ТЕМА 6. РЯДИ ДИНАМИКИ

6.1. Ряди динаміки та їх види.
6.2. Показники ряду динаміки.
6.3. Аналіз закономірностей зміни рівня динамічного ряду.
6.4. Статистичне вивчення сезонних компонентів динамічного ряду.
6.5. Інтерполяція та екстраполяція.

6.1. Ряди динаміки та їх види

Вивчення соціально-економічних явищ в їх зміні – одне з найважливіших завдань статистики. Вивчення змін проводиться за допомогою динамічних рядів, які в цифрах виражають зміну явищ у часі. Прогнозування розвитку економіки також здійснюється на базі часових рядів.

Рядом динаміки називається ряд послідовно розташованих в часі числових значень відповідного показника.

Ряд динаміки складається з двох елементів (табл. 6.1):

Таблиця 6.1 – **Елементи ряду динаміки**

Елемент	Позначення
Період часу (за який або станом на який наводяться дані)	t
Рівень ряду (числове значення показника)	$У$

Прикладом динамічного ряду є зміна населення м. Харкова за роками (табл. 6.2).

Таблиця 6.2 – **Зміна населення м. Харкова за роками**

Рік	2017	2018	2019	2020
Кількість жителів, чол.	1 450 334	1 447 435	1 446 107	1 443 207

Дані за часовий інтервал можуть бути як такими, що накопичуються, так і одномоментними. У такій ситуації виникають два різновиди рядів динаміки: моментні та інтервальні.

Моментний ряд динаміки *характеризує* стан явища на певний момент часу. Припустимо, кількість співробітників на робочому місці о 10.20 – 12 осіб, а кількість співробітників о 10.30 – 13 осіб. Це два різних показника. При цьому в процесі роботи з даними їх не можна сумувати, оскільки може з'явитися подвійний рахунок. Адже в 13 співробітниках станом на 10.30 можуть бути ті самі 12 (швидше за все так і є), що були на 10.20.

Наведемо приклад моментного ряду (табл. 6.3):

Таблиця 6.3 – **Приклад моментного ряду динаміки**

Час обліку	Кількість працівників на робочому місці, чол.
10.00	10
10.20	12
10.30	13
11.00	11

Таким чином, в моментному ряді ми фіксуємо дані в конкретний період часу. І дані в таких рядах не можна сумувати або ділити. Найхарактерніші моментні ряди – це ряди, які характеризують чисельність та залишки матеріалів.

В інтервальних рядах динаміки дані накопичуються за певний проміжок часу (виробництво або реалізація продукції (за рік, квартал, місяць та інші періоди), кількість прийнятих на роботу, кількість народжених тощо). Рівні інтервального ряду можна підсумувати. При цьому отримуємо такий же показник за більш тривалі інтервали часу.

Наведемо приклад інтервального ряду динаміки (табл. 6.4).

Таблиця 6.4 – **Приклад інтервального ряду динаміки**

Рік	Обсяг виробленої продукції, тис. грн.
2016	129
2017	142
2018	146
2019	144
2020	151
Разом	**712**

Таким чином, інтервальний ряд як би накопичує дані за цілий період, а потім їх представляє у вигляді рівня ряду. Саме тому, ми можемо підсумувати дані за два рівня, отримавши сумарний підсумок, або поділити дані одного рівня, отримавши розмір явища за більш короткий період часу.

Ознаки досліджуваних явищ можуть бути виражені в абсолютних, відносних і середніх величинах. З огляду на це розрізняють ряди динаміки абсолютних, відносних і середніх величин.

Рядом динаміки абсолютних величин називається такий ряд, члени якого виражають абсолютні значення досліджуваного явища за ряд послідовних моментів або відрізків часу. Прикладом такого ряду є ряд, представлений в табл. 6.4.

Динамічним рядом відносних величин називається такий ряд, члени якого виражають відносні розміри досліджуваного явища за ряд послідовних моментів або відрізків часу.

Динамічні ряди відносних величин можуть містити інформацію про зміну питомої ваги будь-якого показника в загальній сукупності об’єктів за певний часовий період, індексів; темпів зростання показника за певний період часу; зміна в часі показників інтенсивності, наприклад, демографічних коефіцієнтів: смертності, народжуваності, шлюбності, розлучуваності тощо.

Приклад динамічного ряду відносних величин представлений в табл. 6.5.

Таблиця 6.5 – **Зміна загального коефіцієнта народжуваності в Україні (кількість живонароджених на 1000 осіб)**

Рік	2016	2017	2018	2019	2020
Загальний коефіцієнт народжуваності	10,1	9,8	9,5	9,3	9,1

Ряди динаміки середніх величин містять інформацію про зміну в часі показника, що є середнім для даного явища. Так, середня заробітна плата, середній розмір виданого банками кредиту, наведені за певні часові проміжки, наприклад, за місяцями року, кварталами, роками тощо, утворюють динамічні ряди середніх величин (табл. 6.6).

Таблиця 6.6 – **Динаміка чисельності населення України**

Рік	2016	2017	2018	2019	2020
Чисельність населення, млн. чол.	42,76	42,58	42,39	42,15	41,90

6.2. Показники ряду динаміки

Головними показниками, що характеризують абсолютні і відносні зміни рядів динаміки, є: середній рівень ряду динаміки, абсолютний приріст (зниження), темп зростання, темп приросту, абсолютне значення одного відсотка приросту (зниження).

Для загальної характеристики величини показника в ряді динаміки використовується середній рівень ряду.

Середній рівень *інтервального динамічного ряду* визначається за формулою середньої арифметичної:

$$\overline{У} = \frac{\sum У_i}{n}. \tag{6.1}$$

Наприклад, на основі даних табл. 6.4 середній рівень інтервального динамічного ряду дорівнюватиме:

$$\overline{У} = \frac{129 + 142 + 146 + 144 + 151}{5} = \frac{712}{5} = 142 \text{ тис. грн.}$$

Середній рівень моментного динамічного ряду розраховується за формулою:

$$\overline{У} = \frac{0{,}5 \cdot У_1 + У_2 + ... + У_i + ... + У_{n-1} + 0{,}5 \cdot У_n}{n-1}. \tag{6.2}$$

Приклад. Покажемо розрахунок середнього рівня моментного ряду динаміки з рівновіддаленими рівнями за даними про чисельність працівників підприємства на перше число кожного місяця у I кварталі 2020 р.:

1 січня – 347 осіб;

1 лютого – 350 осіб;

1 березня – 349 осіб;

1 квітня – 351 чоловік.

Середньомісячна чисельність працівників фірми за I квартал складе:

$$\overline{У} = \frac{0,5 \cdot 347 + 350 + 349 + 0,5 \cdot 351}{4-1} = \frac{1048}{3} = 349 \text{ чоловік}$$

Розрахунок показників абсолютного приросту, темпів зростання і приросту засноване на порівнянні між собою рівнів ряду динаміки. При цьому рівень, з яким здійснюється порівняння, називається **базисним**, тобто він є *базою порівняння*. Зазвичай за базу порівняння приймається або попередній, або початковий рівень ряду динаміки.

Якщо кожен рівень порівнюється з попереднім, то отримані при цьому показники називаються *ланцюговими*.

Якщо кожен рівень порівнюється з одним і тим же рівнем, що виступає в якості бази порівняння, то отримані при цьому показники називаються *базисними*.

Найбільш простим показником ряду динаміки є абсолютний приріст.

Абсолютний приріст характеризує в абсолютних величинах, на скільки за розглянутий період змінилося значення досліджуваного показника. Його величина визначається за формулою:

$$\Delta У_i = У_i - У_б, \tag{6.3}$$

де $\Delta У_i$ – абсолютний приріст показника за *i*-тий період часу;

$У_i$ – абсолютне значення показника за *i*-тий момент або період часу;

$У_б$ – абсолютне значення показника у базовий момент або період часу.

Якщо розраховуються **ланцюгові** абсолютні прирости, то формула розрахунку уточнюється:

$$\Delta У_i = У_i - У_{i-1}. \tag{6.4}$$

Для **базисного** абсолютного приросту формула має вигляд:

$$\Delta У_i = У_i - У_1. \tag{6.5}$$

Розрахуємо абсолютні прирости обсягів випущеної продукції (табл. 6.7).

Таблиця 6.7 – **Розрахунок абсолютних приростів обсягів випущеної продукції**

Рік	Рівні, грн.	Абсолютні прирости, грн.	
		ланцюгові	базисні
2015	118	–	–
2016	129	129 - 118 = 11	129 - 118 = 11
2017	142	142 - 129 = 13	142 - 118 = 24
2018	146	146 - 142 = 4	146 - 118 = 28
2019	144	144 - 146 = -2	144 - 118 = 26
2020	151	151 - 144 = 7	151 - 118 = 33

Темп зростання характеризує у відносних величинах (% або частках одиниці), у скільки разів за аналізований період змінилося значення досліджуваного показника.

Його величина позначається $Т_р$ і визначається за формулою:

$$Т_{р_i} = \frac{У_i}{У_б} \cdot 100\% \qquad (6.6)$$

Якщо розраховуються ланцюгові темпи зростання, то формула набуває вигляд:

$$Т_{р_i} = \frac{У_i}{У_{б\,i-1}} \cdot 100\% \qquad (6.7)$$

Розрахуємо темпи зростання обсягів випущеної продукції (табл. 6.8).

Таблиця 6.8 – **Розрахунок темпів зростання обсягів випущеної продукції**

Рік	Рівні, грн.	Темпи зростання	
		ланцюгові	базисні
1	2	3	4
2015	118	–	–
2016	129	129/118 = 1,0932	129/118 = 1,0932

Продовження табл. 6.8

1	2	3	4
2017	142	142/129 = 1,1008	142/118 = 1,2034
2018	146	146/142 = 1,0282	146/118 = 1,2373
2019	144	144/146 = 0,9863	144/118 = 1,2203
2020	151	151/144 = 1,0486	151/118 = 1,2797

Темп приросту характеризує у відносних величинах (% або частках одиниці), на скільки разів за аналізований період змінилося значення досліджуваного показника:

$$T_{пр} = T_{р} - 1. \tag{6.8}$$

У нашому прикладі темпи приросту будуть дорівнювати (табл. 6.9):

Таблиця 6.9 – **Розрахунок темпів приросту обсягів випущеної продукції**

Рік	Рівні, грн.	Темпи приросту,%	
		ланцюгові	базисні
2015	118	–	–
2016	129	9,32	9,32
2017	142	10,08	20,34
2018	146	2,81	23,73
2019	144	-1,37	22,03
2020	151	4,86	27,97

При зіставленні темпів зростання і приросту однотипних або взаємопов’язаних рядів динаміки треба мати на увазі, що на 1% зростання в цих рядах можуть припадати різні величини абсолютного приросту. Абсолютна величина одного відсотка приросту визначається за формулою:

$$A_i = \frac{У_{i-1}}{100}. \tag{6.9}$$

У нашому прикладі абсолютне значення одного відсотка приросту за роками дорівнюватиме (табл. 6.10):

Таблиця 6.10 – **Розрахунок абсолютного значення одного відсотка приросту обсягів випущеної продукції**

Рік	Рівні, грн.	Абсолютне значення 1% приросту, грн.
2015	118	–
2016	129	1,18
2017	142	1,29
2018	146	1,42
2019	144	1,46
2020	151	1,44

Ланцюгові темпи зростання і приросту дають характеристику ступеня зміни рівня показника від одного проміжку часу до іншого. Для характеристики темпів зростання за весь період, що охоплюється рядом динаміки, обчислюють середній темп зростання.

Середній темп зростання характеризує у відносних величинах, у скільки разів в середньому за розглянутий період змінилося значення досліджуваного показника.

Середній темп зростання визначається за формулою середньої геометричної (за ланцюговими темпами зростання):

$$\overline{\mathrm{T}}_{\mathrm{p}} = \sqrt[n-1]{\mathrm{T}_{\mathrm{p}_1} \cdot \mathrm{T}_{\mathrm{p}_2} \cdot \ldots \cdot \mathrm{T}_{n-1}}, \quad (6.10)$$

де n – число років, за які досліджується значення ряду динаміки.

Якщо в цю формулу підставити рівні ряду динаміки, то середній темп визначається за такою формулою:

$$\overline{\mathrm{T}}\mathrm{p} = \sqrt[\mathrm{n}-1]{\frac{\mathrm{У}_{\mathrm{n}}}{\mathrm{У}_1}}. \quad (6.11)$$

Для нашого прикладу середній темп зростання дорівнюватиме:

$$\overline{\mathrm{T}}_{\mathrm{p}} = \sqrt[6-1]{1{,}0932 \cdot 1{,}1008 \cdot 1{,}0282 \cdot 0{,}9863 \cdot 1{,}0486} = 1{,}0506.$$

Отриманий темп зростання показує, що за п’ять років з 2015 до 2020 року обсяг виробництва щорічно збільшувався в 1,051 разів.

Середній темп приросту характеризує у відносних величинах, на скільки в середньому за розглянутий період змінилося значення досліджуваного показника.

Середній темп приросту визначається за формулою:

$$\overline{T}_{пр} = \overline{T}_{р} - 1. \quad (6.12)$$

У нашому прикладі середній темп приросту дорівнює:

$$\overline{T}_{пр} = 1{,}051 - 1 = 0{,}051 \text{ или } 5{,}1\%. \quad (6.13)$$

Отриманий темп приросту показує, що за п'ять років з 2015 до 2020 року обсяг виробництва щорічно збільшувався на 5,1%.

6.3. Аналіз закономірностей зміни рівнів динамічного ряду

Одним з найважливіших завдань, що виникають при аналізі рядів динаміки, є встановлення закономірності зміни рівнів досліджуваного явища. Рівні динамічного ряду з часом змінюються, коливаються. Ці коливання рівнів можуть викликатися дією якихось певних факторів, що сприяють підвищенню або зниженню показників, впливом сезонності, а також випадковими причинами.

Виділяють три компонента зміни рівнів динаміки:

– тенденцію;

– систематичні коливання;

– випадкові коливання.

Необхідно розділити ці три компоненти і виявити, перш за все, закономірність розвитку явищ в окремі відрізки часу, тобто виявити загальну тенденцію в зміні рівнів ряду, обумовлену дією основоположних причин, звільнену від дії різних випадкових факторів.

Під *тенденцією* або *трендом* розуміється загальний напрямок до зростання, зниження або стабілізації рівня явища з плином часу. Зростання і зниження рівнів можуть відбуватися по-різному: рівномірно, прискорено або уповільнено. Практично рівні ряду динаміки дуже рідко зростають (або знижуються) строго рівномірно або систематично. Саме через існування відхилень від суворої закономірності прийнято говорити не просто про зростання або зниження рівня, а про його тенденцію до зростання або зниження. Такі відхилення можуть пояснюватися тим, що з плином часу змінюються або комплекс основних причин і факторів, від яких залежить рівень явища, або сила їх дії, або зовнішні умови, в яких відбувається розвиток явища. Можуть змінюватися і напрямок, і сила впливу другорядних факторів.

До основних **методів, що використовуються для аналізу динаміки**, відносяться:

1) *метод укрупнення інтервалів* (для абсолютних величин) або метод багаторічних середніх рівнів (для відносних і середніх показників), наприклад, трирічних або п’ятирічних середніх;

2) *метод ковзних середніх рівнів*;

3) *метод аналітичного вирівнювання динамічного ряду*.

Метод укрупнення інтервалів

Метод укрупнення інтервалів і метод розрахунку багаторічних середніх, об’єднуючи показники за кілька інтервалів, в підсумковій сумі або середньої «гасять» вплив цих випадкових факторів. При порівнянні трирічних, п’ятирічних даних на перший план виступають зміни, що залежать від постійно діючих факторів, тобто основна тенденція динаміки. Метод полягає в переході від інтервалів менш тривалих до більш тривалих і характеристиці їх сумами або середніми рівнями. Якщо динамічний ряд побудований з абсолютних показників, то, застосовуючи даний метод, достатньо підсумувати дані за більший термін і проаналізувати отримані результати. Якщо динамічний ряд складається з відносних величин або середніх показників, то потрібно розраховувати середні рівні за збільшений інтервал.

Нехай наявні дані про обсяг виробництва продукції (табл. 6.11).

Таблиця 6.11 – **Обсяг виробництва продукції**

Роки	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Обсяг виробництва, тис. грн.	105,1	97,6	101,5	100,1	112,5	94,0	97,0	104,1	108,1

На основі цих даних можна визначити тенденцію зміни обсягу виробництва. Це пов'язано з тим, що зростання обсягу виробництва йшло, занадто нерівномірно. Для виявлення тенденцій в таких випадках вдаються до укрупнення інтервалів, тобто зіставляються неоднозначні дані, а дані, наприклад, за 2-3 роки. У нашому прикладі при інтервалі в 3 роки:

2012-2014 – 304,2
2015-2017 – 306,6
2018-2020 – 309,2

Дані укрупнених інтервалів показують, що обсяг виробництва має тенденцію до збільшення.

Укрупнення інтервалів зазвичай починають з найменш можливого укрупненого інтервалу (після однорічного використовується дворічний інтервал). У разі якщо перший укрупнений інтервал не дасть ясні показники, переходять до наступного можливого інтервалу.

Недоліком прийому укрупнення інтервалів є те, що при цьому з розгляду випадає процес зміни явища всередині інтервалів.

Метод ковзної середньої

Суть методу ковзної середньої полягає в тому, що розраховується середній рівень з певного числа перших за порядком рівнів ряду (як правило, трьох, п'яти або семи), далі – середній рівень з такого числа рівнів, починаючи з другого, потім – починаючи з третього тощо.

Таким чином, середня як би ковзає по ряду динаміки від його початку до кінця, кожен раз відкидаючи один рівень на початку і додаючи один наступний.

При цьому за допомогою усереднення емпіричних даних індивідуальні коливання погашаються, і загальна тенденція розвитку явища виражається у вигляді деякої плавної лінії (теоретичні рівні). Отже, суть методу полягає в заміні абсолютних даних середніми арифметичними за певні періоди.

За своєю суттю метод ковзної середньої схожий на метод укрупнення інтервалів, але в даному випадку фактичні рівні замінюються середніми рівнями, розрахованими для послідовно рухомих (ковзаючих) укрупнених інтервалів, що охоплюють кілька рівнів ряду.

Змінна середня володіє достатньою гнучкістю, але недоліком методу є укорочення згладженого ряду в порівнянні з фактичним, а, отже, втрата інформації. Крім того, змінна середня не дає аналітичного виразу тренду.

Період ковзної може бути парним і непарним. Практично зручніше використовувати непарний період, так як в цьому випадку змінна середня буде віднесена до середини періоду ковзання.

Припустимо, що X_1, X_2 ... X_n – річні дані про врожайність зернових. Для визначення першого значення ковзної середньої підсумовуються перші три члена емпіричного ряду, і отримана сума ділиться на три:

$$\overline{X}_1 = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}. \tag{6.14}$$

Друге значення ковзної середньої визначається так само, але підрахунок суми трьох членів ряду починається з другого члена емпіричного ряду:

$$\overline{X}_2 = \frac{X_2 + X_3 + X_4}{3}. \tag{6.15}$$

Далі, опускаючись в ряді на один рік, підраховуємо середню за наступні три роки тощо.

<u>Отримані значення ковзної середньої відносяться до середини періоду, за який вона розрахована.</u> Так, $\overline{X}_1$ при розрахунку трирічної ковзної середньої відноситься до другого члену початкового ряду динаміки, $\overline{X}_2$ – до третього тощо. При розрахунку ковзної середньої за п’ятьма членами ряду динаміки $\overline{X}_1$ буде відноситись до третього члену емпіричного ряду, $\overline{X}_2$ – до четвертого тощо.

Розрахунок загальної тенденції врожайності зернових методом ковзної середньої наведено в табл. 6.12.

Як видно з табл. 6.12, трирічний і п’ятирічний періоди при розрахунку ковзної середньої в нашому прикладі не виключили випадкових коливань.

Тому збільшуємо період ковзної середньої до семи років.

Таблиця 6.12 – **Розрахунок загальної тенденції врожайності зернових методом ковзної середньої (при непарному числі членів ряду)**

Роки	Умовні роки	Врожайність зернових, ц / га	Рухома сума трьох членів ряду	Рухома трирічна змінна середня	Рухома сума п’яти членів ряду	Рухома п’ятичленна змінна середня	Рухома сума семи членів ряду	Рухома семичленна змінна середня
2006	1	19,5	–	–	–	–	–	–
2007	2	23,4	67,9	22,6	–	–	–	–
2008	3	25	70,8	23,6	115,8	23,2	–	–
2009	4	22,4	72,9	24,3	125,1	25,0	171,2	24,5
2010	5	25,5	76,7	25,6	128,3	25,7	182,1	26,0
2011	6	28,8	80,9	27,0	133,7	26,7	182,4	26,1
2012	7	26,6	85,8	28,6	135	27,0	193,2	27,6
2013	8	30,4	80,7	26,9	145,3	29,1	206,8	29,5
2014	9	23,7	89,9	30,0	152,5	30,5	208,9	29,8
2015	10	35,8	95,5	31,8	153,5	30,7	212,6	30,4
2016	11	36	99,4	33,1	155,6	31,1	221	31,6
2017	12	27,6	96,1	32,0	166,9	33,4	221,8	31,7
2018	13	32,5	95,1	31,7	162,3	32,5	–	–
2019	14	35	98,7	32,9	–	–	–	–
2020	15	31,2	–	–	–	–	–	–

Розрахована на основі цього періоду змінна середня чітко і ясно показує тенденцію збільшення врожайності.

Методику розрахунку загальної тенденції ряду динаміки за допомогою прийому ковзної середньої за парною кількістю членів проілюструємо в табл. 6.13.

Таблиця 6.13 – **Розрахунок загальної тенденції методом ковзної середньої (при парному числі членів ковзної середньої)**

Роки	Умов-ні роки	Врожайність зернових, ц / га	Рухома сума шести членів ряду	Рухома нецентрована змінна середня	Рухома центрована змінна середня
2005	1	18,5	–	–	–
2006	2	19,5	–	–	–
2007	3	23,4	134,3	22,4	–
2008	4	25,0	144,6	24,1	23,2
2009	5	22,4	151,7	25,3	24,7
2010	6	25,5	158,7	26,5	25,9
2011	7	28,8	157,4	26,2	26,3
2012	8	26,6	170,8	28,5	27,4
2013	9	30,4	181,3	30,2	29,3
2014	10	23,7	180,1	30,0	30,1
2015	11	35,8	186,0	31,0	30,5
2016	12	36,0	190,6	31,8	31,4
2017	13	27,6	198,1	33,0	32,4
2018	14	32,5	–	–	–
2019	15	35,0	–	–	–
2020	16	31,2	–	–	–

Спочатку визначаються рухливі шестирічні суми. Розділивши їх на шість, знаходимо нецентровані рухливі середні.

Оскільки рухливі середні охоплюють шестирічні періоди, то в кожній з них в середньому знаходиться два члена – третій і четвертий, а рухлива сума знаходиться між ними.

Знаходимо далі середню з першої і другої нецентрованих середніх.

Таким чином, метод ковзної середньої дозволяє встановити тенденцію розвитку явищ.

$y = f(t)$

До недоліку цього методу слід віднести те, що він скорочує довжину ряду при згладжуванні.

Методом, здатним усунути цей недолік, – встановити тенденцію розвитку явища на всьому інтервалі зміни динамічного ряду і дати їй кількісну оцінку, є *метод аналітичного вирівнювання ряду динаміки*.

Аналітичне вирівнювання ряду динаміки

Аналітичне вирівнювання динамічних рядів – це знаходження певної моделі (рівняння тренду), яка математично описує тенденцію розвитку явища в часі. При цьому рівні показника розглядаються тільки як функція від часу. На відміну від розглянутих вище методів, таких, як укрупнення інтервалів, ковзної середньої, спрямованих в основному на те, щоб відповісти на питання: чи є тенденція в динамічному ряді чи ні, і визначити її напрямок, аналітичне вирівнювання дозволяє більш точно встановити характер розвитку явища , а головне – описати його математично, вловити всі нюанси і напрямки розвитку і використовувати в подальшому отриману модель для *прогнозування*.

Першим кроком у проведенні аналітичного вирівнювання є вибір виду математичної функції, яку передбачається використовувати в якості моделі тренду. При цьому можна керуватися формою кривої, отриманої на основі відображення на графіку емпіричних даних. За віссю абсцис відкладаються тимчасові періоди (дати), за віссю ординат – значення рівнів динамічного ряду.

При цьому можливі кілька варіантів:

– явище має стабільний абсолютний приріст (позитивний або негативний), найбільш прийнятною лінією, що характеризує тенденцію зміни цього явища, є *пряма*;

– абсолютні прирости (позитивні або негативні) за періодами змінюються (прискорюються або сповільнюються). В цьому випадку тенденція характеризується або *гіперболою*, або *параболою другого, третього і т.д. порядків*.

Розглянемо, як відбувається вирівнювання ряду динаміки за прямою лінією. Завдання при цьому полягає в тому, щоб фактичні дані ряду динаміки замінити такими, які рівномірно зростають або зменшуються.

Як відомо в загальному вигляді рівняння прямої має вигляд:

$$\widehat{У}_i = a_0 + a_1 \cdot t_i, \tag{6.16}$$

де $\widehat{У}_i$ – значення вирівняного ряду;

a_0 і a_1 – параметри рівняння прямої;

t_i – показник часу.

Так як відомо значення t_i, необхідно визначити параметри рівняння a_0 і a_1.

Для їх знаходження необхідно вирішити систему нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum t_i = \sum У_i \\ a_0 \sum t_i + a_1 \sum t_i^2 = \sum У_i \cdot t_i. \end{cases} \tag{6.17}$$

Як приклад розглянемо динамічний ряд, представлений в табл. 6.14.

Таблиця 6.14 – **Дохід банків від операцій з цінними паперами за 2016-2020 рр.**

Показник	Роки				
	2016	2017	2018	2019	2020
Дохід банків від операцій з цінними паперами, тис. грн.	92	112	135	159	185
Ланцюгові абсолютні прирости	–	20	23	24	26

Розраховані ланцюгові абсолютні прирости відносно постійні, тому можна говорити про доцільність вибору як аналітичної функції рівняння прямої.

При знаходженні параметрів рівняння показник часу зручно позначити так, щоб виконувалася рівність: ($\sum t = 0$). Для цього при непарній кількості рівнів ряду моменту (періоду) часу, що знаходиться в центрі ряду, присвоюється значення t = 0, попереднім – значення -1, -2, -3 тощо, а наступним – значення 1, 2, 3 тощо (тобто з кроком 1 від середини ряду в одну й іншу сторону від центру) (табл. 6.15).

Таблиця 6.15 – **Позначення умовного показника часу при непарній кількості рівнів динамічного ряду**

Показник	Роки				
	2016	2017	2018	2019	2020
Дохід банків від операцій з цінними паперами, тис. грн.	92	112	135	159	185
Умовний показник часу *t*	-2	-1	0	1	2

Розрахунок тенденції за рівнянням прямої при непарному числі членів ряду відображено в табл. 6.16.

Таблиця 6.16 – **Розрахунок тенденції за рівнянням прямої при непарній кількості членів ряду**

Роки	Дохід банків від операцій з цінними паперами (У), тис. грн.	t	t^2	$У \cdot t$	Розрахункове значення доходу банків, тис. грн.
2016	92	-2	4	-184	90
2017	112	-1	1	-112	113
2018	135	0	0	0	137
2019	159	1	1	159	160
2020	185	2	4	370	183
РАЗОМ	**683**	**0**	**10**	**233**	**683**

$$\begin{cases} 5a_0 + a_1 \cdot 0 = 683 \\ a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot 10 = 233 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5a_0 = 683 \\ 10 \cdot a_1 = 233 \end{cases}$$

$$\widehat{У} = 136{,}6 + 23{,}3 \cdot t$$

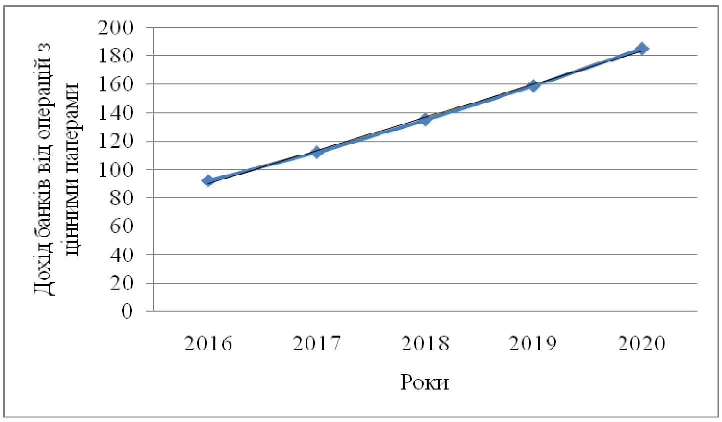

Рис. 6.1. Динаміка доходу банків від операцій з цінними паперами (за рівнянням прямої)

При парній кількості рівнів в середині ряду знаходяться два моменти (періоди) часу. Одному з них присвоюють значення t = -1, а іншому t = +1. Тоді попередні моменти часу отримують значення -3, -5 тощо, а наступні значення – +3, +5 тощо (тобто з кроком 2 в одну та іншу сторону від центру) (табл. 6.17).

Таблиця 6.17 – **Розрахункова таблиця для визначення параметрів рівняння прямої при парній кількості членів ряду**

Роки	Дохід банків від операцій з цінними паперами (У), тис. грн.	t	t^2	$У \cdot t$	Розрахункове значення доходу банків, тис. грн.
2015	70	-5	25	-350	68
2016	92	-3	9	-276	91
2017	112	-1	1	-112	114
2018	135	1	1	135	137
2019	159	3	9	477	160
2020	185	5	25	925	183
РАЗОМ	**753**	**0**	**70**	**799**	**753**

$$\begin{cases} 6a_0 + a_1 \cdot 0 = 753 \\ a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot 70 = 799 \end{cases} \qquad \begin{cases} 6a_0 = 753 \\ 70 \cdot a_1 = 799 \end{cases}$$

$$\hat{У} = 125{,}5 + 11{,}4 \cdot t$$

Якщо ж тенденція характеризується *гіперболою*, то система нормальних рівнянь визначення параметрів рівняння гіперболи має вигляд:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum \frac{1}{t_i} = \sum У_i \\ a_0 \sum \frac{1}{t_i} + a_1 \sum \frac{1}{t_i^2} = \sum \frac{У_i}{t_i} \end{cases} \tag{6.18}$$

Розрахунок тенденції динамічного ряду за рівнянням гіперболи при непарній кількості членів ряду представлений в табл. 6.18.

Таблиця 6.18 – **Розрахунок тенденції динамічного ряду за рівнянням гіперболи при непарній кількості членів ряду**

Роки	Дохід банків від операцій з цінними паперами (У), тис. грн.	t	$\frac{1}{t}$	$\frac{1}{t^2}$	$\frac{У}{t}$	Розрахункове значення доходу банків, тис. грн.
2016	92	-2	-0,5	0,3	-46,0	117,9
2017	112	-1	-1,0	1,0	-112,0	99,2
2018	135	0	0	0	0	136,6
2019	159	1	1,0	1,0	159,0	174,0
2020	185	2	0,5	0,3	92,5	155,3
РАЗОМ	**683**	**0**	**0**	**2,5**	**93,5**	**683,0**

$$\begin{cases} 5a_0 + a_1 \cdot 0 = 683 \\ a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot 2{,}5 = 93{,}5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5a_0 = 683 \\ 2{,}5 \cdot a_1 = 93{,}5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum \frac{1}{t_i} = \sum У_i \\ a_0 \sum \frac{1}{t_i} + a_1 \sum \frac{1}{t_i^2} = \sum \frac{У_i}{t_i}. \end{cases}$$

$$\hat{У} = 136{,}6 + 37{,}4 \cdot \frac{1}{t}$$

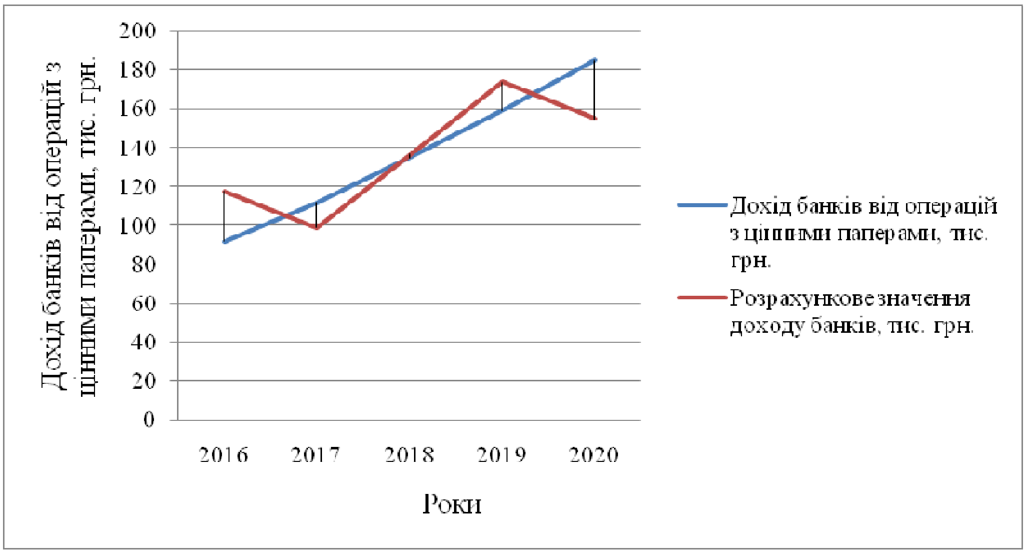

Рис. 6.2. Динаміка доходу банків від операцій з цінними паперами (за рівнянням гіперболи)

Система нормальних рівнянь для рівняння параболи має вигляд:

$$\begin{cases} na_0 + a_1\sum t_i + a_2\sum t_i^2 = \sum У_i \\ a_0\sum t_i + a_1\sum t_i^2 + a_2\sum t_i^3 = \sum У_i \cdot t_i \\ a_0\sum t^2{}_i + a_1\sum t_i^3 + a_2\sum t_i^4 = \sum У_i \cdot t_i^2. \end{cases} \quad (6.19)$$

Таблиця 6.19 – **Аналітичне вирівнювання ряду динаміки за рівнянням параболи другого порядку (при непарному числі членів ряду)**

Роки	Дохід банків від операцій з цінними паперами (У), тис. грн.	Умовні роки	t^2	t^3	t^4	$У \cdot t$	$У \cdot t^2$	Розрахункове значення доходу банків, тис. грн.
2016	92	-2	4	-8	16	-184	368	112
2017	112	-1	1	-1	1	-112	112	123
2018	135	0	0	0	0	0	0	135
2019	159	1	1	1	1	159	159	149
2020	185	2	4	8	16	370	740	164
РАЗОМ	**683**	**0**	**10**	**0**	**34**	**233**	**1 379**	**683**

$$\begin{cases} 5a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 10 = 683 \\ a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 0 = 233 \\ a_0 \cdot 10 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 34 = 1379 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5a_0 + a_2 \cdot 10 = 683 \\ a_1 \cdot 10 = 233 \\ a_0 \cdot 10 + a_2 \cdot 34 = 1379 \end{cases}$$

$$a_1 = 23{,}3$$

$$a_0 + a_2 \cdot 2 = 136{,}6$$

$$a_0 = 136{,}6 - a_2 \cdot 2$$

$$(136{,}6 - a_2 \cdot 2) \cdot 10 + a_2 \cdot 34 = 1379$$

$$1366 - a_2 \cdot 20 + a_2 \cdot 34 = 1379$$

$$a_2 \cdot 14 = 13$$

$$a_2 = 0{,}93$$

$$a_0 = 136{,}6 - 2 \cdot 0{,}93 = 134{,}74$$

$$\widehat{Y} = 134{,}74 + 13 \cdot t + 0{,}93 \cdot t^2$$

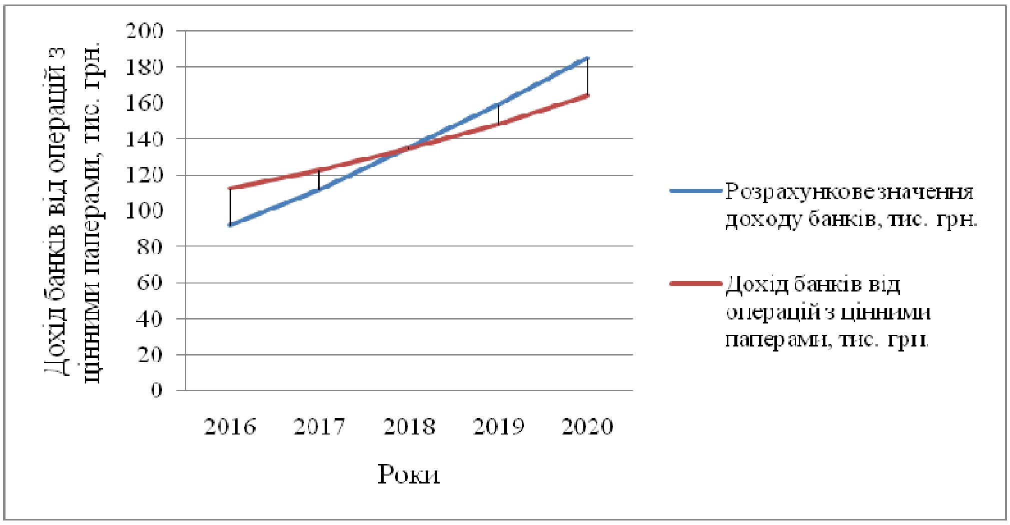

Рис. 6.3. Динаміка доходу банків від операцій з цінними паперами (за рівнянням параболи другого порядку)

Підставляючи в отримане рівняння *t*, знаходимо вирівняне значення рівня ряду.

У разі якщо аналітичне вирівнювання вироблено за кількома видами залежностей (наприклад, прямої, гіперболи тощо), то критерієм вибору є мінімум суми:

$$F = \sum (У_i - У'_i)^2 \rightarrow \min.$$

6.4. Статистичне вивчення сезонних компонентів динамічного ряду

Сезонними називають періодичні коливання, що виникають під впливом зміни пори року. Їх роль дуже велика в агропромисловому комплексі, торгівлі багатьма товарами, захворюваності, будівництві, діяльності рекреаційних установ, на транспорті. Сезонні коливання строго циклічні – повторюються щороку, хоча сама тривалість пір року має коливання. Для вивчення сезонних коливань необхідно мати рівні за кожен квартал, а краще – за кожен місяць.

Слід ще раз відзначити, що не будь-які відмінності в місячних або квартальних рівнях є сезонними коливаннями, а тільки регулярно повторювані рік за роком. Якщо ж відмінності місячних рівнів або будь-яких внутрішньорічних рівнів в один рік розподілені зовсім інакше, ніж в інший рік, то це – не сезонні, а випадкові коливання, тобто коливання, викликані причинами, не пов'язаними зі зміною пір року. Наприклад, такими можуть бути коливання курсів акцій, обмінних курсів валют, викликані зміною фінансової політики держави, науково-технічними відкриттями, політичними кризами в країні і світі, злиттям і поділом компаній тощо.

Статистичне вивчення сезонної компоненти динамічного ряду полягає у виявленні характеру сезонних коливань і виключення сезонної компоненти для подальшого ряду динаміки.

Сезонність характеризується:

– тривалістю періоду коливання (відрізком часу між сусідніми точками максимуму і мінімуму);

– амплітудою сезонних коливань – різницею між максимальними та мінімальними значеннями;

– розміщенням максимумів і мінімумів в часі.

Якщо сезонні коливання в цих трьох аспектах стабільні, то сезонність носить постійний характер. Якщо ж зазначені показники з плином часу змінюються, то сезонність носить змінний характер.

Кількісно характер сезонності виражається спеціальними показниками, які називаються індексами сезонності і сукупність яких виражає *сезонну хвилю*.

Методика розрахунку сезонної хвилі істотно залежить від характеру тенденції. Якщо тенденція постійна, то сезонна хвиля розраховується без її виключення. В іншому випадку, тобто коли динамічний ряд носить яскраво виражену тенденцію, то розрахунку сезонної хвилі має передувати виключення загальної тенденції.

Метод простих середніх

У тих випадках, коли середній річний рівень сезонного явища залишається від року до року відносно незмінним, іншими словами, в часі ряду відсутній тренд, застосовується *метод простих середніх*. Суть методу полягає у визначенні простої середньої за одні й ті ж місяці (квартали, декади) усього досліджуваного періоду і в зіставленні цих середніх з середньою за весь досліджуваний період. Слід зазначити, що при використанні даних тільки одного року розрахунки можуть бути занадто ненадійними в силу елемента випадковості. Тому на практиці для виявлення закономірності в сезонних коливаннях використовуються дані за ряд років (наприклад, місячні дані за три роки). Тоді для кожного місяця розраховується середня величина рівня ряду за три роки, після чого на основі отриманих даних розраховується середньомісячний рівень за весь період спостереження.

Приклад 6.1. Наявні дані щодо виробництва молока в спеціалізованій агрофірмі за кожен місяць протягом трьох років. Потрібно розрахувати місячні індекси сезонності (сезонну хвилю). Вихідні дані і результати розрахунку представлені в табл. 6.20.

Таблиця 6.20 – **Розрахунок сезонної хвилі методом простих середніх**

Місяць	Виробництво молока в агрофірмі, ц				Індекси сезонності, %
	2018 р.	2019 р.	2020 р.	в середньому за три роки	
1	2	3	4	5	6
Січень	602	618	634	618	59
Лютий	675	682	709	689	65
Березень	986	998	1017	1000	95
Квітень	1192	1214	1231	1212	115
Травень	1458	1472	1486	1472	140
Червень	1507	1529	1557	1531	146
Липень	1621	1643	1668	1644	156
Серпень	1370	1382	1398	1383	131
Вересень	943	951	975	956	91
Жовтень	739	746	760	748	71

Продовження табл. 6.20

1	2	3	4	5	6
Листопад	687	692	701	693	66
Грудень	664	674	692	677	64
Середньомісяч-ний рівень	–	–	–	**1052**	100

Розв'язання. Для отримання індексів сезонності, перш за все, для кожного місяця розраховуються середньомісячні рівні за три роки. Наприклад, для січня цей середньомісячний рівень дорівнює (602 + 618 + 634) / 3 = 618 тощо. Розрахунок цих значень дає можливість позбутися від елементів випадковості, що мали місце в тому чи іншому році. Потім на основі отриманих середньомісячних рівнів розраховується їх проста середня середньомісячного виробництва молока за всі три роки спостереження; в нашому прикладі ця величина дорівнює 1054 ц. Шукані місячні індекси сезонності (у відсотках) знаходяться як відношення середніх для кожного місяця до середньомісячного рівня за весь період спостереження, що приймається за 100%. Як приклад розрахуємо індекс сезонності для січня. Значення цього індексу дорівнює 618/1054 · 100 = 59 %. Аналогічно розраховуються індекси сезонності для інших місяців; розраховані індекси сезонності представлені в останній графі табл. 6.20.

Ці індекси характеризують сезонну хвилю виробництва молока в даній агрофірмі і розмах її коливання у внутрішньорічній динаміці.

Обмеженість застосування цього методу полягає в тому, що він правильно відображає сезонну компоненту лише в тому випадку, коли загальна тенденція динамічного ряду має постійний рівень, паралельний осі абсцис.

Метод помісячних відношень

Якщо рівень економічного явища виявляє тенденцію до зростання або зниження, тобто *має місце тренд*, то відхилення від постійного середнього рівня можуть викривити сезонні коливання. У таких випадках застосовується ***метод помісячних відношень***. Він полягає в тому, що спочатку обчислюються за кожним роком відсоткові відношення між показниками за кожен даний і попередній місяці, а потім з отриманих відношень визначаються їх середні арифметичні. Ці середні показують динаміку зміни показника в даному місяці в порівнянні з попереднім.

Приклад 6.2. На основі даних прикладу 6.1 про виробництво молока в спеціалізованій агрофірмі за три роки потрібно проаналізувати сезонні коливання виробництва молока на фірмі з використанням методу помісячних відношень. Результати розрахунків представлені в табл. 6.21.

Таблиця 6.21 – **Розрахунок сезонної хвилі методом помісячних відношень**

Місяць	Виробництво молока в агрофірмі, ц			Індекси сезонності, %
	2018 р.	2019 р.	2020 р.	
Січень	100	100	100	100
Лютий	112	110	112	111
Березень	146	146	143	145
Квітень	121	122	121	121
Травень	122	121	121	121
Червень	103	104	105	104
Липень	108	107	107	107
Серпень	85	84	84	84
Вересень	69	69	70	69
Жовтень	78	78	78	78
Листопад	93	93	92	93
Грудень	97	97	99	98
Середньомісячний рівень	–	–	–	100

Розв’язання. Всі відношення за січень приймаємо за 100%. За даними розглянутого прикладу для лютого кожного року отримуємо наступні три відношення: у 2005 році - $675/602 \cdot 100 = 112\%$; в 2006 р - $682/618 \cdot 100 = 110\%$; в 2007 р - $709/634 \cdot 100 = 112\%$. Середня арифметична цих величин дає середнє помісячне ставлення в лютому: $(112 + 110 + 112) / 3 = 111\%$. Це означає, що в лютому виробництво молока в порівнянні з січнем зросло в середньому на

11%. Аналогічно розраховується помісячне відношення березня до лютого і так за всіма місяцями року.

Метод помісячних відношень дає більш точне уявлення про сезонні коливання в порівнянні з методом простих середніх.

6.5. Інтерполяція та екстраполяція

Інтерполяцією називається приблизний розрахунок відсутніх рівнів всередині однорідного періоду, коли відомі рівні по обидві сторони невідомого.

Інтерполяція проводиться, виходячи з припущення, що зміни в межах періоду, що виражають закономірність розвитку, відносно стійкі. Для цього необхідно встановити характер динаміки, тобто знайти відносно стійкі похідні (середні) показники: абсолютний приріст, темп зростання тощо.

Можуть бути *різні варіанти інтерполяції*:

1) розраховується середня арифметична з прилягаючих до пропущеного рівнів ряду;

2) при відносній стабільності абсолютних приростів інтерполяція рівнів ряду здійснюється додаванням середнього абсолютного приросту до рівня, що передує пропущеному;

3) при відносній стабільності темпів зростання рівень, що передує пропущеному, помножується на величину середнього темпу зростання.

Приклад 6.3. Припустимо, пропущений рівень 2018 рік (табл. 6.22).

Таблиця 6.22 – **Динаміка виробництва холодильників за період 2015-2020 рр.**

Показник	Роки					
	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Виробництво холодильників, тис. шт.	802,0	812,0	836,5	868,7	885,8	953,3
Абсолютний приріст, шт.	–	10,0	24,5	32,2	17,1	67,5
Темп зростання, %	–	101,2	103,0	103,8	102,0	107,6

Використовуючи перший спосіб інтерполяції, визначимо його як середню арифметичну з рівнів 2017 і 2019 рр.:

$$У_{2018} = \frac{У_{2017} + У_{2019}}{2} = \frac{836,5 + 885,8}{2} = \frac{1722,3}{2} = 861,15 \text{ тис. шт.}$$

Зробимо інтерполяцію за другим способом розрахунку. Для цього необхідно обчислити середньорічний абсолютний приріст за 2016-2020 рр.:

$$\overline{\Delta} = \frac{\sum \Delta_i}{m} = \frac{10,0 + 24,5 + 32,2 + 17,1 + 67,5}{5} = \frac{150,8}{5} = 30,3 \text{ тис. шт.}$$

Визначаємо рівень 2018 р.:

$$У_{2018} = У_{2017} + \overline{\Delta} = 836,5 + 30,3 = 866,8 \text{ тис. шт.}$$

Інтерполяція за третім способом вимагає попереднього розрахунку середньорічного темпу зростання за 2015-2020 рр.:

$$\overline{\mathrm{T}} = \sqrt[n-1]{\frac{У_n}{У_1}} = \sqrt[6-1]{\frac{953,3}{802,0}} = \sqrt[5]{1,189} = 1,035 \text{ або } 103,5\%$$

Рівень 2018 року складе:

$$У_{2018} = У_{2017} \cdot \overline{\mathrm{T}} = 836,5 \cdot 1,035 = 865,8 \text{ тис. шт.}$$

Порівнюючи три способи інтерполяції рівня виробництва холодильників для 2018 року, відзначимо, що найкраще наближення до фактичного рівня дає розрахунок за величиною середньорічного абсолютного приросту.

Екстраполяцією називається приблизний розрахунок відсутнього рівня по одну сторону невідомого. Якщо розрахунок рівнів здійснюється на перспективу, то такий спосіб являє собою *прогнозування*.

Прогноз рівнів здійснюється на основі вихідного ряду динаміки (бази прогнозу). До нього пред'являється ряд вимог:

1) повнота і безперервність рівнів вихідного ряду динаміки;

2) якісна його однорідність з точки зору наявності загальної закономірності розвитку явищ;

3) кількість рівнів, що входять в вихідний ряд динаміки має бути досить значною, з тим, щоб закономірність розвитку явищ була досить чіткою і піддавалася кількісному вимірюванню.

Ідея прогнозу базується на тому постулаті, що закономірності розвитку явищ, властиві вихідному ряду динаміки, зберігаються і в прогнозованому періоді. При середньостроковому прогнозі рекомендується прогноз рівнів здійснювати не більше ніж на одну третину довжини вихідного ряду динаміки.

Якщо розвиток процесу йде за законом арифметичної прогресії (з відносно стабільними абсолютними приростами), то рівні прогнозу (точкові) визначаються за формулою:

$$У_{i+t} = У_i + t_i \cdot \overline{\Delta}, \tag{6.20}$$

де $У_i$ – останній рівень у вихідному ряду динаміки;

t_i – порядковий номер періоду прогнозу ($t_i = 1,2 \ldots n$);

$\overline{\Delta}$ – середній абсолютний приріст у вихідному ряду динаміки.

За даними табл. 6.22 обчислимо прогноз виробництва холодильників на 2021-2022 рр.:

$$У_{2021} = У_{2020} + t_1 \cdot \overline{\Delta} = 953{,}3 + 1 \cdot 30{,}3 = 983{,}6 \text{ тис. шт.}$$

$$У_{2022} = У_{2020} + t_2 \cdot \overline{\Delta} = 953{,}3 + 2 \cdot 30{,}3 = 1013{,}9 \text{ тис. шт.}$$

В рядах динаміки, в яких розвиток явищ відбувається за законом геометричної прогресії (з відносно стабільними темпами зростання), рівні прогнозу визначаються за формулою:

$$У_{i+t} = У_i \cdot \overline{Т}^t, \tag{6.21}$$

де $\overline{Т}^t$ – середній темп зростання в вихідному ряді динаміки. Стосовно нашого прикладу (табл. 6.22) матимемо такі прогнозні значення виробництва холодильників:

$$У_{2021} = У_{2020} \cdot \overline{Т}^{t1} = 953{,}3 \cdot 1{,}035 = 986{,}7 \text{ тис. шт.}$$

$$У_{2022} = У_{2021} \cdot \overline{Т}^{t2} = 953{,}3 \cdot (1{,}035)^2 = 1021{,}2 \text{ тис. шт.}$$