформаторний:** у одній підсистемі включається залежне джерело різниці потенціалів; це джерело залежить від різниці потенціалів на залежному джерелі потоку, встановленому в іншій підсистемі, який, у свою чергу, залежить від потоку через перше джерело. Такий тип зв'язку об'єднує електричну і механічну підсистеми.

На рис. 5.1 показана еквівалентна схема трансформаторного зв'язку, де p і q - підсистеми різної природи.

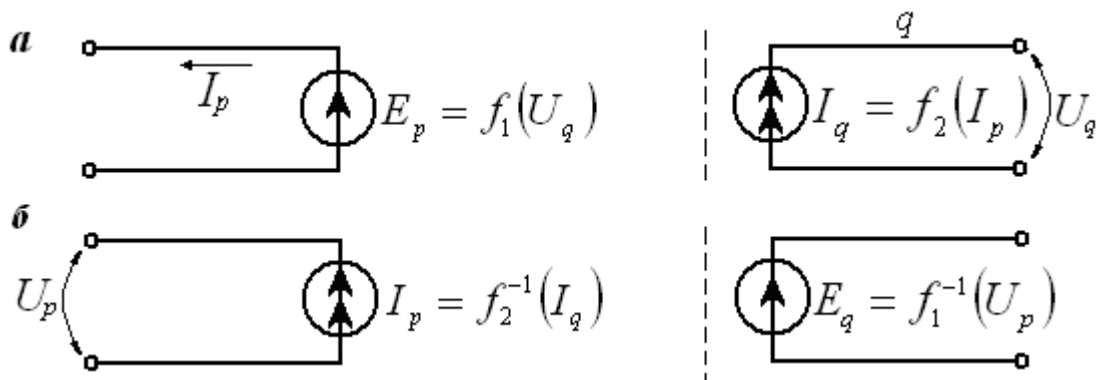


Рис. 5.1. Схема трансформаторного типу зв'язку

Приклад трансформаторного типу зв'язку показаний на рис. 5.2.

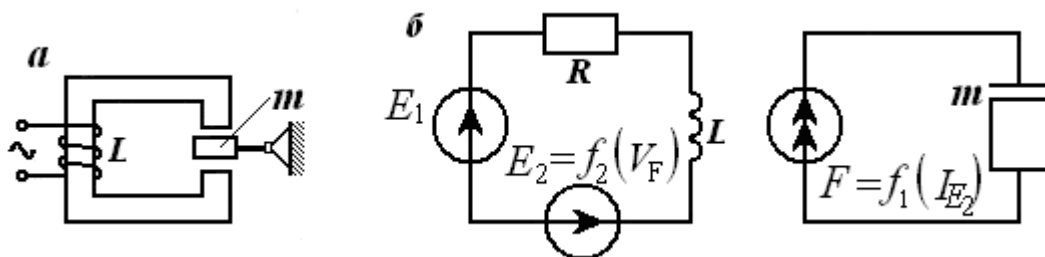


Рис. 5.2. Приклад електромеханічного вібратора (а)
і його еквівалентна схема (б)

Джерело сили F , що впливає на масу m , залежить від швидкості зміни електромагнітного поля, тобто від струму через котушку електромагніту, або, що те ж саме, від струму через джерело проти-е.р.с. E_2 , який залежить від швидкості руху маси m , E_1 - вхідна синусоїдальна напруга; R - активний опір обмотки електромагніту.

2) **Гираторний**: в обох фізичних підсистемах включаються залежні джерела одного типу: або типа різниці потенціалів, або типа струму; джерела різниці потенціалів залежать від потоку через джерело в іншій підсистемі (рис. 5.3, а), джерела потоку залежать від різниці потенціалів на джерелі в іншій підсистемі (рис. 5.3, б). Такий вигляд зв'язку характерний при взаємодії механічної і гідравлічної або пневматичної підсистем.

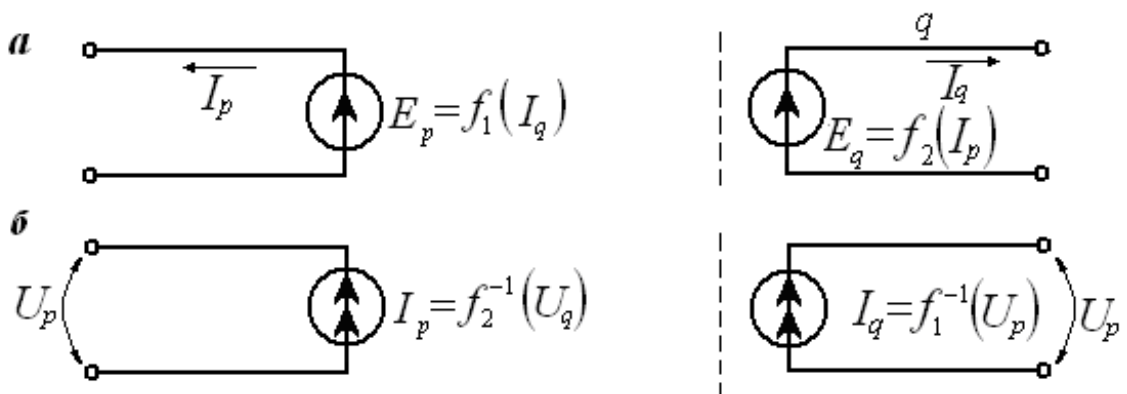


Рис. 5.3. Схема гираторного типа зв'язку

Приклад гираторного типа зв'язку показаний на рис. 5.4, а його еквівалентна схема на рис. 5.5.

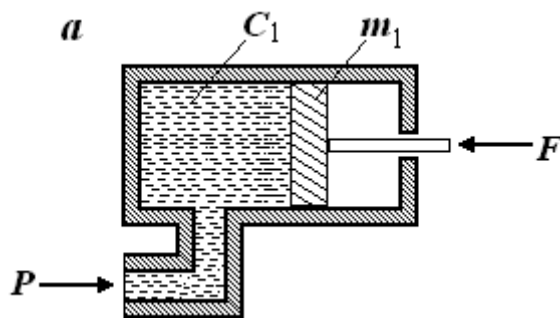


Рис. 5.4. Приклад гідроциліндра

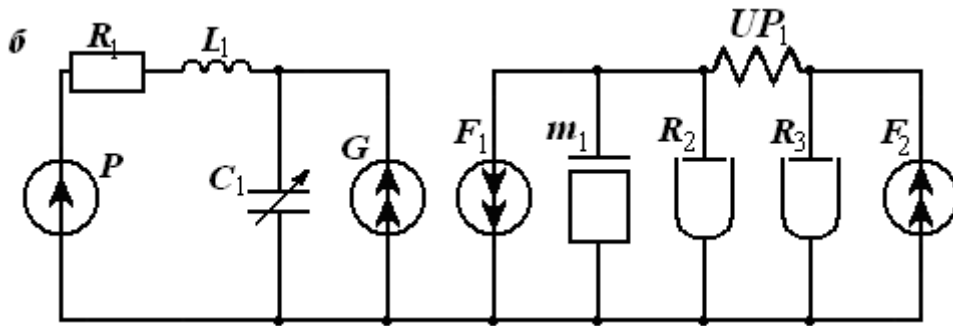


Рис. 5.5. Еквівалентна схема гідроциліндра

Гідравлічна система на еквівалентній схемі представлена джерелом тиску P , яке через трубопровід (елементи R_1 і L_1) нагнітає рідину в змінну ємність C_1 , механічна підсистема представлена джерелом зусилля F_2 , яке, долаючи тертя штока об стінки, через пружний шток UP_1 пересуває поршень масою m_1 , що має тертя R_2 об стінки циліндра.

Дія на гідравлічну підсистему з боку механічної враховується джерелом витрати G , яка залежить від швидкості руху поршня. Джерело сили F_1 враховує дію гідравлічної підсистеми на механічну, де P - тиск в ємності C_1 (потенціал гідравлічної підсистеми).

3) Через залежні параметри елементів.

Такий зв'язок характерний при взаємодії з тепловою підсистемою. Залежно від значень температури змінюються параметри елементів взаємодіючої підсистеми, наприклад в'язкість рідини, значення опору резистора. Зворотний вплив на теплову підсистему враховується введенням в еквівалентну схему теплової підсистеми залежних джерел теплового потоку. За відсутності масопереносу значення джерела визначається потужністю, що виділяється елементом; за наявності масопереносу – масою, що переноситься.

В разі моделювання впливу температури на роботу технічних об'єктів без врахування зворотної дії передбачають, як змінюватиметься температура в часі, і переносять цю залежність на параметри елементів об'єкту, тобто роблять параметри залежними від часу. Аналогічно моделюють старіння елементів об'єкту при розрахунках надійності.

6. ОТРИМАННЯ ТОПОЛОГІЧНИХ РІВНЯНЬ НА ОСНОВІ ТЕОРІЇ ГРАФІВ

Для отримання топологічних рівнянь, що відбивають зв'язки усередині системи, вдаються до побудови графа, який отримують на основі еквівалентної схеми об'єкта.

Граф – це сукупність вершин (вузлів) та пов'язаних з ними ребер (гілок).

Кожному тілу з масою, що обліковується, відповідає вузол схеми (вершина графа). Один вузол, званий базовим, відводиться тілу, яке ототожнюється з інерціальною системою відліку.

Побудуємо граф, що відповідає еквівалентній схемі на рис. 4.4:

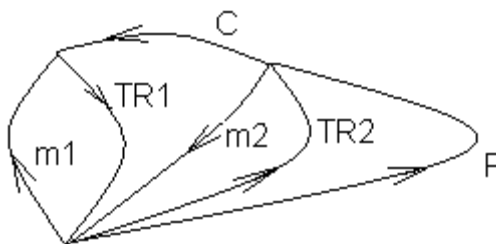


Рис. 6.1. Граф механічної підсистеми

Оскільки m_2 рухається у тому ж напрямі, у якому прикладена сила F (зовнішня сила та сила інерції співнаправлені), то напрямок обходу цих гілок співпадає. Вантаж m_1 рухається у тому ж напрямі, що й m_2 , тому напрямок обходу контуру, що включає базовий вузол, для цих гілок співпадає. Сила тертя TR_2 має протилежний F напрямок, тому напрямки цих гілок зустрічні. Сила TR_1 має той же напрямок, що й TR_2 , і з цим же напрямком співпадає напрямок сили пружності C , тому можна обійти контур по цих гілках.

Далі необхідно побудувати **фундаментальне дерево графа**, для чого потрібно ввести додаткові визначення.

Суграф – частина графа, отримана шляхом видалення гілок (число вузлів не змінюється).

Маршрут – послідовність гілок, що належать одному вузлу (може включати гілки та вузли, що повторюються).

Ланцюг – маршрут, у якому не повторюються гілки.

Контур - ланцюг, в якому не повторюються вузли.

Якщо можна вказати маршрут, що охоплює всі вершини, то такий граф називається **зв'язним**.

Фундаментальне дерево – зв'язний суграф, в якому немає контурів, тобто кількість вузлів графа і фундаментального дерева співпадає, але не має ні одного замкненого ланцюга.

Граф може мати декілька різних фундаментальних дерев. Одним із варіантів для графа на рис. 6.1. є наступне фундаментальне дерево:

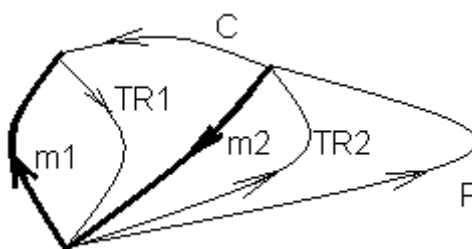


Рис. 6.2. Фундаментальне дерево графа

Гілки, що увійшли у дерево, називаються **гілками дерева**, а ті, що не увійшли – **хордами**.

На рис. 6.2. m_1 , m_2 - гілки; F , C , TR_1 , TR_2 - хорди.

Топологічні рівняння синтезуються за допомогою **матриці контурів та перетинів M** , яка формується наступним чином.

У дерево по чергово додаються хорди, які утворюють замкнені контури. Стовбцями матриці є гілки дерева, а рядками – хорди. На перехресті гілки-стовбця з хордою-рядком ставиться +1, якщо напрямок обходу контуру хорди співпадає з напрямком гілки, та -1, якщо не напрямки не співпадають. В інших випадках ставиться 0 (коли хорда і гілка не мають спільних контурів, тобто контур не може бути сформований більше ніж з однією хордою).

Побудуємо матрицю M для дерева на рис. 6.2:

Таблиця 6.1.

Матриця контурів та перетинів

| | m ₁ | m ₂ |
|-----------------|----------------|----------------|
| TR ₁ | 1 | 0 |
| TR ₂ | 0 | 1 |
| C | -1 | 1 |
| F | 0 | 1 |

Топологічні рівняння записуються на основі наступної системи:

$$\begin{cases} MU_{zd} + U_x = 0 \\ I_{zd} - M^T I_x = 0 \end{cases} \quad (6.1)$$

де M^T - транспонована матриця M ;

U_{zd} - вектор фазових змінних типу різниці потенціалів на гілках дерева;

I_{zd} - вектор фазових змінних типу потоку на гілках дерева;

U_x - вектор фазових змінних типу різниці потенціалів на хордах дерева;

I_x - вектор фазових змінних типу потоку на хордах.

Після необхідних перетворень отримаємо наступну систему топологічних рівнянь для таблиці 6.1:

$$\begin{aligned} V_{TR_1} &= -V_{m_1} \\ V_{TR_2} &= -V_{m_2} \\ V_C &= V_{m_1} - V_{m_2} \\ V_F &= -V_{m_2} \\ F_{m_1} &= F_{TR_1} - F_C \\ F_{m_2} &= F_{TR_2} + F_C + F \end{aligned} \quad (6.2)$$

Тепер запишемо для всіх гілок компонентні рівняння, відомі із методу фізичних аналогій:

$$\begin{aligned}
F_{TR_1} &= K_{TR_1} V_{TR_1} \\
F_{TR_2} &= K_{TR_2} V_{TR_2} \\
\frac{dV_{m_1}}{dt} &= \frac{1}{m_1} F_{m_1} \\
\frac{dV_{m_2}}{dt} &= \frac{1}{m_2} F_{m_2} \\
\frac{dF_c}{dt} &= C V_c
\end{aligned}
\tag{6.3}$$

Підставляючи у праві частини останніх трьох рівнянь їх вирази із топологічних рівнянь (6.2), отримаємо:

$$\begin{aligned}
\frac{dV_{m_1}}{dt} &= \frac{1}{m_1} (F_{TR_1} - F_c) = \frac{1}{m_1} (K_{TR_1} V_{TR_1} - F_c) = \frac{1}{m_1} (K_{TR_1} (-V_{m_1}) - F_c) \\
\frac{dV_{m_2}}{dt} &= \frac{1}{m_2} (F_{TR_2} + F_c + F) = \frac{1}{m_2} (K_{TR_2} V_{TR_2} + F_c + F) = \frac{1}{m_2} (K_{TR_2} (-V_{m_2}) + F_c + F) \\
\frac{dF_c}{dt} &= C (V_{m_1} - V_{m_2})
\end{aligned}
\tag{6.4}$$

Система рівнянь (6.4) є математичною моделлю технічної системи на рис. 4.3, у якій фазовими змінними є рівноважні сил, що діють на тіла m_1 та m_2 , і швидкості цих тіл.

Після розв'язання цієї системи звичайних диференціальних рівнянь, яка представлена у нормальній формі Коші, отримаємо швидкості тіл m_1 та m_2 у будь-який момент часу, тобто можемо дослідити процес розгону автомобілю та причіпу.

7. МЕТОД НЬЮТОНА ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАІЧНИХ РІВНЯНЬ

ММС на макрорівні є системи звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР). Якщо стоїть завдання визначити значення фазових змінних технічної системи у сталому режимі при певних значеннях вхідних параметрів, то досліджується стан системи у певний момент часу i , таким чином, система ЗДР перетворюється на систему алгебраїчних рівнянь. Для розв'язку таких систем найчастіше використовуються ітераційні методи, одним з яких є метод Ньютона у векторній формі.

Розглянемо нелінійну систему рівнянь:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \end{cases} \quad (7.1)$$

$x_1 - x_n$ - фазові змінні.

Або у векторній формі:

$$f(x) = 0 \quad (7.2)$$

Нехай відоме k -те наближення до рішення системи:

$$x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \quad (7.3)$$

Тоді точний корінь можна представити у вигляді:

$$x = x^{(k)} + \Delta x^{(k)} \quad (7.4)$$

де $\Delta x^{(k)} = (\Delta x_1^{(k)}, \Delta x_2^{(k)}, \dots, \Delta x_n^{(k)})$ - **вектор поправок** (похибка кореня).

Якщо (7.4) – це точне рішення задачі, то воно задовольняє систему (7.2), тобто

$$f(x^{(k)} + \Delta x^{(k)}) = 0 \quad (7.5)$$

Розкладемо ліву частину рівняння (7.5) в ряд Тейлора за ступенями малого вектора $\Delta x^{(k)}$, лишаючи тільки лінійні члени:

$$f(x^{(k)} + \Delta x^{(k)}) = f_0(x^{(k)}) + \frac{f'(x^{(k)})}{1!} \Delta x^{(k)} + \dots = 0 \quad (7.6)$$

Функція $f_0(x^{(k)})$ називається **вектором нев'язок**.

У рівнянні (7.6)

$$f'(x^{(k)}) = W(x^{(k)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

матриця Якобі.

Або у короткому запису:

$$f'(x^{(k)}) = W(x^{(k)}) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right],$$

де $(i, j = 1, 2, \dots, n)$.

Тому формула (7.6) може бути записана у наступному вигляді:

$$f_0(x^{(k)}) + W(x^{(k)})\Delta x^{(k)} = 0$$

Перенесімо перший доданок у праву частину рівняння:

$$W(x^{(k)})\Delta x^{(k)} = -f_0(x^{(k)})$$

Домножимо обидві частини на зворотну матрицю Якобі:

$$W^{-1}(x^{(k)})W(x^{(k)})\Delta x^{(k)} = -W^{-1}(x^{(k)})f_0(x^{(k)})$$

Звідси

$$\Delta x^{(k)} = -W^{-1}(x^{(k)})f_0(x^{(k)}) \quad (7.8)$$

Якщо к значенню $x^{(k)}$ додати знайдене $\Delta x^{(k)}$, ми отримаємо рішення задачі. Таким чином метод Ньютона для розв'язання системи (7.1) полягає у побудові ітераційної послідовності:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - W^{-1}(x^{(k)})f_0(x^{(k)}), (k = 0,1,2,\dots) \quad (7.9)$$

Коли всі поправки стають достатньо малими, обчислення зупиняється.

8. ІНТЕГРУВАННЯ СИСТЕМ ЗДР ДЛЯ АНАЛІЗУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ

8.1. Особливості інтегрування ЗДР

Доволі часто при дослідженні технічних об'єктів необхідно аналізувати стан переходу з одного становища системи в інше, наприклад перехід з одного агрегатного стану в інший або перехід від статичного стану до руху. Оскільки стан системи характеризується фазовими змінними, то дослідження перехідних процесів в системі зводиться до визначення залежності фазових змінних від часу, тобто до інтегрування ЗДР, якими представлена модель даної системи.

Системи ЗДР можуть бути представлені у двох формах:

1. Нормальна форма Коші

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = F(U, t) \\ U|_{t_0=0} = U_0 \end{cases} \quad (8.1)$$

де $U(t)$ - вектор змінних стану.

2. неявна форма ЗДР

$$\begin{cases} \Phi(V, V', t) = 0 \\ V|_{t_0=0} = V_0 \end{cases} \quad (8.2)$$

де Φ - вектор-функція, V - вектор фазових змінних системи.

Рівняння (8.1) є приватним випадком системи (8.2), якщо останнє можна розв'язати відносно першої похідної. Для розв'язання цих рівнянь на ЕОМ прийнятною є форма (8.1). Інтегрування рівнянь (8.1) полягає у визначенні функції $U(t)$ на інтервалі часу від 0 до $t_{\text{кінець}}$ при заданих початкових умовах. Для розв'язку виділяється кінцеве число точок t_m , у яких визначається значення функції $U(t)$. Інтервал між сусідніми точками називається **шагом інтегрування**. Всі числові методи інтегрування систем ЗДР засновані на послідовному знаходженні значень U для кожного моменту часу, починаючи з початкової умови U_0 і до $U_{\text{кінець}}$. Причому в процесі обчислення для всіх попередніх точок відомі значення функції

U та її похідної. В основному всі чисельні методи інтегрування зводяться до знаходження U_{m+1} за наступною формулою:

$$U_{m+1} = G_m(U_m, U_{m-1}, \dots, U_{m-p+1}, U_m', U_{m-1}', \dots, U_{m-p+1}'), \quad (8.3)$$

де $p = 1 \dots j$ - кількість попередніх точок інтегрування, G_m - декотра функція, що визначається методом інтегрування.

Найбільш поширеними методами є методи Ейлера та Рунге-Кутта.

Якість методу інтегрування визначається його точністю та стійкістю.

8.2. Точність методів інтегрування

Оскільки більшість розв'язуваних задач не мають точного (аналітичного) рішення, то і немає можливості оцінити точність цих методів. У цих випадках оцінка точності розраховується як сукупність похибок на кожному етапі інтегрування. Повна похибка методу складає:

$$\varepsilon_m^{\Pi} = \varepsilon_m^A + \varepsilon_m^O + \varepsilon_m^H \quad (8.4)$$

ε_m^A - помилка апроксимації, яка виникає за рахунок заміни похідних їх кінцевими різницями. Її знаходять шляхом порівняння числового рішення задачі за формулою інтегрування з точним значенням, яке обчислюють шляхом розкладу функції в ряд Тейлора у даній точці у межах малого кроку інтегрування. Порядок похідної у тому члені ряду, до якого даний метод апроксимує ряд, характеризує точність методу.

ε_m^O - помилка обчислень, яка виникає за рахунок округлення чисел в ЕОМ. Ця помилка має випадковий характер, і навіть при обчисленнях 10^8 - 10^9 не впливає на результат, тому нею зазвичай нехтують.

ε_m^H - помилка накопичення дорівнює повній похибці методу на попередньому кроці. Цю помилку визначити точно не можливо, вона має оціночний характер, пов'язаний із стійкістю методу. Метод вважається стійким, якщо ε_m^H не

змінюється від кроку до кроку. Якщо ж вона змінюється навіть на невелике значення, розрахунок стає недоцільним.

8.3. Стійкість методів інтегрування та стійкість систем

Стійкість методу характеризується помилкою накопичення. Проте стійкість характеризує не тільки сам метод, але й дозволяє оцінити математичні та фізичні характеристики даної задачі, тобто відповісти на запитання про обумовленість системи ЗДР та визначити вид перехідного процесу в системі.

Існують 5 типів перехідних процесів (рис. 8.1):

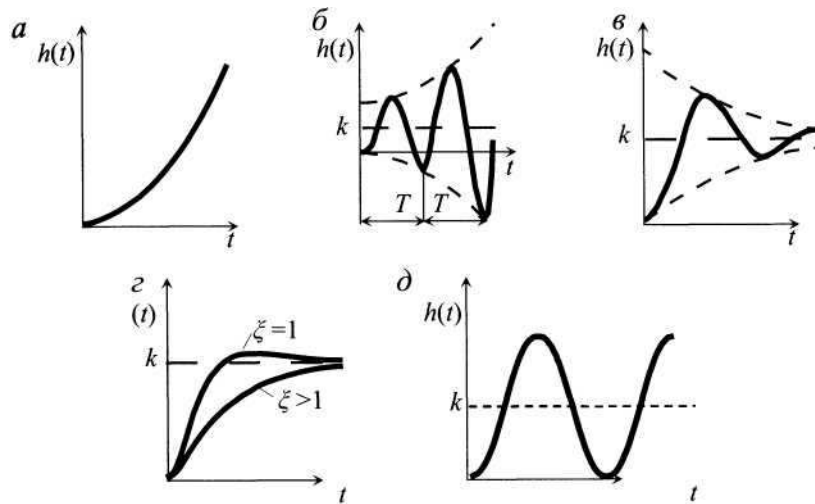


Рис. 8.1. Види перехідних процесів у технічних системах

а – аперіодичний, що розбігається; б – коливний, що розбігається;

в – коливний, що затухає; г – аперіодичний, що затухає; д – автоколивання

Приклади перехідних процесів (згідно з рисунком):

а – набирання води у закритий резервуар; б – ланцюгова реакція в атомному реакторі; в – коливання гойдалки після однократного штовху; г – охолодження води до кімнатної температури після однократного підігріву; д – автоколивання виникають у технічних системах.

Для оцінки стійкості методу та обумовленості системи розглянемо лінійну систему виду:

$$\begin{cases} \bar{U}' = A\bar{U} \\ \bar{U}|_{t_0=0} = \bar{U}_0 \end{cases} \quad (8.5)$$

Тут A – постійна дійсна матриця розміром $n \times m$. Якщо через A позначити матрицю Якобі для вектор-функції $F(U)$, то у випадку, коли система (8.5) є стійкою, буде стійкою і нелінійна система виду:

$$\begin{cases} \bar{U}' = \bar{F}(\bar{U}, t) \\ \bar{U}|_{t_0=0} = \bar{U}_0 \end{cases} \quad (8.6)$$

Оскільки матриця A вважається постійною у межах кроку інтегрування, то результати дослідження стійкості для системи (8.5) добре підходять для більшості нелінійних систем ЗДР.

Для дослідження стійкості складемо характеристичне рівняння:

$$|A - \lambda I| = 0, \quad (8.7)$$

де I - одинична матриця;

λ – власні значення матриці A (корені характеристичного рівняння (8.7))

Спектр власних значень λ_i ($i=1,2,\dots,n$) залежить від розміру матриці A . У загальному випадку λ_i – це комплексні числа:

$$\lambda_i = \text{Re}(\lambda_i) + j \text{Im}(\lambda_i) \quad (8.8)$$

Позначимо через x_i власний вектор матриці A , що відповідає власним значенням λ_i . Тоді аналітичне рішення системи (8.5) можна представити у вигляді суми окремих фундаментальних рішень, тобто

$$\bar{U}(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} \bar{x}_i, \quad (8.9)$$

де c_i – константи інтегрування.

Вид перехідного процесу визначається за λ_i : якщо $\text{Re}(\lambda_i) < 0$, то рішення (перехідний процес) з часом затухає; якщо хоча б одне $\text{Re}(\lambda_i) > 0$, то рішення є

нестійким (процес розбігається); якщо $\text{Im}(\lambda_i) = 0$, то перехідний процес є аперіодичним, а якщо хоча б одне $\text{Im}(\lambda_i) \neq 0$, то рішення має коливну складову.

З математичної точки зору значення λ_i характеризують обумовленість системи ЗДР:

$$g = \frac{\max |\lambda_i|}{\min |\lambda_i|} -$$

число обумовленості системи ЗДР. Система вважається погано обумовленою, якщо g наближається до 10^5 . Для погано обумовлених систем використовуються спеціальні методи інтегрування, адже звичайні методи потребують великої кількості кроків інтегрування.

Якщо $\text{Re}(\lambda_i) < 0$, то перехідний процес затухає зі швидкістю, пропорційній величині $\tau_i = -\frac{1}{\text{Re}(\lambda_i)}$ -

константа часу системи.

В фізичному розумінні обумовленість системи характеризується розкидом констант часу системи:

$$q = \frac{\max \tau_i}{\min \tau_i}$$

Результат розв'язання таких систем міститиме як складову, що затухає швидко, так і складову, що затухає повільно. Задачі такого роду виникають в автоматизованих системах з фізично різнорідними компонентами.

8.4. Вибір величини кроку інтегрування

Коли для методу інтегрування знайдена похибка ε_m^A та визначені області стійкості, ефективність методу залежить тільки від кроку інтегрування: при його збільшенні похибка ε_m^A зростає і метод може вийти за межі стійкості; при зменшенні кроку інтегрування зростає кількість кроків, тобто зростають витрати

машинного часу. Отже оптимальним є вибір такого кроку, який забезпечує стійкість і точність методу при найменших витратах машинного часу.

У тому випадку, коли усі λ_i є дійсними та від'ємними, умова стійкості має вигляд:

$$h_m < 2\tau_{\min} \quad (8.10)$$

В інших випадках для визначення оптимального кроку розглядають кінцево-різничну апроксимацію похідної для рівняння виду $y' = \lambda y$:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \lambda y$$

Звідси

$$y_{i+1} = y_i(1 + h\lambda)$$

Умова стійкості має вигляд:

$$\frac{y_{i+1}}{y_i} = 1 + h\lambda < 1$$

Таким чином, для вибору кроку інтегрування використовують умову:

$$|1 + h\lambda| < 1$$

Тоді

$$\begin{aligned} 1 + \operatorname{Re}(h\lambda) + \operatorname{Im}(h\lambda) &< 1 \\ [1 + \operatorname{Re}(h\lambda)]^2 + [\operatorname{Im}(h\lambda)]^2 &< 1 \end{aligned} \quad (8.11)$$

За формулою (8.11) можливо визначити оптимальну величину кроку інтегрування при використанні явних методів інтегрування.

9. ЗАГАЛЬНІ ЕТАПИ ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

На підставі апріорної інформації про об'єкт і мети управління обирають вид математичної моделі та спосіб її розробки. Джерелом вихідної інформації служать теоретичні, експериментальні та неформальні відомості про об'єкт. Вид моделі визначається способом розробки:

- Детермінована модель (система функціональних залежностей у вигляді алгебраїчних, диференційних, інтегральних рівнянь або інших аналітичних виразів)
- Стохастична модель (система емпіричних залежностей, отриманих на основі методів статистики)
- Евристична модель (система емпіричних співвідношень, які формалізують дії технолога)

9.1. Побудова аналітичних моделей

Детерміновані моделі розробляються у такій послідовності:

- Виконують розділення об'єкту на елементарні ділянки, у межах яких змінні на виході приймаються незалежними від просторових координат, і для кожної ділянки записують диференційне рівняння перехідного процесу.
- Складають систему диференційних рівнянь, що описують динаміку об'єкту в цілому
- За рахунок виключення проміжних змінних (вхідних змінних попередньої та послідовної ділянок) переходять до одного диференційного рівняння більш високого порядку. Кількість елементарних ділянок визначає порядок результуючого рівняння. Тому на цьому етапі вводять припущення.
- Складають рівняння матеріального та енергетичного балансу.
- Досліджують гідродинамічну модель процесу як основу структури мат. опису.

- Досліджують кінетику хімічних реакцій, процесів масо- та теплообміну і складають математичний опис для кожного з цих процесів.
- Використовують теоретичні, напівемпіричні та емпіричні співвідношення між параметрами процесу для розрахунку значень параметрів моделі та обмежень на змінні.
- Об'єднують математичний опис в єдину систему рівнянь.

9.2. Побудова статистичних моделей

- Визначають вид експерименту: активний чи пасивний. Для об'єктів з високою продуктивністю чи дорогим продуктом застосовують пасивний експеримент.
- За описаними в літературі методиками регресійного та кореляційного аналізу отримують математичну модель.

Після отримання математичної моделі здійснюють перевірку її адекватності. Завершувальним етапом моделювання є складання алгоритму управління (послідовності дій для знаходження значень змінних моделі на виході за вхідними змінними).

10. МЕТОДИ СПРОЩЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

Для спрощення математичних моделей, що розроблюються, використовують наступні прийоми:

- Перехід від багатовимірної моделі до одновимірної;
- Перехід від моделі із розподіленими параметрами до моделі із зосередженими параметрами;
- Перехід від розмірних величин до безрозмірних;
- Перехід від нестационарної задачі до стаціонарної;
- Перехід від нелінійної моделі до лінійної.

11. ДОМАШНЯ КОНТРОЛЬНА РОБОТА

Дослідження систем рівнянь на стійкість та обумовленість

ЗАВДАННЯ:

1. Вивчити послідовність дослідження систем ЗДР на стійкість та обумовленість (див. п. 8.3-8.4).
2. У відповідності до свого варіанту дослідити систему на обумовленість, визначити вид перехідного процесу та вибрати шаг інтегрування:

$$\begin{cases} F_1 = -Nx_1 + \frac{1}{2}x_2 \\ F_2 = \frac{1}{3}x_1 - 2Nx_2 \end{cases},$$

де N – номер варіанту.

12.ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ

Розв'язання системи нелінійних алгебраїчних рівнянь методом Ньютона

ЗАВДАННЯ

1. Вивчити розв'язання систем нелінійних алгебраїчних рівнянь методом Ньютона (див. п.7).
2. Скласти програму реалізації розв'язання системи рівнянь для свого варіанту в системі Matlab:
 - a) Написати підпрограму завдання вектора початкових значень невідомих (7.3) та обчислення вектора функцій $f_0(x^{(k)})$, що відповідають значенням вектора невідомих;
 - b) Написати підпрограму обчислення матриці Якобі (7.7), що відповідає значенням вектора (7.3);
 - c) Написати підпрограму обчислення зворотної матриці Якобі W^{-1} ;
 - d) Написати підпрограму обчислення вектора наступних наближень до рішення за формулою (7.9);
 - e) Написати сценарій розв'язання системи рівнянь, що реалізує поступове наближення до рішення, поки значення вектора $\Delta x^{(k)}$ не стануть меншими за значення вектора похибок, що задається.
3. Дослідити вплив величини похибки, що задається, на результат рішення (відшукати корені для величини похибки 0,001; 0,01; 0,1)
4. Розв'язати систему рівнянь для свого варіанту за допомогою вбудованої функції `fsolve` та порівняти результати обчислень.

ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ

| № варіанта | Система рівнянь | № варіанта | Система рівнянь |
|---------------|---|---------------|--|
| 1 | $\begin{cases} \sin x_1 + 2x_2 = 2, \\ \cos(x_2 - 1) + x_1 = 0,7. \end{cases}$ | 11 | $\begin{cases} \sin x_2 + x_1 = -0,4, \\ -\cos(x_1 + 1) + 2x_2 = 0. \end{cases}$ |
| 2 | $\begin{cases} \sin(x_1 + 5) - x_2 = 1, \\ \cos(x_2 - 2) + x_1 = 0. \end{cases}$ | 12 | $\begin{cases} \sin(x_1 + 2) - x_2 = 1,5, \\ \cos(x_2 - 2) + x_1 = 0,5. \end{cases}$ |
| 3 | $\begin{cases} \cos x_1 + x_2 = 1,5, \\ -\sin(x_2 - 0,5) + 2x_1 = 1. \end{cases}$ | 13 | $\begin{cases} \cos(x_1 + 0,5) - x_2 = 2, \\ \sin x_2 - 2x_1 = 1. \end{cases}$ |
| 4 | $\begin{cases} \cos(x_1 + 0,5) + x_2 = 0,8, \\ \sin x_2 - 2x_1 = 1,6. \end{cases}$ | 14 | $\begin{cases} \cos(x_1 - 2) + x_2 = 0, \\ \sin(x_2 + 0,5) - x_1 = 1. \end{cases}$ |
| 5 | $\begin{cases} \sin(x_1 - 1) = 1,3 - x_2, \\ -\sin(x_2 + 1) + x_1 = 0,8. \end{cases}$ | 15 | $\begin{cases} \cos(x_1 + 0,5) + x_2 = 1, \\ \sin(x_2 - 0,5) - x_1 = 1. \end{cases}$ |
| 6 | $\begin{cases} \cos(x_1 + 0,5) + x_2 = 1, \\ \sin x_2 - 2x_1 = 2. \end{cases}$ | 16 | $\begin{cases} \sin x_1 - 2x_2 = 1, \\ \cos(x_2 + 0,5) - x_1 = 2. \end{cases}$ |
| 7 | $\begin{cases} -\sin(x_1 + 1) + x_2 = 0,8, \\ \sin(x_2 - 1) + x_1 = 1,3. \end{cases}$ | 17 | $\begin{cases} -\sin(x_1 - 0,5) + 2x_2 = 1, \\ \cos x_2 + x_1 = 1,5. \end{cases}$ |
| 8 | $\begin{cases} \sin x_1 - 2x_2 = 1, \\ \sin(x_2 - 1) + x_1 = 1,3. \end{cases}$ | 18 | $\begin{cases} \cos x_1 + x_2 = 1,5, \\ -\sin(x_2 - 0,5) + 2x_1 = 1. \end{cases}$ |
| 9 | $\begin{cases} \sin x_1 - 2x_2 = 1, \\ \cos(x_2 - 1) + x_1 = 0,7. \end{cases}$ | 19 | $\begin{cases} \cos(x_1 + 0,7) + x_2 = 2, \\ \sin(x_2 + 0,5) - x_1 = 1. \end{cases}$ |
| 10 | $\begin{cases} \sin x_1 + 1,5x_2 = 1,5, \\ \cos(x_2 - 1) + x_1 = 0,7. \end{cases}$ | 20 | $\begin{cases} \cos(x_1 + 0,5) + x_2 = 1, \\ \sin(x_2 + 0,7) - x_1 = 2. \end{cases}$ |

ВІДОМОСТІ ПРО КОМАНДИ СИСТЕМИ МАТЛАВ, НЕОБХІДНІ ДЛЯ ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ

Обчислення матриці Якобі

Синтаксис команди:

`jacobian(f, v)`

Опис:

Обчислює матрицю Якобі скаляра або вектора f відносно значень v . Елемент результату з індексом i, j представляє собою вираз $\frac{\partial f(i)}{\partial v(j)}$.

Для того, щоб обчислити матрицю Якобі для завданого набору функцій, можна використати наступну послідовність операторів.

```
syms x1 x2
```

```
w = [x1*x2-x2^3-1; x1^2*x2+x2-5];
```

```
v = [x1,x2];
```

```
J = jacobian(w,v);
```

Тут w – вектор, елементами якого є завдані функції, а v – вектор чергових наближень до коренів завданої системи.

Для обчислення значення матриці Якобі для конкретного наближення використовуйте наступний набір операторів:

```
x1=2;
```

```
x2=3;
```

```
A=eval (J);
```

Обчислення зворотної матриці

Синтаксис команди:

```
inv(A)
```

Опис:

Обчислює зворотну матрицю до матриці A . Попереджуваче повідомлення видається, якщо матриця A погано масштабована або близька до виродженої.

Пошук коренів системи нелінійних рівнянь

Синтаксис команди:

```
x = fsolve(fun,x0)
```

Опис:

Знаходить корені системи нелінійних рівнянь. Починає з точки x_0 та намагається розв'язати описані в `fun` рівняння.

`fun` є функцією, що приймає вектор x та повертає вектор F . Функція `fun` може завдаватися за допомогою опису функцій

```
x = fsolve(@myfun,x0)
```

де `myfun` є така функція MATLAB, що

```
function F = myfun(x)
```

```
F = ... % Розрахунок значень функції от x
```

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Область застосування метода Ньютона для розв'язання систем у математичному моделюванні.
2. Алгоритм розв'язання систем нелінійних алгебраїчних рівнянь методом Ньютона.
3. Розв'язання систем нелінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою вбудованих функцій Matlab (на прикладі `fsolve`).

ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Математические модели технических объектов [электронный ресурс]: / В.А. Трудоношин, Н.В. Пивоваров - электрон. текст. дан. – Москва, 2001-2012. – Режим доступа:
http://rk6.bmstu.ru/electronic_book/function_model/mmt0/Files/ES_osn.html
2. Лекции: модели и методы АПР [электронный ресурс]: / Москва, 2005-2012. – Режим доступа: <http://gendocs.ru>
3. Бодров В.В. Автоматизированное построение математических моделей систем, заданных эквивалентными схемами / [В.В. Бодров, Н.В. Плотникова, М.Н. Устюгов и др.]. // Вестник ЮУрГУ. – 2006. – №14. – С.53-58.
4. Устюгов М.Н. Моделирование систем. Конспект лекций. – Челябинск, 2010. – 60 с.
5. Бобков С.П. Моделирование систем / Бобков С.П. , Бытев Д.О. – Иваново: Иван.гос.хим.-техн.ун-т., 2008. – 156 с.