Тема

Числові моделі плоских геометрій. Формули відстані

Дуальні та подвійні числа.

Точки евклідової площини можна ототожнювати з комплексними числами, якщо співставити точку з декартовими координатами (*x,y*) або з полярними координатами $(r,\ \varphi)$ з комплексним числом

$$z = x + iy = r\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi).$$

Крім комплексних чисел відомі також інші системи «чисел», серед яких система «дуальних чисел» та система «подвійних чисел».

Дуальне число визначають як вираз $z = x + \varepsilon y$, де *x,y* – дійсні числа, а «дуальна одиниця» задовольняє умову $\varepsilon^2 = 0$.

Подвійним числом називають вираз $z = x + ey$, де *x,y* – дійсні числа, а «подвійна одиниця» задовольняє умову $e^2 = +1$. При цьому, як і у випадку «комплексної одиниці» *i*, «дуальна одиниця» й «подвійна одиниця» є «числами особливого роду», їх не можна ніяк порівнювати з дійсними числами.

Додавання й віднімання дуальних та подвійних чисел аналогічні до додавання й віднімання комплексних чисел, тобто

$$(x + \varepsilon y) \pm (x_1 + \varepsilon y_1) = (x + x_1) + \varepsilon\,(y \pm y_1)$$
$$(x + ey) \pm (x + ey_1) = (x \pm x_1) + e\,(y + y_1),$$

1) Залишивши рівність $|z|^2 = z\bar{z}$, яка використовується для визначення модуля комплексного числа, без змін, знайти $|z|^2$ для дуальних та подвійних чисел.

Домовимось вважати, що для дуального числа $z = x + \varepsilon y$

$|z| = x$ (Увага! Може бути від'ємним),

а для подвійного числа $z = x + ey$

$$|z| = \begin{cases} \pm\sqrt{x^2 - y^2} & \text{при } |x| \geqslant |y|, \\ \pm\sqrt{y^2 - x^2} & \text{при } |x| \leqslant |y|. \end{cases}$$

Крім цього зручно вважати, що знак модуля подвійного числа співпадає зі знаком більшого з чисел x та y (за абсолютною величиною). Модуль подвійного числа може бути від'ємним!

Нехай $z = x + ey$ - подвійне число. - 2+e

Якщо $|x| > |y|$, то модуль числа **визначається** формулою (a) $r = |z| = \pm\sqrt{x^2 - y^2}$, причому знак модуля співпадає зі знаком числа x. Оскільки

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 - \left(\frac{y}{r}\right)^2 = \frac{x^2 - y^2}{r^2} = \frac{x^2 - y^2}{x - y^2} = 1,$$

то існує таке число φ, яке можна розуміти як деякий кут на псевдоевклідовій площині, що

$$\text{(a)}\ \operatorname{ch}\varphi = \frac{x}{r} = \frac{\operatorname{Re} z}{z},\ \operatorname{sh}\varphi = \frac{y}{r} = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|},\ \operatorname{th}\varphi = \frac{\operatorname{sh}\varphi}{\operatorname{ch}\varphi} = \frac{y}{x} = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}$$

(знайдіть помилку в формулах (a)!)

Тут $\operatorname{ch}\varphi = \frac{x}{r} > 0$ (**поясніть, чому**).

Якщо ж $|x| < |y|,$ то -1+2e

(б) $r = |z| = \pm\sqrt{y^2 - x^2}$

(знак модуля співпадає зі знаком *y*). Тому

$$\left(\frac{y}{r}\right)^2 - \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{y^2 - x^2}{r^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^2 - x^2} = 1.$$

В цьому випадку існує таке число φ, що

$$\text{(б)}\ \operatorname{sh}\varphi = \frac{x}{r} = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|},\ \operatorname{ch}\varphi = \frac{y}{r} = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|},\ \operatorname{th}\varphi = \frac{\operatorname{sh}\varphi}{\operatorname{ch}\varphi} = \frac{x}{y} = \frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z}$$

Тут $\operatorname{ch}\varphi = \frac{y}{r} > 0$. Визначене формулами (*а),(б*) число φ називається **аргументом подвійного числа** *z* й позначається *Arg z.*

Отже, кожне подвійне число можна записати однією з форм

(а) $z = r(\operatorname{ch}\varphi + e\operatorname{sh}\varphi)$ (**подвійні числа 1-го виду**) або (б) $z = r(\operatorname{sh}\varphi + e\operatorname{ch}\varphi)$, (**подвійні числа 2-го виду**).

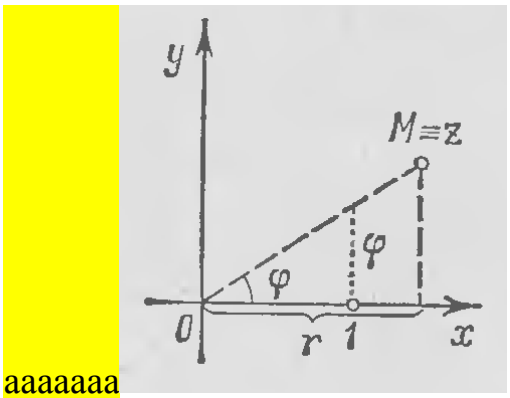
де $r = |z|$, $\varphi = \operatorname{Arg} z,$

Зауваження. В теорії подвійних чисел і для дійсних (числа 1-го виду) і для уявних (числа 2-го виду) $\operatorname{Arg} z = 0$.

Застосування подвійних чисел до побудови числової моделі псевдоевклідової геометрії

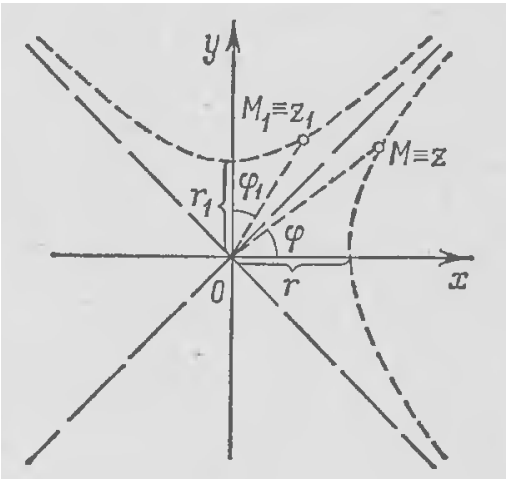
Полярними координатами точки M псевдоевклідової площини будемо називати відстань (в сенсі псевдоевклідової геометрії) $OM = d_{OM} = r$ й один з кутів $\angle xOM = \delta_{Ox,\ OM} = \varphi$ або $\angle yOM = \delta_{Oy,\ OM} = \varphi,$

в залежності від того, якою є пряма OM (1-го чи 2-го типу).



aaaaaaa

Умовимось співставляти точці псевдоевклідової площини з декартовими координатами x,y або з полярними координатами $r,\ \varphi$ подвійне число $z = x + ey = r\,(\mathrm{ch}\,\varphi + e\,\mathrm{sh}\,\varphi)$ або $z = x + ey = r\,(\mathrm{sh}\,\varphi + e\,\mathrm{ch}\,\varphi)$ у відповідності до того, яка з рівностей $\varphi = \angle xOM$ або $\varphi = \angle yOM$ має місце (див.рис.)



Точкам ізотропних прямих $x = y$, $x = -y$ співставляємо дільники нуля в області подвійних чисел.

Ми ототожнили точки псевдоевклідової площини з подвійними числами.

Відстань між точками $d^2_{z,z_1} = (z - z_1)\,(\bar{z} - \bar{z}_1),$

кут між прямими

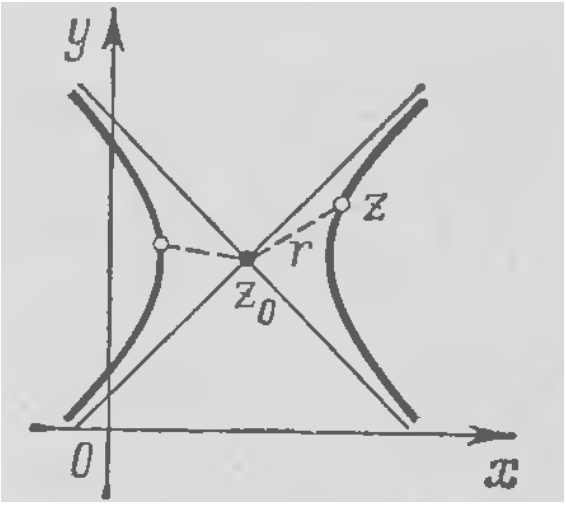
$$\delta_{(z_0,\ z_1),\ (z_0,\ z_2)} = \operatorname{Arg} V(z_2,\ z_1;\ z_0) = \operatorname{Arg} \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0},$$

Останнє співвідношення випливає з того, що $\delta_{(z_0,\ z_1),\ (z_0,\ z_2)} = \varphi_2 - \varphi_1,$

Де $\varphi_1 = \operatorname{Arg} z_1^0 = \operatorname{Arg}(z_1 - z_0),\ \varphi_2 = \operatorname{Arg} z_2^0 = \operatorname{Arg}(z_2 - z_0)$

Рівняння прямої $\frac{z - z_2}{z_1 - z_2} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_2}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}$ або $Bz - \bar{B}\bar{z} + C = 0,\ \operatorname{Re} C = 0.$

Рівняння кола $\rho = \pm r^2$, або $(z - z_0)\,(\bar{z} - \bar{z}_0) = \rho;$ причому треба вимагати, щоб різниці $z - z_0$ були числами одного виду.



Таким чином, рівняння кола має вигляд $z\bar{z} - \bar{z}_0 z - z_0\bar{z} + (z_0\bar{z}_0 - \rho) = 0$ або

$a z\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0,\ \operatorname{Im} a = \operatorname{Im} c = 0.$ Центр z_0 й квадрат радіуса ρ визначаються формулами $\bar{z}_0 = -\frac{b}{a},\ z_0\bar{z}_0 - \rho = \frac{c}{a}.$

Література

Исаак Моисеевич Яглом
Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия
(Серия: «Библиотека математического кружка»)
М., 1969 г., 304 стр. с илл.