Лекція 1. Задачі та основні поняття оптимального керування

Мета лекції: сформувати у студентів уявлення про сутність, предмет, основні поняття та задачі оптимального керування.

План

1. Основні поняття оптимального керування.
2. Основні типи задач оптимального керування.
3. Приклади задач оптимального керування.

Ключові терміни та поняття: система керування, фазовий вектор, керування, функціонал якості, програмне керування, основна задача оптимального керування, керування з повним зворотним зв'язком.

1.1. Основні поняття теорії оптимального керування

Під **системою керування** розуміють сукупність об'єкта керування та керуючого пристрою. Стан об'єкта керування у фіксований момент часу t визначається впорядкованою множиною n чисел $x_1, x_2, ..., x_n$, які називають **фазовими координатами**. Вектор $\overline{x} = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ називають **фазовим вектором або фазовим станом системи.**

Фазові координати є функціями часу: $x_i = x_i\left(t\right), i = 1, ..., n$. Коли об'єкт керування рухається, тобто його фазові координати з часом змінюються, то точка з радіус-вектором $\overline{x}\left(t\right)$ описує криву, яку називають **фазовою кривою** або **фазовою траєкторією**. Керуючий пристрій створює **вхідний сигнал** або **керування** $\overline{u}\left(t\right) = \left(u_1\left(t\right), u_2\left(t\right), ..., u_m\left(t\right)\right)$, що діє на об'єкт керування та змінює його фазову траєкторію $\overline{x}\left(t\right)$.

Рух об'єкта під дією керування описують системою диференціальних рівнянь виду

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = f_i\left(t, x_1, x_2, ..., x_n, u_1, ..., u_m\right), \\ i = 1, 2, ..., n. \end{cases} \tag{1.1}$$

У векторній формі систему (1.1) можна записати у вигляді:

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = \overline{f}\left(t, \overline{x}, \overline{u}\right).$$

Якість роботи системи керування описується функціоналом

$$\int_{t_0}^{t_1} dt = t_1 - t_0 \to \min$$

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f_0\left(t, x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t), u_1(t), u_2(t), ..., u_m(t)\right) dt. \qquad (1.2)$$

Його називають **показником або функціоналом якості**. При досягненні об'єктом керування оптимального стану функціонал якості (1.2) досягає екстремального (найбільшого чи найменшого) значення.

Надалі вважатимемо, що керування $\bar{u}(t)$ є кусково-неперервною вектор-функцією, значення якої належать заданій замкненій обмеженій множині U, тобто задано умову:

$$\bar{u}(t) \in U. \quad |\bar{u}| \leq M > 0 \qquad (1.3)$$

Керування, що задовольняє обмеження (1.3), називають допустимим.

Сформулюємо **основну задачу оптимального керування**: з множини допустимих керувань потрібно обрати керування $\bar{u}^*$, яке переміщує об'єкт керування з початкового стану $\bar{x}(t_0) = \bar{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ у заданий кінцевий стан $\bar{x}(t_1) = \bar{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ так, що функціонал якості (1.2) досягає екстремуму. Таке керування $\bar{u}^*(t)$ та відповідний йому фазовий стан $\bar{x}^*(t)$ називають **оптимальним**.

1.2. Основні типи задач оптимального керування

До основних типів задач оптимального керування відносяться наступні задачі.

1. **Задача з обмеженими фазовими координатами**. У цьому випадку $\bar{x}(t) \in G \subset \mathbb{R}^n$, де G – задана обмежена множина з простору $\mathbb{R}^n$.

2. **Задача з фіксованим часом**. Задано час T переходу системи керування у кінцевий стан, $T = t_1 - t_0$.

3. **Задача з рухомою межею**. Умову $\bar{x}(t_1) = \bar{b}$ заміняють умовою потрапляння фазового вектора $\bar{x}(t_1)$ у деяку задану область D: $\bar{x}(t_1) \in D$.

4. **Задача з вільною межею**. Тут кінцевий момент часу t_1 відомий, при цьому відсутні обмеження на положення вектора $\bar{x}(t_1)$.

5. **Задача оптимальної швидкодії**. Потрібно перемістити об'єкт керування з початкового положення $\bar{x}(t_0) = \bar{a}$ у кінцеве положення $\bar{x}(t_1) = \bar{b}$ за мінімальний час. Тут у виразі (1.2) для функціонала якості $f_0 \equiv 1, I = t_1 - t_0 \to \min$.

6. **Задача синтезу оптимального керування**. У багатьох практичних задачах початковий стан об'єкта керування до початку його роботи невідомий, тому неможливо попередньо знайти вигляд оптимального керування $\overline{u}^*(t)$, його потрібно визначати як функцію поточних координат та часу: $\overline{u}^* = \overline{u}^*(t, x_1, x_2, ..., x_n)$. Якщо права частина системи диференціальних рівнянь (1.1), які описують стан об'єкта керування, не містить явно змінну часу t, то оптимальне керування $\overline{u}^*$ шукають у вигляді функції, що залежить лише від поточних значень фазових координат: $\overline{u}^* = \overline{u}^*(x_1, x_2, ..., x_n)$.

У основі розглянутої класифікації знаходяться види обмежень на фазові координати системи.

У задачах оптимального керування розрізняють наступні типи керування.

1. Керування $\overline{u} = \overline{u}(t)$, що залежить лише від часу, називають **програмним керуванням**.

2. Керування $\overline{u} = \overline{u}(t, x_1, x_2, ..., x_n)$, що залежить від часу та всіх координат фазового вектора, називають **керуванням з повним зворотним зв'язком.**

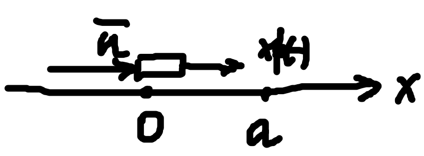
3. Керування, що залежить від часу та частини фазових координат об'єкта керування, називають **керуванням з неповним зворотним зв'язком**.

1.3. Приклади задач оптимального керування

<u>Задача 1.</u> Нехай візок рухається по горизонтальним рейкам без тертя під дією зовнішньої сили, яку можна змінювати у відомих межах. Необхідно зупинити візок у заданому місці у найкоротший час.

Маємо задачу оптимальної швидкодії. Оскільки візок рухається по прямолінійній траєкторії, то його положення у момент часу t визначається однією координатою $x(t)$. Додатний напрям осі Ox спрямуємо у сторону руху візка. Нехай m – його маса, початкове положення $x(0) = 0$, початкова швидкість $\dot{x}(0) = v_0$, $u = u(t)$ – зовнішня сила, обмеження на неї $u_1 \le u(t) \le u_2$, T – час руху візка, $x(T) = a$ – задана точка зупинки візка, швидкість у момент зупинки $\dot{x}(T) = 0$.

$x(T) = a$



Математична модель задачі має вигляд:

$$m\ddot{x} = u(t)$$

$$\begin{cases} x(0)=0,\ \dot{x}(0)=v_0, \\ x(T)=a,\ \dot{x}(T)=0, \\ u_1 \le u \le u_2, \\ T=\int_0^T dt \to min. \end{cases}$$

<u>Задача 2</u>. Знайти керування тягою двигунів ракети, що максимізує горизонтальну дальність її польоту за умови, що значення тяги не перевищує задану величину u_0 та вона пропорційна швидкості витрати палива.

Нехай початок координат відповідає початковому положенню ракети при $t=0$, $v_1(t)$ та $v_2(t)$ – проекції вектора швидкості ракети на координатні осі Ox та Oy. Нехай $x(t)$ та $y(t)$ – координати ракети, $m(t)$ – маса ракети з паливом, $u_1(t)$ та $u_2(t)$ – проекції вектора тяги на відповідно на осі Ox та Oy. Тоді $v_1(t)=\dot{x}(t)$, $v_2(t)=\dot{y}(t)$, $u_3(t)=-\dot{m}(t)$ – швидкість зменшення маси ракети. Стан ракети у момент часу t визначається фазовим вектором

$$\left(x(t), y(t), v_1(t), v_2(t), m(t)\right),$$

керування визначається вектором

$$\overline{u}(t)=\left(u_1(t), u_2(t), u_3(t)\right).$$

Нехай c – коефіцієнт пропорційності величини тяги. За другим законом Ньютона отримуємо диференціальні рівняння закону руху ракети у вигляді:

$$\begin{cases} \dot{x}=v_1(t), \\ \dot{y}=v_2(t), \\ \dfrac{d}{dt}\left(m(t)v_1(t)\right)=cu_3(t)u_1(t), \\ \dfrac{d}{dt}\left(m(t)v_2(t)\right)=cu_3(t)u_2(t)-m(t)g, \\ \dot{m}=-u_3. \end{cases} \tag{1.4}$$

Обмеження на керування мають вигляд:

$$\begin{cases} u_1^2+u_2^2 \le u_0^2, \\ 0 \le u_3 \le u_3^{\max}. \end{cases}, \tag{1.5}$$

Положення ракети у початковий та кінцевий моменти часу визначається рівностями:

$$x(0)=0,\ y(0)=0,\ \dot{x}(0)=v_{10},\ \dot{y}(0)=v_{20},\ m(0)=m_0,\ \ y(t_1)=0. \tag{1.6}$$

У (1.6) t_1 – час завершення польоту.

Функціонал якості має вигляд:

$$I = x(t_1) = \int_0^{t_1} v_1(t)\,dt \to \max . \tag{1.7}$$

Рівності (1.4) – (1.7) утворюють математичну модель задачі.

<u>Задача 3</u> (найпростіша задача варіаційного числення). Знайти функцію $x(t)$, що надає екстремум заданому функціоналу $I = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x, \dot{x})dt$ та задовольняє крайові умови $x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1$.

$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$

Цю задачу можна записати у вигляді задачі оптимального керування. Для цього введемо керування $u(t) = \dot{x}(t)$ та нову фазову змінну $y(t) = \int_{t_0}^{t} f(s, x, u)ds$. Отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = u,$$
$$\dot{y} = f(t, x, u)$$

з крайовими умовами $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, $y(t_0) = 0$, функціонал якості $y(t_1) \to \min$.