Заняття 7,8

Метричні питання сферичної геометрії

Елементи сферичної геометрії. Точки і прямі в сферичній геометрії. Відстань між точками і кут між прямими.

Нехай в евклідовому просторі задано сферу радіусу r. В геометрії на сфері, як і в геометрії на евклідовій площині, основними об'єктами є точки і прямі. «Точкою» називається будь-яка точка сфери, «прямою» – будь-яке велике коло сфери.

Означення. Нехай a – деяка пряма в сферичній геометрії. Кінці A_1, A_2 діаметра сфери, перпендикулярного евклідовій площині, яка містить a, називаються полюсами цієї прямої. Кожна точка прямої a називається полярно спряженою з кожним із її полюсів.

Через будь-які дві не діаметрально протилежні точки проходить єдина пряма сферичної геометрії.

Означення. Відстанню між точками називається довжина меншої з двох дуг великого кола, що проходить через ці точки.

З означення випливає обмеженість сферичної площини – відстань між будь-якими двома точками не перевищує числа πr.

Крім основних об'єктів в сферичній геометрії можна розглядати і інші фігури. Наприклад, коло на сфері, яке не є великим, задовольняє означення кола з евклідової геометрії.

Означення. Кутом α між двома прямими в сферичній геометрії називається двогранний кут, який утворюють евклідові площини, що містять ці прямі.

Засобами евклідової геометрії отримується формула

$$\alpha = \frac{\widetilde{MN}}{r},$$

де точки $M \in a,\ N \in b$ – полярно спряжені з точкою перетину прямих.

2. Сферичні двокутники та трикутники. Сферичний надлишок. Сферична тригонометрія.

Будь-які дві прямі сферичної геометрії розбивають сферу на чотири області, кожна з яких називається сферичним двокутником. Двокутник є аналогом многокутника, а саме, це многокутник, який має дві сторони. Таких фігур на евклідовій площині не існує. Двокутник повністю визначається кутом між прямими (відрізки яких є його сторонами).

Має місце наступна формула для площі двокутника

$$S_{A_1A_2} = 2r^2A_1^2,$$

де A_1, A_2 – вершини двокутника.

Три попарно різні великі кола сфери розбивають її на 8 областей, кожна з яких називається сферичним трикутникам. Будемо розглядати лише ті з них, які мають менші за $\frac{\pi}{2}$ довжини сторін і менші за π величини кутів (ейлерові трикутники).

Нехай ΔABC – ейлерів. Якщо O – центр сфери, то геометрію тригранного кута $OABC$ доцільно використати для вивчення геометрії сферичного трикутника. Наведемо деякі формули цієї геометрії.

Позначимо $\tilde{BC} = a, \tilde{CA} = b, \tilde{AB} = c$. Пари точок A, A_1, B, B_1, C, C_1 - діаметрально протилежні. Між площами сфери, сферичного трикутника і сферичних двокутників можна встановити такий зв'язок:

$$S_{сф} = 2\left(S_{AA_1} + S_{BB_1} + S_{CC_1}\right) - 4S_{\Delta ABC},$$

тоді формула площі сферичного трикутника має вигляд

$$S_{\Delta ABC} = r^2\left(A + B + C - \pi\right),$$

звідки випливає, що в сферичній геометрії сума кутів трикутника більша за π.

Далі, для зручності, позначимо $\overline{OA} = \overline{A}, \overline{OB} = \overline{B}, \overline{OC} = \overline{C}$. Для сторін ΔABC маємо

$$\cos\frac{a}{r} = \frac{1}{r^2}\left(\overline{B}, \overline{C}\right),\ \cos\frac{b}{r} = \frac{1}{r^2}\left(\overline{A}, \overline{C}\right), \cos\frac{c}{r} = \frac{1}{r^2}\left(\overline{B}, \overline{A}\right),$$

а для кутів –

$$\cos A = \frac{\left(\left[\overline{A}, \overline{B}\right], \left[\overline{A}, \overline{C}\right]\right)}{\left|\left[\overline{A}, \overline{B}\right]\right| \cdot \left|\left[\overline{A}, \overline{C}\right]\right|},\ \cos B = \frac{\left(\left[\overline{B}, \overline{C}\right], \left[\overline{B}, \overline{A}\right]\right)}{\left|\left[\overline{B}, \overline{C}\right]\right| \cdot \left|\left[\overline{B}, \overline{A}\right]\right|},\ \cos C = \frac{\left(\left[\overline{C}, \overline{B}\right], \left[\overline{C}, \overline{A}\right]\right)}{\left|\left[\overline{C}, \overline{B}\right]\right| \cdot \left|\left[\overline{C}, \overline{A}\right]\right|}.$$

Для елементів сферичного трикутника виконується перша теорема косинусів

$$\cos\frac{a}{r} = \cos\frac{b}{r} \cdot \cos\frac{c}{r} + \sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}\cos A,$$

друга теорема косинусів

$$\cos A = -\cos B \cdot \cos C + \sin B \sin C \cos\frac{a}{r},$$

теорема синусів

$$\frac{\sin A}{\sin\frac{a}{r}} = \frac{\sin B}{\sin\frac{b}{r}} = \frac{\sin C}{\sin\frac{c}{r}}.$$

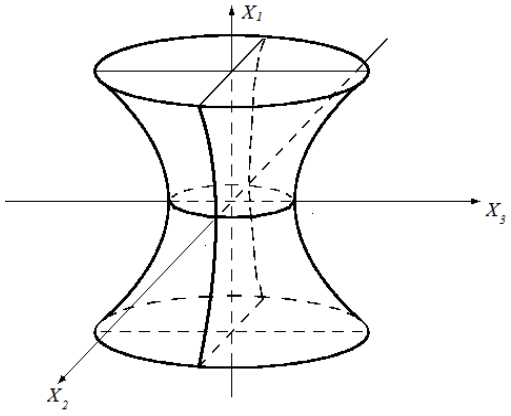
Для прямокутного сферичного трикутника формула з першої теореми косинусів отримаємо аналог теореми Піфагора у вигляді

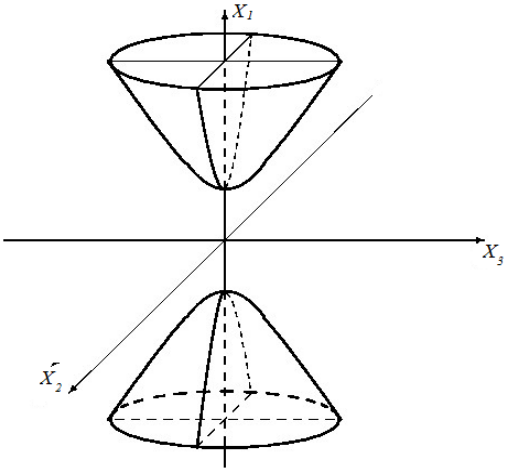
$$\cos\frac{a}{r} = \cos\frac{b}{r} \cdot \cos\frac{c}{r}$$

Сфери псевдоевклідового простору

Визначення сфери в псевдоевклідовому просторі залишимо таким самим, як і в евклідовому просторі, тобто як множину точок, що знаходяться на однаковій відстані від фіксованої точки. У зв'язку з тим, що відстань в просторі ${}^1R_3$ обчислюється за іншою формулою, то рівняння сфери псевдоевклидового простору з центром у початку координат і радіусом r буде мати вигляд $-x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 = r^2$. Будемо розглядати сфери дійсного та уявного радіуса.

Сфера дійсного радіусу псевдоевклідового простору зображується в евклідовому просторі однопорожнинним гіперболоїдом





Сфера уявного радіуса псевдоевклідового простору зображується в евклідовому просторі двопорожнинним гіперболоїдом.

Формули сферичної геометрії в евклідовому і псевдоевклідовому просторах однакові, але зміст їх різний.

Важливо, що сфера уявного радіусу несе на собі геометрію Лобачевського.

Теорема. Прямолінійні твірні сфери дійсного радіуса псевдоевклідового простору є ізотропними прямими.

Доведення. Запишемо рівняння сфери дійсного радіуса:

$$-x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Для знаходження прямолінійних твірних перетворимо до вигляду

$$-x^2 + z^2 = 1 - y^2,\ (-x+z)(x+z) = (1-y)(1+y)$$

Останнє рівняння рівносильне сукупності систем рівнянь

$$\begin{cases} \alpha(-x+z) = \beta(1-y), \\ \beta(x+z) = \alpha(1+y), \end{cases} \text{ або } \begin{cases} \alpha(-x+z) = \beta(1+y), \\ \beta(x+z) = \alpha(1-y), \end{cases}$$

де α, β – дійсні числа, причому $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

Якщо точка (x, y, z) задовольняє систему рівнянь, то задовольняє й рівняння сфери. Перша система рівносильна системі рівнянь

$$\begin{cases} -\alpha x + \beta y + \alpha z - \beta = 0, \\ \beta x - \alpha y + \beta z - \alpha = 0, \end{cases}$$

що визначає пряму – прямолінійну твірну сфери. Її напрямним вектором α, β позначимо $\bar{p}(x, y, z)$ і знайдемо його координати.

Вектор $\bar{p}(x, y, z)$ ортогональний векторам

$$\bar{n}_1 = (\alpha, \beta, \alpha),\ \bar{n}_2 = (-\beta, -\alpha, \beta),$$

які є нормальними векторами площин з системи, тому $\begin{cases} (\bar{p}, \bar{n}_1) = 0, \\ (\bar{p}, \bar{n}_2) = 0. \end{cases}$ в

координатному вигляді матимемо

$$\begin{cases} -\alpha x + \beta y + \alpha z = 0, \\ \beta x - \alpha y + \beta z = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Домноживши перше рівняння на α, а друге – на β, перетворимо цю систему до вигляду

$$\begin{cases} -\alpha^2 x + \alpha\beta y + \alpha^2 z = 0, \\ \beta^2 x - \alpha\beta y + \beta^2 z = 0, \end{cases}$$

звідки

$$\left(-\alpha^2 + \beta^2\right)x + \left(\alpha^2 + \beta^2\right)z = 0. \tag{2}$$

Далі (1) домножимо на $\begin{vmatrix} \beta \\ \alpha \end{vmatrix}$, й додамо, отримаємо $\begin{cases} -\alpha\beta x + \beta^2 y + \alpha\beta z = 0, \\ \alpha\beta x - \alpha^2 y + \alpha\beta z = 0, \end{cases}$,

звідки $\left(-\alpha^2 + \beta^2\right)y + 2\alpha\beta z = 0 \Rightarrow y = \dfrac{-2\alpha\beta}{-\alpha^2 + \beta^2} z.$

З (2) знайдемо $x = \dfrac{-\left(\alpha^2 + \beta^2\right)}{-\alpha^2 + \beta^2} z.$

Змінна z є вільною, візьмемо $z = -\alpha^2 + \beta^2$, тоді

$$\begin{cases} x = -\beta^2 - \alpha^2, \\ y = -2\alpha\beta, \\ z = -\alpha^2 + \beta^2. \end{cases}$$

Отже,

$$\bar{p} = \left(-\beta^2 - \alpha^2, -2\alpha\beta, -\alpha^2 + \beta^2\right).$$

Визначимо його тип. Оскільки

$$\bar{p}^2 = -x^2 + y^2 + z^2 = -\left(-\beta^2 - \alpha^2\right)^2 + 4\alpha^2\beta^2 + \left(-\alpha^2 + \beta^2\right)^2 =$$
$$= -\beta^4 - \alpha^4 - 2\alpha^2\beta^2 + 4\alpha^2\beta^2 + \alpha^4 + \beta^4 - 2\alpha^2\beta^2 = 0,$$

то вектор $\bar{p}$ ізотропний, що й треба **було довести**. Аналогічне доведення вийде для другої системи сукупності.

Інтерпретація планіметрії Лобачевського на сфері уявного радіусу псевдоевклідового простору.

Встановимо наступний словник. Під «точкою» будемо розуміти дві діаметрально протилежні точки сфери уявного радіусу. Або можна поступити інакше. Другу порожнину сфери уявного радіусу не розглядати та інтерпретувати геометрію Лобачевського на півсфері. «Пряма» – це лінія перетину півсфери з площиною, що проходить через початок координат – центр сфери. Оскільки вся півсфера лежить у внутрішній області ізотропного конуса, то для кожної точки півсфери її радіус-вектор є псевдоевклідовим, тобто $\bar{r}^2 < 0$.

Покажемо, що при цих домовленостях про зміст точок та прямих півсфера уявного радіусу псевдоевклідового простору несе на собі геометрію площини Лобачевського. Для того, щоб упевнитися в цьому, треба перевірити виконання всіх аксіом планіметрії Лобачевського. Обмежимось перевіркою аксіоми паралельності. Передусім треба встановити зміст термінів «прямі, що перетинаються», «прямі, що розходяться» та «паралельні прямі» для даної інтерпретації.

Оскільки прямі, які перетинаються, повинні мати спільну точку, то площини зв’язки з центром в точці О, які їх визначають, повинні перетинатися по прямій, яка проектує цю точку, але така пряма є псевдоевклідовою, тому що лежить всередині ізотропного конусу.

У відповідності з визначенням паралельних прямих по Лобачевському проєктуючі їх площини зв’язки повинні перетинатися по ізотропній прямій, тобто по твірній ізотропного конуса.

Прямі, що розходяться, належать двома площинам, які перетинаються по евклідовій прямій.

Перевірка аксіоми паралельності Лобачевського дає позитивну відповідь, аксіома виконується на сфері уявного радіусу псевдоевклідового простору.

Розглянемо деякі формули геометрії Лобачевського. Оскільки вона реалізується на сфері, то можна використовувати формули сферичної геометрії. В сферичній геометрії відстань між двома точками A і B знаходиться за формулою

$$\cos\frac{\omega}{r}=\left|\frac{\overline{A}\cdot\overline{B}}{\sqrt{\overline{A}^2}\sqrt{\overline{B}^2}}\right|,$$

де $\overline{A}$ і $\overline{B}$ – радіус-вектори цих точок. Застосуємо її до сфери уявного радіусу $r=k\cdot i$, тоді $\sqrt{\overline{A}^2}=\sqrt{\overline{B}^2}=k\cdot i$, $\cos\frac{\omega}{r}=\mathrm{ch}\frac{\omega}{k}$. Формула має вигляд

$$\mathrm{ch}\frac{\omega}{k}=\frac{1}{k^2}\left|-x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3\right|.$$

Оскільки площа трикутника на сфері обчислюється за формулою $S=r^2(A+B+C-\pi)$, то при $r=k\cdot i$ ця формула буде мати вигляд

$$S=-k^2(A+B+C-\pi).$$

Звідси отримуємо важливий і вже відомий нам висновок для суми внутрішніх кутів трикутника:

$$A+B+C<\pi.$$

Різницю $\pi-(A+B+C)$ називають дефектом трикутника та позначають δ. Тоді $S=k^2\delta$, тобто площа трикутника пропорційна його дефекту.

Нагадаємо, що перша теорема косинусів для сфери має вигляд $\cos\frac{a}{r}=\cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}+\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}\cos A$. Якщо $r=k\cdot i$, то $\sin\frac{a}{k\cdot i}=-i\cdot sh\frac{a}{k}$. Тоді теорема косинусів для сфери уявного радіусу має вигляд

$$ch\frac{a}{r}=ch\frac{b}{r}ch\frac{c}{r}-sh\frac{b}{r}sh\frac{c}{r}\cos A.$$

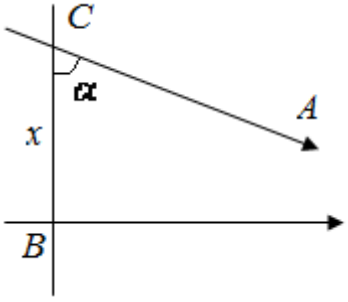
З другої теореми косинусів на сфері отримаємо другу терему косинусів на площині Лобачевського:

$$cosA=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cdot ch\frac{a}{k}.$$

Теорема синусів на площині Лобачевського запишеться у вигляді

$$\frac{sh\frac{a}{k}}{\sin A}=\frac{sh\frac{b}{k}}{\sin B}=\frac{sh\frac{c}{k}}{\sin C}.$$

Виведемо основну формулу геометрії Лобачевського. Розглянемо трикутник.



Застосуємо до нього другу терему косинусів, враховуючи, що $C=\alpha$, $A=0$, $B=\frac{\pi}{2}$, $a=x$. Отримаємо $1=1\cdot\sin\alpha\ ch\frac{x}{k}$, звідки $\sin\alpha=\frac{1}{ch\frac{x}{k}}$ та

$\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{1}{ch^2\frac{x}{k}}} = \frac{\sqrt{ch^2\frac{x}{k}-1}}{ch\frac{x}{k}}$. Після застосування формули $ch^2\frac{x}{k} - sh^2\frac{x}{k} = 1$ ця рівність набуде вигляду $\cos\alpha = \frac{sh\frac{x}{k}}{ch\frac{x}{k}} = th\frac{x}{k}$. Далі запишемо

$tg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-th\frac{x}{k}}{1+th\frac{x}{k}}$. Відомі також формули $th\frac{x}{k} = \frac{sh\frac{x}{k}}{ch\frac{x}{k}} = \frac{e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}}{e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}}$. Тоді

$tg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{e^{-\frac{x}{k}}}{e^{-\frac{x}{k}}} = e^{-2\frac{x}{k}}$, звідки $tg\frac{\alpha}{2} = e^{-\frac{x}{k}}$ – основна формула геометрії Лобачевського.

Евклідова геометрія як граничний випадок геометрії Лобачевського

Формула Лобачевського свідчить про існування бієктивної відповідності між множиною всіх гострих кутів α (кутів паралельності) і множиною додатних дійсних чисел x (відрізків паралельності). Явний вигляд цієї формули $\alpha(x) = 2arctg\, e^{-\frac{x}{k}}$ називають тепер функцією Лобачевського, $k = const$ і називається константою Лобачевського або радіусом кривини площини Лобачевського.

З рівностей $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x) = \frac{\pi}{2}$ випливає, що зі збільшенням відрізка паралельності відмінність геометрії Лобачевського від геометрії Евкліда стає все більшою, і, навпаки, в достатньо малому околі площини Лобачевського виконується геометрія Евкліда (або, геометрія Евкліда є граничним випадком геометрії Лобачевського).