МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

**В. В. ВІТЛІНСЬКИЙ, П. І. ВЕРЧЕНКО,
А. В. СІГАЛ, Я. С. НАКОНЕЧНИЙ**

Економічний РИЗИК: ігрові моделі

Навчальний посібник

За редакцією доктора економічних наук
професора ***В. В. Вітлінського***

*Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України*

Київ 2002

ББК 65в6
В 54

Рецензенти:

Т. С. Клєбанова, д-р екон. наук, проф. (Харків. держ. екон. ун-т)
В. Л. Петренко, д-р екон. наук, проф. (Донец. нац. ун-т)

Гриф надано Міністерством освіти і науки України
Лист № 14/18.2-1342 від 21.09.01

Вітлінський В. В. та ін.
В 54 Економічний ризик: ігрові моделі: Навч. посібник / В. В. Вітлінський, П. І. Верченко, А. В. Сігал, Я. С. Наконечний; За ред. д-ра екон. наук, проф. В. В. Вітлінського. — К.: КНЕУ, 2002. — 446 с.
ISBN 966–574–318–X

У навчальному посібнику розкривається сутність ризику у широкому спектрі задач, що виникають в економічній діяльності та підприємництві. Досліджуються способи та інструментарій вибору раціональної стратегії з множини альтернативних варіантів з урахуванням ризику.

Ризик трактується як об'єктивно-суб'єктивна економічна категорія у діяльності суб'єктів господарювання. Він пов'язаний з подоланням невизначеності та конфлікту в ситуації оцінювання, управління та неминучого вибору.

Задачі аналізу, оцінювання та прийняття рішень в умовах ризику розглядаються на підгрунті концептуальних положень і формалізованих моделей реальних економічних ситуацій під назвою «Теорія гри і статистичних рішень».

Детально висвітлюються питання ризикології — якісного та кількісного аналізу ризику, система його кількісних показників, основні засади моделювання та управління ризиком. Значна увага приділяється багатоцільовим і багатокритеріальним ігровим моделям. Описується інструментарій, необхідний для аналізу, прийняття рішень і раціонального управління об'єктом ризику в низці господарських задач.

Навчальний посібник розрахований насамперед на студентів вищих навчальних закладів усіх спеціальностей з напряму «Економіка і підприємництво», котрі вивчають дисципліну «Аналіз моделювання та управління економічним ризиком», а також на аспірантів, слухачів системи закладів післядипломної освіти, широке коло фахівців економічної й управлінської сфер і підприємців.

ББК 65в6

ISBN 966–574–318–X

Навчальне видання

ВІТЛІНСЬКИЙ Вольдемар Володимирович
ВЕРЧЕНКО Петро Іванович
СІГАЛ Анатолій Вікторович
НАКОНЕЧНИЙ Ярослав Степанович

ЕКОНОМІЧНИЙ РИЗИК: ІГРОВІ МОДЕЛІ

Навчальний посібник

За редакцією доктора економічних наук
професора ***В. В. Вітлінського***

Редактор *І. Стремовська*
Художник обкладинки *Т. Зяблiцева*
Технічний редактор *Т. Піхота*
Коректор *А. Бородавко*
Верстка *Н. Мишко*

Підписано до друку 15.02.02. Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Гарнітура Тип Таймс. Друк офсетний. Умов. друк. арк. 25,92.
Умов. фарбовідб 26,36. Обл.-вид. арк. 30,6. Наклад 3000 прим. Зам. № 20-2104

Видавництво КНЕУ
03680, м. Київ, просп. Перемоги, 54/1
Свідоцтво про реєстрацію № 235 від 07.11.2000
Тел/факс (044) 458-00-66; 446-64-58
E-mail: publish@kneu.kiev.ua

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА НАУКОВОГО РЕДАКТОРА 9

Розділ 1. **Невизначеність, конфлікт і теоретико-ігрові моделі економічного ризику** 13

1.1. Невизначеність, конфлікт і зумовлений ними ризик 13
1.1.1. Невизначеність — фундаментальна характеристика економічних процесів 13
1.1.2. Конфліктність в економіці 17
1.1.3. Альтернативність 23
1.1.4. Психологічна теорія рішень 27
1.1.5. Ризик як методологія подолання невизначеності та конфлікту 29
1.2. Теоретико-ігрова модель 31
1.3. Класифікація інформаційних ситуацій 34
1.4. Інгредієнт функціонала оцінювання. Функція ризику 36
1.5. Зведення економічних колізій до ігрових задач 38
1.5.1. Скінченні ігри з нульовою сумою 38
1.5.2. Дилема ув'язненого та олігопольні ринки 43
1.5.3. Гра у «старі» та «нові» товари 44
1.5.4. Планування структури посівних площ 45
1.5.5. Інвестування капіталу 48
1.5.6. Ігрова модель задачі побудови портфеля активів 50
1.5.7. Формування валютного кошика 53
1.5.8. Формування портфеля інвестиційних проектів 54
1.6. Контрольні запитання і теми для обговорення 55
1.7. Приклади та завдання для самостійної роботи 57
1.8. Додаток до розділу I 61
1.8.1. Зведення антагоністичної гри з нульовою сумою до задачі лінійного програмування 61
1.8.2. Графічно-аналітичний метод розв'язання гри та визначення активних чистих стратегій 64
1.9. Позначення, використовувані в розділі 1 71

Розділ 2. **Якісний і кількісний аналіз економічного ризику. Кількісна оцінка міри ризику** 75

2.1. Основні засади якісного аналізу ризику 76
2.1.1. Елементи класифікації ризику 76
2.1.2. Деякі види ризику у спектрі економічних проблем 76
2.1.3. Якісний аналіз ризику 78
2.2. Основні підходи до кількісного аналізу ризику 79
2.3. Система кількісних оцінок міри економічного ризику 81
2.3.1. Міра ризику як векторна величина 81
2.3.2. Показники допустимого, критичного та катастрофічного ризиків 84
2.3.3. Імовірність як один із показників кількісної оцінки ступеня ризику 87
2.3.4. Оцінка ступеня ризику в абсолютному вираженні 88
2.3.5. Оцінка ступеня ризику у відносному вираженні 98
2.3.6. Ризик ліквідності та його моделі 104
2.3.7. Систематичний та несистематичний ризики активів 105
2.4. Оцінка ступеня портфельного ризику 108
2.4.1. Портфель активів 108
2.4.2. Фінансовий ризик портфеля активів 109
2.4.3. Оцінка міри ризику ліквідності портфеля активів 109
2.4.4. Оцінка міри загального ризику портфеля активів 110
2.4.5. Модель оцінки капітальних активів (МОКА) 113
2.5. Теми рефератів 120
2.6. Завдання для самостійного виконання 120
2.7. Додаток до розділу 2 127
2.7.1. Властивості математичного сподівання 127
2.7.2. Властивості дисперсії, середньоквадратичного відхилення та коваріації 128
2.7.3. Властивості коефіцієнта кореляції 129
2.7.4. Правила визначення знака інгредієнта 131
2.7.5. Рівняння ринкової лінії цінних паперів 132
2.8. Позначення, використовувані в розділі 2. 134

Розділ 3. **Моделювання економічного ризику: Концепція теорії гри** 137

3.1. Прийняття рішень за заданого розподілу ймовірності 139
3.1.1. Критерій Байєса та його модифікації 139
3.1.2. Критерії мінливості (варіації) значень елементів функціонала оцінювання. 147
3.2. Прийняття рішень за невідомого розподілу ймовірності. . . . 152
3.2.1. Принцип максимальної невизначеності Гіббса—Джейнса . 152
3.2.2. Друга інформаційна ситуація 155
3.2.3. Третя інформаційна ситуація 156
3.2.4. Четверта інформаційна ситуація 160

3.3. Критерії прийняття рішень за наявності протидії економічного середовища 161
3.3.1. Критерій Вальда 162
3.3.2. Лінійне перетворення функціонала оцінювання. Критерій Севіджа 164
3.4. Шоста інформаційна ситуація 165
3.5. Критерій Паретто. Активні чисті стратегії. 165
3.6. Розв’язання статистичної гри у змішаних стратегіях. 166
3.6.1. Критерії прийняття рішень у змішаних стратегіях у полі першої інформаційної ситуації 167
3.6.2. Критерії прийняття рішень у змішаних стратегіях за невідомого розподілі ймовірності 171
3.6.3. Критерій прийняття рішень у змішаних стратегіях у випадку протидії економічного середовища 173
3.7. Контрольні запитання та теми для обговорення 176
3.8. Приклади та завдання для самостійної роботи 177
3.9. Додаток до розділу 3 183
3.9.1. Розв’язання задачі визначення оптимальної змішаної стратегії суб’єкта прийняття рішень у матричній формі 183
3.9.2. Доведення теорем 185
3.9.3. Метод множників Лангранжа. Матриця Гессе 189
3.10. Позначення, використовувані в розділі 3 192

Розділ 4. **Багатокритеріальні ігрові моделі** 196

4.1. Сутність проблеми прийняття багатокритеріальних рішень. 196
4.2. Формальна постановка багатокритеріальної задачі 198
4.3. Концептуальні проблеми, пов’язані з розв’язанням багатокритеріальних задач. 199
4.3.1. Визначення області компромісу 200
4.3.2. Вибір схеми компромісу та відповідного їй принципу оптимальності 201
4.3.3. Нормалізація критеріїв 201
4.3.4. Урахування пріоритету 202
4.4. Способи нормалізації. 202
4.4.1. Зміна інгредієнта. 203
4.4.2. Нормалізація зі збереженням одиниць вимірювання (абсолютна нормалізація) 204
4.4.3. Відносна нормалізація. 204
4.4.4. Природна нормалізація 206
4.4.5. Нормалізація Севіджа 206
4.5. Способи відображення пріоритету. 208
4.5.1. Ряд пріоритету. 209
4.5.2. Ряд бінарних відношень пріоритету 209
4.5.3. Вектор вагових коефіцієнтів пріоритету. 210

4.6. Урахування пріоритету 212
4.6.1. Принцип жорсткого врахування пріоритету 212
4.6.2. Принципи гнучкого урахування пріоритету 212
4.7. Прийняття багатокритеріальних рішень 213
4.7.1. Побудова та геометрична інтерпретація області компромісів у просторі критеріїв 213
4.7.2. Апроксимація області компромісу 215
4.7.3. Схеми компромісу 219
4.7.4. Компроміси за жорсткого врахування пріоритету 219
4.7.5. Компроміси за гнучкого врахування пріоритету. 225
4.7.6. Принцип рівномірності 226
4.7.7. Принцип справедливої поступки (знижки) 235
4.7.8. Ієрархічна модель прийняття одноцільових багатокритеріальних рішень у полі однієї інформаційної ситуації. 240
4.7.9. Ієрархічна модель прийняття багатокритеріальних рішень у полі кількох інформаційних ситуацій 249
4.7.10. Критерій мінімальної відстані між інформаційними матрицями 252
4.8. Контрольні запитання та теми для обговорення 255
4.9. Теми рефератів. 256
4.10. Приклади та завдання для самостійної роботи. 257
4.11. Додаток до розділу 4 259
4.11.1. Інваріантність рівняння опорної гіперплощини 259
4.11.2. Сумарна відносна поступка (знижка) як оцінка приросту мультиплікативної функції 261
4.12. Позначення, використовувані в розділі 4 263

Розділ 5. **Багатоцільові багатокритеріальні моделі** 267

5.1. Система цілей і багатоцільова багатокритеріальна модель 267
5.2. Приклади багатоцільових задач прийняття рішень 269
5.2.1. Прийняття рішення на множині цілей 269
5.2.2. Задача розподілу ресурсів 269
5.2.3. Задача оптимізації на множині умов функціонування 270
5.2.4. Урахування динаміки 270
5.2.5. Ієрархічні моделі 271
5.3. Теоретико-ігровий підхід з урахуванням множини цілей . . . 272
5.4. Критерій мінімальної відстані між інформаційними кубами 273
5.5. Ієрархічна модель прийняття багатоцільових багатокритеріальних рішень 275
5.6. Аналіз ієрархій: теоретико-ігровий підхід 280
5.6.1. Психологічні аспекти використання методу аналізу ієрархії 280

5.6.2. Принцип ідентичності та декомпозиції 281
5.6.3. Принцип дискримінації та порівняльних суджень 282
5.6.4. Принцип синтезування 285
5.6.5. Оцінка узгодженості суджень 288
5.6.6. Оцінка узгодженості ієрархії 290
5.6.7. Урахування (суджень) кількох експертів 290
5.6.8. Вибір і прогнозування забезпечення банківського кредиту 294
5.6.9. Ігровий підхід до методу аналізу ієрархій 305
5.7. Контрольні запитання та теми для обговорення 308
5.8. Теми для досліджень і рефератів 309
5.9. Приклади та завдання для самостійного виконання 310
5.10. Додаток до розділу 5 312
5.10.1. Наближене обчислення головного власного вектора матриці 312
5.11. Позначення, використовувані в розділі 5 313

Розділ 6. **Теоретико-ігровий підхід у теорії портфеля** 317

6.1. Портфельна теорія: етапи розвитку, підходи, припущення . 317
6.1.1. Етапи розвитку інвестиційної теорії 317
6.1.2. Підходи до вибору портфеля цінних паперів 320
6.1.3. Диверсифікація, її цілі 322
6.1.4. Припущення сучасної теорії портфеля 323
6.2. Портфель цінних паперів: числові характеристики, стратегії 324
6.2.1. Норма прибутку та її обчислення 324
6.2.2. Числові характеристики активів та їх обчислення 329
6.2.3. Статистичні оцінки числових характеристик активів 336
6.2.4. Види портфельних стратегій 338
6.3. Вибір структури портфеля з наперед заданими характеристиками 341
6.3.1. Класична модель Марковіца 342
6.3.2. Концептуальні підходи до побудови множини портфелів . 346
6.4. Теоретико-ігрова концепція вибору портфеля 351
6.4.1. Теоретико-ігрова модель вибору структури портфеля при заданому розподілі ймовірності 352
6.4.2. Теоретико-ігрова модель вибору структури портфеля за невідомого розподіліу ймовірності 354
6.4.3. Теоретико-ігрова модель вибору структури портфеля у випадку протидії економічного середовища 364
6.5. Контрольні запитання та теми для обговорення 368
6.6. Приклади та завдання для самостійної роботи 370
6.7. Додаток до розділу 6 373
6.7.1. Доведення теорем 373
6.8. Позначення, використовувані у розділі 6. 377

Розділ 7. **Ігровий підхід до управління валютним ризиком** . . 380

7.1. Валютний ризик 380
7.2. Види валютного ризику 384
7.3. Управління валютними ризиками 387
7.4. Формування «валютного кошика» 392
7.5. Визначення обсягу авансової виплати 394
7.6. Контрольні запитання та теми для обговорення 397
7.7. Теми рефератів 397
7.8. Приклади та завдання для самостійної роботи 398
7.9. Позначення, використовувані у розділі 7 399

Розділ 8. **Урахування ризику в управлінні на базі концепції теорії гри** 401

8.1. Вибір управлінських рішень в економіці та підприємництві 401
8.2. Ієрархічні ігри у проблемах управління організаційними системами. Розподіл ресурсів 407
8.2.1. Постановка задачі розподілу ресурсів 407
8.2.2. Механізм прямих пріоритетів 409
8.2.3. Механізм зворотних пріоритетів 412
8.2.4. Механізм відкритого управління 415
8.3. Управління активними системами 417
8.3.1. Модель активної системи 417
8.3.2. Пріоритети учасників активної системи 420
8.3.3. Моделі поводження у теоретико-ігровій постановці 422
8.3.4. Загальна постановка задачі управління активними системами 425
8.3.5. Класифікація задач управління активними системами . . . 427
8.3.6. Активні системи з імовірнісною невизначеністю. Елементи теорії контрактів 429
8.4. Контрольні запитання та теми для обговорення 432
8.5. Теми рефератів 433
8.6. Приклади та завдання для самостійної роботи 434
8.7. Позначення, використовувані в розділі 8 434

Перелік символів (кванторів, операторів), використовуваних у посібнику 438

Література 439

Торжествують:
Він не помилявся,
Не змочив
Ні разу!
Підошов,
Проти вітру
Жоден раз!
Не пхався...
Але ж він нікуди і не йшов!

Василь Симоненко

ПЕРЕДМОВА НАУКОВОГО РЕДАКТОРА

В економіці і підприємництві здійснювати вибір, приймати рішення доводиться в умовах невизначеності, конфлікту та зумовленого ними ризику.

Українське слово «*ризик*» походить, мабуть, від іспанського чи португальського слова, що в перекладі, відповідно, означає «скеля» або «стрімка скеля». Мореплавці під цим словом розуміли небезпеку, яка могла загрожувати їх кораблям. У словнику Вебстера «ризик» визначається як небезпека, можливість збитків, шкоди. Отже, тут ризик — це можливість настання небажаної події.

У наш час ризик розуміють не лише як можливість настання збитків, а й як можливість відхилення від цілей, від бажаних, очікуваних результатів, задля досягнення котрих, власне, і приймається рішення. Ризик — це також відсутність позитивних результатів або невикористані можливості.

Наголосимо, що ризик існує тоді, коли наявні можливості активного оцінювання, управління, прийняття рішень. Коли відсутні альтернативи рішень (планів, проектів, стратегій), то відсутній і ризик. Джерело ризику — це чинники (явища, предмети, процеси), які спричиняють невизначеність і конфліктність.

Невизначеність — це фундаментальна характеристика забезпеченості процесу прийняття рішень необхідною інформацією чи, у більш загальному трактуванні, знаннями щодо проблемної ситуації. Невизначеність пов’язується з ефективністю економічної діяльності.

В економічній діяльності та підприємництві нерідко виникають негаразди як по горизонталі, так і по вертикалі управління, суперечності та конфлікти в трудових колективах, напружені стосунки між організаціями, установами та інституціями, існує й множинність цілей, багатокритеріальність, конкуренція. Усе це призводить до невизначеності та конфліктності.

Практика XX ст. підтвердила, зокрема, що мотивування діяльності є полісистемним, що жодну мету не можна абсолютизувати. Діяльність, зокрема економічна, у наш час є багатокритеріальною та багатопараметричною. У ній зростає значення чинника особистого вибору та особистої відповідальності з урахуванням необхідності дотримання норм моралі та етики, чинного законодавства.

На нашу думку, доцільно дати таке визначення ризику щодо економічних процесів, об'єктів (проектів).

Ризик — це економічна категорія в діяльності суб'єктів господарювання, пов'язана з подоланням невизначеності, конфліктності оцінювання, управління, неминучого вибору. Він має діалектичну об'єктивно-суб'єктивну структуру. Оцінка ризику є багатомірною величиною, що характеризує можливі відхилення від цілей, від бажаного (очікуваного) результату, можливої невдачі (збитків) з урахуванням впливу контрольованих (керованих) і неконтрольованих (некерованих) чинників, прямих і зворотних зв'язків.

Наведене визначення ризику, який є характерним феноменом ринкової економіки, ґрунтується на системному підході до цієї економічної категорії, вказує на необхідність ретельного аналізу впливу на об'єкти (процеси) оцінювання та керування множини внутрішніх і зовнішніх чинників, надсистеми, а також урахування ставлення до ризику суб'єктів господарювання (суб'єктів ризику).

Починаючи з 60-х років XX ст. розвинулися такі напрями науки, як стохастичне програмування, теорія керованих випадкових процесів, нечітких множин, теорія гри, теорія статистичних рішень тощо, котрі з системних позицій об'єднали класичні ймовірнісні методи з методами і моделями оптимізації складних систем, до яких належить економіка. Досягнуті результати дали змогу приступити до глибокого вивчення проблем економічної (господарської) діяльності з урахуванням ризику і розбудови теорії керування економічною стійкістю, надійністю, маневреністю.

Наголосимо, що математична формалізація означає, що опрацьовані певні правила дій, концептуальні положення, адекватні цілям дослідження та прийнятій системі гіпотез, що існує глибинний зв'язок між математичним інструментарієм, предметом дослідження та досліджуваним об'єктом.

Задачами аналізу та прийняття рішень в умовах невизначеності, конфліктності та зумовленого ними ризику займається, зокрема, спеціальний розділ математики, який називається «Теорія гри і статистичних рішень». В останні роки методи теорії гри у все більшій мірі проникають в економіку та підприємництво, в управлінську практику. Можливо, що теорія гри, поряд з теорією трансакційних витрат, сприйматиметься як найбільш обгрунтований елемент теорії організації.

Гра — це спрощена, формалізована модель реальної ситуації, що виникає в економіці та підприємництві в умовах невизначеності, конфліктності та зумовленого ними ризику.

Грою називається будь-яка взаємодія гравців (учасників деякої системи), у котрій корисність (виграш, значення цільової функції тощо) кожного гравця залежить як від його власних дій (стратегії), так і від дій інших гравців.

Згідно з гіпотезою раціонального поводження кожен із гравців прагне обранням стратегії максимізувати свою цільову функцію. Зрозуміло, що у випадку кількох гравців індивідуально-раціональна стратегія залежить від стратегій інших гравців. Набір таких раціональних стратегій називається розв'язком гри (рівновагою).

За визначенням Олени Вентцель, теорія гри є математичною теорією конфліктних ситуацій. Її мета — вироблення рекомендацій щодо розумної поведінки учасників конфлікту [16]. За визначенням М. М. Воробйова, теорія гри — це теорія математичних моделей прийняття рішень в умовах невизначеності, коли суб'єкт, який приймає рішення («гравець»), має у своєму розпорядженні інформацію лише про множину можливих ситуацій, в одній з яких він насправді знаходиться, про множину рішень («стратегій»), які він може приймати, та про кількісну міру того «виграшу», який він міг би отримати, обравши у даній ситуації дану стратегію*.

Щоб описати гру, необхідно спочатку виявити її учасників. Цю умову не важко здійснити, коли йдеться про звичайні ігри типу шахів, волейболу тощо. Дещо важче це виконати, коли йдеться про «соціально-економічні» чи «ринкові» ігри. Тут не завжди легко розпізнати усіх гравців, тобто діючих чи потенційних конкурентів, або замасковані риторикою справжні інтереси,

---

* *Воробьев Н. Н.* Философская энциклопедия. — Т. 5. — М.: Наука, 1970. — С. 208—210.

що, на жаль, наш народ відчув на власному гіркому досвіді завдяки «слугам народу». Практика показує, що не обов'язково проводити ідентифікацію всіх гравців, необхідно відшукати найбільш важливих (суттєвих).

Ігри охоплюють, як правило, кілька періодів, протягом яких гравці здійснюють послідовні чи одночасні дії. Ці дії позначаються терміном «хід». Дії можуть бути пов'язані з цінами, обсягами продажів, витратами на наукові дослідження, освіту тощо. Періоди, протягом яких гравці здійснюють свої ходи, називаються етапами гри. Обрані на кожному етапі ходи визначають «платежі» (виграш чи збитки) кожного з гравців, які можуть мати вираз у матеріальних цінностях чи грошах (переважно — дисконтований прибуток), чи в корисності, рейтингових оцінках тощо.

Ще одним з основних понять теорії гри є стратегія гравця. Під нею розуміють можливі (допустимі) дії, що дають змогу гравцеві на кожному етапі гри здійснювати вибір варіанта з певної множини альтернативних варіантів (ходів), котрий вбачається йому «кращою відповіддю» на дії інших гравців. Важлива також форма представлення гри. Як правило, виокремлюють нормальну (матричну) форму, вживається й розгорнута форма, яка подається у вигляді дерева рішень.

Наголосимо, що теорія гри — досить складна галузь знань. У разі звернення до неї необхідно застосовувати системний аналіз, знати межі використання її. Надто спрощені міркування викликають відповідну загрозу помилки.

Деяким з основних питань щодо врахування, оцінювання ризику при прийнятті рішень в умовах конфлікту та невизначеності, аналізу та моделювання ризику, управління ним на підґрунті теорії гри та статистичних рішень, власне, й присвячено цей навчальний посібник.

РОЗДІЛ 1

НЕВИЗНАЧЕНІСТЬ, КОНФЛІКТ І ТЕОРЕТИКО-ІГРОВІ МОДЕЛІ ЕКОНОМІЧНОГО РИЗИКУ

Скорочення, використовувані у розділі:
СПР — суб'єкт прийняття рішень;
ІС — інформаційна ситуація;
УГО — умовна грошова одиниця;
ЧС — чиста стратегія;
ЗС — змішана стратегія.

1.1. НЕВИЗНАЧЕНІСТЬ, КОНФЛІКТ І ЗУМОВЛЕНИЙ НИМИ РИЗИК

1.1.1. Невизначеність — фундаментальна характеристика економічних процесів

З позицій теорії систем економіку слід віднести до класу динамічних, слабоструктурованих систем великої складності. Ця система складається з величезної кількості господарських комірок, які знаходяться у досить тісній, неперервній взаємодії. Окрім того, економіка має яскраво виражену ієрархічну, багаторівневу структуру, вищий рівень ієрархії інтегрує за певними правилами (алгоритмами) інформаційні сигнали (потоки) нижчих рівнів ієрархії та оперує інформаційними агрегатами.

Водночас сама економіка виступає як підсистема щодо суспільства загалом, оскільки існування останнього, його розвиток далеко не вичерпуються суто економічними процесами.

Суспільство з певною соціальною структурою, політичною системою, потенціалом культури, морально-етичними принципами та установками є тим зовнішнім середовищем, з елементами якого економіка взаємодіє. Ця взаємодія не є ані детермінованою, ані статистичною і має два напрями — від зовнішнього середовища і навпаки.

Більшість учених-економістів стверджують, що соціально-економічну систему можна характеризувати як таку, що саморозвивається. “Пальним”, яке забезпечує розвиток цієї системи, є інформація.

Академік М. Петраков детально аналізує різні аспекти генерування нової інформації у соціально-економічній системі. Зокрема, він зазначає [83]: “...Навіть залишаючись у межах відносно простої схеми “потреби індивіда та механізм їх задоволення”, ми стикаємося з постійною і неповністю передбачуваною пульсацією соціально-економічної системи. Особа, що недавно перебувала в стані задоволення оточуючим соціально-економічним середовищем, “раптом” починає висувати нові вимоги культурного, соціального, естетичного характеру, виказує незадоволення умовами праці тощо. Ці вимоги створюють відповідний інформаційний “шум” у системі, вводять елемент непередбачуваності і випадковості. Власне цей “шум” є будівельним матеріалом для генерування нової інформації у соціально-економічній системі. Ми маємо постійне тло випадкових збурень, на якому і виникають “соціально-економічні мутації””.

Технічний прогрес у наш час визнається економістами головною силою, що криється за різноманітними економічними явищами, як-от: зростання продуктивності праці, конкуренція, нові форми міжнародної торгівлі тощо.

Фундаментальна невизначеність, пов’язана, зокрема, з інноваційною діяльністю, — це невизначеність щодо її результатів. Значна невизначеність може бути тоді, коли до цієї діяльності лише приступають, а також з приводу її деталей, тому що ці деталі можуть виявитися ключовими щодо успіху, нюанси якого неможливо знати заздалегідь. Стосовно того, коли буде відшукане рішення поставленої задачі і чи буде воно знайдене взагалі, існує певна невизначеність.

Важливо наголосити, що у філософському аспекті невизначеність у соціально-економічній системі викликана не стільки суб’єктивною обмеженістю наших знань про об’єкт дослідження та управління в даний момент часу, скільки об’єктивною неможливістю вичерпного опису його адекватною мовою. Тобто спонтанний характер процесів, які відбуваються в складній системі, внутрішньо притаманні їй і є однією із суттєвих системотвірних її властивостей. Розуміння цього положення (принцип невизначеності) знайшло відображення у розвитку природничих наук (фізики, біології) [73].

Щодо економіки пошук і відбір є двома одночасно присутніми і взаємодійними компонентами економічного розвитку. Взяти хоча б ціни: вони, з одного боку, забезпечують обернений зв’язок при відборі, з іншого — впливають і на напрям пошуку.

Унаслідок взаємодії пошуку та відбору фірми розвиваються у часі, при цьому ситуація в галузі у кожний період містить зародки свого стану щодо наступного періоду. Однак необхідно наголосити, що такий процес є індетермінованим: результатам пошуку притаманний елемент невизначеності (випадковості). Те, що насправді визначає ситуація у галузі в даний період, є в кращому випадку розподілом імовірності ситуації у цій галузі щодо наступного періоду.

Необхідно також наголосити, що при визначенні аксіоматики функціонування складних соціально-економічних систем постулат щодо наявності критерію оптимальності системи (цілепокладання) має бути доповнений постулатом щодо певної невизначеності цього критерію та необхідності існування механізму формування, уточнення й коригування його в процесі функціонування складних систем. Цей момент — пошук цілі в процесі руху і механізм організації пошуку є принципово новим якісним моментом й, у свою чергу, породжує невизначеність і зумовлений нею ризик.

Відомий вчений Е. Пестель пише [82]: "Часто вважають, що невизначеність виникає тоді, коли відсутня вичерпна інформація (брак інформації) або ж, у більш широкому плані, бракує знань про предмет та об'єкт дослідження. Це справді так, але коли йдеться про світову систему, пов'язану з елементами людського мислення та діяльності, то це ще не все... У таких системах є ще елемент внутрішньої невизначеності. Він виникає тому, що тут майбутнє залежить від рішення (вибору), яке ще тільки має прийматися. Це фундаментальний принцип, який нагадує фізичний принцип невизначеності Гейзенберга".

У багатьох так званих відкритих задачах особа, яка приймає рішення, не має інформації щодо чинників, які зумовлюють наслідки її дій; вона не знає, що може в дійсності відбутися після того, як рішення ухвалене. Щоб краще охарактеризувати цю ситуацію, будемо розрізняти два види невизначеності [58]. Один з них назвемо невизначеністю першого виду, або поверхневою невизначеністю. Вона має місце в замкнутих задачах, коли особа, котра приймає рішення, відносно добре орієнтується стосовно того, якими мають бути можливі гіпотези, але не має достатніх підстав для того, щоб стверджувати, яка з них виявиться правильною. Ця невизначеність стосується лише такого аспекту: котра, власне, з цих можливостей (який із елементів добре визначеної множини гіпотез) здійсниться після прийняття рішення. Від поверхневої невизначеності відрізняють невизначеність другого виду, або глибинну невизначеність, тобто таку, котра має місце у відкритих задачах, коли особа, що приймає рішення, не знає, які саме чинники відіграють суттєву роль у даній ситуації. Ця особа має спочатку сформувати множину гіпотез і лише після цього оцінити їх імовірність (об'єктивну чи суб'єктивну). Різниця між поверхневою і глибинною невизначеністю аналогічна різниці між звичайним гральним кубиком і неправильним "кубиком", кількість граней котрого невідома, як невідоме й те, що нанесено на цих гранях, — числа, фігури чи слова.

Кожному менеджеру, підприємцю, бізнесмену необхідно максимально враховувати те, що, починаючи свою діяльність, тобто вступаючи у ринкові відносини, будь-якому підприємству (фірмі) доведеться мати справу з невизначеністю і, як наслідок цього, бути обтяженим протягом усієї діяльності тими видами ризиків, як внутрішніми, так і зовнішніми, котрі притаманні даній економіці й даному виду діяльності.

Невизначеність — фундаментальна характеристика недостатньої забезпеченості процесу прийняття економічних рішень знаннями стосовно певної проблемної ситуації. Це, зокрема, невичерпне чи недостовірне (неточне) знання щодо різноманітних параметрів у майбутньому, породжене різними причинами, передусім — невичерпною й недостовірною інформацією щодо умов реалізації рішення, зокрема пов'язаних із цим рішенням вигод і витрат, відсутністю чітко визначених цілей та критеріїв їх оцінки, а також багатокритеріальністю.

Господарюючі суб'єкти впродовж господарчого функціонування зіштовхуються з різними видами і типами невизначеності [57].

Причини виникнення невизначеності у господарській діяльності можна об'єднати у кілька груп. Це:

1. Недетермінованість процесів, котрі відбуваються у суспільстві загалом і в економічній діяльності зокрема. Недетермінованість, як уже зазначалося, є наслідком відсутності можливості щодо вичерпного передбачення і прогнозування процесів.

2. Відсутність вичерпної інформації при організації та плануванні поведінки суб'єкта ринкової діяльності чи суб'єктивний, неякісний аналіз її.

3. Вплив суб'єктивних чинників на результати аналізу (рівень кваліфікації, приховування частини інформації, дезінформація тощо).

Чим вищим є ступінь невизначеності, тим складнішим має бути застосовуваний для прийняття управлінських рішень інструментарій.

Пропонується також характеризувати зовнішнє середовище з позицій нестабільності його, зокрема за такими характеристиками [109]:

— ступінь буденності (повторюваності) дій (подій): 1) звичайні (котрі трапляються досить часто); 2) несподівані (але такі, що вже траплялися у минулому); 3) зовсім несподівані (такі, що є принципово несподіваними);

— темпи зміни дії (впливу), тобто залежність між швидкістю протікання події і реакцією підприємства (фірми) на цю подію. Згідно з цією ознакою події класифікуються на: 1) такі, що протікають повільніше, ніж підприємство реагує на них; 2) події, швидкість протікання котрих збігається зі швидкістю реагування підприємства; 3) події, швидкість протікання котрих більша за швидкість реагування на них з боку підприємства.

Невизначеність в економіці і підприємництві з погляду якості інформації може виникати на етапі: збирання інформації; аналізу інформації; прийняття управлінського рішення на ґрунті зібраної і проаналізованої інформації.

Отже, на думку ряду вчених-економістів [118], чинник невизначеності, який є необхідною умовою виникнення ризику, — невід'ємний атрибут прийняття рішень. Причини невизначеності різноманітні: випадковий характер науково-технічного прогресу; випадкові помилки при прогнозуванні; динамічні зміни внутрішніх і зовнішніх умов розвитку економіки; неминучі похибки при аналізі складної системи "природа—суспільство—людина"; ймовірнісний та (чи) розпливчастий характер важливих економічних параметрів (урожайність сільськогосподарських культур, запаси корисних копалин, погодні умови тощо); розвиток і розширення творчості працездатного населення; необхідність проектування потужних інформаційних потоків.

1.1.2. Конфліктність в економіці

Проблеми конфліктності — один з традиційних напрямів наукових досліджень низки економічних дисциплін, зокрема економічної соціології. Цей напрям отримав назву "конфліктологія".

Конфлікт — відносно добре вивчена психологією, економічною наукою та філософською думкою форма міжособистісних стосунків. Він нерідко виникає навіть між людьми доброї волі.

Під конфліктом розуміють будь-яке явище, щодо якого можна говорити про незбіжність інтересів його учасників, про їх дії, про наслідки явища, до яких ці дії призводять, про сторони, так чи інакше зацікавлені у цих наслідках, про сутність цієї зацікавленості за нетотожності інтересів.

У низці наукових праць ідеться про проблеми трудового конфлікту — суперечності, котрі виникають з приводу організаційно-трудових стосунків.

Трудовий конфлікт виникає в тому разі, коли [46]:

а) суперечності відображають незбіжні (суперечні) позиції суб'єктів;

б) ступінь суперечностей досить високий;

в) суперечності доступні до зрозуміння, тобто індивіди і групи усвідомлюють їх, чи навпаки, незрозумілі;

г) суперечності виникають миттєво, несподівано чи накопичуються впродовж тривалого часу, до виникнення якихось соціальних конфліктів.

Трудовий конфлікт, як правило, має негативні наслідки. Але його доцільно вивчати і з позитивного боку. Існує низка позитивних функцій трудового конфлікту, що послаблюють його та знижують зумовлений ним ризик. Це такі функції:

- інформаційна (лише через конфлікт стає відкритою інформація, функціонально необхідна всім чи багатьом);
- соціалізації (в результаті конфлікту особи отримують соціальний досвід, знання, недоступні за звичайних умов);
- нормалізації морального стану (конфліктом розв'язуються накопичені негативні настрої, відбувається очищення моральних орієнтацій);
- інноваційна (конфлікт стимулює зміни, через нього визнається існування проблем).

Визнання позитивних функцій трудового конфлікту аж ніяк не означає, що конфлікт необхідно спеціально створювати. За наявності конфлікту треба правильно сприймати його з погляду можливих позитивних результатів; не придушувати, а розв'язувати його з корисним ефектом; аналізувати, навчатися через конфлікт: регулювати, спрямовуючи його до позитивного результату.

Теорія трудового конфлікту розробляється і деталізується за трьома напрямами:

1) конфлікти між робітниками і трудовими групами;

2) конфлікти між персоналом та адміністрацією;

3) конфлікти між організацією загалом і зовнішньоекономічним середовищем (конкуренти, контрагенти, зміни у законодавстві тощо).

Однією з характерних рис соціально-економічного розвитку є множинність, багатогранність інтересів і наявність сторін, які виражають ці інтереси. Класичними прикладами є: 1) ситуації, коли, з одного боку — один покупець, з іншого — один продавець (ситуація монополія — монопсонія); 2) ситуації, коли на ринок виходять виробники, які володіють достатньою силою для впливу на ціну товару (ситуація олігополії, зокрема дуополії, якщо таких учасників двоє).

Конфлікт може виникнути також через розбіжності цілей, які відображають не лише суперечні інтереси різних сторін, але й різнобічні інтереси (цілі) однієї й тієї ж особи. Наприклад, розробник економічної політики передбачає різноманітні цілі, намагаючись узгодити суперечливі вимоги, що диктуються ситуацією (збільшення обсягів виробництва, підвищення доходів, зниження собівартості та екологічного навантаження тощо).

В економіці постійним стимулом генерування нової інформації є конкуренція, котра автоматично відкриває шлях науково-технічним винаходам, технічному прогресу, і навпаки, науково-технічний прогрес — його динамізм стимулює конкуренцію.

Конкуренти, у вузькому розумінні, — це фірми, котрі змагаються за споживача товарів чи послуг іншої (певної) фірми.

Кожне підприємство (компанія, фірма) стикається із безліччю різноманітних конкурентів. Щодо предмета конкуренції (задоволення потреб) розрізняють: бажання-конкуренти, тобто бажання, котрі споживач можливо захоче задовольнити; товарно-родові конкуренти, тобто інші (ніж пропонує певна фірма) основні способи задоволення якогось бажання; товарно-видові конкуренти, тобто інші різновиди певного товару, здатні задовольнити бажання споживача; марки-конкуренти, тобто різні марки одного й того ж товару, здатні задовільнити бажання споживача.

Оскільки постійна конкурентна боротьба, пов'язана з постійними змінами, що відбуваються на ринку, не може не позначатися безпосередньо на характері управління підприємством (фірмою), то необхідно звернути увагу на таке:

- з'являється потреба у наявності якомога вичерпнішого і достовірнішого інформаційного матеріалу для аналізу та прийняття рішення;
- виникає необхідність проводити маркетингові дослідження ринку і зіставлення існуючої маркетингової стратегії менеджменту з потребами ринку;
- виникає потреба ширшого використання методів сценарного аналізу в разі планування функціонування підприємства (фірми) з

максимальним урахуванням при цьому всіх можливих видів невизначеності та конфліктності.

В останні десятиріччя усе більше уваги приділяється аналізу конкурентної позиції організації (фірми). Конкурентний аналіз складається з двох основних етапів:

- визначення головних конкурентних сил у галузі;
- формування основних варіантів конкурентних стратегій.

Визнаним лідером у розробленні теорії конкурентного аналізу є професор Гарвардської школи бізнесу М. Портер, автор основних моделей з визначення головних сил конкуренції і варіантів конкурентних стратегій. За М. Портером [87], для ринку рівень прибутку фірми визначається тим, наскільки ефективно компанія протидіє таким конкурентним силам:

- новим конкурентам, які проникають у галузь шляхом виготовлення товарів-аналогів;
- загрозі з боку товарів-замінників (субститів);
- компаніям-конкурентам, які вже закріпилися на галузевому ринку;
- впливу продавців (постачальників);
- впливу покупців (клієнтів).

У зв’язку із нарощуванням динамізму економічних і соціальних процесів, які відбуваються у суспільстві, швидкими змінами кон’юнктури на внутрішньому і зовнішньому ринках усе більше зростає роль стратегічного планування.

Стратегія підприємства (фірми) — це сукупність її головних цілей і основних способів щодо реалізації власної місії. Вона має ґрунтуватися на реальних можливостях розвитку фірми.

Головна відмінність стратегічного планування від довготермінового — це його *варіантність*, розроблення альтернативних версій розвитку майбутнього стану фірми. Отже, тут існує елемент невизначеності та зумовлений нею ризик.

Сутність стратегічного планування розкривають його основні процедури:

- стратегічне прогнозування;
- програмування (проекти стратегічних програм);
- проектування (проекти стратегічних планів) різних рівнів ієрархії національної економіки.

Із сутності та логіки стратегічного планування випливає, що центральне місце тут посідає процес формування цілей, які висуваються перед відповідними соціально-економічними системами у плановому періоді [105].

Під цілями у стратегічному плануванні розуміють бажані стани чи результати функціонування відповідного об'єкта планування на певний момент у майбутньому.

Цілі можуть виявитися недосяжними у межах планового періоду, але наближення до них упродовж цього періоду має бути можливим. Завдання, в принципі, мають бути здійсненими впродовж планованого періоду, хоча не завжди можна вимагати їх повного виконання. Можливі відхилення від цілей і завдань у несприятливий бік характеризують відповідний ступінь ризику.

На стадії формування цілей і завдань суб'єктові стратегічного планування необхідно:

- визначити цілі планової системи і перекласти їх мовою завдань;
- передбачити чітке формування усіх завдань і розробити критерії оцінки щодо виконання кожного з них;
- опрацювати інструментарій для подолання можливих суперечностей, конфліктів між завданнями, тобто розв'язати низку проблем, визначитися відносно того, як необхідно діяти, коли виконання одного завдання суперечить вирішенню іншого, що зумовлює відповідний ступінь ризику.

Існує ціла низка способів класифікації (класифікаційних ознак) цілей організації [2].

Цілі організації поділяються на економічні та неекономічні. До неекономічних можна віднести соціальні цілі (наприклад, поліпшення умов праці).

Економічні цілі організації, виражені у показниках господарської діяльності, можна, в свою чергу, поділити на кількісні та якісні.

Приклад кількісної цілі: збільшення частки ринку фірми до 10 % у 2003 р. Приклад вербальної (якісної) цілі: досягнення фірмою технологічних переваг у галузі.

Діяльність економічної організації об'єктивно є дуже різноманітною, тому, як стверджують більшість фахівців з менеджменту, організація не повинна зосереджуватися лише на єдиній цілі, а має визначити кілька найбільш суттєвих орієнтирів. А як відомо, між різними цілями існує певна суперечність, конфліктність і зумовлений цим ризик.

Сьогодні загальновизнано, що бізнес має позитивно впливати на суспільне буття не лише у вузькому сенсі — збільшення можливостей для матеріального зростання, але й у більш широкому, згідно із загальноприйнятими суспільними цінностями, забезпечуючи суспільство якісними товарами і послугами, формуючи сприятливе екологічне середовище, беручи участь у вирішенні гострих соціальних проблем тощо.

Коли цілі визначено, їх необхідно дослідити щодо якості. Головні критерії тут такі:

- максимально можлива конкретність цілей;
- гнучкість цілей і наявність простору для їх коригування у зв'язку із непередбачуваними змінами;
- вимірність цілей;
- зіставлюваність (порівняльність). Зіставлюваними мають бути: а) цілі різних ключових просторів; б) внутрішньофірмова ієрархія цілей: кожна з цілей має відповідати цілі більш високого рівня ієрархії.

За стратегічного планування потрібно враховувати вплив системи цінностей, ідеології, якої дотримується суб'єкт (управлінська команда). Саме вони можуть мати вирішальний вплив на вибір цілей.

Отже, системному аналітику слід вивчати ієрархію цінностей осіб, які приймають рішення, а також інших зацікавлених сторін. У соціотехнічних системах, зокрема соціально-економічних, поширеними є такі системи цінностей, як технократична та гуманістична, які певною мірою суперечать одна одній [86].

Треба також мати на увазі, що конкретні системи цінностей досить часто є змішаними й суперечливими, а ціль, відповідно, рідко буває однією. Отже, важливо не втратити істотних цілей.

Наголосимо, що з часом цілі можуть змінюватися не лише за формою — завдяки кращому розумінню проблем, але й за змістом — внаслідок зміни умов або інших чинників. У цих випадках теж виникає невизначеність, конфліктність і відповідний ризик відхилення від реальних цілей.

Критерії є кількісними моделями цілей, бо цілі в більшості випадків формуються на якісному, вербальному рівні, й мають якнайточніше відтворювати цілі. Критерії не можуть збігатися з цілями, хоча б через те, що вони фіксуються за різними шкалами виміру: цілі — за номінальними, де немає порівняльності елементів, а критерії — за впорядкованими шкалами.

Критерії відображають системи цінностей. Різні системи цінностей важко порівнювати — вони невпорядковані, не можуть бути зведені одна до одної; це відбивається у багатокритеріальності реальних задач, пов'язаних зі складними системами, якими є економічні об'єкти.

Багатокритеріальність реальних задач пов'язана не лише з наявністю багатьох цілей та цінностей, але й з тим, що не завжди одну ціль можна виразити одним критерієм, хоч цього й прагнуть.

У разі адекватного опису цілей важлива не кількість використовуваних критеріїв, а наскільки повно (адекватно) вони характеризують ціль. При формуванні критеріїв прагнуть компромісу між повнотою (точністю) опису цілей і кількістю критеріїв. Наголосимо, що багатокритеріальність призводить до певних суперечностей між окремими критеріями і до зумовлених цим конфлікту та ризику.

Отже, серед ситуацій суперечностей, конфлікту в господарській діяльності можуть бути, зокрема, негаразди по горизонталі чи вертикалі управління, суперечності і конфлікти в трудових колективах, брак належної мотивації до праці, неефективне використання наявних ресурсів, труднощі адаптації до зовнішнього соціально-економічного середовища, напружені стосунки з іншими організаціями, установами, інституціями, а також множинність цілей, багатокритеріальність тощо.

1.1.3. Альтернативність

Варіанти дій (стратегій, проектів) заведено називати *альтернативами*. Альтернативи — невід'ємна складова проблеми прийняття рішень в умовах невизначеності, конфліктності: якщо немає з чого обирати, то немає ні вибору, ні невизначеності. Звідси маємо, що для постановки задач прийняття рішень в умовах невизначеності необхідно мати хоча б кілька альтернативних варіантів дій. Американський менеджер Лі Яккока згадує [116], як його шеф у "Форд моторс компані" — Роберт Макнамара наголошував, що "...ніколи не приймає серйозного рішення, не маючи за душею, принаймні, двох його варіантів".

Альтернативи бувають незалежними і залежними. Незалежними є ті альтернативи, будь-які дії з якими (вилучення з розряду, виділення в якості кращої) не впливають на якість інших альтернатив. Якщо альтернативи залежні, то оцінка одних з їх множини впливає на якість інших. Виділяються різні типи залежності альтернатив. Найбільш простою та очевидною є безпосередня групова залежність: якщо вирішено розглядати хоча б одну альтернативу з групи, то необхідно розглядати й усю групу. Так, зокрема, при плануванні розвитку міста рішення щодо збереження історичного центру тягне за собою необхідність розгляду всіх варіантів його реалізації.

Задачі прийняття рішень суттєво різняться й залежно від наявності альтернатив (стратегій) на момент прийняття рішень. Нерідко зустрічаються задачі, коли необхідні альтернативи вже задано, визначено, необхідно лише з цієї множини вибирати у певному сенсі кращі. Наприклад, ми прагнемо відшукати найбільш ефективну фірму з наявних фірм певного профілю, кращий варіант щодо заміни обладнання з множини наявних варіантів, кращий портфель цінних паперів із заданої множини паперів тощо. Особливістю цих задач є замкнута й така, що не розростається, множина альтернатив. Власне цим задачам й буде присвячено основний матеріал, наведений далі. Але існує множина задач іншого типу, де низка альтернатив з'являється лише після прийняття основних рішень. Наприклад, необхідно опрацювати правила відкриття кредитів у банку для організацій і приватних осіб. У цьому випадку альтернативи (конкретні організації чи приватні особи) принципово з'являються лише після того, як будуть опрацьовані та оприлюднені правила.

Так, при опрацюванні конкурентної стратегії М. Портер [87] виокремлює такі три основні стратегії (правила), які мають універсальний характер і можуть застосовуватися щодо низки конкурентних сил.

Це — перевага (лідерство) у витратах, диференціація та фокусування.

Перевага (лідерство) у витратах створює свободу вибору щодо цінової політики, а також при визначенні рівня дохідності. Стратегія зниження витрат широко використовувалася на ранніх стадіях розвитку ринку — в кінці XIX — на початку XX ст. Нині вона набула популярності у зв'язку з тим, що розвиток ринкової економіки вступив у так звану ланку дефляції, що означає загальне зниження цін…

Диференціація означає створення фірмою продукту чи послуги з універсальними властивостями, котрі найчастіше бувають закріпленими товарною маркою. Інколи універсальність товару лише декларується, тоді можна казати про уявну диференціацію. Ця стратегія набула поширення у країнах з розвиненою економікою у другій половині XX ст. у зв'язку із насиченням та індивідуалізацією споживчого попиту.

Фокусування — це зосередження уваги на одному із сегментів ринку, на певній групі покупців (наприклад, лише на покупцях похилого віку, чи лише на покупцях, матеріально добре забезпечених, чи на добре забезпечених покупцях похилого віку, чи на певній групі товарів, чи на географічно обмеженому секторі ринку тощо).

Поряд з перевагами у конкурентній позиції, загальні стратегії обтяжені певним ризиком.

Останнім часом усе важливішим стає розроблення стратегії інформатизації, яка забезпечує впровадження нових ефективних способів управління, таких як реінжиніринг [101]. Окремим аспектом стратегії інформатизації можна вважати стратегію безпеки підприємництва з урахуванням її зовнішніх і внутрішніх аспектів. Щодо сучасного українського господарювання — актуальним є розроблення стратегії виживання.

Основні цілі стратегії виживання:

- пристосування (адаптація) до ринкових умов;
- уникнення неефективних методів господарювання, що вичерпали себе;
- забезпечення стабільності господарської діяльності;
- збереження ресурсного потенціалу, особливо колективу висококваліфікованих фахівців та управлінців.

Коли альтернатив багато (сотні чи тисячі), тоді увага особи, що приймає рішення, не може зосередитися на кожній з них. За таких ситуацій зростає потреба у чітких формалізованих правилах та алгоритмах здійснення вибору, у процедурах використання експертної інформації, в опрацюванні комплексу правил, які дають змогу втілювати в життя несуперечливу й послідовну політику.

Зазначимо, що в опрацюванні таких правил та алгоритмів існує потреба й тоді, коли кількість альтернатив невелика (до 20). Наприклад, у виборі траси газопроводу, виборі плану розвитку міста тощо. Основних альтернатив, з аналізу яких починається вибір, порівняно небагато. Але вони не єдино можливі. Часто на їх базі у процесі вибору виникають нові альтернативи. Первісні, основні, альтернативи не завжди задовольняють учасників процесу вибору, але допомагають краще зрозуміти, чого, власне, не вистачає. Цей клас задач називають задачами з конструйованими альтернативами.

Серед теорій вибору рішення, використовуваних у системному аналізі, є такі, котрі виходять з того, що множину альтернатив уже задано, тобто вже є з чого обирати, і справа полягає лише в тому, як вибирати. Коли до цієї множини не ввійшла дійсно найкраща альтернатива, то за жодним з методів вибору її не відшукати.

Генерування альтернатив, тобто ідей про можливі способи досягнення мети, — процес творчий.

Серед методів генерування альтернатив найпоширенішими є, зокрема, такі: інтелектуальний штурм, синектика, ділові ігри, розроблення сценаріїв і морфологічний аналіз [86].

Інтелектуальний штурм — метод, розрахований на отримання великої кількості різноманітних пропозицій. Для проведення сеансу інтелектуального штурму спеціально комплектують групу з шести-семи осіб.

Сеанс здійснюється в два етапи: на першому заохочується висування будь-яких, навіть, на перший погляд, безглуздих пропозицій. На другому етапі експерти уважно вивчають висунуті ідеї та оцінюють їх за допомогою спеціальних критеріїв. Частину висловлених пропозицій відхиляють, а ідеї, що відповідають усім критеріям, передають для подальшого опрацювання.

Синектика є методом генерування альтернатив шляхом асоціативного мислення, пошуку аналогій, здогадок за асоціацією. Для цього формується група з п'яти—семи осіб, які змінювали свою професію та фах, є психологічно сумісними та активними. Група цілеспрямовано, систематично обговорює проблему, спираючись на будь-які аналогії. Використовуються всі види подібності (безпосередня, опосереднена та умовна), можливі й фантастичні аналогії. Синектика орієнтована на створення невеликої кількості альтернатив, що розв'язують проблему.

Ділові ігри — це своєрідне імітаційне моделювання ситуацій, де учасники гри поводяться так, наче вони дійсно виконують певну роль в управлінні системою, при цьому реальність заміняється деякою моделлю (наприклад, адміністративні ігри). Такі ігри найчастіше використовуються для навчання, все частіше — для експериментального пошуку альтернатив, особливо у слабоформалізованих або ж у неформалізованих ситуаціях. Важливу роль у ділових іграх відіграють контрольно-арбітражні групи, які керують формуванням імітаційної моделі, реєструють перебіг гри та узагальнюють отримані результати.

Розроблення сценаріїв (сценарний аналіз) — це метод створення альтернатив шляхом конструювання правдоподібних послідовностей дій та подій, які можуть відбуватися з досліджуваною системою [113]. Сценарій є прогнозованим станом майбутнього стану досліджуваної системи (її моделлю) після прийняття відповідного рішення.

Основні евристичні рекомендації при створенні сценаріїв такі: 1) корисно розробляти "сприятливий" та "несприятливий" сценарії, між якими можуть бути сценарії, що моделюють майбутнє, для врахування невизначеності та конфліктності; 2) корисно вводити до сценарію активно протидіючий елемент для урахування “песимістичної ситуації”; 3) не варто заглиблюватися у деталі сценарію, надмірно чутливі до невеликих варіацій на початкових стадіях.

Морфологічний аналіз — це метод генерування альтернатив за допомогою всіх можливих комбінацій та сполучень значень ключових параметрів [68].

Останнім часом усе ширше використовується суперпозиція зазначених вище способів генерування альтернатив.

1.1.4. Психологічна теорія рішень

Психологічна теорія рішень — це система мотиваційних тверджень, що розкривають внутрішню сутність діяльності людей у процесі підготовки і прийняття рішень [119]. Досвід показує, що структура задачі великою мірою визначає поведінку особи, котра її розв’язує. Питання, з котрими доводиться стикатися керівнику, різноманітні, але в них можна виділити низку спільних рис, що дає змогу описувати їх структуру.

Психологічна теорія рішень поряд зі структурою задач ураховує риси особистості, котрі відіграють важливу роль у процесі прийняття рішення. Важливо також ураховувати, що дії осіб, які приймають рішення, завжди спрямовані на досягнення певних цілей. У процесі підготовки і прийняття рішення суттєву роль відіграють і пізнавальні якості, такі як короткотермінова й довготермінова пам’ять, швидкість обробки інформації тощо.

З основних класів тверджень психологічної теорії рішень можна виділити такі:

1) твердження стосовно того, як у людей виникає уявлення щодо ситуації прийняття рішень. Таке уявлення є суб’єктивною, вербальною моделлю цієї ситуації. Психологи стверджують, що часто особа, яка приймає рішення, спрощує ситуацію, забуваючи або ігноруючи деякі альтернативи чи наслідки їх;

2) твердження, що описують процес оцінювання суб’єктивності цінності того чи іншого варіанта дій, котру називають корисністю. Це важливий клас тверджень, оскільки корисність наслідків альтернатив великою мірою визначає характер рішення, що приймається;

3) твердження стосовно суб’єктивної оцінки ймовірності обставин (сценаріїв), що визначають наслідки прийнятого рішення. Наприклад, психологи виявили, що люди переоцінюють імовір-

ність настання малоймовірних подій та одночасно недооцінюють імовірність настання дуже правдоподібних подій;

4) твердження стосовно стратегій обрання поведінки. Вони описують те, як особи, котрі приймають рішення, інтерпретують інформацію щодо корисності наслідків та їх імовірностей та які правила вибору альтернатив при цьому використовують. Психологи виявили, що у простих задачах, обтяжених ризиком, люди, як правило, обирають стратегії, які максимізують суб'єктивну сподівану корисність, котру вони оцінюють як лінійну комбінацію суб'єктивних наслідків та їх корисностей;

5) твердження, що описують чинники, які управляють процесом прийняття рішень. До цих чинників належать: вплив оточуючого середовища; особистісні характеристики людини, яка приймає рішення; вплив соціальної групи тощо. Наприклад, чим сильнішими є агресивність суб'єкта і потреба у домінуванні, тим вищий ступінь ризику він допускає. Рішення, що приймаються колективно, обтяжені вищим ступенем ризику, ніж індивідуальні тощо.

У психологічних дослідженнях процесів прийняття рішень використовуються такі основні методи:

1. Лабораторний експеримент. Якщо в економіці цей метод розглядається як допоміжний і такий, що має суттєві обмеження, то в психології він є домінуючим.

2. Формалізація. Сутність її у тому, що на першому етапі формується сукупність аксіом стосовно певних об'єктів, наприклад ризику чи привабливості. На другому етапі за допомогою формальних міркувань виводяться нові твердження, які є наслідком прийнятих аксіом. На третьому етапі виконується експериментальна перевірка висунутих гіпотез.

3. Моделювання діяльності з прийняття рішень, зокрема імітаційне моделювання. Результати моделювання зіставляються з діями людини за аналогічних обставин.

Найважливішими функціями психологічної теорії рішень є прогнозування поведінки людини і пояснення процесів, які зумовлюють саме таку поведінку.

Якщо б особи, котрі приймають рішення, діяли точно у відповідності до принципів раціонального вибору, якщо б їх пріоритети були завжди транзитивними, якщо б вони не приймали інколи помилкових рішень, то в рекомендаціях психологічної теорії рішень не було б потреби. Оскільки ж таке не відбувається, то психологічна теорія рішень слугує за суттєве доповнення і розширення теорії оптимальних рішень.

1.1.5. Ризик як методологія подолання невизначеності та конфлікту

Визнання невизначеності як об'єктивної характеристики розвитку економічних систем, а також об'єктивне існування конфліктності, розуміння того, що на заплановане економічне зростання впливають випадкові чинники, котрі можуть, зокрема, затримати сподіваний результат чи змінити його сутність, — важлива проблема щодо аналізу, моделювання та управління економічним ризиком.

Існують не лише різні погляди щодо розуміння змісту поняття "ризик", а й різні підходи щодо оцінок об'єктивного і суб'єктивного характеру його. Ряд авторів виходять з того, що ризик — це категорія об'єктивна, котра дає змогу регулювати стосунки між людьми, трудовими колективами, організаціями та різними інституціями у соціально-економічному бутті. Прихильники об'єктивної концепції вважають, що ризик — це завжди загроза появи неприємних наслідків, щодо яких невідомо, настануть вони чи ні. Досить широко висвітлено у науковій літературі й суб'єктивну концепцію. Найсуттєвіший внесок в розвиток її вніс В. А. Ойгензіт, який виходив з того, що ризик завжди суб'єктивний, оскільки виступає як оцінка людиною вчинку, дій, як свідомий вибір з урахуванням можливих альтернатив [6]. Суб'єктивна концепція зорієнтована на суб'єкт дій, враховує можливі наслідки, вибір варіантів поведінки, що тягне за собою накладення відповідних обов'язків чи уникнення їх. Оскільки, з позицій цієї концепції, ризик завжди пов'язаний з волею та усвідомленням його людиною, то він є, насамперед, вибором варіантів поведінки з урахуванням загрози щодо можливих несприятливих наслідків. Існує й погляд, згідно з яким ризик є суб'єктивно-об'єктивною категорією [109].

На нашу думку, можна дати визначення економічного ризику, ґрунтуючись на принципах системного аналізу.

Ризик — це економічна категорія в діяльності суб'єктів господарювання, пов'язана з подоланням невизначеності, конфліктності в ситуаціях оцінювання, управління, неминучого вибору. Він має діалектичну об'єктивно-суб'єктивну структуру. Оцінка ризику є багатовимірною величиною, що характеризує можливі відхилення від цілей, від бажаного (очікуваного) результату, можливу невдачу (збитки) з урахуванням впливу контрольованих (керованих) і неконтрольованих (некерованих) чинників, прямих і зворотних зв'язків.

Об'єктивність ризику проявляється в тому, що ця економічна категорія відображає реально існуючу невизначеність і конфліктність в економічній (господарській) діяльності. Сучасна інтерпретація ризику — це не лише збитки, яких можна зазнати під час реалізації господарського рішення, а й можливість відхилення від цілей, заради яких приймалося рішення. Тобто сучасний ризик визначається не стільки збитками, скільки відсутністю сподіваних позитивних результатів [118]. Ризик породжується невизначеністю і конфліктністю, які існують незалежно від того, чи усвідомлюємо ми їх чи ні,ураховують його особи, які приймають рішення, чи ні. Усуньте невизначеність і конфліктність із ситуацій, що виникають під час обрання того чи іншого рішення в господарській діяльності, і ви не зможете стверджувати про наявність ризику у цих ситуаціях.

В економіці та бізнесі у ряді випадків, з огляду на обрані цілі, доводиться приймати рішення на підставі побудови системи гіпотез. Це правомірно, зокрема, через відсутність вичерпної, достовірної інформації, оскільки дає змогу долати таким чином невизначеність. А це переводить ситуацію невизначеності у ситуацію ризику, зокрема ризику відхилення від цілей, ризику недоотримання очікуваних результатів, ризику ймовірних збитків, які можуть виникнути через недостатню обґрунтованість тих чи інших гіпотез. Щоб урахувати ступінь ризику і бодай частково уникнути можливих збитків, необхідно, якщо є така можливість, перевірити істинність гіпотез, висунути альтернативні варіанти тощо.

Ми вважаємо, що життя кожної людини — це ситуація постійного вибору, зокрема, вибір тих чи інших гіпотез та ієрархії цінностей.

Ступінь ризику залежить і від ставлення до невизначеності й конфлікту, до зумовленого ними ризику суб'єкта прийняття рішення: схильності, несхильності, байдужості. Тому всі чинники невизначеності, конфліктності та зумовленого ними ризику поділяються на об'єктивні та суб'єктивні.

Отже, ризик виникає тоді, коли приймаються рішення в умовах невизначеності, конфліктності, а особа, яка приймає рішення, зацікавлена в результатах рішення. Ризик являє собою діалектичну єдність об'єктивного та суб'єктивного. Він пов'язаний із творчістю, з пошуком нових підходів і методів діяльності. Важливими є такі характеристики ризику, як суперечливість, альтернативність, правомірність, невизначеність.

Розглядаючи суперечливість ризику, необхідно наголосити на її прояві в різних аспектах. Ризик, з одного боку, зорієнтований на отримання позитивних для системи прийняття рішень результатів ефективними способами в умовах невизначеності й конфліктності в ситуації неминучого вибору. Ця характеристика ризику має важливі економічні та соціальні наслідки. З іншого боку, управлінський ризик (оцінювання, управління, неминучого вибору) може призвести до несприятливих соціально-економічних наслідків, бо оцінка чи вибір альтернативи базується на неповній, нечіткій, недостовірній на момент прийняття рішення інформації.

Альтернативність — це властивість економічного ризику, що допускає як обов'язкову умову необхідність оцінювання, управління чи вибору з кількох найбільш вірогідних стратегій (альтернатив, варіантів, управлінських дій). При цьому залежно від ситуації альтернативність має різний ступінь складності й може долатися в різні способи.

Важливою складовою ризику в економіці та підприємництві є його правомірність, оскільки ризик іманентно притаманний економічній та підприємницькій діяльності, але при цьому необхідно, щоб урахувався та виконувався певний механізм, який регулює правовий аспект прояву ризику. Критеріями обґрунтованості тут виступають законодавство, юридичне право і, на наш погляд, передусім морально-етичні норми. Ці критерії тягнуть за собою встановлення відповідних функцій, повноважень, відповідальності, компетенції, а також створення відповідної системи якісних і кількісних показників оцінювання.

Об'єктивно економічна діяльність і підприємництво не можливі без певного ризику, котрим вони обтяжені. Навіть абсолютна бездіяльність в економіці та бізнесі обтяжена ризиком невикористаних можливостей, закопаних талантів.

1.2. ТЕОРЕТИКО-ІГРОВА МОДЕЛЬ

Правила прийняття рішень в умовах невизначеності, конфліктності та зумовленого ними ризику базуються на різних концепціях. Найбільш відомою, достатньо дослідженою й широко використовуваною в теорії та на практиці є концепція теорії гри та статистичних рішень.

Теорія гри — це розділ сучасної математики, в якому вивчаються математичні моделі прийняття рішень в умовах невизначеності, конфліктності, тобто в ситуаціях, коли інтереси сторін (гравців) або протилежні (у випадку антагоністичних ігор), або не збігаються, хоча й не протилежні (у випадку ігор з непротилежними інтересами). Засновниками теорії гри є американські вчені Джон (Януш) фон Нейман (1903—1957), угорського походження, та Оскар Моргенштерн (1902—1977), австрійського походження. У другій половині 40-х років XX ст. вони спробували за допомогою математики описати характерні для ринкової економіки явища конкуренції як деяку "гру".

Гра — це формалізований опис (модель) конфліктної ситуації, що включає чітко визначені правила дій її учасників, які намагаються отримати певну перемогу шляхом вибору конкретної (в певному сенсі — найкращої) стратегії поведінки. Суб'єкт прийняття рішення (СПР) називається *гравцем*, а цільова функція — *платіжною функцією*. У грі можуть брати участь кілька гравців, причому деякі з них можуть вступати між собою в постійні або тимчасові коаліції (спілки). У випадку утворення коаліцій гра носить назву "коаліційної". Гра двох осіб називається парною грою.

Кожен гравець приймає такі рішення, тобто вибирає таку стратегію поведінки, щоб максимізувати свій виграш або мінімізувати програш. При цьому він не знає, яких стратегій дотримуватимуться інші гравці. Отже, кожен гравець приймає свої рішення в умовах невизначеності, а результат обраної ним стратегії залежить від поводження всіх учасників гри.

Питанням оптимальності щодо функціонування і розвитку економічних систем в умовах невизначеності, конфлікту та породженого ними ризику посвячена велика кількість наукових праць [3, 4, 12, 16, 20—29, 31, 33—40, 43, 45, 47, 59, 64, 72, 84, 93, 96—100, 104, 107, 108, 115, 117]. Це викликано різноманітністю прояву чинників невизначеності та конфлікту в реальних процесах та явищах.

Для дослідження статистичних моделей в умовах невизначеності, конфліктності та породженого ними ризику використовують схему гри з економічним середовищем, складовими якої є:

1) *перший гравець* — суб'єкт керування (СПР), вибір стратегії поведінки якого базується на множині $S = (s_1; ...; s_m)$ рішень (чистих стратегій), одне з яких йому необхідно прийняти;

2) *другий гравець* — економічне середовище, яке може знаходитися в одному з n попарно несумісних станів θ_j, які утворюють множину $\Theta = (\theta_j; \ldots; \theta_n)$, й один з яких обов'язково настане;

3) відсутність у СПР апріорної інформації про те, в якому зі своїх станів знаходитиметься економічне середовище (яке рішення прийме другий гравець);

4) точне знання СПР функціонала оцінювання (матриці) $F = \left(f_{kj}: \quad k = 1,..., m; \quad j = 1,..., n \right)$, елемент f_{kj} якого є кількісною оцінкою ефективності результату діяльності СПР у випадку вибору ним стратегії s_k за реалізації стану економічного середовища $\theta_j \; (k = 1,..., m; \;\; j = 1,..., n)$.

Запропонована схема моделювання процесу прийняття раціонального рішення допускає таку інтерпретацію: другий гравець парної гри замінюється випадковим вибором або неусвідомлено приймаючим свої рішення економічним середовищем, а сама ситуація прийняття рішення характеризується функціоналом оцінювання F, який називають також (статистичною) *матрицею гри*, або *платіжною матрицею*.

Формально ситуація прийняття рішення згідно з теоретико-ігровою концепцією описується трійкою множин: $\{S; \;\; \Theta; \;\; F\}$.

Цікавою, з практичної точки зору, є змішана ігрова модель, коли множина стратегій суб’єкта керування S є дискретною і може набувати скінченної кількості варіантів, а множина станів економічного середовища Θ — неперервною. В цьому випадку ситуація прийняття рішень характеризується сукупністю функцій:

$$F = (f(s_k; \theta) = f_k(\theta) : \theta \in \Theta; \;\; s_k \in S; \;\; k = 1,..., m) = (f_1(\theta); ...; \; f_m(\theta)).$$

Доречно виділити *творчу* та *формальну* складові щодо побудови теоретико-ігрової моделі. Основні етапи творчої складової такі:

- формування множин рішень першого та другого гравців, тобто перелік чистих стратегій СПР і станів економічного середовища (“природи”);
- визначення та формалізація основних показників ефективності та корисності, побудова платіжної матриці F;
- визначення (ідентифікація) наявної інформаційної ситуації, яка характеризує поведінку економічного середовища;
- вибір критерію прийняття рішення з множини критеріїв, характерних для ідентифікованої інформаційної ситуації;
- прийняття згідно з вибраним критерієм рішення із сукупності чистих або змішаних стратегій, якщо використання останніх можливе.

Окрім творчої складової, процес прийняття рішення в умовах невизначеності, конфліктності та зумовленого ними ризику вимагає досконалого володіння формальною складовою. Суть останньої полягає у використанні математичного апарату та виконанні розрахунків щодо показників ефективності, на основі яких будується функціонал оцінювання F, а також розрахунків щодо пошуку оптимальної (раціональної) стратегії або множини оптимальних (раціональних) стратегій згідно з вибраним критерієм оптимальності.

1.3. КЛАСИФІКАЦІЯ ІНФОРМАЦІЙНИХ СИТУАЦІЙ

Під *інформаційною ситуацією* (ІС) розуміють певний ступінь градації невизначеності щодо перебування економічного середовища в одному зі своїх можливих станів у момент прийняття суб'єктом керування (гравцем) рішення.

Класифікатор інформаційних ситуацій, що характеризують поведінку економічного середовища під час "вибору" свого стану в процесі прийняття рішення (він може бути деталізованим і розширеним), можна побудувати таким чином:

I_1 — перша ІС — характеризується (згідно з висунутими гіпотезами) заданим апріорним розподілом імовірності щодо станів економічного середовища, тобто вважається, що відомі компоненти вектора $Q=(q_1;...;q_n)$, де q_j — ймовірність реалізації j-го стану $(j=1,...,n)$. З точки зору теорії ймовірності тут мають виконуватися такі умови:

$$\sum_{j=1}^{n} q_i = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e} = 1; \tag{1.1}$$

$$q_j \geq 0\,,\ \ j=1,...,n, \tag{1.2}$$

де: вектор $e=(e_1;...;e_n)$, $e_i=\ldots=e_n=1$, а символ $\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e}$ — скалярний добуток векторів $\boldsymbol{Q}$ та $\boldsymbol{e}$, що, згідно з визначенням, є сумою добутків відповідних компонент цих векторів:

$$\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e} = \sum_{j=1}^{n}\left(q_j e_j\right) = q_1e_1 + q_2e_2 + ... + q_ne_n;$$

I_2 — друга ІС — характеризується заданим розподілом апріорних імовірностей різних станів економічного середовища, з точністю до невідомих параметрів, які характеризують цей закон розподілу, тобто значення ймовірностей q_j сценаріїв однозначно визначаються відповідними параметрами і при цьому виконуються співвідношення (1.1) і (1.2);

I_3 — третя ІС — характеризується деякою сукупністю обмежень щодо ймовірностей q_j $(j = 1,...,n)$ станів економічного середовища (у тому числі співвідношеннями (1.1) і (1.2));

I_4 — четверта ІС — характеризується, з одного боку, невідомим розподілом апріорних імовірностей різних станів економічного середовища за умови, що невідомі ймовірності q_j $(j = 1,...,n)$ сценаріїв задовольняють співвідношення (1.1) і (1.2), а з іншого — відсутністю активної протидії економічного середовища цілям суб'єкта управління;

I_5 — п'ята ІС — характеризується абсолютно протилежними інтересами СПР та економічного середовища (або несхильністю суб'єкта прийняття рішень до ризику, прагненням уникнути ризику), тобто має місце конфлікт між ними. При цьому економічне середовище є активним і являє собою зловмисного противника гравця. У даному випадку статистична гра стає за своєю суттю парною матричною грою з нульовою сумою (грою двох учасників з антагоністичними інтересами);

I_6 — шоста ІС — характеризується як проміжна між I_1 та I_5 у разі вибору економічним середовищем своїх станів, коли, одночасно з наявністю деякої інформації щодо розподілу Q апріорних імовірностей q_j $(j = 1,...,n)$, економічне середовище не пасивне. При цьому існуючі протиріччя між інтересами СПР та економічним середовищем не обов'язково носять повністю антагоністичний характер;

I_7 — сьома ІС — характеризується нечіткою (розпливчастою) множиною станів економічного середовища.

Слід звернути увагу на те, що в дійсності множину всіх можливих станів економічного середовища практично неможливо побудувати, а тому рівність (1.1) необхідно було би замінити нерівністю

$$\sum_{j=1}^{n} q_i = Q \cdot e \leq 1.$$

Але наявність наведеної умови (нерівності) пов’язана з певним ускладненням використання апарату теорії ігор. Окрім того, більшість методів оцінювання ймовірностей q_j $(j = 1,..., n)$ забезпечують виконання рівності (1.1). А взагалі, це є темою окремих досліджень.

Вищеокреслені типи інформаційних ситуацій є глобальними характеристиками рівнів невизначеності та ступеня ризику щодо вибору економічним середовищем своїх станів. Зауважимо також, що кожній інформаційній ситуації відповідає свій набір критеріїв прийняття рішення.

Під *критерієм прийняття рішення* розуміють певний показник економічної ефективності та алгоритм, який дає змогу з множини рішень $S = (s_1;...;s_m)$, для фіксованого функціонала оцінювання *F*, у полі конкретної інформаційної ситуації вибрати єдине оптимальне рішення $s_{k_0} \in S$ (чи множину оптимальних рішень $S^* \subset S$, якщо їх декілька) відповідно до цього економічного показника.

У випадку існування множини $S^* \subset S$ елементи, що її складають, називаються *еквівалентними рішеннями згідно з вибраним критерієм оптимальності*. Пошук оптимальних рішень часто пов’язаний з використанням багатокритеріальних і багатоцільових методів і моделей.

1.4. ІНГРЕДІЄНТ ФУНКЦІОНАЛА ОЦІНЮВАННЯ. ФУНКЦІЯ РИЗИКУ

Вибір того чи іншого економічного показника (функціонала оцінювання) залежить від цілей і задач управління та планування. В низці праць [12, 20, 22, 32, 34, 36, 39, 40, 47, 59, 64, 104] детально характеризується категорія функціонала оцінювання. Однією з найважливіших характеристик функціонала оцінювання є його інгредієнт.

Уважається, що економічний показник (чи його характеристика) має *позитивний інгредієнт*, якщо під час прийняття рішення суб’єкт керування орієнтується на його максимальне значення. Формально факт прийняття рішення на основі аналізу функціонала оцінювання *F*, що має позитивний інгредієнт, відображає рівність: $F = F^+$.

Якщо під час прийняття рішення суб'єкт керування орієнтується на мінімальне значення економічного показника, то вважається, що цей показник має *негативний інгредієнт*. У такому разі щодо функціонала оцінювання пишуть, що $F = F^{-}$.

Визначення функціонала оцінювання (платіжної матриці) у формі $F = F^{+}$, як правило, використовують для оптимізації таких категорій, як виграш, корисність, ефективність, прибуток, надійність, імовірність удачі (ймовірність досягнення поставленої цілі) тощо. У формі $F = F^{-}$ платіжна матриця використовується для оптимізації таких категорій: програш, витрати, збитки, ризик, імовірність невдачі тощо.

Функція ризику визначається як лінійне перетворення елементів функціонала оцінювання $F = \left(f_{kj}\colon\ k = 1, \ldots, m;\ \ j = 1, \ldots, n \right)$ до відносних одиниць вимірювання. Елементи отриманої в результаті перетвореної матриці ризику $Z = \left\{ z_{kj}\colon\ k = 1, \ldots, m;\ \ j = 1, \ldots, n \right\}$ знаходять за однієї з двох формул:

1) якщо $F = F^{+}$, то

$$z_{kj}^{-} = f_{j}^{\max} - f_{kj}^{+}; \quad k = 1, ..., m; \quad j = 1, ..., n,$$

де $f_{j}^{\max} = \max\limits_{s_k \in S} f_{kj}^{+}$;

2) якщо $F = F^{-}$, то

$$z_{kj}^{-} = f_{kj}^{-} - f_{j}^{\min}; \qquad k = 1, ..., m; \quad j = 1, ..., n,$$

де $f_{j}^{\min} = \min\limits_{s_k \in S} f_{kj}^{-}$.

Очевидно, що матриця ризику має негативний інгредієнт

$$Z = Z^{-} = \left(z_{kj}^{-}\colon\ k = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n \right).$$

Очевидно також, що величина елемента z_{kj}^{-} вказує на збитки (невикористані можливості), яких може зазнати СПР у випадку вибору ним стратегії s_k в умовах стану економічного середовища θ_j, порівняно з результатом, який отримав би СПР у разі вибору найвигіднішої для нього стратегії в умовах цього ж стану θ_j. Тобто матриця ризику показує, наскільки вигідно реалізуються вибраною чистою стратегією існуючі можливості досягнення успіху за наявності ризику. А тому матрицю ризику називають також *матрицею невикористаних можливостей*.

1.5. ЗВЕДЕННЯ ЕКОНОМІЧНИХ КОЛІЗІЙ ДО ІГРОВИХ ЗАДАЧ

Перші два етапи творчої складової процесу прийняття рішення (див. пункт 1.2) утворюють основу ігрової моделі. Відомо багато прикладів успішного застосування ігрової моделі як у сфері виробничої діяльності, так і на макроекономічному рівні. У прикладах, що наводитимуться далі, обмежимося постановкою та інтерпретацією розв'язків ігрових задач, залишаючи детальне дослідження їх і викладення методів пошуку оптимальних розв'язків на наступні розділи. Попередньо лише коротко оглянемо основні положення теорії ігор.

1.5.1. Скінченні ігри з нульовою сумою

Для простоти викладу вивчатимемо гру двох гравців з нульовою сумою. Як уже зазначалося, *гра* — це сукупність правил, що описують сутність конфліктної ситуації та встановлюють:

- вибір способу дій гравців на кожному етапі гри;
- обсяг необхідної інформації, якою володіє кожен гравець у момент вибору свого способу дії;
- плату кожного гравця після завершення будь-якого етапу гри.

Чистою стратегією гравця називається сукупність рекомендацій щодо ведення гри від початку до її завершення.

Гра називається *скінченною*, якщо в кожного гравця є скінченна кількість стратегій. У протилежному випадку гра є нескінченною.

Нехай гра є скінченною, тоді результати рішень гравців можна виразити в грошовому еквіваленті або з допомогою інших цінностей, які збирається вигравати (придбавати) кожен гравець. Тобто для кожної комбінації вибраних гравцями чистих стратегій існує відповідна величина платежу.

У випадку парної гри ці платежі зручно подавати у вигляді платіжної матриці. Розв'язання гри полягає в знаходженні чистих стратегій для кожного гравця, які б максимізували виграш переможця та одночасно мінімізували б програш переможеного.

Однією із задач теорії гри є виявлення можливості певної рівноваги, що називається компромісом, яка найбільшою мірою задовольняє всіх учасників. Досить досконалою, в плані пошуку компромісного рішення, слід визнати теорію гри двох осіб з нульовою сумою, тобто такої парної гри, в якій виграш першого гравця завжди збігається з величиною програшу другого. В таких іграх, аналізуючи платіжну матрицю виграшів першого гравця, іноді можна знайти оптимальні чисті стратегії обох гравців.

Нехай відома матриця платежів $F = \left(f_{kj}\colon k = 1,...,m;\ j = 1,...,n \right)$ парної гри з нульовою сумою, де елемент платіжної матриці f_{kj} — це виграш першого гравця, тобто сума, яку йому платить другий гравець (програш другого гравця) у випадку використання першим гравцем своєї чистої стратегії $s_k \in S$, а другим гравцем — своєї чистої стратегії $\theta_j \in \Theta$ $\left(k = 1,...,m;\ j = 1,...,n\right)$.

Розв'язати гру — це означає знайти оптимальну стратегію для кожного гравця. *Оптимальною стратегією гравця* називається така стратегія, яка за багаторазового повторення гри забезпечує гравцеві максимально можливий середній виграш (або мінімально можливий середній програш). Для знаходження цієї пари стратегій використовують "принцип мінімакса", сутністю якого є міркування, що супротивник зробить все для того, щоб перешкодити досягненню супротивником своєї цілі. Стратегію першого (другого) гравця називають оптимальною, якщо в разі її багаторазового застосування виграш (програш) першого (другого) гравця не зменшується (не збільшується), які б стратегії не застосовував супротивник.

Для першого гравця $F = F^+$, а тому платіжну матрицю виграшів він аналізує з позиції максимізації гарантованого виграшу, а саме: для кожної своєї чистої стратегії s_k $(k = 1,...,m)$ він визначає мінімальне значення виграшу

$$\alpha_k^+ = \min_{\theta_j \in \Theta} f_{kj}^+, \quad k = 1,...,m$$

і знаходить чисту стратегію s_{k_0}, для якої

$$\alpha_{k_0}^+ = \alpha^+ = \max_{s_k \in S} \alpha_k^+ = \max_{s_k \in S} \min_{\theta_j \in \Theta} f_{kj}^+.$$

Число α^+ називається *нижньою ціною гри*, або *максміном*, а відповідна чиста стратегія s_{k_0} першого гравця називається *максмінною*.

Другий гравець ставить за мету мінімізацію свого гарантованого програшу. Для нього $F = F^-$, а тому для кожної чистої стратегії θ_j він визначає величину максимального програшу

$$\beta_j^- = \max_{s_k \in S} f_{kj}^-, \quad j = 1,..., n,$$

а потім знаходить таку чисту стратегію θ_{j_0}, що

$$\beta^-_{j_0} = \beta^- = \min_{\theta_j \in \Theta} \beta^-_j = \min_{\theta_j \in \Theta} \max_{s_k \in S} f^-_{kj}.$$

Число β^- називається *верхньою ціною гри*, або *мінімаксом*, а відповідна чиста стратегія θ_{j_0} другого гравця — *мінімаксною*.

Часто найбільш "обережні" СПР називають максимінну та мінімаксну чисті стратегії загальним терміном "мінімаксні стратегії". Мінімаксні чисті стратегії s_{k_0} та θ_{j_0} є стійкими, тобто утворюють оптимальну пару стратегій, у тому випадку, коли нижня ціна гри дорівнює верхній. Тоді платіжна матриця F містить елемент $f_{k_0 j_0}$, що задовольняє умову:

$$f_{k_0 j_0} = \alpha^+ = \beta^-$$

(цей елемент є мінімальним у k_0-му рядку та максимальним у j_0-му стовпчику). Елемент $f_{k_0 j_0}$ називається *сідловою точкою матриці F*, величина

$$V^* = \alpha^+ = \beta^- = f_{k_0 j_0} \tag{1.3}$$

називається *чистою ціною гри*, а сама гра — *грою з сідловою точкою*.

Таким чином, якщо гра має сідлову точку, то чисті стратегії s_{k_0} та θ_{j_0} є оптимальними і тоді сукупність стратегії s_{k_0}, θ_{j_0} та ціна гри $V^* = \alpha^+ = \beta^-$ утворюють *розв'язок гри*. Розв'язок гри має таку властивість: якщо один з гравців дотримується своєї оптимальної стратегії, то відхилятися від своєї оптимальної стратегії не вигідно для другого гравця.

У загальному випадку значення ціни гри задовольняє умову:

$$\alpha^+ \le V \le \beta^-,$$

що має місце у випадках, коли гра не має сідлової точки, а мінімаксні чисті стратегії — не оптимальні. Це означає, що відшукання розв'язку гри у чистих стратегіях стає неможливим і кожна зі сторін може поліпшити свій стан шляхом багаторазового випадкового вибору певних своїх чистих стратегій з деяких під-множин (що належать множинам альтернативних чистих стратегій). Такі стратегії називаються *змішаними*.

Нехай $P=(p_1;...;p_m)$ — розподіл імовірності щодо вибору чистих стратегій першим гравцем у побудові своєї змішаної стратегії, яку надалі будемо позначати через s_P. Тут p_k — імовірність вибору першим гравцем чистої стратегії s_k, і при цьому $\sum_{k=1}^{m} p_k = 1;$ $p_k \geq 0,\ \ k=1,...,m.$ Аналогічно для другого гравця змішану стратегію позначимо через θ_Q, де $Q=(q_1;...;q_n)$, а q_j — імовірність вибору другим гравцем чистої стратегії θ_j за умови, що $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1;$ $q_j \geq 0,\ \ j=1,...,n.$

Серед змішаних стратегій першого та другого гравців відшукаємо оптимальні й позначимо їх через s_{P^*} та θ_{Q^*} відповідно. Тоді у загальному випадку оптимальним розв'язком гри буде сукупність $(s_{P^*};\theta_{Q^*})$.

Якщо перший гравець вибрав змішану стратегію s_P, $P=(p_1;...;\ p_m)$, а другий — змішану стратегію θ_Q, $Q=(q_1;...;\ q_n)$, то сподіваний виграш першого гравця (програш другого гравця) у ситуації багаторазового повторення гри становить величину

$$V=\sum_{k=1}^{m}\ \sum_{j=1}^{n} f_{kj}\,p_k q_j. \tag{1.4}$$

Методи пошуку оптимальних розв'язків гри базуються на таких положеннях:

1) кожна скінченна гра двох осіб з нульовою сумою має, принаймні, один (оптимальний) розв'язок, можливо у змішаних стратегіях;

2) якщо один з гравців застосовує свою оптимальну змішану стратегію, то його виграш дорівнює ціні гри незалежно від того, з якими ймовірностями (відносними частотами) другий гравець використовуватиме стратегії, що ввійшли в його оптимальну змішану стратегію.

Ці положення у вигляді теореми були сформульовані Дж. фон Нейманом та О. Моргенштерном. Ними доведено [72] так звану основну теорему теорії гри (теорема про мінімакс). Згідно з цією теоремою

$$\min_{P\in\Delta_P}\max_{Q\in\Delta_Q}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(p_k q_j f_{kj}\right)=V^*, \qquad (1.5)$$

де:

$$\Delta_P=\left\{P=(p_1;...;\ p_m):\quad \sum_{k=1}^{m}p_k=1;\quad p_k\ge 0,\quad k=1,...,m\right\}; \qquad (1.6)$$

$$\Delta_Q=\left\{Q=\left(q_1;...;\ q_n\right):\ \sum_{j=1}^{m}q_j=1;\quad q_j\ge 0,\quad j=1,...,\ n\right\}; \qquad (1.7)$$

$$V^*=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(p_k^* q_j^* f_{kj}\right); \qquad (1.8)$$

$$\sum_{k=1}^{m}p_k^*=1;\ \ p_k^*\ge 0,\ \ k=1,\ 2,...,\ m; \qquad (1.9)$$

$$\sum_{j=1}^{n}q_k^*=1;\ \ q_j^*\ge 0,\ \ j=1,\ 2,...,\ n \qquad (1.10)$$

і при цьому

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(p_k q_j^* f_{kj}\right)\le V^*\le\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(p_k^* q_j f_{kj}\right). \qquad (1.11)$$

У [72] показано, що ціна гри має верхню та нижню межі, а саме:

$$\alpha^+\le V^*\le\beta^-.$$

Як бачимо з наведених результатів, значення ціни гри V^* задає середньозважений виграш першого гравця (або середньозважений програш другого гравця) за багаторазового застосування оптимальних змішаних стратегій s_{P^*} та θ_{Q^*} гравців. Із співвідношення (1.11) випливає, що для пари стратегій s_{P^*} та θ_{Q^*} властиве таке: *за багаторазового їх застосування виграш першого гравця не зменшується, а програш другого гравця не збільшується, які б свої стратегії не застосував супротивник.*

Підіб'ємо підсумки:

1) розв'язати скінченну гру з нульовою сумою означає знайти оптимальні чисті стратегії гравців, якщо гра має сідлову точку, або ж знайти оптимальні змішані стратегії гравців s_{P^*} та θ_{Q^*}, а точніше — вектори $P^*=\left(p_1^*;...;\ p_m^*\right)$ та $Q^*=\left(q_1^*;...;\ q_n^*\right)$, що відпо-

відають теоремі про мінімакс, тобто умовам (1.5)—(1.11), а також отримати ціну гри;

2) будь-яка парна матрична гра має розв'язок, якщо допускається використання змішаних стратегій;

3) гра без сідлової точки $\left(\alpha^{+} < \beta^{-}\right)$ має розв'язок, можливо не єдиний, коли хоча б один з гравців використовує оптимальну змішану стратегію.

Отже, загальноприйняте поняття оптимальності розширюється за рахунок включення таких важливих елементів, як, наприклад, компромісне рішення, яке задовольняє різні сторони конфлікту. Ця та інші особливості теорії гри дають змогу використовувати її методи для розв'язування різноманітних задач, що виникають в економічній науці та практиці. Дуже часто ці задачі допускають використання інших (неігрових) методів і моделей. Нижче буде наведено деякі приклади ігрового моделювання в економіці, а також показано розширені можливості зведення економічних ситуацій до задач теорії гри.

1.5.2. Дилема ув'язненого та олігопольні ринки

Два ув'язнених очікують рішення суду за спільно вчинене злодіяння. Запобігши можливості змови, їм висунули умови: якщо зізнаються обидва, то кожен отримає по п'ять років тюрми; якщо зізнається один, то він отримає лише один рік, а другий — 10 років; якщо ж обидва не зізнаються, то кожен отримає по два роки ув'язнення.

Побудову ігрової моделі почнемо з формулювання множин рішень для кожного з ув'язнених. Обидва вони мають для вибору дві взаємовиключні чисті стратегії: перша — зізнатися $(s_1$ чи $\theta_1)$, друга — не зізнатися $(s_2$ чи $\theta_2)$. Ефективність кожної з чистих стратегій для кожного з гравців відобразимо відповідно у вигляді функціоналів оцінювання:

$$F' = \left(f'_{kj} : k = 1,\ 2;\ \ j = 1,\ 2\right);\ \ F'' = \left(f''_{kj} : k = 1,\ 2;\ \ j = 1, 2\right),$$

де f'_{kj} та f''_{kj} — плата першого та другого ув'язненого відповідно, якщо перший гравець вибрав свою k-ту чисту стратегію s_k $(k = 1,\ 2)$, а другий — свою j-ту чисту стратегію θ_j $(j = 1,\ 2)$. Числовими еквівалентами платежів є терміни ув'язнення гравців, що беруться з протилежним знаком. У цьому випадку матриці платежів мають позитивний інгредієнт:

$$F' = F'^{+} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \theta_1 & \theta_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \end{array} & \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix} \end{array}; \quad F'' = F''^{+} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \theta_1 & \theta_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \end{array} & \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Отримана гра не є антагоністичною, оскільки $f'_{kj} + f''_{kj} \neq 0$. З точки зору економічної теорії дилема ув'язненого пояснює, чому продавці на олігопольному ринку намагаються досягти домовленості замість конкуренції, оскільки остання була би вигіднішою для покупців. У випадку, коли на ринку функціонує невелика кількість фірм-продавців однорідної продукції, ціни характеризуються жорсткістю: жодна з фірм не може ні довіряти іншим, ні очікувати, що її конкурент призначить нижчу ціну.

Ситуація, коли на ринку функціонує невелика кількість фірм, носить назву конкуренції серед небагатьох: випадок, коли є декілька продавців продукції, носить назву олігополії, а коли декілька покупців певного виду витрат — назву олігопсонії. Визначальною властивістю конкуренції серед небагатьох є те, що всі конкуруючі фірми можуть впливати на ціни продукції або витрати і при цьому прибуток кожної фірми залежить від стратегії всіх конкуруючих фірм. Слід відмітити важливу спільну рису між конкуренцією серед небагатьох і теорією ігор. В обох випадках результат (прибуток чи виграш) для одного учасника (фірми чи гравця) залежить від діяльності (витрат чи стратегій) решти учасників.

1.5.3. Гра у "старі" та "нові" товари

У [102] розглядається така задача. Нехай у нашому розпорядженні є три види "старих" товарів s_1, s_2, s_3, які надходять на ринок уже давно і попит на які добре відомий. З певного моменту в торговельну мережу починають надходити "нові" товари θ_1, θ_2, θ_3, які можуть замінити "старі". Тобто "нові" товари зменшують попит на "старі" товари. З попередніх обстежень попиту відомі ймовірності продажу "старих" товарів у разі появи в торговельній мережі "нових" товарів. Для гри у "старі" та "нові" товари платіжна матриця разом зі значеннями α_k $(k = 1, 2, 3)$ та β_j $(j = 1, 2, 3)$ запишеться у вигляді табл. 1.1.

Оскільки

$$\alpha = \beta = 0{,}7\ ,$$

то гра має сідлову точку, створювану мінімаксними стратегіями $s_{k_0} = s_2$ та $\theta_{j_0} = \theta_2$ $\left(V^* = f_{k_0 j_0} = f_{22} = 0{,}7\right)$. Ці стратегії є стійкими у тому розумінні, що відхилення від них невигідне для обох гравців.

Таблиця 1.1

"Нові" товари / "Старі" товари	θ_1	θ_2	θ_3	α_k
s_1	0,5	0,6	0,8	0,5
s_2	0,9	0,7	0,8	0,7
s_3	0,7	0,5	0,6	0,5
β_j	0,9	0,7	0,8	—

1.5.4. Планування структури посівних площ

Нехай аграрне підприємство (перший гравець) може посіяти одну з трьох культур. Його стратегії позначимо через s_1, s_2, s_3. Необхідно визначити, яку з культур сіяти, якщо за інших рівних умов урожаї цих культур залежать, головним чином, від погоди (Θ), а план посіву має забезпечити найбільший дохід. Уважатимемо, що сільськогосподарське підприємство має надійний спосіб прогнозування погоди. Визначаємо для другого гравця ("погода") такі стани (стратегії): θ_1 — рік посушливий; θ_2 — рік нормальний; θ_3 — рік дощовий.

Нехай на основі досвіду відомо, що за сухої погоди з 1 га можна зняти h_{k1} центнерів культури s_k, за нормальної — h_{k2}, за дощової — h_{k3} $(k = 1,\ 2,\ 3)$. Нехай також відомі ціни: c_k — ціна 1 ц культури s_k $(k = 1,\ 2,\ 3)$ в умовних грошових одиницях (УГО). Приймемо, що:

$$f_{kj} = c_k h_{kj}\,, \quad k = 1,\ 2,\ 3\,; \quad j = 1,\ 2,\ 3.$$

Якщо знехтувати вартістю насіння і витратами на обробіток ґрунту, отримуємо функціонал оцінювання

$$F^{+} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix},$$

тобто матрицю валових доходів підприємства від реалізації своєї продукції з 1 га за всіх можливих ситуацій. Нехай гра не має сідлової точки і перший гравець (аграрне підприємство) має хоча б одну оптимальну змішану стратегію s_{P^*}, що визначається вектором $P^* = \left(p_1^*;\ p_2^*;\ p_3^*\right)$.

Якщо V^* — ціна гри, то згідно з (1.14) (додаток до розділу 1, пункт 1.8.1) для змішаної стратегії P^* виконується нерівність:

$$f_{1j} p_1^* + f_{2j} p_2^* + f_{3j} p_3^* \geq V^*. \qquad (1.12)$$

Очевидно, що ціна гри V^* (число, яке знаходиться у лівій частині нерівності (1.12)) є величиною очікуваного валового доходу з 1 га за *j*-го стану погоди, якщо підприємство p_1^*-ту частку 1 га засіє культурою s_1, p_2^*-ту частку 1 га — культурою s_2, а p_3^*-ту частку 1 га — культурою s_3.

Отже, засіявши поле культурами s_1, s_2, s_3 у пропорції p_1^*, p_2^*, p_3^*, аграрне підприємство отримає за всіх погодних умов очікуваний валовий дохід, не менший числа V^*. Зауважимо, що очікуваний валовий дохід з 1 га за *j*-го стану погоди буде принципово відмінним від фактичного, який є реалізацією випадкової величини $F_{\theta_j} = (f_{1j};\ f_{2j};\ f_{2j})$. А саме, за умови реалізації *j*-го стану погоди, підприємство, реалізувавши змішану стратегію s_{P^*}, одержить з імовірністю p_1^* фактичний валовий дохід f_{ij}; з імовірністю p_2^* — f_{2j}; з імовірністю p_3^* — f_{3j}. Проте відповідно до закону великих чисел фактичний валовий дохід за кілька років з великою ймовірністю дорівнюватиме очікуваному валового доходу V^*.

Викладений тут результат легко узагальнити на випадок, коли висіваються *m* культур, а стани погоди деталізовано. Крім того, аналогічні моделі можна побудувати для випадку, коли підприємство має можливість змінювати не лише культури, які воно висіває, а й способи (технології) обробки поля.

Розв’яжемо числовий приклад для даних, наведених у табл. 1.2.

Отже, функціонал оцінювання (матриця виграшу першого гравця) має вигляд:

$$F = F^{+} = \begin{pmatrix} 40 & 10 & 30 \\ 30 & 50 & 20 \\ 0 & 60 & 80 \end{pmatrix}.$$

Таблиця 1.2

Стратегія першого гравця (аграрне підприємство)		Стратегія другого гравця (“погода”)			Ціна за 1 ц в УГО
		Суха погода θ_1	Нормальна погода θ_2	Дощова погода θ_3	
Урожайність першої культури, ц/га	s_1	20	5	15	2
Урожайність другої культури, ц/га	s_2	7,5	12,5	5	4
Урожайність третьої культури, ц/га	s_3	0	7,5	10	8

Оскільки $\alpha^{+} = \max\limits_{s_k \in S} \min\limits_{\theta_j \in \Theta} f_{kj}^{+} = 20,$ $\beta^{-} = \min\limits_{\theta_j \in \Theta} \max\limits_{s_k \in S} f_{kj}^{-} = 40,$ тобто $\alpha^{+} < \beta^{-}$, то гра не має сідлової точки, а тому оптимальна стратегія першого гравця змішана. Згідно з викладками, наведеними у додатку до розділу 1, пункт 1.8.1, для знаходження такої стратегії треба розв’язати задачу лінійного програмування:

$$Z = (t_1 + t_2 + t_3) = \frac{1}{V} \to \min_{t_1,\, t_2,\, t_3}$$

за виконання умов

$$40t_1 + 30t_2 \geq 1;$$

$$10t_1 + 50t_2 + 60t_3 \geq 1;$$

$$30t_1 + 20t_2 + 50t_3 \geq 1;$$

$$t_1,\, t_2,\, t_3 \geq 0,$$

де

$$t_1 = \frac{p_1}{V}; \quad t_2 = \frac{p_2}{V}; \quad t_3 = \frac{p_3}{V}; \quad t_1 + t_2 + t_3 = \frac{1}{V}.$$

Розв’язавши цю задачу, одержимо, що

$$P^* = (0{,}49;\ 0{,}40;\ 0{,}11);\ \ V^* = 31{,}5.$$

Тобто, за решти рівних умов, засіявши 49% поля першою культурою, 40 % — другою, 11 % — третьою культурою, аграрне підприємство отримає в середньому за низку років за різних погодних умов очікуваний максимальний валовий дохід не менший 31,5 ум. од. за рік.

1.5.5. Інвестування капіталу

Наведемо задачу, розглянуту в [34, 81]. Інвестор взяв у борг гроші під 1,5 % з метою інвестування цих засобів в акції різних компаній. Наявні два види акцій, норми прибутку яких є випадковими величинами і залежать від станів економічного середовища (випадкових обставин). На ринку можуть мати місце тільки дві ситуації: перша (θ_1) з імовірністю $q_1 = 0{,}2$ і друга (θ_2) — з імовірністю $q_2 = 0{,}8$.

Акції реагують на ці ситуації (стани економічного середовища) по-різному: курс акцій першого виду (s_1) у першій ситуації зростає на 5 %, а в другій — на 1,25 %; курс акцій другого виду (s_2) у першій ситуації падає на 1 %, а в другій — зростає на 2,75 %.

Необхідно найкращим чином розподілити наявний капітал між цими активами. Попередньо проаналізуємо ці акції з позиції таких їх характеристик, як сподівана норма прибутку (математичне сподівання норми прибутку) та величина ризику (дисперсія норми прибутку). Обчислимо ці характеристики:

$$m_1 = \sum_{j=1}^{2}\left(q_j r_{1j}\right) = 5\times 0{,}2 + 1{,}25\times 0{,}8 = 2;$$

$$m_2 = \sum_{k=1}^{2}\left(q_j r_{2j}\right) = -1\times 0{,}2 + 2{,}75\times 0{,}8 = 2;$$

$$\sigma_1^2 = \sum_{j=1}^{2}\left(q_j r_{1j}^2\right) - m_1^2 = 5^2\times 0{,}2 + (1{,}25)^2\times 0{,}8 - 2^2 = 2{,}25;$$

$$\sigma_2^2 = \sum_{j=1}^{2} r_{2j}^2 - m_2^2 = (-1)^2\times 0{,}2 + (2{,}75)^2\times 0{,}8 - 2^2 = 2{,}25.$$

Хоча значення сподіваних норм прибутку і ризиків збіглися $\left(m_1 = m_2 = 2;\ \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 2{,}25\right)$, у випадку інвестування всього капіталу в акції одного виду перевагу слід віддати акціям другого виду. На користь такого вибору свідчать такі міркування. У випадку придбання акцій тільки першого виду банкрутство інвестора може відбутися за настання другої ситуації (1,25 < 1,5), тобто з імовірністю $q_2 = 0{,}8.$ Якщо ж придбати акції тільки другого виду, то банкрутство інвестора відбудеться вже у випадку настання першої ситуації $(-1 < 1{,}5)$, тобто з імовірністю $q_1 = 0{,}2$. Оскільки $q_1 = 0{,}2 < 0{,}8 = q_2$, то ризик банкрутства в разі інвестування лише в акції другого виду менший за ризик банкрутства в разі інвестування лише в акції першого виду. Але, як бачимо, повністю уникнути банкрутства при інвестуванні всього капіталу в акції другого виду неможливо.

Дослідимо ефект диверсифікації, тобто ефект від розподілу грошових ресурсів між обома активами в найбільш вигідних і безпечних пропорціях. Нехай x_1 — частка капіталу, інвестованого в акції першого виду, тоді $x_2 = 1 - x_1$ — частка капіталу, інвестованого в акції другого виду, вектор $X = (x_1; x_2)$ — структура портфеля акцій. Знайдемо характеристики портфеля. Його сподівана норма прибутку

$$m_{\Pi} = m_1 x_1 + m_2 x_2 = 2x_1 + 2(1 - x_1) = 2;$$

величина ризику

$$\sigma_{\Pi}^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 x_1 x_2 =$$
$$= \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2\right)x_1^2 - 2\left(\sigma_2^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2\right)x_1 + \sigma_2^2,$$

де ρ_{12} — коефіцієнт кореляції між нормами прибутку акцій, обчислюваний за формулою

$$\rho_{12} = \frac{\sum_{j=1}^{n}\left(q_j r_{1j} r_{2j}\right) - m_1 m_2}{\sigma_1\sigma_2}.$$

З урахуванням того, що $\sigma_1 = \sigma_2 = 1{,}5$; $\rho_{12} = -1$ (тобто має місце абсолютно від'ємна кореляція), отримуємо, що величина ризику портфеля, як функція від частки x_1, обчислюється формулою

$$\sigma_{\Pi}^2 = 9x_1^2 - 9x_1 + 2{,}25. \tag{1.13}$$

У даному випадку найкращим портфелем слід уважати портфель з найменшою величиною ризику. Позначимо його структуру через $X^* = \left(x_1^*; x_2^*\right)$. При x_1^* функція (1.13) досягає свого мінімального значення. Згідно з необхідною умовою екстремуму функції для знаходження x_1^* слід скористатися рівнянням

$$\frac{d\sigma_{\Pi}^2}{dx_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(9x_1^2 - 9x_1 + 2{,}25\right)' = 0 \quad \Rightarrow \quad 18x_1 - 9 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad x_1^* = 0{,}5; \quad x_2^* = 1 - x_1^* = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad X^* = (0{,}5;\ 0{,}5).$$

Шляхом підстановки легко переконатися, що $\sigma_{\Pi}^{*2} = \sigma_{\Pi}^2(0{,}5) = 0$.

Отриманий результат вказує на те, що розподіл капіталу на рівні частки (по 50 %) між акціями обох видів дає змогу, в певному сенсі, позбутися ризику $\left(\sigma_{\Pi}^{*2} = 0\right)$. Окрім того, за такого розподілу грошей інвестору не загрожує банкрутство, оскільки для будь-якого стану економічного середовища норма прибутку портфеля, що має структуру $X^* = (0{,}5;\ 0{,}5)$, становить 2 % > 1,5 % (переконайтесь у цьому самостійно).

Із задачею побудови оптимального портфеля цінних паперів у даному випадку мають безпосередній зв'язок дві матриці:

а) коваріаційна матриця:

$$C = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}25 & -2{,}25 \\ -2{,}25 & 2{,}25 \end{pmatrix},$$

де $\sigma_{kj} = \sigma_k \sigma_j \rho_{kj}$ $(k = 1{,}2;\ \ j = 1{,}2)$;

б) матриця норм прибутку:

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1{,}25 \\ -1 & 2{,}75 \end{pmatrix},$$

де r_{kj} — величина норми прибутку акції k-го виду для j-го стану економічного середовища $(k = 1, 2;\ j = 1, 2)$.

Розглянемо парну гру з нульовою сумою, що визначається матрицею *C*. Легко переконатись у тому, що ця гра не має сідлової точки, а її розв'язком є пара оптимальних змішаних стратегій s_{P^*} та q_{Q^*}, яким відповідають вектори $P^* = Q^* = (0{,}5;\ 0{,}5) = X^*$.

При цьому ціна гри $V^* = 0 = \left(\sigma_{\Pi}^*\right)^2$.

Парна гра з нульовою сумою, що визначається матрицею *F*, також не має сідлової точки і при цьому оптимальній змішаній стратегії першого гравця (інвестора) відповідає вектор $P^* = (0{,}5;\ 0{,}5) = X^*$. Ціна цієї гри $V^* = 2$.

Збіг оптимальних змішаних стратегій, що є розв'язком обох розглянутих ігор, не випадковий. Відповідні результати, що підтверджують цю закономірність, будуть отримані у розділі 6, в якому досліджуються питання використання теорії ігор для оптимізації структури портфеля.

1.5.6. Ігрова модель задачі побудови портфеля активів

Лауреат Нобелівської премії Г. Марковіц у своїх дослідженнях вивчав імовірнісну модель ринку активів. У його моделі норма прибутку кожного активу розглядається як випадкова величина

$$R_k = \frac{C_k - C_k^0 + Д_k}{C_k^0} \times 100\%, \qquad k = 1,\ldots, m,$$

де: C_k^0 — ціна активу на початок даного періоду C_k – ціна активу (випадкова величина) на кінець даного періоду; $Д_k$ – дивіденди (теж випадкова величина), нараховані протягом даного періоду. Конкретне значення норми прибутку *k*-го активу залежить від стану економічного середовища, тобто визначається ситуацією, що склалася на ринку. Розмірність множини Θ станів економічного середовища може бути довільною, але ми вважатимемо її скінченною і рівною *n*, тобто $\Theta = (\theta_1;\ldots;\ \theta_n)$. Кожному стану ринку θ_j поставимо у відповідність імовірність настання його q_j. Всі ці ймовірності згрупуємо у вектор $Q = (q_1;\ldots;\ q_n)$. Очевидно, що компоненти вектора *Q* мають задовольняти співвідношенням (1.1) — (1.2).

Уважається, що можливі значення норми прибутку *k*-го активу $(k = 1,\ldots, m)$ для всіх можливих станів ринку $\theta_j\,(j = 1,\ldots,\ n)$ є відомими і відображаються випадковою величиною $R_k = (r_{k_1};\ldots;\ r_{k_n})$, тобто актив *k*-го виду приносить r_{kj} одиниць прибутку з розрахунку на кожну одиницю вкладень, якщо економічне середовище знаходитиметься в своєму *j*-му стані. СПР має можливість інвестувати свої ресурси більш як в один актив, утворити портфель, тобто розподілити свої ресурси між різними активами в найвигіднішій і безпечній пропорції. А тому інвестор (СПР) хоче оптимізувати структуру портфеля $X = (x_1;\ldots;\ x_m)$ шляхом визначення оптимальних розмірів часток x_k ($k = 1,\ldots, m$), які відповідають вартості активів кожного виду в загальному обсязі інвестованих у портфель ресурсів.

У своїй моделі Марковіц відштовхується від того, що інвестор для прийняття інвестиційних рішень в якості критеріїв оптимальності використовує лише дві характеристики активів та їх портфелів: сподівану норму прибутку (у формі математичного сподівання) та величину ризику (у формі дисперсії).

Вибір цих кількісних характеристик у якості критеріїв оптимальності дає можливість розглядати задачу побудови портфеля як двокритеріальну. До речі, інвестор схильний вкласти весь свій капітал лише в актив одного виду, якщо цей актив, порівняно з будь-яким портфелем, буде найкращим за обома цими критеріями одночасно, тобто матиме найбільшу сподівану норму прибутку та найменшу величину ризику.

Якщо вважати відомими закони розподілу випадкових величин R_k ($k=1,\dots,m$), то не становитиме великих труднощів обчислення математичних сподівань $m_k = M(R_k)$ та коваріацій $\sigma_{kj} = \operatorname{cov}(R_k; R_j)$ ($k=1,\dots,m;\ j=1,\dots,m$).

Якщо відома структура портфеля $X=(x_1;\dots;x_m)$, то норма прибутку цього портфеля обчислюється за формулою

$$R_\Pi = \sum_{k=1}^{m}(x_k R_k),$$

а його характеристики (сподівана норма прибутку портфеля і дисперсія) — за формулами

$$m_\Pi = M(R_\Pi) = \sum_{k=1}^{m}(x_k m_k); \qquad \sigma_\Pi^2 = D(R_\Pi) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(x_k x_j \sigma_{kj}).$$

Ураховуючи зроблені раніше викладки, можна стверджувати, що задача оптимізації структури портфеля пов'язана з декількома матрицями, кожну з яких можна вибрати в якості функціонала оцінювання статистичної гри. Розглянемо функціонал оцінювання

$$R = R^+ = \left(r_{kj}^+ : k=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n\right) = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & .. \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{mn} \end{pmatrix},$$

у k-му рядку якого розміщено можливі значення норми прибутку R_k активу k-го виду, а в j-му стовпчику — величини норм прибутків активів усіх видів, що відповідають j-му стану ринку $(k=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n)$. Змішану стратегію першого гравця, якій відповідає вектор $P=(p_1;\dots;p_m)$ у грі, що визначається матрицею R, можна тепер інтерпретувати як портфель, а ймовірність p_k — як частку капіталу, інвестованого в актив k-го виду $(k=1,\dots,m)$. Розв'язок гри в чистих стратегіях відповідатиме «однорідному» портфелю, тобто портфелю, складеному тільки з активів одного виду. А вибір розв'язку гри у змішаних стратегіях вказує на факт формування портфеля з різних активів. Як це показано в [38, 97—100], за виконання певних умов оптимальна змішана стратегія з вектором $P^* = \left(p_1^*;\dots;\ p_m^*\right)$ відповідає ефективному портфелю.

Аналогічна відповідність має місце між оптимальними змішаними стратегіями гравців у парній грі з нульовою сумою, що визначається, з одного боку, коваріаційною матрицею $C=\left(\sigma_{kj} : k=1,\dots,m;\ j=1,\dots,m\right)$, з іншого — ефективним портфелем.

Оптимізація структури портфеля відіграє особливу роль у сучасній економічній теорії та практиці. Можна стверджувати, що будь-яка економічна проблема зводиться до задачі найкращого розподілу ресурсів (матеріальних, фінансових, трудових тощо), наявних у розпорядженні СПР (інвестора) між активами різних видів.

1.5.7. Формування валютного кошика

Суб'єкт міжнародної діяльності має у своєму розпорядженні кошти в обсязі W у національній грошовій одиниці, які він хоче заощадити на певний проміжок часу. З метою захисту від валютного ризику (коливання курсів валют) він вирішив на основі цих (вільних) коштів сформувати своєрідний портфель — «валютний кошик». А тому виникла задача розподілу вільних коштів у найбільш вигідній та безпечній пропорції для купівлі валюти різних видів.

Нормою прибутку валюти k-го виду назвемо приріст її курсу в розрахунку на одиницю національної валюти за наявний проміжок часу. Величину норми прибутку валюти k-го виду можна визначити за формулою

$$R_k = \frac{W_k - W_k^0}{W_k^o} \times 100\%, \quad k = 1,\ldots,\ m,$$

де: R_k — норма прибутку валюти k-го виду; W_k^0 — обсяг грошових коштів у національній грошовій одиниці, витрачених на придбання валюти k-го виду на початку певного проміжку часу; W_k — обсяг коштів у національній грошовій одиниці, що є еквівалентом наявній валюті k-го виду в кінці цього проміжку часу; m — кількість різних валют, що утворюють «кошик».

Норма прибутку валюти може бути додатною, від'ємною або рівною нулю, якщо протягом даного проміжку часу курс іноземної валюти відносно національної грошової одиниці, відповідно, зростає, падає або не змінюється. Як і в теорії Марковіца, валюті k-го виду ставиться у відповідність випадкова величина R_k — норма прибутку валюти k-го виду в певний проміжок часу.

Інвестуючи кошти в обсязі W у валюти m видів, СПР формує «валютний кошик», що має структуру $X = (x_1;\ldots;\ x_m)$, де x_k — частка капіталу, інвестованого у валюту k-го виду. Її можна обчислити за формулою

$$x_k = \frac{W_k}{W}.$$

Очевидно, що

$$\sum_{k=1}^{m} x_k = 1.$$

Щодо портфеля валют «валютного кошика», то його норма прибутку

$$R_{\Pi} = \frac{W - W^0}{W^0} \times 100\%,$$

де: R_{Π} — норма прибутку «валютного кошика»; W^0 — обсяг коштів у національній грошовій одиниці, витрачених на придбання всього «валютного кошика»; W — обсяг коштів у національній грошовій одиниці, еквівалентний «валютному кошику» в кінці даного проміжку часу. Можна показати, що

$$R_{\Pi} = \sum_{k=1}^{m} \left(x_k R_k \right).$$

Можливі значення норм прибутків R_k ($k = 1, \dots, m$) залежать від стану ринку іноземних валют. Для спрощення викладення вважатимемо множину Θ станів ринку іноземних валют дискретною зі скінченною кількістю елементів, тобто, що $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$, а значення r_{kj}, що їх набирає норма прибутку валюти k-го виду $(k = 1, \dots, m)$ в умовах j-го сценарію $(j = 1, \dots, n)$, є відомими. А тому ситуацію прийняття рішення щодо створення «валютного кошика» можна охарактеризувати функціоналом оцінювання $R = R^+ = \left(r_{kj}^+ : k = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n \right)$.

У параграфі 7.4 цього посібника розглядатиметься задача управління валютним ризиком на основі матриці $\boldsymbol{R}$.

1.5.8. Формування портфеля інвестиційних проектів

СПР вивчає m інвестиційних проектів (їх пронумеровано від 1 до m) щодо вибору серед них найнадійніших з подальшим включенням їх в інвестиційний портфель, враховуючи при цьому свої реальні можливості.

Вибрані найбільш надійні інвестиційні проекти утворюють деяку підмножину множини наявних m проектів. Цю підмножину інтерпретуватимемо як нечітку підмножину всіх інвестиційних проектів. Згідно з означенням нечіткої множини (див., наприклад, [22, 50, 66]) на елементах множини всіх інвестиційних проектів необхідно визначити функцію належності нечіткій множині, а з її допомогою кожному проекту поставити у відповідність певне значення з проміжку [0; 1]. Це значення називається ступенем належності проекту до нечіткої підмножини найбільш надійних інвестиційних проектів. У прикладному аспекті ступінь належності проекту до вказаної нечіткої множини може відображати суб'єктивну міру того, наскільки цей проект відповідає поняттю найбільш надійного (з позиції СПР).

Припустимо, що відомі величини μ_{kj} — значення функцій належності k-го проекту $(k = 1,..., m)$ до нечіткої підмножини найбільш надійних інвестиційних проектів в умовах j-го стану економічного середовища $(j = 1,..., n)$. У розгорнутому вигляді, за аналогією з [22, 28], ситуація прийняття інвестиційного рішення характеризується матрицею (функціоналом оцінювання):

$$M = M^{+} = \left(\mu_{kj}^{+} : k = 1, \ldots, m; \; j = 1, \ldots, n\right) = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \cdots & \mu_{1n} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \cdots & \mu_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_{m1} & \mu_{m2} & \cdots & \mu_{mn} \end{pmatrix},$$

де елементи $\mu_{kj}^{+} \in [0;\ 1]$ $(k = 1,..., m; \quad j = 1,..., n)$, при цьому μ_{kj} — це суб'єктивна міра надійності k-го проекту, тобто μ_{kj} — це міра степеня належності k-го проекту до портфеля найбільш надійних проектів у разі реалізації j-го стану економічного середовища.

Нехай парна гра з нульовою сумою, що визначається матрицею платежів $\boldsymbol{M} = (\mu_{kj})$, не має сідлової точки. Тоді розв'язком цієї гри є оптимальна змішана стратегія першого гравця, що їй відповідає вектор $P^{*} = \left(p_1^{*};...;\ p\right)$, компонента p_k^{*} якого є питомою вагою k-го проекту в структурі портфеля.

Процедура вибору надійних проектів і формування інвестиційного портфеля детальніше вивчається в [2; 22].

1.6. КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ТЕМИ ДЛЯ ОБГОВОРЕННЯ

1. Сутність, причини та наслідки трудового конфлікту. Структура його ризику.

2. Позитивні функції трудового конфлікту, що знижують ступінь ризику.

3. Сформулюйте основні відмінності між стратегічним і довготерміновим плануванням, між стратегічним та оперативним плануванням. Яку роль у цьому відіграє поняття ризику?

4. Сутність стратегічного планування, зміст його логіки, його цілі. Обґрунтуйте необхідність урахування ризику.

5. Перелічіть ключові простори, в межах яких організація визначає свої цілі. Як вона враховує ризики?

6. Сформулюйте основні критерії щодо визначення якості цілі.

7. Визначте сутність понять «критерії» та «цілі», їх взаємозв’язок.

8. Проблема багатокритеріальності в реальних задачах: її природа; сутність ризику, зумовленого цією проблемою.

9. Стратегія виживання, її сутність, цілі.

10. Теоретико-ігрова модель, її складові, економічна інтерпретація.

11. Особливості гри з природою, її складові, економічна сутність даної концепції.

12. Творча та формальна складова процесу прийняття рішення, їх сутність.

13. Що лежить в основі класифікатора інформаційних ситуацій? Назвіть та охарактеризуйте інформаційні ситуації, що найчастіше зустрічаються в процесі прийняття рішення з урахуванням ризику.

14. Що розуміють під критерієм прийняття рішення?

15. Дайте економічне тлумачення поняття «інгредієнт функціонала оцінювання».

16. Дайте економічне тлумачення поняття «матриця ризику». Опишіть етапи побудови цієї матриці. Які ще назви має ця матриця?

17. Яку гру називають скінченною? В якому випадку говорять, що гра має нульову суму?

18. Що ви розумієте під поняттям «сідлова точка функціонала оцінювання»?

19. В якому випадку в якості розв’язку гри використовують змішані стратегії гри? Що розуміють під «змішаною стратегією» гри? під «сподіваним виграшем гравця»?

20. Чи можна вважати чисту стратегію частинним випадком змішаної стратегії? Як можна представити її в цьому випадку?

21. Як обчислюється сподівана норма прибутку портфеля активів? Укажіть показники оцінки ступеня його ризику. Що характеризує «структура» портфеля?

22. Які матриці можуть використовуватися в якості функціонала оцінювання при побудові оптимального портфеля активів?

23. Опишіть схему побудови «валютного кошика». Яка основна ціль переслідується, коли приймається рішення щодо побудови «валютного кошика»?

24. Сутність сценарного аналізу політичного ризику. Особливості використання його в концепції теорії гри.

25. Аналіз інвестиційних проектів на базі концепції теорії гри та врахування ступеня ризику.

1.7. ПРИКЛАДИ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Перший та другий гравці незалежно вибирають одне з чисел: 1 або 2. Якщо в результаті вибору в обох гравців будуть однакові числа, то перший гравець виплачує другому 1 УГО. Якщо ж ці числа будуть різними, то другий гравець виплачує першому таку кількість УГО, яка відповідає числу, вибраному першим гравцем.

Визначте оптимальні стратегії поведінки гравців, якщо ця гра є грою з нульовою сумою.

2. Гра «Камінь — папір — ножиці». Кожен з гравців має три стратегії: перша — «камінь», друга — «папір», третя — «ножиці». Обидва гравці одночасно називають один з цих трьох предметів. Якщо вони називають один і той же предмет, то партія закінчується внічию і при цьому ніхто нікому нічого не платить. У протилежному випадку виграш визначається таким чином: ножиці ріжуть папір, в папір можна загорнути камінь, а камінь розбиває ножиці; переможений виплачує переможцеві 1 УГО. Побудуйте платіжну матрицю цієї гри.

3. Мінікотельня створює запаси палива на зиму. У разі помірної зими для опалення потрібно 15 т палива, теплої зими — 10 т, суворої — 20 т палива. Взимку ціни на паливо коливаються залежно від погоди і становлять відповідно 10, 15 та 20 УГО за 1 т у разі теплої, помірної та суворої зими. Запаси створюються влітку, коли ціна 1 т палива 10 УГО.

Існує можливість вибору однієї з трьох чистих стратегій: придбати 10, 15 або 20 т палива влітку, а решту, у разі потреби, — пізніше (взимку). При цьому слід пам’ятати, що надлишки палива, якщо вони з’являться, неможливо буде реалізувати весною або зберегти до наступної зими.

Побудуйте матрицю платежів, елементами якої є прибутки мінікотельні, що відповідають витратам на паливо (які беруть зі знаком «мінус»), якщо множину стратегій складають варіанти запасів палива (10, 15 чи 20 т), а множину станів природи утворюють можливості настання теплої, помірної чи суворої зими.

На основі матриці платежів виберіть найменш ризикову стратегію щодо створення запасів палива для мінікотельні.

Вказівка: якщо робиться запас палива обсягом 10 т, то прибуток становить:

$$f_{11} = -(10\times 10) = -100 \text{ (УГО) — у разі теплої зими;}$$
$$f_{12} = -(10\times 10 + 5\times 15) = -175 \text{ (УГО) — у разі помірної зими;}$$
$$f_{13} = -(10\times 10 + 10\times 20) = -300 \text{ (УГО) — у разі суворої зими.}$$

4. Два брати отримали у спадщину автомобіль вартістю 800 УГО. Вони дійшли згоди, що питання переходу автомобіля у власність одному з них вирішуватиметься шляхом порівняння запропонованих ними грошових виплат. Заявки на ці виплати подаються у заклеєних конвертах. Той з братів, хто заявить більший обсяг виплати, отримує автомобіль і виплачує заявлену ним суму другому спадкоємцю. Заявлений обсяг виплати має ділитися на 100.

Якщо заявлені виплати будуть однаковими за обсягом, то питання щодо власника автомобіля визначається шляхом жеребкування за допомогою монети, і при цьому брати нічого не платитимуть один одному.

У першого брата є 500 УГО, а у другого — 800 УГО.

Знайдіть оптимальні стратегії щодо визначення обсягів виплати, якщо виграш першого брата становить:

- виплату другого брата, якщо вона є більшою за обсягом;
- 400 УГО, якщо запропонована обома братами виплата збігається за обсягом;
- вартість автомобіля 800 УГО, з якої вираховується виплата першого брата, якщо сума його пропозиції виплати перевищує суму пропозиції другого брата.

Переконайтесь у тому, що дана парна гра з нульовою сумою має єдину ціну, тоді як гра має декілька сідлових точок.

5. Укладаючи зовнішньоторговельний контракт, обидві сторони дійшли згоди, що оплата буде здійснюватися частинами: аванс у момент укладення контракту, оплата залишку — відразу після завершення всіх поставок. Окрім того, розрахунки здійснюються в національній валюті експортера, але вартість товару, що поставляється, кожного разу оцінюється в доларах США.

Визначте обсяг авансової виплати, якщо на момент виконання контракту в повному обсязі може відбуватись одна з двох змін курсу національної валюти експортера щодо долара США: курс знизиться на 10% або підніметься на 5%. Чистими стратегіями першого гравця є: перша стратегія — відмовитися повністю від авансованого платежу, друга стратегія — стовідсоткова передплата. Елементи матриці платежів — це обсяги виплат у національній грошовій одиниці, еквівалентні вартості контракту у 100 млн доларів США, отриманих експортером після виконання всіх своїх зобов'язань, якщо на момент підписання контракту 1 долар США прирівнювався до 2 національних грошових одиниць.

Дайте економічну інтерпретацію ціні гри, оптимальним змішаним стратегіям гравців.

6. Сільськогосподарське підприємство має можливість засіяти певну площу своїх угідь сільськогосподарськими культурами двох сортів. Урожайність цих сортів є випадковою величиною і залежить від стану погоди. Вважають доцільним виділити тільки два стани (дві ситуації).

Різні сорти реагують на стани погоди по-різному: врожайність першого сорту $(k=1)$ у першій ситуації $(j=1)$ становить 40 ц/га, а у другій $(j=2)$ — 60 ц/га; врожайність другого сорту $(k=2)$ у першій ситуації — 50 ц/га, у другій — 45 ц/га.

Знайдіть найкращий розбив сільськогосподарських угідь під засів обома сортами цієї культури, інтерпретуючи задачу як гру з нульовою сумою. В якості функціонала оцінювання використайте матрицю $F=\left(f_{kj}: k=1,2;\ j=1,2\right)$, де f_{kj} — урожайність *k*-го сорту у випадку *j*-го стану погоди $\left(k=1,2;\ \ j=1,2\right)$.

Дайте інтерпретацію оптимальним змішаним стратегіям гравців, ціні гри. У чому полягає сутність чистих стратегій першого гравця?

7. Числові характеристики норм прибутку двох активів, що пропонуються на ринку цінних паперів, відомі: сподівані норми прибутку $m_1=M\left(R_1\right)=10$; $m_2=M\left(R_2\right)=7{,}5$; коваріації норм прибутку $\sigma_{11}=\sigma_1^2=D\left(R_1\right)=225$; $\sigma_{22}=\sigma_2^2=D\left(R_2\right)=132{,}25$; $\sigma_{12}=\operatorname{cov}\left(R_1;\ R_2\right)=-138$.

Визначте структуру портфеля, складеного з цих активів, який має мінімальний ризик $\left(\sigma_{\Pi}^{*2}\right)$, інтерпретуючи цю задачу як гру з нульовою сумою. В якості функціонала оцінювання використайте коваріаційну матрицю: $C=\left(\sigma_{kj}\right)$, $k=1,2;\quad j=1,2.$

Переконайтесь у справедливості співвідношень: $P^*=Q^*=X^*$; $V^*=\sigma_{\Pi}^{*2}$, де P^*, Q^* — вектори, що відповідають оптимальним змішаним стратегіям s_{P^*} та θ_{Q^*} гравців, а V^* — ціна гри.

8. Розглядаються два види акцій, норми прибутків яких є випадковими величинами, що залежать від стану фондового ринку (економічного середовища). На ринку можуть виникнути шість різних ситуацій, розподіл імовірностей для яких відомий: $Q = (0{,}05;\ 0{,}2;\ 0{,}1;\ 0{,}25;\ 0{,}1;\ 0{,}3)$.

а) Обчисліть сподівані норми прибутків цих акцій, їх середньоквадратичні відхилення та коефіцієнт кореляції між ними, якщо відома матриця

$$R = \left(r_{kj} : k = 1,\ 2;\ \ j = 1, \ldots,\ 6\right) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 7 & 13 & 7 & 3 \\ 7 & 16 & 7 & -4 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

де r_{kj} — значення норми прибутку акції k-го виду для j-го стану фондового ринку $(k = 1,\ 2;\ \ j = 1, \ldots,\ 6)$.

Знайдіть структуру портфеля $\left(X^*\right)$, складеного з цих акцій, що має найменший ризик. Знайдіть числові характеристики цього портфеля: сподівану норму прибутку m_n^* та його середньоквадратичне відхилення $\left(\sigma_{\Pi}^*\right)$.

б) Розв’яжіть парну гру з нульовою сумою, що визначається коваріаційною матрицею $C = \left(\sigma_{kj} : k = 1,\ 2;\ \ j = 1,\ 2\right)$, $k = 1,\ 2;\ j = 1,\ 2.$

Переконайтесь у справедливості співвідношень $P^* = Q^* = X^*$; $V^* = \sigma_{\Pi}^{*2}$, де P^*, Q^* — вектори, що відповідають оптимальним змішаним стратегіям, а V^* — ціна гри.

в) Розв’яжіть парну гру з нульовою сумою, що визначається матрицею

$$H = \left(h_{kj} : k = 1,\ 2;\ \ j = 1,\ 2\right) = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обчисліть числові характеристики портфеля, структура якого збігається з вектором, що визначає оптимальну змішану стратегію першого гравця в цій грі, сподівану норму прибутку цього портфеля, його середньоквадратичне відхилення і порівняйте ці значення з m_{Π}^*, σ_{Π}^*, обчисленими у попередній задачі (див. пункт б).

Для знаходження векторів P^* та Q^*, що визначають оптимальні змішані стратегії гравців, а також ціни гри, скористайтесь формулами (1.22) — (1.24), наведеними у додатку до розділу 1, пункт 1.8.2.

1.8. ДОДАТОК ДО РОЗДІЛУ 1

1.8.1. Зведення антагоністичної гри з нульовою сумою до задачі лінійного програмування

Розглянемо гру з нульовою сумою, що має платіжну матрицю

$$F = \left(f_{kj} : k = 1,\ldots,\ m;\ \ j = 1,\ldots,\ n \right).$$

Нехай для першого гравця змішана стратегія s_P визначається вектором (розподілом імовірності) $P = (p_1;\ldots;\ p_m)$, а для другого гравця — змішана стратегія θ_Q — вектором $Q = (q_1;\ldots;\ q_n)$.

При цьому p_k — імовірність, з якою перший гравець застосовує свою чисту стратегію s_k $(k = 1,\ldots,\ m)$, q_j — імовірність, з якою другий гравець застосовує свою чисту стратегію θ_j $\left(j = 1,\ldots, n \right)$. Із основної теореми теорії ігор випливає, що кожна скінченна гра має розв’язок, тобто ціну гри $V^* = \sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} \left(p_k^* q_j^* f_{kj} \right)$ та оптимальні стратегії s_{P^*} і θ_{Q^*} гравців, які визначаються векторами $P^* = \left(p_1^*,\ldots,\ p_m^* \right)$ і $Q^* = \left(q_1^*,\ldots, q_n^* \right)$ відповідно.

Крім того, з основної теореми (теореми про мінімакс) отримуємо, що

$$\sum_{k=1}^{m} \left(p_k^* f_{kj} \right) \ge V^*,\quad j = 1,\ldots,\ n; \tag{1.14}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(q_j^* f_{kj} \right) \le V^*,\quad k = 1,\ldots,\ m; \tag{1.15}$$

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(p_k q_j^* f_{kj} \right) \le V^* \le \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(p_k^* q_j f_{kj} \right).$$

Покажемо, як задача розв’язання гри у змішаних стратегіях зводиться до задачі лінійного програмування.

Не порушуючи загальності, можна припустити, що $V = \sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} \left(p_k q_j\ f_{kj} \right) > 0.$ Дійсно, для того, щоб здійснилась умова $V > 0,$ достатньо, щоб усі елементи f_{kj} платіжної матриці F були додатними. Цього завжди можна досягти, збільшуючи всі елементи f_{kj}

на одну й ту саму достатньо велику величину $c = \text{const}$. При цьому ціна гри збільшується на $c = \text{const}$, а розв'язок, тобто пара оптимальних змішаних стратегій s_{P^*} та θ_{Q^*} гравців, не зміниться [91]. Тому вважатимемо надалі, що $V > 0$.

Для першого гравця вектор P^*, що задає оптимальну змішану стратегію s_{P^*}, визначається згідно з умовою:

$$V^* = V\left(P^*\right) = \max_{P \in \Delta_P}\left(\min\left\{\sum_{k=1}^{m} p_k f_{k1};...;\sum_{k=1}^{m} p_k f_{kn}\right\}\right),$$

якщо $P = (p_1,..., p_m)$; $\sum_{k=1}^{m} p_k = 1$; $p_k \geq 0$; $k = 1,..., m$.

Зафіксуємо вектор P. Тоді ціна гри

$$V^* = V(P) = \min\left\{\sum_{k=1}^{m} p_k f_{k1};...;\sum_{k=1}^{m} p_k f_{kn}\right\}.$$

Ураховуючи, що оптимальна змішана стратегія s_{P^*} першого гравця забезпечує йому виграш, не менший ціни гри $V(P)$, за умови вибору другим гравцем будь-якої своєї стратегії, висновуємо, що:

$$\sum_{k=1}^{m} p_k^* f_{kj} \geq V(P).$$

А тому, враховуючи, що перший гравець прагне максимізувати свій гарантований виграш, задачу пошуку оптимальної змішаної стратегії s_{P^*} можна представити у вигляді такої задачі лінійного програмування:

$$U = V \to \max_{P \in \Delta_P}$$

за умов

$$\sum_{k=1}^{m} p_k f_{kj} \geq V, \quad j = 1,..., n;$$

$$\sum_{k=1}^{m} p_k = 1;$$

$$p_k \geq 0, \quad k = 1,..., m.$$

Ціна гри V невідома і має бути розрахована під час розв'язування задачі. Як було показано раніше, можна вважати, що $V > 0$, тоді задача лінійного програмування щодо визначення структури оптимальної змішаної стратегії першого гравця (вектора P^*) може бути спрощена. Для цього вводяться до розгляду змінні $t_k = \frac{p_k}{V}$ $(k = 1,\dots, m)$. З урахуванням того, що $\sum_{k=1}^{m} p_k = 1$, $p_k \ge 0$ $(k = 1,\dots, m)$, отримуємо таку задачу лінійного програмування:

$$Z = t_1 + t_2 + \dots + t_m = \frac{1}{V} \to \min_{t_1,\dots,t_m} \tag{1.16}$$

за виконання умов

$$\sum_{k=1}^{m} \left(t_k f_{kj}\right) \ge 1, \; j = 1,\dots, m; \tag{1.17}$$

$$t_k \ge 0, \qquad k = 1,\dots, m. \tag{1.18}$$

Розв'язавши задачу (1.16) — (1.18), знаходимо оптимальні значення змінних $t_1^*,\dots,t_m^*$, далі легко обчислити оптимальну ціну гри

$$V^* = \frac{1}{z_{\min}} = \frac{1}{\left(\sum_{k=1}^{m} t_k^*\right)},$$

потім значення ймовірностей $p_k^* = V^* t_k^*$ $(k = 1,\dots, m)$. Імовірності, для яких має місце строга оцінка $p_k^* > 0$, відповідають активним стратегіям першого гравця, а ті, для яких справедлива рівність $p_k^* = 0$, — пасивним.

Якщо ввести змінні $y_j = \frac{q_j}{V}$ $(j = 1,\dots, n)$, то з урахуванням того, що другий гравець хоче мінімізувати свій гарантований програш, а також того, що $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$, $q_j \ge 0$ $(j = 1,\dots, n)$, за аналогією з попереднім випадком отримуємо задачу лінійного програмування для визначення оптимальної змішаної стратегії другого гравця:

$$W = y_1 + \dots + y_n = \frac{1}{V} \to \max_{y_1,\dots,y_n}; \tag{1.19}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(y_j f_{kj}\right) \le 1, \;\; k = 1,\dots, m; \tag{1.20}$$

$$y_j \ge 0, \;\; j = 1,\dots, n. \tag{1.21}$$

Розв'язавши задачу (1.19) — (1.21), визначаємо величини $y_1^*,..., y_n^*$, потім оптимальну ціну гри

$$V^* = \frac{1}{W_{\max}} = \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n} y_j^*\right)},$$

далі — ймовірності $q_j^* = V^* y_j^*$ $(j = 1,..., n)$, а також *активні чисті стратегії*[*] другого гравця.

Неважко помітити, що задачу (1.16) — (1.18) для визначення структури оптимальної стратегії першого гравця сформульовано як двоїсту до задачі (1.19) — (1.21), з якої визначається структура оптимальної змішаної стратегії другого гравця, і при цьому $V^* = \dfrac{1}{Z_{\min}} = \dfrac{1}{W_{\max}}$.

1.8.2. Графічно-аналітичний метод розв'язання гри та визначення активних чистих стратегій

Якщо гра, в якій кількість стратегій однієї зі сторін дорівнює двом $(m = 2$ або $n = 2)$, не має сідлової точки, її розв'язок можна знайти графічно-аналітичним методом.

Нехай для визначеності $m = 2$. Тоді платіжна матриця F з урахуванням відповідних імовірностей стратегій гравців матиме вигляд:

		θ_1	θ_2	$\cdots$	θ_n
		q_1	q_2	$\cdots$	q_n
s_1	p_1	f_{11}	f_{12}	$\cdots$	f_{1n}
s_2	p_2	f_{21}	f_{22}	$\cdots$	f_{2n}

У цьому випадку з урахуванням того, що $p_2 = 1 - p_1$, очікувані виграші першого гравця будуть лінійно залежати від імовірності, з якою цей гравець вибирає свою першу стратегію (тобто від ве-

[*] Детальніше про активні чисті стратегії, а також про використання їх ітиметься у розділах 3 та 5.

личини p_1) для всіх варіантів чистих стратегій другого гравця, що ілюструє табл. 1.3.

Таблиця 1.3

Чисті стратегії другого гравця	Очікуваний виграш першого гравця
1	$f_{11}p_1 + f_{21}(1-p_1) = (f_{11} - f_{21}) + f_{21}$
2	$f_{12}p_1 + f_{22}(1-p_1) = (f_{12} - f_{22}) + f_{22}$
…	…………………………………
n	$f_{1n}p_1 + f_{2n}(1-p_1) = (f_{1n} - f_{2n}) + f_{2n}$

У разі вибору першим гравцем максимального критерію для планування своїх дій оптимальне значення p_1^* можна знайти таким шляхом:

1) у системі координат «$p_1 - V$» побудувати лінійні залежності (функції):

$$V_j = p_1(f_{1j} - f_{2j}) + f_{2j}, \quad j = 1, \ldots, n;$$

2) відшукати нижню межу виграшу, який може отримати перший гравець;

3) відшукати на нижній межі найбільше значення V^*;

4) визначити величину p_1^* як абсцису точки, що відповідає виграшу V^*.

Для ілюстрації цього методу розглянемо приклад 1.1.

Приклад 1.1. Знайти розв'язок гри, що задається платіжною матрицею:

$$F = (f_{kj}: \quad k = 1, 2, 3; \quad j = 1, \ldots, 5) = \begin{array}{c|ccccc} & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 \\ \hline s_1 & 3 & 1 & 2 & 5 & 0 \\ s_2 & 0 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ s_3 & 2 & 1 & 2 & 4 & 0 \end{array}$$

Розв'язання. Перевіримо, чи має платіжна матриця сідлову точку. Для цього знайдемо мінімальні елементи у рядках матриці та максимальні — у стовпчиках:

$$\alpha_1 = \min_{\theta_j \in \Theta} f_{1j} = \min\{3;\ 1;\ 2;\ 5;\ 0\} = 0;$$

$$\alpha_2 = \min_{\theta_j \in \Theta} f_{2j} = \min\{0;\ 2;\ -1;\ -2;\ 1\} = -2;$$

$$\alpha_3 = \min_{\theta_j \in \Theta} f_{3j} = \min\{2;\ 1;\ 2;\ 4;\ 0\} = 0;$$

$$\beta_1 = \min_{s_i \in S} f_{i1} = \max\{3;\ 0;\ 2\} = 3;\ \ \beta_2 = \max_{s_i \in S} f_{i2} = \max\{1;\ 2;\ 1\} = 2;$$

$$\beta_3 = \max_{s_i \in S} f_{i3} = \max\{2;\ -1;\ 2\} = 2;\ \ \beta_4 = \max_{s_i \in S} f_{i4} = \max\{5;\ -2;\ 4\} = 5;$$

$$\beta_5 = \max_{s_i \in S} f_{i5} = \max\{0;\ 1;\ 0\} = 1.$$

Визначаємо нижню і верхню ціну гри:

$$\alpha = \max_{s_i \in S} \alpha_i = \max\{0;\ 0;\ -2\} = 0;$$

$$\beta = \min_{\theta_j \in \Theta} \beta_j = \min\{3;\ 2;\ 2;\ 5;\ 1\} = 1.$$

Оскільки $\alpha \neq \beta$, то сідлова точка у грі відсутня.

Дослідимо платіжну матрицю. Порівнюючи між собою стратегії першого гравця, бачимо, що всі елементи рядка s_3 менші або дорівнюють елементам рядка S_1, тобто $f_{1j} \geq f_{3j}$ $(j = 1, \ldots, 5)$. Це означає, що $s_1 \succ s_3$ (s_1 пріоритетніше за s_3) і гру можна «редукувати» шляхом вилучення однієї (у даному випадку — третьої) стратегії з множини стратегій першого гравця. Відносно інших стратегій першого гравця, а також відносно стратегій другого гравця подібне явище не має місця, а тому після відкидання третьої стратегії першого гравця отримуємо:

$$F = \left(f_{kj}:\quad k = 1,\ 2;\quad j = 1, \ldots,\ 5\right) = \begin{array}{c|ccccc} & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 \\ \hline s_1 & 3 & 1 & 2 & 5 & 0 \\ s_2 & 0 & 2 & -1 & -2 & 1 \end{array}.$$

Очікувані виграші першого гравця, що відповідають чистим стратегіям другого гравця, подані у табл.1.4.

Таблиця 1.4

Чисті стратегії другого гравця	Очікувані виграші першого гравця
θ_1	$V_1^+ = p_1(3-0)+0 = 3p_1 + 0$
θ_2	$V_2^+ = p_1(1-2)+2 = -p_1 + 2$
θ_3	$V_3^+ = p_1(2+1)-1 = 3p_1 - 1$
θ_4	$V_4^+ = p_1(5+2)-2 = 7p_1 - 2$
θ_5	$V_5^+ = p_1(0-1)+1 = -p_1 + 1$

Будуємо графіки функцій (прямих) V_j $(j=1,...,5)$. При $p_1=0$ та при $p_1=1$ знаходимо $V_j(0)$ і $V_j(1)$ відповідно. Потім проводимо прямі через точки $(0; V_j(0))$ та $(1; V_j(1))$, $j=1,..., 5$ (рис. 1.1).

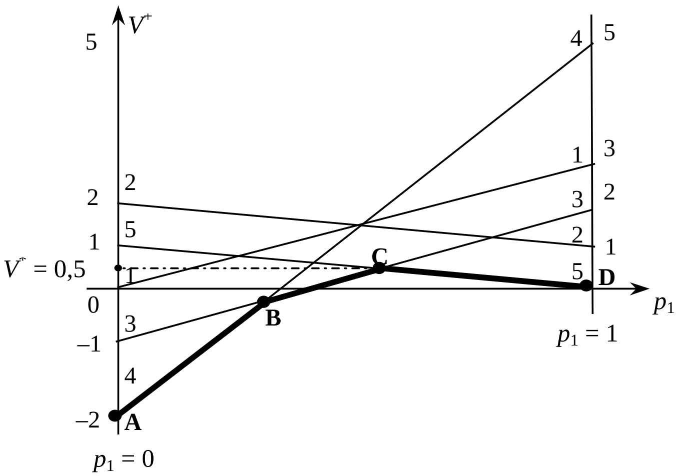


Рис. 1.1. Графічно-аналітичний метод розв'язання гри

Ламана *ABCD* на рис. 1.1 описує нижню межу виграшу, який може отримати перший гравець, якщо він застосовуватиме змішану стратегію у різних варіантах дій другого гравця.

Точці *C* відповідає максимальний виграш першого гравця: її абсциса p_1^* визначає оптимальне значення ймовірності (відносної частоти) використання першим гравцем своєї чистої стратегії s_1. Її ордината V^* визначає ціну гри.

Оскільки точка *C* лежить на перетині третьої та п'ятої прямих, значення p_1^* знаходиться з рівності

$$3p_1 - 1 = -p_1 + 1 \quad => \quad p_1^* = 0{,}5.$$

Таким чином, для максимізації свого мінімального виграшу перший гравець має використовувати першу чисту стратегію з імовірністю $p_1^* = 0{,}5$ і другу $p_2^* = 1 - p_1^* = 0{,}5$.

Значення ціни гри V^* розраховується шляхом підстановки p_1^* у рівняння будь-якої з прямих, що проходять через точку *C*, наприклад, у рівняння третьої прямої:

$$V^* = 3p_1^* - 1 = 3 \times 0{,}5 - 1 = 0{,}5.$$

У плані визначення оптимальної змішаної стратегії другого гравця зауважимо, що через точку максимуму ***C*** проходять дві прямі, які відповідають двом стратегіям — третій та п'ятій.

Стратегії θ_1, θ_2, θ_4 дають для другого гравця гірший результат, пов'язаний з програшем більших сум, що легко помітити з рис. 1.1. А тому, за $q_1^* = q_2^* = q_4^* = 0$, ми виключаємо з подальшого розгляду стратегії $\theta_1, \theta_2, \theta_4$ як неактивні. Звідси маємо, що $q_3 + q_5 = 1$, або ж $q_5 = 1 - q_3$.

Очікувані програші другого гравця, що відповідають чистим стратегіям першого гравця, наведено в табл. 1.5.

Таблиця 1.5

Чисті стратегії першого гравця	Очікувані програші другого гравця
s_1	$W_1 = f_{13}q_3 + f_{15}(1 - q_3) = 2q_3 + 0$
s_2	$W_2 = f_{23}q_3 + f_{25}(1 - q_3) = -2q_3 + 1$

Оптимальне значення q_3^*, що відповідає точці *C*, знаходимо з рівності

$$2q_3^* + 0 = -2q_3 + 1,$$

звідки

$$q_3^* = 0{,}25; \quad q_5^* = 1 - 0{,}25 = 0{,}75.$$

Підставляючи q_3^* у будь-яке з рівнянь прямих W_k, $k = 1, 2$, отримуємо ціну гри з позиції другого гравця:

$$W^* = 2 \times 0{,}25 = 0{,}5 = V^*.$$

Оскільки перша, друга та четверта чисті стратегії другим гравцем не використовуються $\left(q_1^* = q_2^* = q_4^* = 0\right)$, то активними є його третя та п'ята чисті стратегії і для мінімізації свого максимального програшу доцільно їх використовувати з імовірностями $q_3^* = 0{,}25$ і $q_5^* = 0{,}75$.

Відповідь. Оптимальна змішана стратегія першого гравця визначається розподілом $P^* = (0{,}5;\ 0{,}5;\ 0)$, оптимальна змішана стратегія другого гравця — розподілом $Q^* = (0;\ 0;\ 0{,}25;\ 0;\ 0{,}75)$, а ціна гри $V^* = 0{,}5$.

Якщо повернутись до розв'язаного прикладу і зауважити, що лінії V_j $(j=1,\ldots,5)$ перетинають пряму, задану рівнянням $p_1=1$, у точках, які мають ординати відповідно 3; 1; 2; 5 та 0, тобто — це виграші першого гравця в разі використання ним чистої стратегії s_1 (а другим гравцем своїх чистих стратегій $\theta_1,\ldots,\theta_5$), то висновуємо, що пряма $p_1=1$ ідентифікується стратегією s_1 першого гравця ($p_1=1$ — це ймовірність вірогідної події щодо використання першим гравцем лише своєї першої чистої стратегії).

За $p_1=0$ величина $p_2=1-p_1=1$ ($p_2=1$ — імовірність вірогідної події щодо використання першим гравцем лише своєї другої чистої стратегії), тобто пряма, що задається рівнянням $p_1=0$, ідентифікується другою стратегією (s_2) першого гравця. Ця пряма $(p_1=0)$ перетинається лініями V_j $(j=1,\ldots,5)$ у точках з ординатами 0; 2; –1; –2; 1 відповідно, які є виграшами першого гравця в разі використання ним стратегії s_2, а другим гравцем — чистих стратегій $\theta_1,\ldots,\theta_5$.

А тому для побудови ламаної *ABCD*, а також активних стратегій другого гравця можна скористатися таким спрощеним методом:

а) через точки $p_1=0$ та $p_2=1$ числової осі (осі абсцис) p_1 проводяться прямі, перпендикулярні до осі абсцис, і відкладаються на них виграші першого гравця за використання другим гравцем своїх чистих стратегій $\theta_1,\ldots,\theta_5$ (на прямій $p_1=1$ — за використання першим гравцем чистої стратегії s_1, на прямій $p_1=0$ — за використання ним чистої стратегії s_2);

б) точки, що лежать на різних (перпендикулярних) прямих і відповідають одній і тій же чистій стратегії другого гравця, з'єднуються;

в) будується графік функції

$$V_{\min}=\min_{\theta_j\in\Theta}V_j=\min_{\theta_j\in\Theta}\left(p_1\left(f_{1j}-f_{2j}\right)+f_{2j}\right)$$

(у нашому випадку — це ламана *ABCD*);

г) на графіку $V_{\min}$ відшукується точка максимуму (у нашому випадку — точка *C*);

д) лінії (прямі), внаслідок перетину яких утворюється точка *C*, визначають активні стратегії другого гравця, абсциса точки *C* —

значення ймовірності (відносної частоти) оптимального використання першим гравцем своєї чистої стратегії s_1, ордината точки C — ціну гри.

Якщо після побудови лінії $V_{\min}$ установлено, що θ_{j_1} та θ_{j_2} є активними стратегіями другого гравця, то ймовірності оптимального використання ним цих чистих стратегій визначаються як розв'язки системи рівнянь відносно невідомих q_{j_1}, q_{j_2} та V_1:

$$\begin{cases} q_{j_1} f_{1j_1} + q_{j_2} f_{1j_2} = V; \\ q_{j_1} f_{2j_1} + q_{j_2} f_{2j_2} = V; \\ q_{j_1} + q_{j_2} = 1. \end{cases}$$

Якщо на основі чистих стратегій гравців побудувати платіжну матрицю

$$F'' = \begin{pmatrix} f_{1j_1} & f_{1j_2} \\ f_{2j_1} & f_{2j_2} \end{pmatrix},$$

то виходячи з викладок, наведених вище, легко отримати формули для розрахунку ймовірностей щодо оптимального використання гравцями своїх активних чистих стратегій, а саме:

$$p_1^* = \frac{f_{2j_2} - f_{2j_1}}{f_{1j_1} - f_{1j_2} - f_{2j_1} + f_{2j_2}};$$

$$p_2^* = 1 - p_1^* = \frac{f_{1j_1} - f_{1j_2}}{f_{1j_1} - f_{1j_2} - f_{2j_1} + f_{2j_2}}; \tag{1.22}$$

$$q_{j_1}^* = \frac{f_{2j_2} - f_{1j_2}}{f_{1j_1} - f_{1j_2} - f_{2j_1} + f_{2j_2}};$$

$$q_{j_2}^* = 1 - q_{j_1}^* = \frac{f_{1j_1} - f_{1j_2}}{f_{1j_1} - f_{1j_2} - f_{2j_1} + f_{2j_2}}, \tag{1.23}$$

а також ціни гри:

$$V^* = \frac{f_{1j_1} \cdot f_{2j_2} - f_{1j_2} \cdot f_{2j_1}}{f_{1j_1} - f_{1j_2} - f_{2j_1} + f_{2j_2}}. \tag{1.24}$$

Виходячи з умови прикладу отримуємо:

$$F'' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$p_1^* = \frac{1-(-1)}{2-0-(-1)+1} = 0{,}5; \quad p_2^* = 1-0{,}5 = 0{,}5;$$

$$q_{j_1}^* = q_3^* = \frac{1-0}{2-0-(-1)+1} = 0{,}25; \quad q_{j_2}^* = q_5^* = 1-0{,}25 = 0{,}75;$$

$$V^* = \frac{2\times 1 - 0\times(-1)}{2-0-(-1)+1} = 0{,}5.$$

1.9. ПОЗНАЧЕННЯ, ВИКОРИСТОВУВАНІ В РОЗДІЛІ 1

$S = (s_1;...;s_m)$ — множина альтернативних рішень СПР (чистих стратегій першого гравця);

$P = (p_1;...;p_m)$ — розподіл імовірності щодо використання СПР (першим гравцем) своїх чистих стратегій;

$P^* = (p_1^*;...;p_m^*)$ — оптимальний розподіл імовірності щодо використання СПР (першим гравцем) своїх чистих стратегій;

S^* — множина оптимальних рішень (чистих стратегій) СПР ($S^* \subseteq S$);

s_{k_0} — оптимальне рішення (чиста стратегія) СПР (першого гравця);

k_0 — порядковий номер оптимального рішення (чистої стратегії);

m — кількість рішень (стратегій), що складають множину S;

s_P, s_{P^*} — відповідно змішана та оптимальна змішана стратегія СПР (першого гравця), що визначається вектором розподілу ймовірності відповідно P, P^*;

$\Theta = (\theta_1;...;\theta_n)$ — множина станів економічного середовища (чистих стратегій другого гравця);

n — кількість станів, що складають множину Θ;

$Q = (q_1;...;q_n)$ — апріорний розподіл імовірності щодо станів економічного середовища;

θ_Q, θ_{Q^*} — відповідно змішана та оптимальна змішана стратегія другого гравця, що визначається вектором розподілу ймовірності відповідно Q, Q^*;

θ_{j_0} — оптимальне рішення (чиста стратегія) другого гравця;

j_0 — порядковий номер оптимальної чистої стратегії другого гравця;

$F = (f_{kj} : k = 1,...,m;\ \ j = 1,...,n)$ — функціонал оцінювання (платіжна матриця);

$f_{kj} = f(s_k;\ \theta_j)$ — кількісна оцінка ефективності використання СПР своєї чистої стратегії s_k у випадку, коли економічне середовище знаходиться у стані θ_j $(k = 1,...,m;\ j = 1,...,n)$;

$f(s;\theta)$ — функція виграшу першого гравця;

$Z = (z_{kj} : k = 1,...,m;\ \ j = 1,...,n)$ — матриця ризику (невикористаних можливостей);

z_{kj} — кількісна оцінка збитків (невикористаних можливостей), які може отримати СПР у випадку вибору ним стратегії s_k $(k = 1,...,m)$ в умовах стану економічного середовища θ_j, порівняно з результатом, який отримав би СПР в разі вибору найвигіднішої для нього стратегії в умовах цього ж стану θ_j;

α_k^+ — величина мінімального виграшу СПР у разі прийняття ним рішення (чистої стратегії) s_k;

α^+ — нижня ціна гри;

β_k^- — величина максимального програшу СПР у разі прийняття ним рішення (чистої стратегії) s_k;

β^- — верхня ціна гри;

$f_{k_0 j_0} = \alpha^+ = \beta^-$ — сідлова точка матриці F;

$V^* = \alpha^+ = \beta^- = f_{k_0 j_0}$ — чиста ціна гри;

$\Delta_P = \{P = (p_1;...;p_m): \sum_{k=1}^{m} p_k = 1;\ p_k \geq 0,\ \ k = 1,...,m\}$ — множина можливих розподілів імовірності щодо стратегій СПР (першого гравця);

$\Delta_Q = \{Q = (q_1;...;q_n): \sum_{j=1}^{n} q_j = 1;\ q_j \geq 0,\ \ j = 1,...,n\}$ — множина можливих розподілів імовірності щодо станів економічного середовища (другого гравця);

$R_k = (r_{k1};...;r_{kn})$ — дискретна випадкова величина, що відображає можливі значення норми прибутку активу k-го виду ($k = 1,...,m$);

r_{kj} — величина норми прибутку активу k-го виду за настання j-го стану економічного середовища ($k = 1,...,m; \; j = 1,...,n$);

$C_k = (c_{k1};...;c_{kn})$ — дискретна випадкова величина, що відображає можливі значення ціни активу k-го виду ($k = 1,...,m$);

c_{kj} — ціна k-го активу за настання j-го стану економічного середовища ($k = 1,...,m$; $j = 1,...,n$);

$D_k = (d_{k1};...;d_{kn})$ — дискретна випадкова величина, що відображає можливі значення дивідендів щодо активу k-го виду ($k = 1,...,m$);

d_{kj} — величина дивіденду щодо k-го активу за настання j-го стану економічного середовища ($k = 1,...,m$; $j = 1,...,n$);

$X = (x_1;...;x_m)$ — структура портфеля активів;

x_k — частка капіталу, інвестованого в актив k-го виду ($k = 1,...,m$);

$R = (r_{kj} : k = 1,...,m; \; j = 1,...,n)$ — матриця норм прибутку активів, що складають портфель;

$m_k = M(R_k) = \sum_{j=1}^{n} q_j r_{kj}$ — сподівана норма прибутку активу k-го виду ($k = 1,...,m$);

$\sigma_k^2 = D(R_k)$ — величина ризику (дисперсія) активу k-го виду ($k = 1,...,m$);

$\rho_{kj} = \rho(R_k; R_j)$ — коефіцієнт кореляції між нормами прибутків активів k-го та j-го видів ($k = 1,...,m$; $j = 1,...,n$);

$\sigma_{kj} = \mathrm{cov}(R_k; R_j) = \sigma_k \sigma_j \rho_{kj}$ — коваріація між нормами прибутків активів k-го та j-го видів ($k = 1,...,m$; $j = 1,...,n$);

$C = (\sigma_{kj} : k = 1,...,m; \; j = 1,...,n)$ — матриця коваріацій між нормами прибутку активів, що складають портфель;

$R_\Pi = \sum_{k=1}^{m} x_k R_k$ — дискретна випадкова величина, що відображає сумарну норму прибутку активів, що складають портфель;

$m_\Pi = M(R_\Pi) = \sum_{k=1}^{m} x_k m_k$ — сподівана норма прибутку портфеля, складеного з m активів;

$\sigma^2_{\Pi} = D(R_{\Pi}) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} x_k x_j \sigma_{kj}$ — величина ризику (дисперсія норми прибутку) портфеля, складеного з m активів;

W_k^0, W_k — грошові кошти у національній грошовій одиниці, що є еквівалентом придбаній (наявній) валюті *k*-го виду;

W^0, W — обсяг коштів у національній грошовій одиниці, що є еквівалентом придбаному (наявному) «валютному кошику»;

$M = (\mu_{kj};\, k = 1,\ldots,m;\; j = 1,\ldots,n)$ — функціонал оцінювання у виборі найбільш надійних інвестиційних проектів;

μ_{kj} — міра ступеня належності *k*-го проекту до портфеля найбільш надійних проектів за реалізації *j*-го стану економічного середовища ($k = 1,\ldots,m$; $j = 1,\ldots,n$).

РОЗДІЛ 2

ЯКІСНИЙ І КІЛЬКІСНИЙ АНАЛІЗ ЕКОНОМІЧНОГО РИЗИКУ. КІЛЬКІСНА ОЦІНКА МІРИ РИЗИКУ

Скорочення, використовувані у розділі:

ВВ — випадкова величина;
УГО — умовна грошова одиниця;
ЧПВ — чиста приведена вартість;
СПР — суб'єкт прийняття рішень;
МОКА — модель оцінки капітальних активів;
CAPM — Capital Asset Price Model;
S & P — Standart & Poor's;
FT-SE — Financial Times Stock Exchange;
CDAX — Composite Deutsher Aktien-dex.

Допустимий ризик — необхідний атрибут (умова) раціональної стратегії і тактики підприємництва (менеджменту). Аналіз, оцінка та управління економічним ризиком — потужний інструментарій прийняття рішення на макро- та мікрорівнях, у бізнесі (маркетингу, менеджменті). Аналіз ризиків є важливим засобом розширення у спектрі аналізу економічних об'єктів явищ і процесів, підвищення ефективності управлінських рішень. Аналіз ризиків поділяють на два види, що взаємно доповнюють один одного: якісний та кількісний.

Якісний аналіз ризику є найбільш складним і вимагає ґрунтовних знань, досвіду та інтуїції у даній сфері економічної діяльності. Його основна мета — визначення чинників ризику, областей ризику, після чого можна індентифікувати всі можливі ризики.

Кількісний аналіз ризику полягає у кількісному (числовому) визначенні ступенів окремих ризиків і ризику даного виду діяльності (проекту) у цілому. Це теж досить складна проблема.

2.1. ОСНОВНІ ЗАСАДИ ЯКІСНОГО АНАЛІЗУ РИЗИКУ

2.1.1. Елементи класифікації ризику

Ефективність організації управління бізнесом у цілому, і ризиком зокрема, багато в чому визначається класифікацією ризику. У низці праць [22, 34, 36, 133] пропонується здійснювати класифікацію ризику на основі таких його характеристик:

1) щодо масштабу та розмірів — ризик глобальний, локальний;

2) щодо аспектів — ризик психологічний, соціальний, економічний, юридичний, політичний, медико-біологічний тощо;

3) щодо міри об'єктивності та суб'єктивності рішень — ризик з об'єктивною, суб'єктивною чи об'єктивно-суб'єктивною ймовірністю;

4) щодо міри (ступеня) ризиконасиченості рішення — ризик мінімальний, середній, оптимальний, максимальний (або допустимий, критичний, катастрофічний);

5) щодо типу — ризик раціональний (обґрунтований), нераціональний (необґрунтований), авантюрний (азартний);

6) щодо часу прийняття рішення — ризик випереджувальний, своєчасний, запізнілий;

7) щодо чисельності осіб, які приймають рішення, — ризик індивідуальний, груповий;

8) щодо ситуації прийняття рішення — ризик стохастичний (в умовах невизначеності), конкуруючий (в умовах конфлікту), розпливчастий (в умовах нечітко сформульованих вимог), комплексний.

Необхідно детально проаналізувати, змоделювати кожний вид ризику, а також оцінити його рівень. Цим самим створюються передумови для певного зниження ступеня ризику, управління ним.

Ризик, як правило, поділяють на два типи — динамічний та статичний [4, 7, 22, 34, 36]. Розрізняють також такі основні види ризику: виробничий, фінансовий (кредитний), інвестиційний, ринковий, портфельний тощо.

2.1.2. Деякі види ризику у спектрі економічних проблем

Серед видів *ризику цінних паперів* можна виділити: 1) ризик падіння загальноринкових цін; 2) ризик інфляції; 3) галузевий ризик; 4) фінансовий ризик; 5) ризик ліквідності; 6) систематичний та несистематичний ризики.

У [4, 34] зазначається, що *комерційні ризики* поділяються на спекулятивні та чисті. *Чисті ризики* означають можливість збитків чи нульового результату. *Спекулятивні ризики* проявляються у можливості одержання як позитивного результату, так і негативного. *Фінансові ризики* — це спекулятивні ризики. До фінансових ризиків належать: кредитний, відсотковий, валютний, втрачених фінансових зисків тощо.

Проблеми, пов'язані з аналізом *банківських ризиків*, висвітлюються у [9, 22, 34, 36, 60, 89 тощо]. Відмічається, що основними видами ризиків, якими можуть бути обтяжені банки, є: кредитний, відсотковий, валютний, ліквідності, фінансування, акціонерний, товарний, андеррайтингу (гарантування випуску цінних паперів), політичний, економічний, демографічний, репутації тощо.

Найважливішими елементами, покладеними в основу класифікації банківських ризиків [9, 22, 34, 36, 60], є:

— тип або вид комерційного банку;

— сфера його впливу та основні чинники виникнення банківського ризику;

— склад (структура) клієнтів банку;

— розподіл ризику в часі;

— можливості та засоби, доступні управлінню банківськими ризиками.

Валютний ризик — це загроза втрат, пов'язаних зі зміною курсів іноземних валют під час здійснення угод щодо їх купівлі-продажу. Основні види валютного ризику [34, 36]: операційний, трансляційний, економічний.

Інвестиційна діяльність у всіх формах і видах обтяжена ризиком, ступінь якого посилюється з переходом до ринкової економіки. Види *інвестиційних ризиків* різноманітні та численні. Їх поділяють на три групи [10, 22, 34, 36]: 1) ризик щодо сфери прояву: економічний, політичний, соціальний, екологічний тощо; 2) ризик щодо форми інвестування: фінансового інвестування, реального інвестування; 3) ризики щодо джерел виникнення: систематичний (ринковий), несистематичний (специфічний).

Підприємницький ризик — це ризик, який виникає в результаті будь-яких видів діяльності, пов'язаних з виробництвом продукції, товарів, послуг, реалізацією їх, товарно-грошовими і фінансовими операціями, комерцією, здійсненням соціально-економічних і науково-технічних проектів. Його поділяють [23] на такі види: 1) ризик помилкової стратегії; 2) ризик вибору товарів і споживачів (сегмента ризику); 3) ризик неправильної оцінки кон'юнктури ринку (співвідношення попиту та пропозиції, потенційного обсягу ринку, ступеня конкуренції, цінової політики тощо); 4) ризик інфляції та зумовленого нею зростання цін на сировину, напівфабрикати, комплектуючі, зміни темпів зростання заробітної плати; 5) ризик транспортування сировини і готової продукції; 6) ризик нестабільності податкового законодавства, кредитно-грошової політики, митних правил тощо.

2.1.3. Якісний аналіз ризику

Процедуру проведення якісного аналізу ризику описано в [3, 22, 34, 36, 115]. Якісний аналіз ризику містить декілька аспектів.

Перший аспект якісного аналізу ризику пов'язаний з необхідністю порівняння сподіваних позитивних результатів з можливими економічними, соціальними та іншими, як сьогоднішніми, так і майбутніми, наслідками. Ризик має бути обґрунтованим, тобто ризикувати доцільно, якщо це веде до кращих наслідків, при обґрунтуванні правильності своїх дій.

Проблеми ризику мають розглядатися та враховуватися як під час розробки стратегій, так і в процесі реалізації оперативних задач. У противному разі — не уникнути неприємних «сюрпризів», як-от: кожен рік осінь, а за нею зима настають «зовсім раптово», та так, що не встигаємо своєчасно підготуватися до роботи за нових погодних умов і тоді бездумно нарощуємо рівень господарського ризику.

Другий аспект якісного аналізу пов'язаний з виявленням впливу рішень, що приймаються за умов невизначеності, на інтереси суб'єктів економічного життя. Без урахування інтересів (зацікавленості), без керування ними неможливі реальні якісні перетворення в соціально-економічному житті. Необхідно виявити: кому ризик корисний? чиїм інтересам відповідає? Без зацікавленості в результатах економічних рішень немає ризику.

Ризикованій ситуації притаманні такі основні умови [23, 34, 108, 117]: наявність невизначеності, конфлікту; наявність альтернатив і необхідність вибору однієї з них (відмова від вибору також є різновидом вибору); зацікавленість в результатах; можливість оцінити наявні альтернативи і прийняти рішення.

Усі чинники, що тою чи іншою мірою впливають на ступінь ризику, можна поділити на дві групи: об'єктивні та суб'єктивні.

Об'єктивні чинники не залежать безпосередньо від фірми та менеджерів (СПР): інфляція, конкуренція, політичні та економічні кризи, екологія, мита, наявність режиму найбільшого сприяння, можлива робота в зоні вільного економічного підприємництва тощо.

Суб'єктивні чинники характеризують СПР (безпосередньо менеджерів, фірму): виробничий потенціал, технологічне забезпечення, рівень предметної та технологічної спеціалізації, організацію праці, ступінь кооперативних зв'язків, рівень техніки безпеки, рівень компетентності та інтелектуальний потенціал СПР, вибір типу контрактів з інвестором чи замовником тощо. Так, зокрема, від типу контракту залежить ступінь ризику та розміри винагороди після завершення контракту.

Успіх у бізнесі визначається вмінням творчо використовувати та поєднувати способи максимізації прибутку з методами управління економічним ризиком в економічних і фінансових ситуаціях, які реально виникають.

2.2. ОСНОВНІ ПІДХОДИ ДО КІЛЬКІСНОГО АНАЛІЗУ РИЗИКУ

Кількісний аналіз ризику може здійснюватися в різні способи, серед яких найпоширенішими є: метод аналогій, аналіз чутливості, методи імітаційного моделювання, статистичні методи, експертні методи, аналіз доречності витрат. Коротко охарактеризуємо деякі з них.

Одним з найпростіших і широковідомих методів урахування чинників невизначеності є *аналіз чутливості*. Цей метод описано в працях багатьох авторів [23, 34, 36, 51 та ін.]. В якості міри чутливості найзручніше використовувати коефіцієнт еластичності. При цьому ризик є тим більшим, чим більшим за абсолютною величиною є коефіцієнт еластичності відносно можливих змін відповідного чинника. На жаль, аналіз чутливості має деякі вади, а саме: він спирається на аналіз впливу на результуючі ознаки тільки окремих чинників, а не їх інтегрального впливу, а також не враховує взаємозв'язку (взаємозалежності) між цими чинниками.

Процес *кількісного аналізу ризику методами імітаційного моделювання* можна умовно поділити на сім кроків. Коротко опишемо суть кожного з них.

Крок 1. Формування моделі, здатної прогнозувати значення відповідних показників ефективності об'єкта (проекту).

Крок 2. Вибір ключових аргументів (чинників ризику) аналізованого об'єкта (проекту).

Крок 3. Побудова множини можливих (імовірних) значень ключових аргументів (чинників ризику).

Крок 4. Побудова розподілу ймовірності випадкових значень ключових аргументів (чинників ризику).

Крок 5. Виявлення відношення взаємозалежності (кореляції) між ключовими аргументами (чинниками ризику).

Крок 6. Генерація випадкових сценаріїв, що ґрунтуються на системі прийнятих гіпотез щодо можливих значень ключових чинників.

Крок 7. Статистичний аналіз результатів імітаційного моделювання. Інтерпретація результатів аналізу.

За методом *аналізу доречності витрат* (аналізу збитків) вводяться до розгляду такі поняття, як області (зони) ризику [7, 23, 34, 36, 43, 88]: безризикова зона, зона допустимого ризику, зона критичного ризику, зона катастрофічного ризику.

Безризикова зона — це область, в якій випадкові збитки не очікуються. Їй відповідають нульові збитки чи перевищення прибутку над сподіваним значенням. Ця область є областю виграшу підприємця.

Зона допустимого ризику — це область, у межах якої зберігається економічна доцільність підприємницької діяльності, тобто випадкові збитки можуть мати місце, але вони менші сподіваного прибутку від підприємницької діяльності.

Зона критичного ризику — це область, де наявною є можливість збитків, які перевищують величину (обсяг) очікуваних прибутків аж до величини повної обчисленої (розрахункової) валової виручки від підприємницької діяльності. Величина можливих (імовірних) збитків у цій зоні перевищує сподіваний прибуток і може призвести до втрати усіх коштів, вкладених підприємцем у справу.

Зона катастрофічного ризику — це область можливих збитків, що за своєю величиною (обсягом) перевищують критичний рівень і можуть досягати величини (обсягу) майнового стану підприємця та невиправданих боргів.

Катастрофічний ризик може призвести до краху, банкрутства компанії (фірми), її закриття і розпродажу її майна. До категорії катастрофічного ризику слід віднести також ризик, пов’язаний із безпосередньою загрозою для життя чи екологічною катастрофою.

Експертні методи оцінювання ризику здійснюються, як правило, за відсутності статистичних даних, необхідних для розрахунку відповідних кількісних показників, або ж, зокрема, коли це пов’язано з оцінюванням проекту (інноваційного), що не має аналогів. Цей метод базується на опитуванні кваліфікованих фахівців і відповідній подальшій математичній обробці результатів цього опитування. Для одержання деталізованих характеристик ризику опитування орієнтують стосовно окремих видів ризиків, характерних для певного (даного) об'єкта ризику [21, 28].

2.3. СИСТЕМА КІЛЬКІСНИХ ОЦІНОК МІРИ ЕКОНОМІЧНОГО РИЗИКУ

Однією з найважливіших складових ризикології є система показників кількісної оцінки ступеня (рівня, міри) економічного ризику. Оцінювання ризику необхідно здійснювати системно — в абсолютному та відносному вираженні. Найбільш загальний підхід до кількісної оцінки рівня ризику полягає у побудові відповідної функції корисності й базується на кількісній оцінці міри ризику як векторної величини.

2.3.1. Міра ризику як векторна величина

Кількісна оцінка ризику є системотвірною складовою інструментарію ризикології. Чим досконалішими є методи дослідження та кількісної оцінки ризику, тим меншим стає чинник невизначеності. Зважаючи на те, що ризик — це об'єктивно-суб'єктивна економічна категорія, в кількісній мірі ризику необхідно враховувати як його об'єктивну, так і суб'єктивну сторони*.

Отже, оцінюючи ризик економічного об'єкта (системи), суб'єкт ризику, як правило, цікавиться низкою показників, які відбивають різні грані невизначеності, конфлікту та породженого ними ризику. На наш погляд, кількісна міра ризику — це вектор $W = (w_1;\ w_2;...)$, де w_i $(i = 1,\ 2,...)$ — окремі показники (компоненти) міри ризику. Частина з них має об'єктивну природу (дисперсія, семиваріація, коефіцієнт варіації тощо); решта компонент цього вектора є суб'єктивними оцінками ступеня ризику, оскільки вони залежать від ставлення суб'єкта ризику до невизначеності, конфліктності.

* *Вітлінський В.В., Великоіваненко Г.І.* Розвиток концепції кількісної оцінки ризику // Ризикологія в економіці та підприємництві: Зб. наук. праць / За матеріалами Міжнар. наук.-практ. конф. (27—28 березня 2001 р.) (*далі* — Ризикологія…). — К.: КНЕУ, Акад. ДПС України, 2001. — 449 с.

На даний час теорія ризику та економічна практика виробили низку окремих показників кількісної оцінки ступеня ризику, серед яких фінансові коефіцієнти широко використовувані, наприклад, у банківській, страховій справі, в проектному менеджменті. Низку показників ступеня ризику поділяють на такі, що характеризують міру ризику в абсолютному чи у відносному вираженні. Існують також інші класифікаційні ознаки щодо вибору компонент вектора *W*. Наголосимо, що цей вибір залежить від сфери економічної діяльності (об'єкта, що аналізується, системи тощо), від цілей дослідження (аналізу, оцінювання, прийняття рішень), від прийнятої системи гіпотез, від інформаційної ситуації (вид, тип невизначеності та конфлікту), а також від його екстравертності чи інтравертності тощо.

Для прикладу звернемося до прогнозування і планування податкових надходжень до державного та місцевого бюджетів. Розглянемо категорію податкового ризику як одну із складових багаточинникової оцінки стійкості та надійності прийняття рішень щодо обсягів планових податкових надходжень на підґрунті їх прогнозованих обсягів*.

Відомо, що прогнозування будь-якого економічного показника пов'язане з похибкою прогнозу. Величина похибки визначає ступінь ризику планів (рішень), які ґрунтуються на прогнозованих економічних показниках. У статистичному моделюванні та прогнозуванні вводяться та аналізуються такі поняття, як середній та емпіричний ризик. За показник ступеня середнього ризику, зокрема, обирається математичне сподівання квадрата різниці між розрахунковими і фактичними значеннями прогнозованого економічного показника. Мінімізація ступеня середнього ризику дає змогу найбільш правдоподібно виявити закономірності та реально існуючі суттєві взаємозв'язки. При порівнянні альтернативних математичних моделей прогнозування кращою можна вважати ту з них, якій відповідає мінімальне значення низки відповідних показників ступеня ризику, і, зокрема, значення ступеня середнього ризику. Це стосується і моделей прогнозування обсягів податкових надходжень.

На підставі прогнозованих обсягів податкових надходжень визначають плановим обсяг, який приймається дещо меншим, аніж середнє значення прогнозованого обсягу. На цьому етапі необхідно, крім об'єктивної складової міри ризику, ввести й суб'єк-

---

* *Терещенко Л. О.* Оцінка ризику та оптимізація управління ним у прогнозуванні податкових надходжень // Ризикологія…

тивну складову, за яку доречно обрати ймовірність недовиконання запланованого обсягу податкових надходжень, обчислену на підґрунті їх прогнозованого обсягу. Очевидно, що величину оцінки ступеня ризику (ймовірність) недовиконання планового обсягу надходжень необхідно зробити якомога меншою. Відсоток недовиконання обсягів планових податкових надходжень, у разі встановлення цих обсягів, може розглядатися як ще один показник суб'єктивної оцінки міри ризику. Він задається нормативно, залежно від ставлення суб'єкта прийняття рішення до ризику на підґрунті обсягів прогнозованих величин, що задаються певним інтервалом значень і де враховується ризик того, що прогнозована величина може сягнути за межі цього інтервалу.

Доречно також ввести як один із компонентів векторної оцінки міри податкового ризику показник ступеня ризику невикористаних можливостей, який характеризує міру відхилення планових обсягів податкових надходжень від максимально можливого спрогнозованого обсягу надходжень, одержаного на базі використання адекватних математичних моделей і методів. Усі ці складові міри податкового ризику доцільно використовувати системно, комплексно.

У низці наукових праць домінує думка, що показником ризику може слугувати певна скалярна величина (індикатор ризику). В деяких випадках це правильно, але далеко не завжди. Тому прагнення синтезувати такий індикатор, здійснюючи певну згортку окремих показників ризику, не в усіх випадках сприяє правильному оцінюванню його та врахуванню під час аналізу проектів. Наприклад, у прогнозуванні економічних показників використовується низка критеріїв адекватності та точності прогнозу. Для здійснення інтервального прогнозу вектор ризику W можна встановити як такий, що складається з трьох параметрів: $w_1 = \sigma$ — середньоквадратичне відхилення прогнозованої величини; $w_2 = p$ — імовірність того, що ця випадкова величина може сягати за межі певного прогнозованого інтервалу; $w_3 = CV$ — коефіцієнт варіації. У даному випадку параметри вектора $W(\sigma; p; CV)$ немає підстав інтегрувати, здійснюючи їх згортку. Прогнозована величина знаходиться в інтервалі $m \pm k\sigma$, де m — математичне сподівання прогнозованого показника; k знаходиться з оцінки закону розподілу прогнозованого показника (як випадкової величини), а також беручи до уваги задане (суб'єктивне) значення компоненти ризику $w_2 = p = p^*$. Коли немає підстав для оцінки закону розподілу, можна скористатися нерівністю Чебишева.

Коефіцієнт варіації у ряді випадків виступає в ролі індикатора для обчислення ефективних (несприятливих) значень певного економічного показника:

$$B^{\pm} = m \mp k\sigma,$$

де $k = k(p)$ залежить від нормативного (бажаного) значення $p = p^{*}$. А з тотожності $B^{\pm} = 0$ маємо, що $k_0 = \frac{1}{CV}$.

У ряді випадків показники вектора ризику (W) можна розділити на дві підгрупи: ті, що задаються як нормативні і можуть слугувати як певні решета для відбору альтернатив, і ті, що їх можна інтегрувати за деякими правилами згортки.

Необхідно також наголосити, що далеко не завжди виконуються умови, коли економічні показники (які ми трактуємо як випадкові величини) мають симетричний та, більш того, нормальний закон розподілу. У цих випадках за базу слід обрати моду, а одним з показників ризику може бути модальне семіквадратичне відхилення.

Крім того, в ряді випадків як альтернатива теорії ймовірностей усе частіше використовується теорія нечітких множин, якщо вона адекватно відбиває даний вид невизначеності. Тоді будуються свої показники оцінки ступеня ризику та відповідний вектор (W) міри ризику. Зазначимо, що для оцінювання міри ризику перспективним є тензорний аналіз, який дає змогу адекватно вимірювати ризики і приймати правильне рішення щодо зниження його ступеня.

2.3.2. Показники допустимого, критичного та катастрофічного ризиків

Рівень ризику традиційно оцінюється, зокрема, як імовірність настання небажаних наслідків (невдачі, наприклад, збитків). Розглянемо відповідні показники ризику [88], що характеризують зони ризику.

Уведемо позначення: Ω — випадкова величина (ВВ), що відображає можливі збитки (найчастіше задається у відносному вираженні); ω — деякий рівень збитків, що дорівнює очікуваним прибуткам; $\omega_{дп}$ — рівень збитків, рівний за величиною обсягу очікуваних прибутків; $\omega_{кр}$ — рівень збитків, рівний за величиною повній розрахунковій сумі виручки; $\omega_{кт}$ — рівень збитків, рівний за величиною обсягу всього майна підприємця. Якщо $0 < \omega_{дп} < \omega_{кр} < \omega_{кт}$, то області ризику можна визначити нерівностями:

$\Omega < \omega_{дп}$ — зона допустимого ризику; $\omega_{дп} \le \Omega < \omega_{кр}$ — зона критичного ризику; $\omega_{кт} \le \Omega < \omega_{кт}$ — зона катастрофічного ризику.

Для аналізу ризику збитків кількісною оцінкою ступеня ризику невдалого результату може послужити ймовірність неперевищення певного рівня збитків:

$$P(\Omega < \omega) = F(\omega).$$

Функція $F(\omega)$ називається *функцією розподілу ймовірності (інтегральною функцією розподілу).* Вона має такі властивості:

1) $0 \le F(\omega) \le 1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} F(\omega) = 1$; $\lim\limits_{x \to +\infty} F(\omega) = 1$;

2) F (ω) — неспадна функція, тобто за умови, що $\omega_1 < \omega_2$, значення $F(\omega_1) \le F(\omega_2)$;

3) імовірность того, що ВВ Ω приймає значення з напіввідкритого інтервалу $[\alpha; \beta)$, визначається співвідношенням

$$P(\alpha \le \Omega < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Тоді ймовірність попадання у відповідні області ризику обчислюється за формулами

$$P_{дп} = P(0 \le \Omega < \omega_{дп}) = F(\omega_{дп}) - F(0) = F(\omega_{дп});$$

$$P_{кр} = P(\omega_{дп} \le \Omega < \omega_{кр}) = F(\omega_{кр}) - F(\omega_{дп});$$

$$P_{кт} = P(\omega_{кр} \le \Omega < \omega_{кт}) = F(\omega_{кт}) - F(\omega_{кр}).$$

Якщо зробити припущення щодо неперервності ВВ Ω (а це припущення є цілком природним), то найбільш повне уявлення про ризик може дати *функція щільності розподілу ймовірності (диференціальна функція розподілу).* Ця функція повинна задовольняти таким вимогам:

1) імовірність нульових збитків (можливість їх уникнути) практично дорівнює нулю, бо мінімальні збитки завжди мають місце, тобто $f(\omega) = 0$, якщо $\omega \le 0$, і $f(\omega) > 0$, якщо $\omega > 0$;

2) імовірність виключно великих збитків практично дорівнює нулю, бо реальні збитки (у більшості випадків) мають верхню межу, тобто $\lim\limits_{x \to +\infty} f(\omega) = 0$;

3) функція щільності є унімодальною [65], тобто існує значення рівня збитків ω^* таке, що $f(\omega^*) = \max\limits_{0 \le x < +\infty} f(\omega)$. Рівень збитків ω^* у даному випадку називається *модою* $(\omega^* = Mo(\Omega))$;

4) функція щільності $f(\omega)$ є неперервною і, у випадку єдиної модальної точки ω^*, монотонно зростаючою в проміжку $[0;\, \omega^*)$ та монотонно спадною в проміжку $(\omega^*;\, +\infty)$. Крім того, як показують дослідження реальних економічних процесів, функція $f(\omega)$ найчастіше є асиметричною відносно моди ω^*. Між диференціальною та інтегральною функціями розподілу існує зв'язок, який відображається рівностями

$$f(\omega) = F'(\omega) \text{ та } F(\omega) = \int_0^{\omega} f(t)dt.$$

Зазначимо також, що ймовірність прийняття ВВ Ω свого значення у відкритому інтервалі $(\alpha; \beta)$, напіввідкритих $[\alpha; \beta)$ або $(\alpha; \beta]$ чи закритому $[\alpha; \beta]$ інтервалах однакова, а саме:

$$P(\alpha < \Omega < \beta) = P(\alpha \le \Omega < \beta) = P(\alpha < \Omega \le \beta) = P(\alpha \le \Omega \le \beta) =$$
$$= \int_{\alpha}^{\beta} f(t)\, dt = F(\beta) - F(\alpha),$$

а в частинному випадку, коли $\Omega \in [0;\, +\infty)$,

$$P = (0 \le \Omega < +\infty) = \int_0^{+\infty} f(t)dt = F(+\infty) - F(0) = 1 - 0 = 1.$$

У прикладних проблемах економічного ризику поряд з функціями $f(\omega)$ та $F(\omega)$ широке використання має *функція розподілу ймовірності перевищення певного рівня збитків*

$$W(\omega) = P(\Omega \ge \omega) = 1 - F(\omega),$$

де $W(\omega)$ — це ймовірність щодо перевищення збитками фіксованого рівня ω. Вона має такі властивості:

1) імовірність збитків, більших від нуля, дорівнює одиниці, тобто

$$W(0) = P(\Omega \ge 0) = 1 - F(0) = 1 - 0 = 1;$$

2) $W(\omega)$ є незростаючою функцією, тобто при $\omega_1 < \omega_2$ значення $W(\omega_1) \ge W(\omega_2)$;

3) імовірність перевищення виключно великих збитків дорівнює нулю, тобто $\lim\limits_{x\to+\infty} W(\omega)=0.$

На основі функції $W(\omega)$ будуються найважливіші (три) *показники підприємницького ризику*:

1) *показник допустимого ризику*

$$W(\omega_{\text{дп}})=P(\Omega\geq\omega_{\text{дп}})=\int\limits_{\omega_{\text{дп}}}^{+\infty} f(t)dt=1-F(\omega_{\text{дп}});$$

2) *показник критичного ризику*

$$W(\omega_{\text{кр}})=P(\Omega\geq\omega_{\text{кр}})=\int\limits_{\omega_{\text{кр}}}^{+\infty} f(t)dt=1-F(\omega_{\text{кр}});$$

3) *показник катастрофічного ризику*

$$W(\omega_{\text{к т}})=P(\Omega\geq\omega_{\text{к т}})=\int\limits_{\omega_{\text{к т}}}^{+\infty} f(t)dt=1-F(\omega_{\text{кт}}).$$

Для прийняття рішення щодо здійснення певної підприємницької діяльності є недостатнім знання лише оцінок цих показників ризику. Необхідно ще задати (встановити чи прийняти) їх граничні значення — так звані *критерії допустимого* $(k_{\text{дп}})$, *критичного* $(k_{\text{кр}})$ та *катастрофічного* $(k_{\text{кт}})$ *ризиків*. Тоді рішення приймається згідно з правилом: участь у проекті слід визнати доцільною, якщо виконуються загальні умови прийнятності рівня ризику:

$$W(\omega_{\text{дп}})\leq k_{\text{дп}};\;\; W(\omega_{\text{кр}})\leq k_{\text{кр}};\;\; W(\omega_{\text{кт}})\leq k_{\text{кт}}.$$

2.3.3. Імовірність як один із показників кількісної оцінки ступеня ризику

У ряді ситуацій, зокрема у страхуванні, величину (ступінь) ризику W визначають як імовірність настання небажаних наслідків. У цьому разі

$$W=p_{\text{н}},$$

де: $p_{\text{н}}$ — імовірність настання небажаних наслідків; W — величина ризику.

Під час аналізу збитків, розглянутому в пункті 2.3.2, кожній зоні ризику ставився у відповідність такий показник ризику, як імовірність перевищення певного рівня випадкових збитків:

$$W_{\text{дп}}=P(\Omega\geq\omega_{\text{дп}});\;\; W_{\text{кр}}=P(\Omega\geq\omega_{\text{кр}});\;\; W_{\text{кт}}=P(\Omega\geq\omega_{\text{кт}}).$$

Приклад 2.1. Розподіл імовірності відносних збитків (відношення обсягу збитків до запланованих витрат від даного виду підприємницької діяльності) описується функцією щільності

$$f(\omega)=\begin{cases} ae^{-\frac{\omega^2}{b^2}}, & \omega \geq 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases}.$$

СПР визначено границі допустимих, критичних та катастрофічних відносних збитків: $\omega_{дп} = 45\,\%$; $\omega_{кр} = 60\,\%$; $\omega_{кт} = 75\,\%$, йому також відомо, що параметр $b = 30\ \%$.

Оцінити величину ризику допустимих, критичних та катастрофічних збитків.

Розв'язання. В [32] показано, що значення параметра $b = 30\,\%$ відповідає моді випадкової величини *X*, яка описує відносні збитки, а інтегральна функція розподілу ймовірності щодо її значень задається формулою

$$F(\omega)=\begin{cases} 2\left(\Phi(t) - t\varphi(t)\right) & \Bigg| \quad , \text{ якщо } \omega \geq 0; \\ 0 & \Bigg| \; t = \dfrac{\varpi\sqrt{2}}{b}, \text{ якщо } \omega < 0, \end{cases}$$

де: $\varphi(t)$ — функція Гаусса; $\Phi(t)$ — функція Лапласа. А тому, здійснивши відповідні обчислення, отримуємо, що

$$W_{дп} = 1 - F(\omega_{дп}) = 1 - 0{,}7794 = 0{,}2206;$$

$$W_{кр} = 1 - F(\omega_{кр}) = 1 - 0{,}9528 = 0{,}0472;$$

$$W_{кт} = 1 - F(\omega_{кт}) = 1 - 0{,}9939 = 0{,}0061,$$

тобто рівень допустимих збитків може перевищуватися приблизно в 22 випадках зі 100, рівень прийнятих збитків — приблизно в п'яти випадках зі 100, рівень катастрофічних збитків — приблизно в шести випадках з 1000.

Відповідь: $W_{дп} = 0{,}2206$; $W_{кр} = 0{,}0472$; $W_{кт} = 0{,}0061$.

2.3.4. Оцінка ступеня ризику в абсолютному вираженні

В абсолютному вираженні ризик може визначатися сподіваною величиною можливих збитків, якщо збитки піддаються такому виміру. Як міру ризику використовують також оцінки мінливості результату.

2.3.4.1. Спрощений підхід до оцінювання ступеня ризику

Суть цього підходу полягає в тому, що за кількісної оцінки ступеня ризику спираються на одне (певне, обране) значення економічного показника, яке задає найважливішу, узагальнену характеристику цього показника у даній конкретній ситуації.

Якщо в якості такої узагальненої характеристики виступає величина небажаних наслідків (збитки, платежі тощо), то міра (ступінь) ризику невдачі (в процесі досягнення мети) може визначатись як добуток імовірності невдачі (небажаних наслідків) на величину цих наслідків, тобто

$$W = p_{\text{н}}\omega_{\text{н}},$$

де $\omega_{\text{н}}$ — величина небажаних наслідків.

2.3.4.2. Оцінка ступеня ризику як величини очікуваної невдачі

Несумнівний інтерес становить кількісна оцінка ступеня ризику, що ґрунтується на спектрі можливих результатів (збитків, платежів тощо). Коли ж відомі усі можливі наслідки окремої події та ймовірності її настання, для оцінки міри (ступеня) ризику використовується величина очікуваної невдачі (очікуване значення, математичне сподівання), тобто середньозважена величина всіх можливих результатів, де ймовірність кожного із них використовується як питома вага відповідного значення.

У випадку, коли всі можливі несприятливі наслідки події описуються дискретною ВВ

$$\Omega = \Omega^{-} = (\omega_1;...;\ \omega_n),$$

а розподіл імовірностей їх настання

$$P = (p_1;...;\ p_n);\ \ \sum_{j=1}^{n} p_j = 1,$$

то величину ступеня *ризику очікуваної невдачі* можна подати таким виразом:

$$W = M\left(\Omega^{-}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(p_j\omega_j\right).$$

Якщо ж ВВ X може приймати нескінченну кількість значень, то

$$W = M\left(\Omega^-\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\left(p_j \omega_j\right); \quad \sum_{j=1}^{\infty} p_j = 1$$

і при цьому відповідні числові ряди мають збігатись абсолютно.

Для неперервної ВВ Ω, що описує несприятливі наслідки $\left(\Omega = \Omega^- \ ; \ \Omega^- \in (-\infty; +\infty)\right)$, величина ризику очікуваної невдачі подається виразом:

$$W = M\left(\Omega^-\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt,$$

де $f(t)$ — функція щільності розподілу ймовірності і при цьому невласний інтеграл є абсолютно збіжним. Якщо ж $\Omega^- \in [a; b]$, то

$$W = M\left(\Omega^-\right) = \int_{a}^{b} t f(t) dt.$$

Зауважимо, що для обчислення сподіваного значення (математичного сподівання) в якості ймовірностей значень ВВ X на практиці використовують відносні частоти (настання цих значень), обчислені на основі статистичних даних, або їх вагу, обчислену на основі експертних оцінок. У свою чергу, обчислене сподіване значення можна розглядати як центр групування значень ВВ X, тобто як середньозважений результат (ризик).

Приклад 2.2. На основі даних спостережень встановлено, що обсяги можливих витрат у разі проведення бартерних операцій розподілені згідно з рівномірним законом в інтервалі від 50 до 120 УГО. Визначити міру ризику як: а) очікувану величину витрат; б) імовірність витрат, що перевищують допустимий рівень (сподіваний прибуток) $\omega_{\text{дп}} = 110$ УГО.

Розв'язання. Згідно з означенням, неперервна ВВ, рівномірно розподілена на відрізку $[\alpha; \beta]$, має функцію щільності

$$f(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha} & \text{за} \ \ \alpha \le \omega \le \beta; \\ 0 & \text{за} \ \ \omega < \alpha \ \text{та} \ \omega > \beta. \end{cases}$$

Отже, у нашому випадку

$$f(\omega) = \frac{1}{120 - 50} = \frac{1}{70}$$

за $\omega \in [50; 120]$. Тоді очікуване значення витрат

$$M(\Omega)=\int_{50}^{120}\frac{1}{70}tdt=\frac{1}{70}\times\left\|\frac{x^2}{2}\right\|_{50}^{120}=85\,(\text{УГО}).$$

Обчислимо значення показника допустимого ризику:

$$W_{\text{дп}}=1-F(\omega_{\text{дп}})=1-\int_{50}^{110}\frac{1}{70}dt=1-\frac{1}{70}x\Big|_{50}^{120}=1-\frac{1}{70}(110-50)=\frac{1}{7}.$$

Відповідь: а) $M(\Omega)=85$ УГО; б) $W_{\text{дп}}=W(110)=\frac{1}{7}$.

Зазначимо, що за наявності статистичних даних сподіване значення економічного показника (математичне сподівання) оцінюється за формулою

$$M(\Omega)\approx\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\omega_t,$$

де T — обсяг статистичної вибірки (кількість періодів).

Зауважимо також, що у випадку, коли адекватною моделлю міри невдачі є ВВ з несиметричним розподілом імовірності, центрами групуваннями її значень будуть моди. Якщо ВВ має єдиний і чітко «виражений» центр групування, то доцільно використовувати в якості *величини ступеня ризику* моду ВВ Ω^-, тобто покласти

$$W=Mo(\Omega^-).$$

Для дискретного статистичного розподілу модою $Mo(\Omega)$ вважають те значення ВВ Ω, якому відповідає найбільша частота.

Для інтервального (з рівними інтервалами) статистичного розподілу мода обчислюється за формулою

$$Mo(\Omega)\approx\omega_{k-1}+\frac{n_{Mo}-n_{Mo-1}}{2n_{Mo}-n_{Mo-1}-n_{Mo+1}}(\omega_k+\omega_{k-1}),$$

де: $\omega_k-\omega_{k-1}$ — модальний інтервал, якому відповідає найбільша частота $n_k=n_{Mo}$ попадання в цей інтервал значень ВВ Ω; n_{Mo-1}, n_{Mo+1} — частота відповідно передмодального та післямодального інтервалів.

2.3.4.3. Зважене середньогеометричне значення економічного показника

В якості *характеристики центра групування* значень економічного показника (ВВ Ω) можна використовувати його *зважене середньогеометричне* значення $(G(\Omega))$. У випадку, коли ВВ Ω приймає тільки додатні значення,

$$G(\Omega) = e^{M(\ln \Omega)}.$$

Якщо ж, крім цього, ВВ Ω є дискретною, тобто $\Omega = (\omega_1, ..., \omega_n)$, то

$$G(\Omega) = e^{M(\ln \Omega)} = \prod_{j=1}^{n} \omega_j^{p_j}.$$

За $p_1 = ... = p_n = \dfrac{1}{n}$ отримуємо середньогеометричну оцінку ВВ Ω:

$$G(\Omega) = \prod_{j=1}^{n} \omega_j^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} \omega_j}.$$

У ситуації, коли ВВ Ω приймає як додатні, так і від'ємні значення і є дискретною, зважену середньогеометричну оцінку можна знаходити за формулою [19]:

$$G(\Omega) = e^{M(\ln(\Omega - \alpha + \varepsilon))} + \alpha - \varepsilon = \alpha - \varepsilon + \prod_{j=1}^{m} (\omega_j - \alpha + \varepsilon)^{p_j},$$

де: $\alpha = \min\{\omega_1; ...; \omega_n\}$; $\quad \varepsilon \geq 0$; $\quad \omega_j - \alpha + \varepsilon > 0$.

Для обчислення зваженої середньогеометричної оцінки норми прибутку цінного паперу (чи портфеля цінних паперів) покладають $\alpha = -1$, $\varepsilon = 0$, $\Omega = \dfrac{R}{100\%}$, де R — норма прибутку у %, і тоді

$$G(\Omega) = e^{M(\ln(\Omega + 1))} = -1 + \prod_{j=1}^{m} (\omega_j + 1)^{p_j}.$$

За оцінювання величини $G(X)$ на основі статистичних даних

$$G(\Omega) \approx e^{\frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^{T} \ln(\omega_t + 1)} = -1 + \prod_{t=1}^{T} (\omega_t + 1)^{\frac{1}{T}} = -1 + \sqrt[T]{\prod_{t=1}^{T} (\omega_t + 1)},$$

де T — кількість періодів (обсяг вибірки).

Якщо ВВ відображає спектр можливих збитків (платежів, витрат тощо), то можна використовувати в якості оцінки величини ризику *зважене середньогеометричне* ВВ Ω^-, тобто покласти

$$W = G(\Omega^-).$$

2.3.4.4. Оцінка ступеня ризику як міра мінливості результату

В абсолютному вираженні найчастіше в *якості величини ступеня ризику* використовується *міра розсіювання значень економічного показника відносно центра групування* (цих значень). Для знаходження цієї міри широко використовуються такі оцінки ВВ, як дисперсія та середньоквадратичне відхилення [6, 7, 10, 22, 34, 36, 51, 89, 106, 111].

Дисперсія (варіація) ВВ Ω характеризує міру розсіювання цієї випадкової величини відносно її математичного сподівання (сподіваного значення). Вона обчислюється за формулою

$$D(\Omega) = M(\Omega - M(\Omega))^2 = M\left(\Omega^2\right) - (M(\Omega))^2.$$

Якщо ВВ X є дискретною, то

$$D(\Omega) = \sum_{j=1}^{n} p_j(\omega_j - M(\Omega))^2 = \sum_{j=1}^{n} p_j \omega_j^2 - (M(\Omega))^2,$$

якщо ж Ω — неперервна ВВ і $f(\omega)$ — функція щільності розподілу ймовірності, то

$$D(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - M(\Omega))^2 f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt - (M(\Omega))^2.$$

Середньоквадратичним (або стандартним) відхиленням ВВ Ω називається величина $\sigma(\Omega) = \sqrt{D(\Omega)}.$

Чим більшими будуть значення $D(\Omega)$ чи $\sigma(\Omega),$ тим більшою є міра розсіювання значень ВВ Ω відносно $M(\Omega)$ і тим ризикованішим є проект (рішення, стратегія), економічний ефект якого описується цією ВВ. Отже, ступінь ризику, пов'язаного з певним проектом, $W = D(\Omega)$ або $W = \sigma(\Omega).$

Підхід до оцінки ступеня ризику, що спирається на дисперсію чи середньоквадратичне відхилення, вважається класичним. Зауважимо також, що він використовується у випадках, коли ВВ Ω має як позитивний, так і негативний інгредієнт $\left(\Omega = \Omega^{\pm}\right).$

За наявності статистичної інформації оцінку дисперсії можна здійснити згідно з формулою:

$$D(\Omega) \approx \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T} (\omega_t - M(\Omega))^2,$$

де T — обсяг вибірки (кількість періодів).

В якості ступеня ризику можна використовувати також міру розсіювання значень економічного показника навколо інших (відмінних від $M(\Omega)$) центрів групування значень цього показника. Якщо центр групування позначений через $Z = Z(\Omega)$, то отримуємо:

$$D_Z(\Omega) = M(\Omega - Z(\Omega))^2 = M(\Omega^2) - \left(M(\Omega)^2 + (Z(\Omega) - M(\Omega))^2\right).$$

Як уже зазначалося, в якості центра групування, поряд із $M(\Omega)$, можна використати й такі числові характеристики ВВ, як $Mo(\Omega)$ (мода), $Me(\Omega)$ (медіана), $G(\Omega)$ (зважене середньогеометричне), Z_F (вибране СПР порогове значення економічного показника), отримуючи відповідно: $D_{Mo}(\Omega)$, $D_{Me}(\Omega)$, $D_G(\Omega)$, $D_{Z_F}(\Omega)$ тощо.

Уведемо також до розгляду величини середньоквадратичного відхилення від центра групування

$$\sigma_Z(\Omega) = \sqrt{D_Z(\Omega)}$$

і відповідно $\sigma_{Mo}(\Omega)$, $\sigma_{Me}(\Omega)$, $\sigma_G(\Omega)$, $\sigma_{Z_F}(\Omega)$ тощо.

2.3.4.5. Оцінка ступеня ризику як міра несприятливих результатів

Використання дисперсії для оцінки ризику ґрунтується на однаковому трактуванні як додатних сприятливих, так і від’ємних несприятливих відхилень величини реального ефекту від очікуваного (порогового) значення. Тобто виконується гіпотеза, що коливання випадкової величини Ω (прибутку, ЧПВ, збитків тощо) в обидва боки від обраної бази однаково небажані.

Але вивчення економічних процесів показує, що досить часто ризик пов’язаний лише з несприятливими для СПР (менеджера, інвестора) ефектами. Врахування лише несприятливих відхилень від певного порогового рівня (бази) Z економічного показника для оцінювання ризику реалізується під час обчислення такого показника міри мінливості результату, як *семіваріація*. Обчислення семіваріації здійснюється за формулою

$$SV_Z(\Omega) = \sum_{j=1}^{n} \left(\alpha_j p_j (\omega_j - Z)^2\right),$$

де α_j — індикатор несприятливого відхилення, який визначається за формулою

$$\alpha_j = \begin{cases} 0, & \text{у випадку сприятливого відхилення відносного } Z; \\ 1, & \text{у випадку несприятливого відхилення відносного } Z. \end{cases}$$

Наприклад, якщо ВВ Ω відображає можливі варіанти збитків і є дискретною, тобто $\Omega = \Omega^- = \left(\omega_1^-;...;\ \omega_n^-\right)$, то

$$\alpha_j = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \omega_j^- \le Z; \\ 1, & \text{якщо } \omega_j^- > Z. \end{cases}$$

Для неперервної ВВ Ω у випадку, коли $\Omega = \Omega^+$, $Z = Z\left(\Omega^+\right)$,

$$SV_Z\left(\Omega^+\right) = \int_{-\infty}^{Z} (t - Z)^2 f(t)dt;$$

якщо ж $\Omega = \Omega^-$, $Z = Z\left(\Omega^-\right)$, то

$$SV_Z\left(\Omega^-\right) = \int_{Z}^{+\infty} (t - Z)^2 f(t)dt.$$

Коли величину семіваріації необхідно оцінити на основі статистичних даних, то можна скористатися формулою:

$$SV_Z(\Omega) \approx \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(a_t(\omega_t - Z)^2\right),$$

де T — обсяг вибірки (кількість спостережень).

Нагадаємо, що в обчисленні семіваріації можна покладати або $Z = M(\Omega)$, або $Z = Mo(\Omega)$, або $Z = G(\Omega)$, або $Z = Z_F$ тощо, отримуючи відповідно величини $SV(\Omega)$ або $SV_{Mo}(\Omega)$, або $SV_G(\Omega)$, або $SV_{Z_F}(\Omega)$ тощо.

Практично, зважаючи на вимірність економічних показників, зручніше використовувати семіквадратичне відхилення

$$SSV_Z(\Omega) = \sqrt{SV_Z(\Omega)}$$

(відповідно $SSV_{Mo}(\Omega) = \sqrt{SV_{Mo}(\Omega)}$, $SSV_G(\Omega) = \sqrt{SV_G(\Omega)}$ тощо).

Враховуючи, що семіваріація є також мірою мінливості несприятливих для СПР результатів, можна стверджувати, що чим більшою буде величина $SV_Z(\Omega)$, тим більшим ступенем ризику обтяжене рішення (стратегія, проект тощо), тобто $W = SV_Z(\Omega)$ або $W = SSV_Z(\Omega)$.

2.3.4.6. Модифікована семіваріація

Зазначимо, що величина семіваріації, розглянутої у пункті 2.3.4.5, відображає зважену суму квадратів несприятливих відхилень (їх «масу») на тлі повного спектру відхилень (як сприятливих, так і несприятливих). Але під час аналізу функціонування економічних систем виникає потреба в дослідженні несприятливих явищ як окремо взятих випадкових процесів (об'єктів дослідження). За таких ситуацій до розгляду можна ввести оцінку квадратів несприятливих відхилень, що зважена (нормована) на сукупності тільки несприятливих явищ. Ця оцінка є модифікацією семіваріації, вона використовувалася в [32] й може бути обчислена за формулою

$$\widetilde{SV}_Z(X) = \frac{1}{P_Z^-} SV_Z(X).$$

Тут:

у неперервному випадку

$$P_Z^- = \int_{-\infty}^{Z} f(x)dx, \text{ якщо } X = X^+$$

і

$$P_Z^- = \int_{Z}^{+\infty} f(x)dx, \text{ якщо } X = X^-;$$

у дискретному випадку

$$P_Z^- = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j p_j;$$

за наявності статистичних даних

$$P_Z^- = T_Z^- = \sum_{t=1}^{T} \alpha_t$$

(T — обсяг вибірки).

2.3.4.7. Комбіновані методи оцінювання ступеня ризику

В абсолютному вираженні величину ризику можна знаходити у вигляді лінійної комбінації двох чи більшої кількості показників ризику. Наприклад, для одночасного урахування центра групування значень показника $\Omega = \Omega^-$ (ВВ Ω^- відображає збитки, витрати тощо) і міри розсіювання його значень навколо центра групування можна використовувати показники ризику, що описуються формулою

$$W = (1-\lambda)\, Z(\Omega^-) + \lambda Risk(\Omega^-),$$

де: $Z(\Omega^-)$ — величина, що оцінює центр групування; $Risk(\Omega^-)$ — величина, що оцінює ступінь ризику (тобто замість $Risk(\Omega^-)$ можна покладати $\sigma_Z(\Omega^-)$ чи $SSV_Z(\Omega^-)$ тощо); λ — параметр, що вибирається СПР ($\lambda \in [0;1]$) і є відображенням його суб'єктивної оцінки міри важливості складових $Z(\Omega^-)$ та $Risk(\Omega^-)$ в обчисленні значення показника ступеня ризику *W*. Це відбиває той факт, що ризик є об'єктивно-суб'єктивною економічною категорією.

Для оцінювання ступеня ризику можна скористатися показником, що задається формулою

$$W = (1-\lambda)\, Z(\Omega^-) + \lambda \sup(\Omega^-),$$

де: $Z(\Omega^-)$ — центр групування значень ВВ Ω^-; $\sup(\Omega^-)$ — верхня грань для значень ВВ Ω^- (найменше число, що обмежує множину значень ВВ Ω^- зверху), або ж показником

$$W = (1-\lambda)\inf(\Omega^-) + \lambda \sup(\Omega^-),$$

де: $\inf(\Omega^-)$ — нижня грань для значень ВВ Ω^- (найбільше число, що обмежує множину значень ВВ Ω^- знизу).

Для побудови показника ризику *W* може використовуватись й більша кількість складових. Наприклад,

$$W = \lambda_1 Z(\Omega^-) + \lambda_2 Risk(\Omega^-) + \lambda_3 \sup(\Omega^-),$$

де параметри $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ приймають невід'ємні значення і при цьому $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$.

2.3.4.8. Ціна гри як одна з оцінок ступеня ризику

Під час прийняття рішень на основі теоретико-ігрової моделі в якості міри ступеня ризику в абсолютному вираженні, крім величин, що розглядалися раніше, можуть також використовуватися (див. пункт 1.5.1) нижня ціна гри α, верхня ціна гри β і ціна гри V^* (якщо функціонал оцінювання $F = F^+$). Якщо $\alpha < \beta$, то несхильний до ризику СПР орієнтується (в більшій мірі) на значення β.

Нейтральний (байдужий) до ринку СПР орієнтується на значення ціни гри V^*, яке є сподіваною величиною (математичним сподіванням) виграшу першого гравця (СПР).

2.3.5. Оцінка ступеня ризику у відносному вираженні

Під час вибору найменш ризикованого рішення (стратегії, проекту тощо) з декількох альтернатив недостатньо порівнювати їх дисперсії (чи семіваріації), якщо сподівані значення досліджуваної ознаки суттєво різняться. У цій ситуації доцільно порівнювати ризики рішень, обчислені у відносному вираженні, коли ризик визначається як величина збитків, віднесена до деякої бази.

За базу зручно приймати або вартість майна підприємця, або загальні витрати ресурсів на даний вид підприємницької діяльності, або очікуваний прибуток від даного підприємництва. Для підприємства, як правило, беруть вартість основних фондів та оборотних засобів або планові сумарні витрати на даний вид ризикованої діяльності, маючи на увазі як поточні витрати, так і капіталовкладення чи розрахунковий прибуток.

2.3.5.1. Коефіцієнт ступеня ризику збитків

Коефіцієнт ступеня ризику збитків визначається як відношення максимально можливого обсягу збитків до обсягу власних фінансових ресурсів інвестора й обчислюється за формулою

$$W = \frac{\omega^{\max}}{K},$$

де: W — коефіцієнт ступеня ризику збитків (у відносному вираженні); $\omega^{\max}$ — максимально можливий обсяг збитків; K — обсяг фінансових ресурсів (з урахуванням точно відомих надходжень).

За допомогою цього коефіцієнта вимірюють *ризик банкрутства*.

Приклад 2.3. Емігрант (з України) включився в гру на одній із фондових бірж США після того, як отримав роботу і мав стабільний дохід[*]. У цю ж гру включився американець. Вони вклали по 50 тис. дол. США кожен в акції однієї з компаній, розраховуючи на річне зростання курсу 20 %. При цьому американець вклав власні кошти (50 тис. дол.), а емігрант — заощаджені власні (10 тис. дол.) плюс взяті у борг під 10 % річних (40 тис. дол.).

[*] Задачу наведено в [34, 81].

Але фактичний курс акцій протягом року почав падати, і коли він знизився на 40 %, вони вирішили позбутися цих ненадійних акцій.

Необхідно оцінити ступінь ризику банкрутства цих акціонерів.

Розв'язання. Оскільки обидва акціонери реалізували свої акції за 60 % їх вартості, то вони повернули собі по 30 тис. дол. кожен. Отже, збитки американця становлять:

$$x_A = 50 - 30 = 20 \text{ (тис. дол.)}.$$

Ураховуючи, що обсяг власних фінансових ресурсів американця $K_A = 50$ тис. дол., його ризик банкрутства (коефіцієнт ризику)

$$W_A = \frac{\omega_A}{K_A} = \frac{20}{50} = 0{,}4.$$

Щодо емігранта, то його збитки становлять

$$\omega_E = 10 + 40 + 4 - 30 = 24 \text{ (тис. дол.)}.$$

Після продажу акцій для повернення боргу йому не вистачає ще 14 тис. дол. $(14 = 40 + 4 - 30)$.

Ураховуючи, що обсяг власних фінансових ресурсів емігранта $K_E = 10$ тис. дол., його ризик банкрутства становить

$$W_E = \frac{\omega_E}{K_E} = \frac{24}{10} = 2{,}4.$$

Відповідь: У даній фінансовій операції ступінь ризику для емігранта $W_E = 2{,}4$ у шість разів більший за ступінь ризику для американця, у якого $W_A = 0{,}4$, при цьому останній уникнув банкрутства, оскільки $W_A < 1$.

2.3.5.2. Коефіцієнт очікуваних збитків

Коефіцієнт очікуваних збитків обчислюється за формулою

$$K_Z = K(z) = \frac{|M_Z^-|}{|M_Z^-| + |M_Z^+|},$$

де: K_Z — коефіцієнт очікуваних збитків; Z — заплановане (порогове) значення економічного показника; M_Z^+, M_Z^- — значення відповідно сприятливих і очікування несприятливих відхилень щодо Z.

Формально M_Z^+ і M_Z^- — це умовні математичні сподівання щодо відхилень, тобто

$$M_Z^+ = M\left(\Omega - Z \,\middle|\, \Omega \in \Omega_Z^+\right) = M\left(\Omega \,\middle|\, \Omega \in \Omega_Z^+\right) - Z\,,$$

$$M_Z^- = M\left(\Omega - Z \,\middle|\, \Omega \in \Omega_Z^-\right) = M\left(\Omega \,\middle|\, \Omega \in \Omega_Z^-\right) - Z,$$

де: Ω_Z^+ — множина сприятливих щодо рівня *Z* значень економічного показника рівня; Ω_Z^- — множина його несприятливих значень (очевидно, що $\Omega = \Omega_Z^- \cup \Omega_Z^+$).

Наприклад, якщо Ω має позитивний інгредієнт ($\Omega = \Omega^+$), то

$$\Omega_Z^+ = \{\omega \in \Omega : \omega \geq Z\};$$
$$\Omega_Z^- = \{\omega \in \Omega : \omega < Z\}.$$

Значення $K_Z \in [0;1]$, причому $K_Z = 0$, якщо відсутні збитки, і $K_Z = 1$, якщо відсутні сподівані вигоди. Очевидно, що $K_Z = K_Z^-$ (має негативний інгредієнт).

У дискретному випадку отримуємо:

$$M_z^- = \left(\frac{1}{P_Z^-}\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i^-\, p_i\,\omega_i\right)\right) - Z; \qquad P_Z^- = \sum_{i=1`}^{n}\left(\alpha_i^-\, p_i\right);$$

$$M_Z^+ = \left(\frac{1}{P_Z^+}\sum_{i=1}^{n}\left(\beta_i^+\, p_i\,\omega_i\right)\right) - Z; \qquad P_Z^+ = \sum_{i=1`}^{n}\left(\beta_i^+\, p_i\right),$$

де: α_i^- — індикатор несприятливого, β_i^+ — індикатор сприятливого відхилення щодо *Z*.

Наприклад, якщо $\Omega = \Omega^+$, то

$$\alpha_i^- = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \omega_i \geq Z; \\ 1, & \text{якщо } \omega_i < Z; \end{cases} \qquad \beta_i^+ = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \omega_i \geq Z; \\ 0, & \text{якщо } \omega_i < Z. \end{cases}$$

У неперервному випадку за відомої щільності розподілу ймовірності $f(\omega)$ ВВ $\Omega = \Omega^+$

$$M_Z^- = \frac{1}{P_Z^-}\int_{-\infty}^{Z} t\, f(t)dt - Z; \qquad P_Z^- = \int_{-\infty}^{Z} f(t)dt;$$

$$M_Z^+ = \frac{1}{P_Z^+}\int_{+\infty}^{Z} t\, f(t)dt - Z; \qquad P_Z^+ = \int_{Z}^{+\infty} f(t)dt.$$

Якщо покласти Z = 0, то отримаємо коефіцієнт очікуваних збитків [22]

$$K_0 = \frac{\left|\int\limits_{-\infty}^{0} tf(t)dt\right|}{\left|\int\limits_{-\infty}^{0} tf(t)dt\right| + \int\limits_{0}^{+\infty} tf(t)dt},$$

який є, у свою чергу, модифікацією коефіцієнта, наведеного в [108].

На практиці в якості M_Z^- та M_Z^+ можна використати їх статистичні оцінки:

$$M_Z^- \approx m_Z^- = \frac{1}{T_Z^{\ -}} \sum_{t=1}^{T} \left(\alpha_t^- \omega_t\right); \qquad M_Z^+ \approx m_Z^+ = \frac{1}{T_Z^{\ +}} \sum_{t=1}^{T} \left(\beta_t^+ \omega_t\right),$$

де: T — кількість спостережень; $T_Z^- = \sum\limits_{t=1}^{T} \alpha_t^-$ — кількість несприятливих відхилень; $T_Z^+ = \sum\limits_{t=1}^{T} \beta_t^+$ — кількість сприятливих відхилень; $T = T_Z^- + T_Z^+$.

Більш гнучкою (порівняно з $K_Z = K_Z^-$) характеристикою ступеня ризику проекту (стратегії тощо) є еластичність коефіцієнта очікуваних збитків:

$$e_Z = \frac{Z}{K_Z} \frac{\partial K_Z}{\partial Z}.$$

Можна скористатись його скінченно-різницевим аналогом:

$$e_Z \approx \frac{Z}{K_Z} \frac{\Delta K_Z}{\Delta Z},$$

де величина приросту ΔZ задається дослідником (наприклад, $\Delta Z = \frac{(Z_{\max} - Z_{\min})}{100}$, $\Delta K = K(Z + \Delta Z) - K(Z)$.

2.3.5.3. Модифіковані коефіцієнти варіації і семіваріації

Коли ВВ $\Omega = \Omega^+$ (Ω^+ — відображення норми прибутку, ЧПВ тощо), то величину ризику можна оцінювати як відношення міри варіабельності (змінюваності) цієї ВВ до приросту величини, що задає її центр групування. Якщо через Z_0 позначити фіксоване (порогове) значення економічного показника, то для оцінки ризику у відносному вираженні можна використовувати *модифіковані коефіцієнти* варіації та семіваріації, які обчислюються за формулами

$$CV_m(\Omega^+) = \frac{\sigma_Z(\Omega^+)}{Z(\Omega^+) - Z_0}; \qquad CSV_m(\Omega^+) = \frac{SSV_Z(\Omega^+)}{Z(\Omega^+) - Z_0},$$

де величина $Z(\Omega^+)$ відповідає абсцисі центра групування значень ВВ; $SSV_Z(\Omega^+)$ та $\sigma_Z(\Omega^+)$ — відповідно середньоквадратичне та семіквадратичне відхилення ВВ Ω^+ від центра групування $Z(\Omega^+)$.

Якщо в наведених вище формулах покласти $Z_0 = 0$, то отримаємо коефіцієнти варіації та семіваріації щодо центра групування $Z = Z(\Omega^+)$.

Ці коефіцієнти використовуються в тому випадку, коли для двох альтернативних проектів (рішень тощо) мають місце співвідношення:

$$Z(\Omega_1^+) > Z(\Omega_2^+); \qquad \sigma_Z(\Omega_1^+) > \sigma_Z(\Omega_2^+)$$

або

$$Z(\Omega_1^+) > Z(\Omega_2^+); \qquad SSV_Z(\Omega_1^+) > SSV_Z(\Omega_2^+)$$

за умови, що $Z(\Omega^+) - Z_F > 0$.

Перевага надається тому проекту, для якого є меншим модифікований коефіцієнт варіації (чи семіваріації).

Модифікованим коефіцієнтам варіації та семіваріації можна надати таке економічне тлумачення: це величина ризику, що припадає на одиницю приросту міри ефективності результату. Згідно з викладеним раніше можна зробити висновок, що ці коефіцієнти мають негативний інгредієнт, тобто

$$CV_m(\Omega^+) = CV_m^-(\Omega^+); \qquad CSV_m(\Omega^+) = CSV_m^-(\Omega^+).$$

2.3.5.4. Урахування асиметрії розподілу економічних показників

Як показують досвід і теоретичні дослідження, більшість економічних показників, на основі яких приймаються рішення, є випадковими величинами, що мають асиметричний розподіл.

Коефіцієнт асиметрії ВВ Ω обчислюється за формулою

$$As(\Omega) = M\left(\frac{\Omega - M(\Omega)}{\sigma(\Omega)}\right)^3.$$

За наявності статистичної інформації можна скористатись оцінкою

$$As(\Omega) \approx \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{\omega_t - M(\Omega)}{\sigma(\Omega)}\right)^3,$$

де T — обсяг вибірки.

Якщо $As(\Omega) = 0,$ то $Mo(\Omega) = M(\Omega)$ і графік функції $f(\omega)$ — щільності розподілу ймовірності значень ВВ Ω — є симетричним відносно прямої $\omega = M(\Omega)$. Якщо $As(\Omega) > 0,$ то $Mo(\Omega) \neq M(\Omega)$ і графік функції $f(\omega)$ є асиметричним, причому його «довга частина» («хвіст») розміщена праворуч від $Mo(\Omega)$ (тобто має правосторонній скіс). Аналогічно, за $As(\Omega) < 0$ функція щільності має лівосторонній скіс («хвіст» розподілу виступає ліворуч).

У ситуації, коли $As(\Omega)$ суттєво різниться від нуля $(|As(\Omega)| \geq \delta > 0)$, використання в якості міри ризику такого показника, як середньоквадратичне відхилення, у певному сенсі є некоректним. Показник $\sigma(\Omega)$ в явному вигляді не враховує факт асиметрії розподілу ймовірності, а саме те, що концентрація значень ВВ Ω праворуч і ліворуч відносно $M(\Omega)$ є різною.

Якщо $\Omega = \Omega^{\pm}$, то в якості міри ризику можна використовувати величину

$$W = SSV_{Mo}(\Omega^{\pm}) = \sqrt{SV_{Mo}(\Omega^{\pm})}\ .$$

Для економічних показників, що мають негативний інгредієнт $(\Omega = \Omega^{-})$, за наявності асиметрії, в якості показника міри ризику можна використати величину

$$W = (1-\lambda)Mo(\Omega^{-}) + \lambda \cdot SSV_{Mo}(\Omega^{-}).$$

У випадку позитивного інгредієнта $(\Omega = \Omega^{+})$ за наявності асиметрії, для оцінки величини ризику у відносному вираженні доцільно використовувати коефіцієнт семіваріації

$$W = CSV(\Omega^{+}) = \frac{SSV_{Mo}(\Omega^{+})}{Mo(\Omega^{+})}.$$

Міру ризику у відносному вираженні можна оцінити також за допомогою коефіцієнтів

$$W = K_{Mo} = \frac{SV_{Mo}^{-}(\Omega^{\pm})}{SV_{Mo}^{-}(\Omega^{\pm}) + SV_{Mo}^{+}(\Omega^{\pm})}$$

або

$$W = K_Z = \frac{SV_Z^-(\Omega^\pm)}{SV_Z^-(\Omega^\pm) + SV_Z^+(\Omega^\pm)},$$

де $SV_z^+\left(\Omega^\pm\right)$ — семіваріація щодо сприятливих відхилень.

Очевидно, що коефіцієнти K_{Mo} та K_Z приймають свої значення з проміжку [0; 1].

Коли порівнюються проекти з приблизно рівними модами, то для порівняння ризикованості цих проектів несхильні до ризику СПР можуть скористатися величиною (*ексцес* з протилежним знаком)

$$W = -Ex(\Omega) = 3 - M\left(\frac{\Omega - M(\Omega)}{\sigma(\Omega)}\right)^4,$$

де $Ex(\Omega)$ — ексцес ВВ $\Omega = \Omega^\pm$. Чим більше значення ексцесу, тим більш «гостровершинною» є функція щільності $f(\omega)$, тим більшою буде концентрація значень ВВ Ω в околі $Mo(\Omega)$ і тим меншою є величина ризику щодо відхилення від моди. Така ситуація є ознакою стабільності економічного процесу і більшою мірою імпонує несхильним до ризику СПР.

2.3.6. Ризик ліквідності та його моделі

Ліквідність — це здатність активів використовуватись як безпосередній засіб платежів чи швидко перетворюватися в грошову форму без суттєвої втрати своєї поточної (теперішньої) вартості.

Ризик ліквідності — це специфічна форма ризику, пов’язаного (зумовленого) з низькою ліквідністю об’єктів інвестування (посідання майна, активів) чи з великим періодом інвестиційного процесу. Тобто це ризик щодо можливості збитків під час реалізації майна, нерухомості, цінних паперів або інших товарів, пов’язаних зі зміною оцінки їх якості та (або) споживчої вартості.

Для оцінювання ступеня ліквідності, а отже, й ризику ліквідності використовують дві основні моделі (два критерії):

- час трансформації інвестицій у грошові засоби;
- обсяг фінансових збитків (втрат) інвестора, пов’язаних з цією трансформацією.

В інвестиційній практиці за критерієм витрат часу на реалізацію виділяють [10, 34]:

- терміноволіквідні активи (з незначним ризиком);

- високоліквідні активи (з низьким ризиком);
- середньоліквідні активи (із середнім ризиком);
- малоліквідні активи (з високим ризиком).

2.3.7. Систематичний та несистематичний ризики активів

Систематичний ризик пов'язаний з мінливістю ціни (норми прибутку) окремого активу, що викликана загальноринковим коливанням цін. А тому його ще називають ринковим ризиком. Причиною виникнення його є зовнішні події, що впливають на весь ринок: зміна відсоткових ставок, економічний спад, падіння загальноринкових цін, інфляція, політичні кризи, зокрема війни, тощо.

Оскільки систематичний ризик пов'язаний з подіями, що зачіпають інтереси усіх суб'єктів ринку, то його неможливо усунути (зменшити) шляхом формування інвестиційного портфеля (шляхом його диверсифікації). Тобто систематичний ризик є *недиверсифіковуваним*.

Несистематичний (специфічний) ризик певного активу не залежить від стану ринку і є специфічним щодо конкретного акціонерного підприємства. Цей ризик піддається управлінню (зменшенню) шляхом створення портфеля інвестицій, тобто він є *диверсифіковуваним*. Несистематичний ризик включає в себе галузевий та фінансовий ризики.

Систематичний та несистематичний ризики в сукупності утворюють *загальний ризик інвестицій*, який пов'язаний з їх здійсненням.

Питання зменшення загального ризику інвестицій (в першу чергу — несистематичного) висвітлюється так званою теорією портфеля. Деякі методи цієї теорії розглядатимуться у пункті 2.4, а також у розділі 6.

Систематичний ризик на відміну від несистематичного можна досить точно кількісно обчислити й спрогнозувати.

2.3.7.1. Оцінка ступеня систематичного ризику активу

Аналіз та оцінка співвідношення ризику та доходу відіграють ключову роль під час прийняття рішень щодо інвестицій (у цінні папери тощо). Одним із основних показників, використовуваних під час аналізу фінансових ризиків, є *показник систематичного* *ризику — чи коефіцієнт чутливості «бета»* (β) [75, 112]. Цей коефіцієнт називають також *показником недиверсифіковуваного ризику*.

Показник β характеризує змінюваність доходів певного активу відносно доходів «середньозваженого», повністю диверсифікованого портфеля, котрим, в ідеальному випадку, є весь ринок цінних паперів.

Уважають, що показник систематичного ризику для «середньої» акції, динаміка доходів якої збігається з динамікою ризику ринку цінних паперів у цілому (вимірюється за будь-яким фондовим індексом *I*), дорівнює одиниці ($\beta_{\text{ср}} = \beta_{\text{П}} = 1$).

Розрахунком показників систематичного ризику для акціонерних фірм займаються консалтингові та інвестиційні компанії, фінансово-кредитні заклади тощо. Значення цих показників регулярно публікуються у фінансовій періодиці (західній) і широко використовуються для аналізу якості інвестиційних проектів.

Приклад 2.4. Згідно з розрахунками консалтингової компанії коефіцієнти систематичного ризику акцій фірм відповідно мають значення $\beta_{1I} = 1{,}35$ та $\beta_{2I} = 0{,}9$. Як зміняться індекси акцій цих фірм, якщо загальноринковий індекс збільшився на 20 пунктів?

Розв'язання. Значення коефіцієнта $\beta_{1I} = 1{,}35$ свідчить про більший ступінь ризику щодо придбання акції першої фірми порівняно зі ступенем ризику ринку цінних паперів в цілому приблизно на

$$(\beta_{1I} - 1) \times 100\% = (1{,}35 - 1) \times 100\% = 35\% .$$

Індекс акцій першої фірми збільшився на $20\beta_{1I} = 20 \times 1{,}35 = 27$ (пунктів). Ризикованість вкладень в акції другої фірми на 10% менша ступеня ризику ринку:

$$(\beta_{1I} - 1) \times 100\% = (0{,}9 - 1) \times 100\% = -10\% .$$

Індекс акцій другої фірми збільшився на $20\beta_{2I} = 20 \times 0{,}9 = 18$ (пунктів).

Відповідь: Індекси акцій цих фірм збільшаться на 27 та 18 пунктів відповідно.

Величина β_{kI} — коефіцієнт систематичного ризику *k*-го активу характеризує щільність зв'язку між біржовим курсом акції

k-ї компанії та загальним станом ринку, що відображається ринковим індексом I, визначається за формулою

$$\beta_{kI} = \frac{\operatorname{cov}(R_k; R_I)}{D(R_I)} = \rho_{kI} \frac{\sigma_k}{\sigma_I},$$

де: R_k — норма прибутку k-го капітального активу (акції); R_I — норма прибутку, що відповідає ринковому індексу I; $\sigma_k = \sigma(R_k)$ та $\sigma_I = \sigma(R_I)$ — середньоквадратичні відхилення відповідно випадкових величин R_k та R_I; ρ_{kI} — коефіцієнт парної кореляції цих випадкових величин.

Багаторічні спостереження показали, що норми прибутку більшості акцій залежать, в основному, від одного чинника — загальноринкового індексу I. Наприклад, від широко відомого *S&P* 500, причому ця залежність описується лінійною економетричною моделлю (однофакторна модель Шарпа):

$$R_k = \alpha_{kI} + \beta_{kI} R_I + \varepsilon_k, \tag{2.1}$$

де: α_{kI} — вільний член моделі; ε_k — випадкова складова, що відповідає k-му активу (включення ВВ ε_k у модель дає змогу поставити знак рівності між правою та лівою частинами співвідношення (2.1)). Цілком природною є вимога, що $M(\varepsilon_k) = 0$. Тоді величину α_{kI} можна обчислити за формулою

$$\alpha_{kI} = M(R_k) - \beta_{kI} M(R_I).$$

Якщо покласти $m_k = M(R_k)$, $m_I = M(R_I)$, то модель (2.1) можна записати у вигляді

$$R_k = m_k + \beta_{kI} M(R_I - m_I) + \boldsymbol{\varepsilon_k}.$$

2.3.7.2. Оцінка ступеня загального ризику активу

Ураховуючи те, що ВВ R_I та ε_k є незалежними, отримуємо:

$$D(R_k) = \beta_{kI}^2 D(R_I) + D(\varepsilon_k)$$

або

$$\sigma_k^2 = \beta_{kI}^2 \cdot \sigma_I^2 + \sigma_{\varepsilon_k}^2 .$$

Отже, загальний ризик, яким обтяжений k-й актив (вимірюється дисперсією норми прибутку k-го активу σ_k^2), є сумою двох складових: $\beta_{kI}^2 \cdot \sigma_I^2$ — ступінь ризику ринку (оцінка систематичного ризику) та $\sigma_{\varepsilon_k}^2$ — ступінь специфічного ризику, пов’язаного з *k*-м активом (оцінка несистематичного або власного ризику *k*-го активу).

В якості оцінки систематичного ризику в загальному ступені ризику активу можна використовувати коефіцієнт

$$W = Z_k = \frac{\beta_{kI}^2 \sigma_I^2}{\sigma_k^2}.$$

Велика частка систематичного ризику в загальному ризику певного активу вказує, зокрема, на те, що ситуація на ринку цінних паперів має великий вплив на ризик, яким обтяжений цей актив. І навпаки, мала частка (тобто велике значення $\sigma_{\varepsilon_k}^2$) свідчить про те, що лінійна регресійна залежність $\sigma_{\varepsilon_k}^2$ між нормами прибутку певного активу та ринку не досить добре характеризує цю залежність тощо.

2.4. ОЦІНКА СТУПЕНЯ ПОРТФЕЛЬНОГО РИЗИКУ

Сутність *портфельного ризику* полягає у можливості збитків щодо окремих типів активів, а також щодо усіх категорій кредитів. Портфельні ризики поділяють на фінансові, ризики ліквідності, систематичні та несистематичні.

2.4.1. Портфель активів

Одним із методів управління ризиком є диверсифікація активів. Інструментом (моделлю), що реалізує цей метод управління, є теорія портфеля активів, арбітражна теорія тощо.

Портфель — це сукупність активів, якими володіє інвестор.

Сутність управління портфелем полягає в плануванні, аналізі та регулюванні структури портфеля, діяльності з формування його та у підтримці з метою досягнення поставлених цілей при збереженні необхідного рівня його ризику та мінімізації пов’язаних з цим витрат.

Економіко-математична модель задачі обрання оптимальної структури портфеля вперше була запропонована Г. Марковіцем [129, 130].

2.4.2. Фінансовий ризик портфеля активів

Фінансовий ризик портфеля пов'язаний, як правило, з можливими втратами (збитками) фінансових ресурсів (тобто грошових засобів), насамперед з причини невиконання суб'єктами економічної діяльності своїх фінансових зобов'язань перед інвестором, пов'язаних з використанням кредиту для фінансування своєї діяльності. Під час оцінювання міри фінансового ризику часто використовується ймовірність настання втрат фінансових ресурсів. До половини всіх фінансових ресурсів акціонерних компаній складають позичкові засоби, одержані, зокрема, в банках під певний відсоток. В якості кількісної оцінки рівня даного виду ризику можна використати також ризик банкрутства. Крім цього, необхідно оцінювати показники допустимого, критичного та катастрофічного фінансового ризику портфеля.

2.4.3. Оцінка міри ризику ліквідності портфеля активів

Оцінювання ліквідності проводиться також і для інвестиційного портфеля.

Інвестиційний портфель — це сукупність цінних паперів та інших активів, придбаних інвестором. В якості оцінки величини ризику ліквідності портфеля використовуються показники:

а) частка терміноволіквідних активів у їх реальному обсязі:

$$W = L_{\text{Т}}^{-1} = \frac{C}{C_{\text{Т}}},$$

де: $L_{\text{Т}}$ — частка терміноволіквідних активів у портфелі; $C_{\text{Т}}$ — сумарна вартість (оцінка) цих активів; C — загальна вартість (оцінка) портфеля;

б) коефіцієнт ліквідності (визначається як відношення сумарної вартості важколіквідних активів і сумарної вартості швидколіквідних активів):

$$W = K_{\text{Л}}^{-1} = \frac{C_{\text{С}} + C_{\text{М}}}{C_{\text{Т}} + C_{\text{В}}},$$

де: $C_{\text{В}}$, $C_{\text{С}}$, $C_{\text{М}}$ — сумарна вартість (оцінка) відповідно високоліквідних, середньоліквідних і малоліквідних активів у портфелі.

Чим більші значення показників $L_{\text{Т}}^{-1}$ та $K_{\text{Л}}^{-1}$, тим менш ліквідним вважається інвестиційний портфель і тим більшим є його ризик ліквідності.

Важливо також урахувати показники ступеня ризику ліквідності щодо рівня фінансових втрат [34].

2.4.4. Оцінка міри загального ризику портфеля активів

Якщо частку капіталу інвестора, вкладену в *k*-й актив, позначити через x_k, то норма прибутку портфеля обчислюється за формулою

$$R_{\Pi} = \sum_{k=1}^{N} (x_k R_k),$$

де: N — кількість активів, що складають портфель; R_{Π} — норма прибутку портфеля. З урахуванням (2.1) отримуємо:

$$R_{\Pi} = \sum_{k=1}^{N} \left(x_k (\alpha_{kI} + \beta_{kI} R_{kI} + \varepsilon_{\kappa})\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \left(x_k \alpha_{kI}\right) + \left(\sum_{k=1}^{N} \left(x_k \beta_{kI}\right)\right) R_I + \sum_{k=1}^{N} \left(x_k \varepsilon_{\kappa}\right) = \alpha_{\Pi I} + \beta_{\Pi I} R_I + \varepsilon_{\Pi},$$

де:

$$\alpha_{\Pi I} = \sum_{k=1}^{N} (x_k \alpha_{kI}); \qquad \beta_{\Pi I} = \sum_{k=1}^{N} (x_k \beta_{kI}); \qquad \varepsilon_{\Pi I} = \sum_{k=1}^{N} (x_k \varepsilon_{kI}).$$

Оскільки ВВ ε_{Π} та R_I можна вважати некорельованими між собою, то величина загального ризику портфеля, що вимірюється дисперсією його норми прибутку, обчислюється за формулою

$$D(R_{\Pi}) = \beta_{\Pi I}^2 D(R_I) + D(\varepsilon_{\Pi})$$

або

$$\sigma_{\Pi}^2 = \beta_{\Pi I}^2 \sigma_I^2 + \sigma_{\varepsilon\Pi}^2,$$

де: $\sigma_{M\Pi}^2 = \beta_{\Pi I}^2 \sigma_I^2$ — оцінка рівня ринкового ризику портфеля; $\sigma_{\varepsilon\Pi}^2$ — оцінка рівня його власного ризику.

У свою чергу, з урахуванням того, що випадкові відхилення ε_{κ} $(k = 1,..., N)$ є специфічними для відповідного активу, ці ВВ можна вважати попарно некорельованими, а тому

$$\sigma^2_{\varepsilon_{\Pi}} = \sum_{k=1}^{N}\left(x_k^2 \sigma^2_{\varepsilon_{\kappa}}\right). \tag{2.2}$$

Зазначимо, що чим більш диверсифікованим є портфель (тобто чим більша кількість активів складає його), тим меншими є частки x_k $(k = 1,..., N)$. При цьому значення $\beta_{\Pi I}$ суттєво не змінюється, крім випадків навмисного включення в портфель активів з відносно низьким чи високим значенням «бети». Оскільки «бета» портфеля є середньозваженим значенням «бет» активів, що входять у портфель, то немає підстав припускати, що збільшення диверсифікації портфеля призведе до зміни «бети» портфеля і, отже, до зміни систематичного (ринкового) ризику портфеля у певний бік.

Таким чином, якщо покласти $x_k = \dfrac{1}{N}$, то можна стверджувати, що диверсифікація веде до усереднення систематичного (ринкового) ризику портфеля (забезпечує середньозважену оцінку).

Цей висновок є важливим у тому плані, що в ситуації невдалого чи якісного прогнозу більшість акцій упадуть чи відповідно зростуть у ціні. А тому, не дивлячись на рівень диверсифікації портфеля, завжди можна очікувати, що такі загальноринкові явища впливатимуть на прибутковість портфеля.

Щодо власного (специфічного чи диверсифікованого) ризику портфеля, то деякі активи можуть зрости в ціні в результаті появи несподіваних сприятливих новин (інформації) відносно компаній, що є емітентами відповідних (залучених до портфеля) активів. Інші активи можуть впасти у ціні внаслідок поширення несподіваних поганих новин (інформації) щодо певних компаній (наприклад, про аварії). У майбутньому можна сподіватися, що кількість компаній, про які будуть відомі хороші новини, приблизно буде рівною кількості компаній, про які будуть відомі погані новини, що несуттєво вплине на прибутковість добре диверсифікованого портфеля. Це означає, що чим більше диверсифікується портфель, тим меншим стає його власний (специфічний) ризик і, як наслідок, його загальний ризик.

Якщо припустити, що в усі активи інвестовано коштів порівну, тобто $x_1 = ... = x_N = \dfrac{1}{N}$, то згідно з (2.2) отримуємо, що

$$\sigma^2_{\varepsilon\Pi} = \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{N}\right)^2 \sigma^2_{\varepsilon_k} = \frac{1}{N}\cdot\frac{\sigma^2_{\varepsilon_1} + \sigma^2_{\varepsilon_2} + ... + \sigma^2_{\varepsilon_N}}{N} = \frac{1}{N}\sigma^2_{\text{сер}} \le \frac{1}{N}\sigma^2_{\max},$$

де: $\sigma^2_{\text{сер}}$ — оцінка середнього власного (специфічного) ризику активів, що утворюють портфель; $\sigma^2_{\max}$ — максимальний з оцінок власних ризиків активів.

Отже, оцінка власного (специфічного) ризику портфеля є в N разів меншим величини $\sigma^2_{\text{сер}}$. Якщо ж тепер N збільшити, то це сприятиме зменшенню $\sigma^2_{\varepsilon_\Pi}$, тобто зменшенню власного ризику портфеля.

А тому можна зробити висновок, що диверсифікація суттєво зменшує власний (специфічний) ризик портфеля. Цей висновок графічно відображено на рис. 2.1.

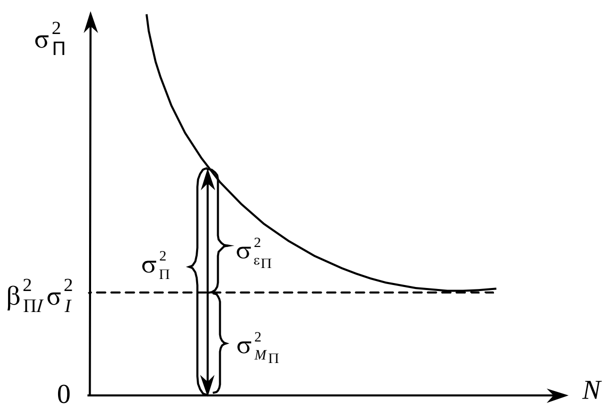


Рис. 2.1. Ризик і диверсифікація

Якщо, наприклад, розглянути портфель з 30 чи більше випадково вибраних активів, то його загальний ризик мало відрізнятиметься від величини наявного ринкового (систематичного) ризику. Тобто портфель з такою кількістю активів вже є добре диверсифікованим.

2.4.5. Модель оцінки капітальних активів (МОКА)

У зарубіжній літературі цю модель можна зустріти під назвою CAPM (від англ. Capital Asset Price Model).

У моделі оцінки капітальних активів [112, 128, 134, 141] ринок цінних паперів розглядається з точки зору двох основних характеристик: сподіваної норми прибутку і ризику, в якості міри якого використовується коефіцієнт систематичного ризику (β).

Мілтон Фрідмен, нобелівський лауреат 1976 р. у сфері економіки, писав [112]: «стосовно “припущень”, що є підвалинами будь-якої теорії, доречним є не питання про їх “реалістичність”, яка ніколи для них не є притаманною, а те, наскільки добре вони (“припущення”) апроксимують досліджуване явище. Відповіддю на це питання є демонстрація того, як працює теорія (модель), чи забезпечує вона достатньо точні передбачення».

Підвалинами МОКА є такі припущення [112]:

- інвестори оцінюють інвестиційні портфелі на основі сподіваної норми прибутку та її середньоквадратичного відхилення;
- інвестори у виборі портфеля віддають перевагу тому з них, котрий за інших рівних умов має більшу сподівану норму прибутку;
- інвестори не бажають ризикувати, а тому, здійснюючи вибір, вони віддають перевагу портфелю, який за рівних інших умов має найменше середньоквадратичне відхилення;
- існує безризикова (з невеликим ступенем ризику, яким можна знехтувати) відсоткова ставка, за якої інвестор може надати позику (інвестувати) або взяти в борг грошові ресурси;
- безризикова відсоткова ставка однакова для всіх інвесторів;
- інвесторам притаманні однорідні очікування, тобто вони однаково оцінюють сподівану норму прибутку, середньоквадратичні відхилення та коваріації норм прибутків цінних паперів.

Як випливає з цих припущень, у МОКА розглядається граничний випадок, коли всі інвестори володіють однією й тією ж інформацією та однаково оцінюють перспективи цінних паперів, а це означає, що вони однаково аналізують отриману інформацію.

Досліджуючи колективну поведінку всіх інвесторів на ринку, можна виявити характер рівноважної залежності між ризиком і прибутковістю кожного цінного паперу.

Як наслідок, доходимо висновку, що згідно з допущеннями, висунутими в МОКА, кожен інвестор розподіляє свої ресурси серед ризикованих цінних паперів в одній і тій же відносній пропорції, збільшуючи безризикову позику чи кредитування з метою досягнення найкращої для нього комбінації ризику і прибутковості. Ця властивість МОКА носить назву ***теореми розподілу***, яка стверджує, що оптимальна для інвестора комбінація ризикованих активів не залежить від його ставлення до ризику і прибутку.

Ще однією важливою властивістю МОКА є те, що в оптимальному для інвесторів портфелі кожен вид цінних паперів складає не нульову частку. Цей портфель, що носить назву *ринковий портфель*, визначають так:

Ринковий портфель — це портфель, який містить всі цінні папери і в якому частка кожного паперу відповідає його відносній ринковій вартості. Відносна ринкова вартість кожного цінного паперу рівна її сукупній ринковій вартості, поділеній на суму сукупних ринкових вартостей усіх цінних паперів.

Ринковий портфель посідає центральне місце в МОКА. Це спричинено тим, що множина ефективних (найкращих) портфелів утворюється шляхом інвестицій в ринковий портфель у сукупності з бажаною за обсягом безризиковою позичкою чи кредитом. Цей (*ринковий*) портфель *використовують в якості універсального показника оцінки ефективності*. Інвестиційні менеджери та їхні клієнти часто порівнюють результати діяльності менеджерів з прибутковістю ринкового портфеля.

Труднощі, що виникають у разі визначення структури і вартості «істинного» ринкового портфеля [112], привели до необхідності використання його проекцій (аналогів). Наприклад, під час здійснення операції зі звичайними акціями більшість науковців і практиків визначають ринковий портфель як достатньо репрезентабельний індекс (для США, наприклад, S&P 500, для Англії — FT-SE Actuaries 350, для Німеччини — CDAX тощо).

Позначимо через m_M та σ_M, відповідно, сподівану норму прибутку та стандартне (середньоквадратичне) відхилення ринкового портфеля, через R_F — норму прибутку (відсоткову ставку) безризикових активів. Тоді в системі координат «$m — \sigma$» їм відповідатимуть точки $M_M(m_M; \sigma_M)$, та $Mo(R_F; 0)$.

Портфелі, що є комбінацією ринкового портфеля і безризикової позики чи кредиту, мають норму прибутку

$$R_E = (1 - x)R_F + xR_M$$

і, відповідно, сподівану норму прибутку

$$m_E = (1-x)R_F + xm_M = R_F + x(m_M - R_F)\,,$$

де: $m_E = M(R_E)$, x — частка капіталу, що інвестується у ринковий портфель; $(1-x)$ — частка інвестицій у безризикові активи. Оскільки

$$\sigma_{MF} = \text{cov}(R_M;\ R_F) = 0;\ \ \sigma_F^2 = 0,$$

отримуємо, що

$$\sigma_E = \sqrt{D(R_E)} = \sqrt{(1-x)^2\sigma_F^2 + x^2\sigma_M^2 + 2x(1-x)\sigma_{MF}} = x\sigma_M\,.$$

А тому, враховуючи, що $x = \dfrac{\sigma_E}{\sigma_M}$, маємо:

$$m_E = R_F + \left(\frac{m_M - R_F}{\sigma_M}\right)\sigma_E\,. \tag{2.3}$$

У системі координат «σ — m» точки $M_E(\sigma_E;\ m_E)$, що належать прямій (2.3), утворюють множину ефективних портфелів щодо МОКА. Ця множина відома під назвою *ринкова лінія капіталів* (рис. 2.2).

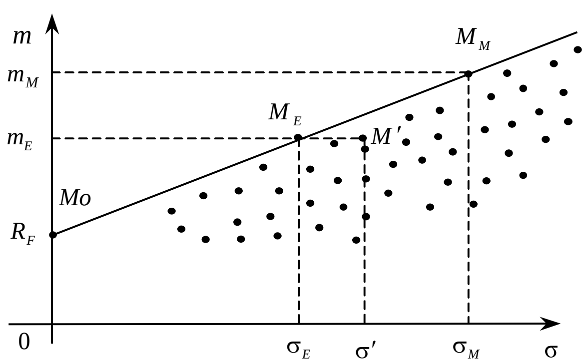


Рис. 2.2. Ринкова лінія капіталів

Зауважимо, що коли у комбінації з безризиковими позиками (чи кредитами) використовувати не ринковий, а якийсь інший портфель, то утворені портфелі відповідатимуть точкам, що лежать під ринковою лінією капіталів (див. рис. 2.2), тобто за тієї ж сподіваної норми прибутку (m_E) ці портфелі (M') матимуть більший ризик $(\sigma_E > \sigma')$ порівняно з відповідними ефективними портфелями (M_E).

Ринкова лінія капіталів є лінією рівноваги щодо сподіваної норми прибутку та середньоквадратичного відхилення для ефективних портфелів. Окремі цінні папери, обтяжені ризиком, завжди відповідатимуть точкам, що лежать під цією прямою, оскільки ці папери є неефективними портфелями.

Модель формування курсів на фондовому ринку (МОКА) не відображає зв'язок між сподіваною нормою прибутків і середньоквадратичним відхиленням для кожного цінного паперу. Проаналізуємо МОКА з цієї позиції.

Норма прибутку ринкового портфеля

$$R_M = \sum_{k=1}^{N}\left(x_k^M R_k\right),$$

де x_k^M — частка інвестицій в цінний папір виду k, що входить у ринковий портфель $\left(\sum_{k=1}^{N} x_k^M = 1\right)$. Тоді з урахуванням того, що

$$\sigma_{jM} = \operatorname{cov}(R_j; R_M) = \sum_{k=1}^{N}\left(x_k^M \operatorname{cov}(R_j; R_k)\right) = \sum_{k=1}^{N}\left(x_k^M \sigma_{jk}\right),$$

отримаємо, що середньоквадратичне відхилення ринкового портфеля

$$\sigma_M = \left(\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_k^M x_j^M \sigma_{kj}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(x_1^M \sum_{k=1}^{N}\left(x_k^M \sigma_{1k}\right) + x_2^M \sum_{k=1}^{N}\left(x_k^M \sigma_{2k}\right) + \ldots + x_N^M \sum_{k=1}^{N}\left(x_k^M \sigma_{Nk}\right)\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(x_1^M \sigma_{1M} + x_2^M \sigma_{2M} + \ldots + x_N^M \sigma_{NM}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Виходячи з отриманого, кожний інвестор усвідомлює, що величина допустимого ризику кожного цінного паперу визначається коваріацією цього паперу щодо ринкового портфеля, тобто величиною σ_{jM} $(j = 1, \ldots, N)$. А тому інвестори розглядатимуть цінні папери з більшими значеннями σ_{jM} як такі, що вносять більший ризик в ринковий портфель.

Виходячи з МОКА, модель взаємозв'язку між ризиком і сподіваною нормою прибутку цінного паперу (у стані рівноваги) задається співвідношенням

$$m_j = R_F + \left(\frac{m_M - R_F}{\sigma_M^2} \right) \sigma_{jM}\,, \tag{2.4}$$

де в якості ризику використовується коваріація (доведення цієї формули наведене у додатку до розділу 2, пункт 2.7.5). Залежність (2.4) між коваріацією і сподіваною нормою прибутку називається *ринковою лінією цінного паперу*. Пряма (2.4) в системі координат «σ_{jM} — m_j», очевидно, проходить через точки $M_0(0; R_F)$ та $M_M(\sigma_M^2;\ m_M)$.

Ураховуючи, що коефіцієнт «бета» j-го цінного паперу $\beta_{jM} = \frac{\sigma_{jM}}{\sigma_M^2}$, рівняння (2.4) можна записати у такому вигляді:

$$m_j = R_F + (m_M - R_F)\, \beta_{jM}\,. \tag{2.5}$$

Очевидно, що пряма (2.5) в системі координат «$\beta_j - m_j$» проходить через точки $M_0(0; R_F)$ та $M_M(1; m_M)$.

Розглянемо портфель інвестора (не обов'язково ефективний), утворений з N' активів $(N' \le N)$, для якого:

$$R_\Pi = \sum_{j=1}^{N'} \left(x_j^\Pi R_j \right); \qquad m_\Pi = \sum_{j=1}^{N'} \left(x_j^\Pi m_j \right); \qquad \sigma_\Pi = \sqrt{D(R_\Pi)}$$

(тут x_j^Π — частка j-го активу в портфелі, $\sum_{j=1}^{N'} x_j^\Pi = 1$). Тоді коваріація і коефіцієнт «бета» між портфелем інвестора та ринковим портфелем обчислюються відповідно за формулами

$$\sigma_{\Pi M} = \sum_{j=1}^{N'} \left(x_j^\Pi \sigma_{jM} \right); \qquad \beta_{\Pi M} = \sum_{j=1}^{N'} \left(x_j^\Pi \beta_{jM} \right)$$

і при цьому мають місце співвідношення (*лінія ринку портфелів інвесторів*):

$$m_\Pi = R_F + \left(\frac{m_M - R_F}{\sigma_M^2} \right) \sigma_{\Pi M}\,; \tag{2.6}$$

$$m_\Pi = R_F + (m_M - R_F)\, \beta_{\Pi M}\,. \tag{2.7}$$

Стан рівноваги, відображений моделями (2.6) та (2.7) (рис. 2.3), є сумарною результуючою коригувань інвесторами структури своїх портфелів і результуючого тиску на курси цінних паперів. Маючи набір курсів цінних паперів, інвестори обчислюють сподівані норми прибутку і коваріації (чи коефіцієнти «бета»), а потім визначають склад і структуру своїх оптимальних портфелів. Якщо попит на цінні папери певного виду відрізняється від їх пропозиції, то така незбалансованість впливатиме на їх курс. Отримавши нову інформацію щодо курсів, інвестори переглядають свої наміри щодо деяких цінних паперів. Цей процес продовжуватиметься, допоки загальний попит на цінні папери певного виду не буде у рівновазі з їх пропозицією.

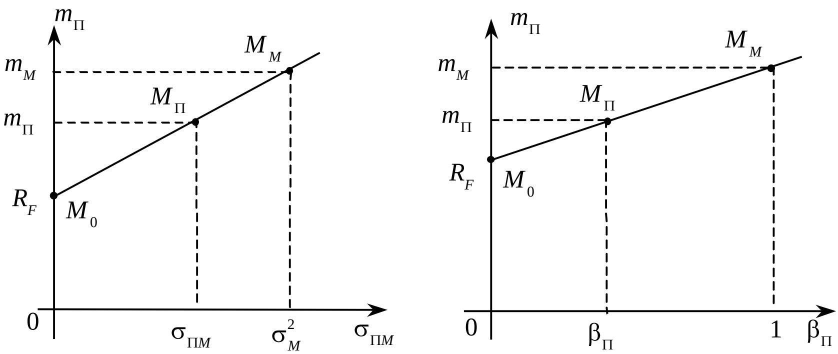


Рис. 2.3. Лінія ринку портфелів інвесторів

З урахуванням того, що $\sigma_{ПM} = \rho_{ПM}\sigma_П\sigma_M$, модель (2.5) можна записати у вигляді

$$m_П = R_F + \left(\frac{m_M - R_F}{\sigma_M}\right)\rho_{ПM}\sigma_П. \tag{2.8}$$

У співвідношенні (2.8) коефіцієнт кореляції $\rho_{ПM}$ виступає в ролі параметра $(\rho_{ПM} \in [-1; 1])$, а тому його можна назвати параметричною моделлю портфелів інвестора. При $\rho_{ПM} = 1$ отримуємо ринкову лінію капіталів (2.3).

Покладаючи значення параметра $\rho_{ПM} = \text{const}$, отримуємо множину портфелів (пряму), що відповідають зафіксованій щільності зв’язку між ринковим портфелем і портфелем інвестора (рис. 2.4). Множина усіх (реальних і нереальних) портфелів лежить у секторі, утвореному прямими, які відповідають параметрам $\rho_{\Pi M} = -1$ та $\rho_{\Pi M} = +1$.

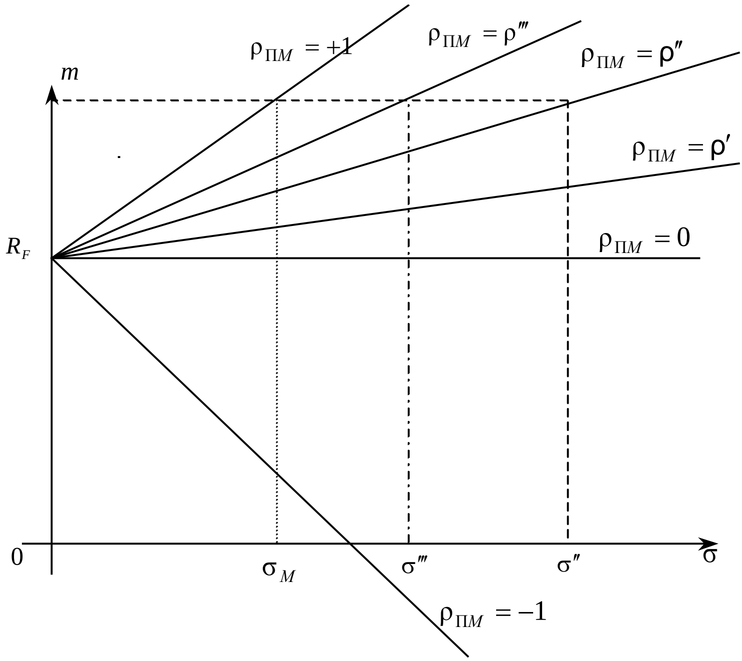


Рис. 2.4. Зображення множини портфелів
на основі параметричної моделі

Коефіцієнт кореляції $\rho_{\Pi M}$ можна обчислити за формулою

$$\rho_{\Pi M} = \sum_{j=1}^{N'} \left(x_j^{\Pi} \rho_{jM} \frac{\sigma_j}{\sigma_{\Pi}} \right) = \sum_{j=1}^{N'} \sum_{k=1}^{N} \left(x_j^{\Pi} x_k^{M} \frac{\sigma_{jk}}{\sigma_M \sigma_{\Pi}} \right).$$

Але здоровий глузд вказує на те, що реальні портфелі мають знаходитися на прямих, що утворюють гострий додатний кут з віссю абсцис, тобто на прямих, що відповідають умові: $\rho_{\Pi M} = \rho > 0$.

Підсумовуючи викладене у розділі 2, необхідно зазначити, що поряд із розглянутими тут показниками (параметрами) ризику в теорії ризику і на практиці використовується й низка інших показників. З деякими із них можна ознайомитися в [3, 4, 6, 18, 22, 29, 34, 36, 59, 61, 63, 75, 88, 90, 108, 112, 117, 126, 146]. Часто ризик необхідно оцінювати на основі декількох його показників, наприклад, таких, як імовірності перевищення допустимого, критичного та катастрофічного рівнів збитків. Один із підходів щодо прийняття рішень у таких ситуаціях — це використання одного з показників кількісної оцінки ризику в якості критерію оптимальності, решти показників ризику — як обмеження. Детальніше цю ситуацію буде розглянуто у розділах 4 та 5.

2.5. ТЕМИ РЕФЕРАТІВ

1. Узагальнення МОКА у випадку включення в модель обмежень на безризикові позики.
2. Узагальнення МОКА у випадку, коли ставка безризикової позики є більшою за ставку безризикового кредитування.
3. Узагальнення МОКА у випадку неоднорідних очікувань інвесторів.
4. Узагальнення МОКА у випадку врахування ліквідності цінних паперів.
5. Багатофакторні моделі оцінки прибутковості цінних паперів.
6. Моделі арбітражного ціноутворення.
7. Арбітражні портфелі.

2.6. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ВИКОНАННЯ

1. Постійні річні витрати підприємства становлять 500 УГО, а непостійні — 10 % від обсягу продажу продукції цього підприємства за рік. Сподіване значення обсягу продажу за рік становить 600 УГО. Проаналізувати ризик банкрутства підприємства, якщо коливання попиту можуть досягти 10%.

Зауваження. Розглянути ситуацію, коли обсяг продажу за рік становить 600 УГО, а також величину, на 10% меншу від цього значення. Дане підприємство буде банкрутом, якщо його прибуток виявиться від’ємною величиною.

2. Уважаючи, що ВВ Ω, яка описує збитки, є розподіленою згідно з нормальним законом $N(m;\sigma^2)$, знайти показники допустимого $W(\omega_{\text{дп}})$, критичного $W(\omega_{\text{кр}})$ і катастрофічного $W(\omega_{\text{кт}})$ ризиків. Чи можна ризик щодо участі в даному проекті визнати

прийнятним (доцільним), якщо критерії ризику $k_{дп} = 0{,}1$; $k_{кр} = 0{,}03$; $k_{кт} = 0{,}005$ при:

а) $m = 50$; $\sigma^2 = 4$; $\omega_{дп} = 51$; $\omega_{кр} = 52$; $\omega_{кт} = 54$;

б) $m = 75$; $\sigma^2 = 9$; $\omega_{дп} = 81$; $\omega_{кр} = 87$; $\omega_{кт} = 90$;

в) $m = 100$; $\sigma^2 = 16$; $\omega_{дп} = 104$; $\omega_{кр} = 108$; $\omega_{кт} = 112$.

Зауваження. Інтегральна функція розподілу ймовірності значень ВВ Ω для нормального закону задається формулою

$$F(\omega) = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{\omega - m}{\sigma}\right),$$

де $\Phi(z) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{\frac{-(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt$ — функція Лапласа.

3. Відома щільність розподілу ВВ Ω — величина можливих збитків:

$$f(\omega) = \begin{cases} a \sin\left(\pi \dfrac{\omega - 40}{12}\right), & \text{якщо } 40 \le \omega \le 52; \\ 0, & \text{якщо } \omega < 40 \text{ або } \omega > 52. \end{cases}$$

Знайти значення параметра *a*.

Оцінити:

а) імовірність $p_{дп} = P(\Omega < \omega_{дп})$ і показник допустимого ризику $W(\omega_{дп})$, якщо $\omega_{дп} = 49$;

б) ступінь ризику в абсолютному виразі як сподівану величину збитків, середньоквадратичне та семіквадратичне відхилення збитків;

в) ступінь ризику у відносному виразі як коефіцієнт варіації та коефіцієнт семіваріації.

4. Можливі значення ω_j збитків — натуральні числа $(\omega_j = j;\, j \in N)$, а ймовірності цих значень $q_j = P(\Omega = \omega_j) = (0{,}5)^j$ (тобто Ω — дискретна ВВ, що приймає нескінченну кількість значень). Знайти показники ступеня ризику $W(\omega_{дп})$, $W(\omega_{кр})$, $W(\omega_{кт})$, якщо сподіване значення прибутку становить 8 УГО, загальна сума виручки — 10 УГО, величина майнового стану підприємця — 11 УГО. Чи можна ризик щодо участі в даному проекті

визнати прийнятним (доцільним), якщо задані такі значення критеріїв ризику:

а) $k_{\text{дп}} = 0{,}1$; $k_{\text{кр}} = 0{,}03$; $k_{\text{кт}} = 0{,}05$?

б) $k_{\text{дп}} = 0{,}1$; $k_{\text{кр}} = 0{,}01$; $k_{\text{кт}} = 0{,}001$?

в) $k_{\text{дп}} = 0{,}05$; $k_{\text{кр}} = 0{,}005$; $k_{\text{кт}} = 0{,}0005$?

Зауваження. Інтегральна функція розподілу ймовірностей і значень ВВ Ω задається формулою

$$F(\omega) = P(\Omega < \omega) = \sum_{\omega_j < \omega} q_j .$$

5. Підприємство налагоджує випуск нової марки пральної машини малого об'єму. Попит на цю продукцію залежить від стану економічного середовища. Можливі три стани, ймовірності настання яких відповідно рівні $q_1 = 0{,}4$; $q_2 = 0{,}5$; $q_3 = 0{,}1$. У випадку першого стану економічного середовища підприємство отримає прибуток $\omega_1 = 700$ УГО, другого стану економічного середовища — прибуток $\omega_2 = 500$ УГО, третього — збитки у розмірі $\omega_3 = 300$ УГО.

Оцінити ступінь ризику в абсолютному вираженні як середньоквадратичне та семіквадратичне відхилення і у відносному вираженні як коефіцієнти варіації та семіваріації.

Зауваження. Врахувати, що $\omega_3 = -300$ УГО.

6. Керівництво фірми здійснює вибір одного з двох наборів товарів (A_1 та A_2) щодо виробництва та реалізації. Для кожного з цих наборів можливі два сценарії щодо попиту і при цьому відомо, що прибуток від реалізації першого набору A_1 — це ВВ Ω_1 із таким законом розподілу:

ω_{1j}	200	100
q_{1j}	0,5	0,5

прибуток від реалізації другого набору A_2 — це ВВ Ω_2 із законом розподілу

ω_{2j}	151	51
q_{2j}	0,99	0,01

Необхідно обчислити величину ризику кожної стратегії і прийняти рішення щодо випуску тільки одного з наборів товарів. Чому обчислення ступеня ризику у відносному вираженні в даному випадку є зайвим?

7. Менеджеру банку необхідно вибрати для інвестування один з двох проектів. Реалізація кожного з проектів може здійснюватися за одним з трьох сценаріїв: песимістичним, стриманим та оптимістичним. Прогнози щодо прибутків (в УГО), а також відповідні ймовірності для першого інвестиційного проекту такі:

ω_{1j}	300	1000	1500
q_{1j}	0,2	0,6	0,2

для другого проекту:

ω_{2j}	240	900	1800
q_{2j}	0,25	0,5	0,25

Необхідно оцінити ступінь ризику щодо участі в кожному з інвестиційних проектів. Чи потрібно для прийняття відповідного рішення оцінювати ступінь ризику у відносному вираженні? Чому?

8. Менеджеру банку необхідно вибрати для інвестування один з двох проектів. Інформація щодо першого проекту така:

ω_{1j}	20	25	30
q_{1j}	0,3	0,4	0,3

щодо другого проекту:

ω_{2j}	15	30	40
q_{2j}	0,2	0,5	0,3

де: ω_{kj} — прибуток (в УГО) від k-го проекту в разі реалізації j-го сценарію; q_{kj} — ймовірність реалізації j-го сценарію для k-го проекту $(k=1,\ 2;\ j=1,\ 2,\ 3)$.

Необхідно оцінити величину ризику щодо участі в кожному з інвестиційних проектів і прийняти рішення на основі порівняння: а) їх коефіцієнтів варіації; б) їх коефіцієнтів семіваріації.

9. Урожайність двох сортів сільськогосподарської культури залежить від стану погоди. Виділяють п'ять станів погоди, відносно яких є така інформація:

ω_{1j}	22	26	36	48	56
ω_{2j}	20	30	38	42	48
q_j	0,1	0,35	0,3	0,2	0,05

де: ω_{kj} — середня врожайність (ц/га) k-го сорту в умовах j-го стану погоди $(k = 1,\ 2;\quad j = 1, \ldots,\ 5)$; q_j — імовірність настання j-го стану погоди $(j = 1, \ldots,\ 5)$. Необхідно оцінити величину ризику для кожного із сортів:

а) в абсолютному вираженні як середньоквадратичне та семіквадратичне відхилення;

б) у відносному вираженні як коефіцієнти варіації та семіваріації;

в) у вигляді числових характеристик, зазначених у пунктах а) і б), якщо замість математичного сподівання використовується мода;

г) у вигляді числових характеристик, зазначених у пунктах а) і б), якщо замість математичного сподівання використовується медіана.

Зауваження. Врахувати, що для першого із сортів мода $Mo(\Omega_1) = \omega_{12} = 26,$ медіана $Me(\Omega_1) = \omega_{13} = 36,$ а для другого — мода $Mo(\Omega_2) = \omega_{22} = 30,$ медіана $Me(\Omega_2) = \omega_{23} = 38.$

10. Інвестор посідає портфель, ринкова модель якого задається співвідношенням:

$$R_{\Pi} = 1{,}5\% + 0{,}90 R_I + e_{\Pi}.$$

Якою буде сподівана норма прибутку портфеля інвестора, якщо сподівана норма прибутку на індекс ринку становить 12%?

11. Інвестор посідає портфель, складений з трьох цінних паперів з такими характеристиками*:

Цінний папір	«Бета»-коефіцієнт	Стандартне відхилення, %	Частка
A	1,20	5	0,3
B	1,05	8	0,5
C	0,9	2	0,2

Якою буде оцінка загального ризику портфеля інвестора, якщо стандартне відхилення індексу ринку становить 18%?

12. Розглядаються два портфелі: один, утворений з чотирьох цінних паперів різних видів, а другий — з 10. Усі цінні папери мають коефіцієнт «бета», рівний одиниці, і власний ризик, що становить 30%. В обох портфелях частки усіх видів цінних паперів однакові.

Оцініть ступінь загального ризику кожного з портфелів, якщо стандартне відхилення індексу ринку становить 20%.

13. Обчисліть «бета» цінного паперу виду *B,* якщо відомо, що «бета» цінного паперу виду *A* дорівнює 1,2; коваріація цих цінних паперів — 470; дисперсія індексу ринку — 490.

14. Інвестор утворює портфель як з обтяжених ризиком, так і з безризикових активів. Сподівана норма прибутку ефективного портфеля, утвореного з обтяжених ризиком активів, становить 15%, безризикова ставка — 5%.

Яким є сподівана норма прибутку і оцінка загального ризику портфеля інвестора, якщо в ефективний (обтяжений ризиком) портфель він вкладає:

а) 75%; б) 90%; в) 120% своїх фінансових ресурсів, а решту — у безризиковий актив?

15. Портфель інвестора має сподівану норму прибутку, що становить 24%, при цьому сподівана норма прибутку ефективного (обтяженого ризиком) портфеля становить 18%, безризикова ставка — 5%.

Визначте структуру портфеля інвестора.

---

* Приклади 11—20 запозичено з [112].

16. Інвестор посідає портфель, утворений з обтяжених ризиком і з безризикових активів. Стандартне відхилення ефективного (обтяженого ризиком) портфеля становить 20%.

Яким буде стандартне відхилення портфеля інвестора, якщо він вкладе у безризиковий актив:

а) –30%; б) 10%; в) 30%?

17. Інвестиції здійснюються в обтяжені ризиком активи, з яких сформовано ефективний портфель зі сподіваною нормою прибутку, що становить 12%, та середньоквадратичним відхиленням 25%, а також у безризиковий актив, норма прибутку якого становить 7%. Якщо портфель активів має стандартне відхилення 20%, то якою є його сподівана норма прибутку?

18. Відомими є вектор сподіваних норм прибутку та матриця коваріацій трьох активів (цінних паперів):

$$M(R) = M\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10{,}1 \\ 7{,}8 \\ 5{,}0 \end{pmatrix}; \qquad \operatorname{cov}(R) = \begin{pmatrix} 210 & 60 & 0 \\ 60 & 90 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Відомо також, що ефективний портфель інвестора утворений з обтяжених ризиком активів, які ввійшли до нього у рівних частках.

Необхідно визначити:

1. Який з трьох цінних паперів є безризиковим активом? Чому?
2. Сподівану норму прибутку і стандартне відхилення для ефективного (обтяженого ризиком) портфеля інвестора.
3. Якщо безризиковий актив становить 25% портфеля інвестора, то якою є сподівана норма прибутку і стандартне відхилення всього портфеля?

19. У ринковий портфель входять два цінних папери із такими характеристиками:

Цінний папір	Сподівана норма прибутку, %	Стандартне відхилення, %	Частка у ринковому портфелі
A	10	20	0,4
B	15	28	0,6

За умови, що коефіцієнт кореляції цих цінних паперів дорівнює 0,3, а безризикова ставка становить 5%, запишіть рівняння ринкової лінії і побудуйте її графік.

20. Ринковий портфель утворений з чотирьох цінних паперів з такими характеристиками:

Цінний папір	Коваріація з ринком	Частка
A	242	0,2
B	360	0,3
C	155	0,2
D	210	0,3

Виходячи з цих даних, обчисліть стандартне відхилення ринкового портфеля.

21. У таблиці наведено дані щодо двох видів обтяжених ризиком цінних паперів, ринкового портфеля та безризикового цінного паперу:

Актив	Сподівана норма прибутку, %	Коефіцієнт кореляції з ринковим портфелем	Стандартне відхилення, %
Цінний папір 1	15,5	0,9	20,0
Цінний папір 2	9,2	0,8	9,0
Ринковий портфель	12,0	1,00	12,0
Безризиковий цінний папір	5,0	0,00	0,00

а) Побудуйте лінію ринку цінних паперів.
б) Обчисліть значення «бети» для вказаних цінних паперів.
в) Позначте ці цінні папери на лінії ринку цінних паперів.

2.7. ДОДАТОК ДО РОЗДІЛУ 2

2.7.1. Властивості математичного сподівання

Математичне сподівання має такі властивості:
1) якщо ВВ $\Omega = C = \text{const}$, то $M(C) = C = \text{const}$;
2) $M(k\Omega) = kM(\Omega)$, де $k = \text{const}$;
3) $M(\Omega_1 + \ldots + \Omega_m) = M(\Omega_1) + \ldots + M(\Omega_m)$;

4) якщо $u(\Omega)$ — функція від ВВ Ω, то для дискретного випадку

$$M\left(u(\Omega)\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(p_j u(\omega_j)\right),$$

а для неперервної ВВ

$$M\left(u(\Omega)\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(\omega)\,f(\omega)d\omega\,;$$

5) якщо ВВ Ω_k та Ω_j є незалежними, то

$$M(\Omega_k\Omega_j)=M(\Omega_k)M(\Omega_j)\,.$$

За наявності статистичної інформації величину математичного сподівання можна оцінити за формулою

$$M(\Omega)\approx\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\omega_t\,,$$

де T — обсяг вибірки (кількість періодів).

2.7.2. Властивості дисперсії, середньоквадратичного відхилення та коваріації

Дисперсія має такі властивості:

1) якщо $\Omega=C=\text{const}$, то $D(C)=\sigma^2(C)=0$;
2) $D(\Omega)\geq 0$; $\sigma(\Omega)\geq 0$;
3) $D(k\Omega)=k^2\sigma(\Omega)$, $k=\text{const}$;
4) $\sigma(k\Omega)=|k|\sigma(\Omega)$, $k=\text{const}$;
5) $D(\Omega)=\min\limits_{C}M\left((\Omega-C)^2\right)$, $C=\text{const}$;
6) $D(\Omega_k+\Omega_j)=D(\Omega_k)+D(\Omega_j)+2\,\text{cov}(\Omega_k;\Omega_j)$;
7) $D(\Omega_1+...+\Omega_n)=\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\text{cov}(\Omega_k;\Omega_j)=\sum\limits_{k=1}^{n}D(\Omega_k)+2\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sum\limits_{j=k+1}^{n}\text{cov}(\Omega_k;\Omega_j)$;

У властивостях 6, 7 величина $\text{cov}(\Omega_k;\Omega_j)$ — коваріація ВВ Ω_k та Ω_j — є мірою взаємозв'язку між цими ВВ. Вона обчислюється за формулою

$$\text{cov}(\Omega_k;\Omega_j)=\sigma_{kj}=M\left((\Omega_k-M(\Omega_k))\;(\Omega_j-M(\Omega_j)\right)=\sigma(\Omega_k)\;\sigma(\Omega_j)\rho_{kj}\,,$$

де ρ_{kj} — коефіцієнт парної кореляції — міра щільності зв'язку (взаємозалежності) між Ω_k та Ω_j, $\rho_{kj}\in[-1;+1]$.

Коваріація має такі властивості:

1) $\operatorname{cov}(\Omega_k;\ \Omega_j) = \operatorname{cov}(\Omega_j;\ \Omega_k)$;

2) $\operatorname{cov}(\Omega_k;\ \Omega_k) = D(\Omega_k) = \sigma^2(\Omega_k)$;

3) $\left|\operatorname{cov}(\Omega_k;\ \Omega_j)\right| \le \sigma(\Omega_k)\ \sigma(\Omega_j)$;

4) $\operatorname{cov}(\Omega_k;\ \Omega_j + \Omega_l) = \operatorname{cov}(\Omega_k;\ \Omega_j) + \operatorname{cov}(\Omega_k;\ \Omega_l)$;

5) $\operatorname{cov}(\Omega_k;\ c\Omega_j) = c\operatorname{cov}(\Omega_k;\ \Omega_j), \quad c = \text{const}$;

6) $\operatorname{cov}(\Omega_k;\ \Omega_M) = \sum\limits_{k=1}^{N}\left(c_j \operatorname{cov}(\Omega_k;\ \Omega_j)\right)$, де $\Omega_M = \sum\limits_{j=1}^{N}\left(c_j\Omega_j\right)$;

7) $\operatorname{cov}(\Omega_k;\ C) = 0, \quad C = \text{const}$;

8) $\operatorname{cov}(\Omega_k;\ \Omega_j) = 0$, якщо Ω_k та Ω_j є незалежними ВВ.

За наявності статистичної інформації оцінку дисперсії можна знайти за формулою

$$D(\Omega_k) \approx \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(\Omega_{kt} - M(\Omega_k))^2,$$

а коваріацію обчислити за формулою

$$\operatorname{cov}(\Omega_k;\ \Omega_j) = \sigma_{kj} \approx \hat{\sigma}_{kj} = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left((\omega_{kt} - M(\Omega_k))(\omega_{jt} - M(\Omega_j))\right),$$

де T — обсяг вибірки (кількість інтервалів).

2.7.3. Властивості коефіцієнта кореляції

Для ВВ Ω_k та Ω_j коефіцієнт кореляції обчислюється за формулою

$$\rho_{kj} = \rho(\Omega_k;\ \Omega_j) = \frac{\operatorname{cov}(\Omega_k;\ \Omega_j)}{\sigma(\Omega_k)\ \sigma(\Omega_j)}$$

і має такі властивості:

1) $\rho(\Omega_k;\ \Omega_j) = \rho(\Omega_j;\ \Omega_k) = \rho_{kj} \in [-1;\ 1]$;

2) $\rho(\Omega_k;\ \Omega_k) = \rho_{kk} = 1$;

3) $\rho(\Omega_k;\ C) = 0$, де $C = \text{const}$.

Якщо $\rho_{kj} = \rho(\Omega_k;\ \Omega_j) = 1$, то має місце строга лінійна залежність

$$\Omega_k = \alpha_{kj} + \beta_{kj}\Omega_j, \tag{2.9}$$

де $\beta_{kj} = \dfrac{\sigma_k}{\sigma_j} > 0$. Така функціональна залежність називається *абсолютно додатною кореляцією*.

Якщо $\rho_{kj} = \rho(\Omega_k; \Omega_j) = -1,$ то має місце строга лінійна залежність (2.9), де $\beta_{kj} = -\frac{\sigma_k}{\sigma_j} < 0.$ Така функціональна залежність називається *абсолютно від'ємною кореляцією*.

Якщо $\rho_{kj} = \rho(\Omega_k; \Omega_j) = 0,$ то лінійний взаємозв'язок між ВВ Ω_k та Ω_j відсутній і їх у цьому випадку називають *некорельованими* ВВ. Якщо ВВ Ω_k та Ω_j незалежні, то вони некорельовані, тобто $\rho_{kj} = 0.$ Обернене твердження не завжди має місце, тобто якщо дві ВВ залежні, то вони можуть бути як корельованими, так і некорельованими. Тобто, коефіцієнт кореляції двох залежних ВВ може бути відмінним від нуля, але може й дорівнювати нулю.

Слід звернути увагу на те, що для нормально розподілених ВВ з їх некорельованості випливає їх незалежність.

Якщо $0 < |\rho_{kj}| < 1,$ то між ВВ Ω_k та Ω_j відсутня строга лінійна залежність, але має місце кореляційна залежність:

$$M(\Omega_k \mid \Omega_j = \omega) = \alpha_{kj} + \beta_{kj}\omega, \tag{2.10}$$

яка не має функціонального характеру (тут $M(\Omega_k \mid \Omega_j = \omega)$ — умовне математичне сподівання ВВ Ω_k за умови, що ВВ Ω_j прийняла конкретне значення ω). Параметри моделі (2.10) визначаються за формулами

$$\beta_{kj} = \rho_{kj}\frac{\sigma_k}{\sigma_j}; \qquad \alpha_{kj} = M(\Omega_k) - \beta_{kj}M(\Omega_j).$$

Абсолютна величина коефіцієнта кореляції $|\rho_{kj}|$ вказує на силу взаємозв'язку між ВВ Ω_k та Ω_j: чим більшою за значенням є абсолютна величина, тим щільніше між собою зв'язані ці ВВ. Найщільніше зв'язані між собою ті дві ВВ, коефіцієнт кореляції яких мало відрізняється від 1 чи –1, а слабозв'язаними є ті, в яких значення коефіцієнта кореляції є близьким до нуля.

Знак коефіцієнта кореляції вказує напрям взаємозв'язку ВВ. Якщо він додатний, то маємо так звану додатну кореляцію. Це означає, що зростання (зниження) значень, які приймає ВВ Ω_k, відбувається одночасно зі зростанням (зниженням) значень, які приймає ВВ Ω_j. Коли ж коефіцієнт кореляції є від'ємною величиною, то маємо коефіцієнт так званої від'ємної кореляції ВВ. Це означає, що зростання (зниження) значень ВВ Ω_k йде зі зниженням (зростанням) значень ВВ Ω_j.

2.7.4. Правила визначення знака інгредієнта

Надалі символічний запис [–] означатиме, що певний показник ефективності має негативний інгредієнт, запис [+] — що він має позитивний інгредієнт.

Мають місце такі правила:

$$1)\ +[+]=[+];\quad +[-]=[-];\quad -[+]=[-];\quad -[-]=[+],$$

тобто, якщо показник береться зі знаком «+», то його інгредієнт не змінюється, зі знаком «–» — його інгредієнт змінюється на протилежний;

$$2)\ \frac{1}{[-]}=[+];\qquad \frac{1}{[+]}=[-],$$

тобто обернене значення показника ефективності і сам показник мають протилежні інгредієнти;

$$3)\ \frac{[-]}{[+]}=[-]\cdot\frac{1}{[+]}=[-]\cdot[-]=[-];\qquad \frac{[+]}{[-]}=[+]\cdot\frac{1}{[-]}=[+]\cdot[+]=[+],$$

тобто відношення двох показників з різними інгредієнтами породжує новий показник ефективності, інгредієнт якого збігається з інгредієнтом показника, що знаходиться в чисельнику;

$$4)\ [+]\cdot[-]=[-]\cdot[+]=\frac{1}{[+]}\cdot\frac{1}{[-]}=\frac{1}{[+]\cdot[-]},$$

тобто отримано протиріччя: показник ефективності має одночасно інгредієнти $[+]\cdot[-]$ і $\left(\dfrac{1}{[+]\cdot[-]}\right)$, які згідно з правилом 2 є протилежними;

$$5)\ \frac{[+]}{[+]}=[+]\cdot\frac{1}{[+]}=[+]\cdot[-]=\frac{1}{[+]\cdot[-]};\qquad \frac{[-]}{[-]}=[-]\cdot\frac{1}{[-]}=[-]\cdot[+]=\frac{1}{[-]\cdot[+]},$$

тобто і в цих випадках отримано протиріччя.

Отримані у правилах 4 і 5 протиріччя вказують на невизначеність інгредієнта відповідного економічного показника, а тому використання такого виду показників є недоцільним (некоректним), бо може призвести СПР до неправильного висновку під час прийняття рішення.

2.7.5. Рівняння ринкової лінії цінних паперів

Розглянемо портфель, складений з цінного паперу виду k та ринкового портфеля M у пропорції x та $(1-x)$ відповідно. Норма прибутку цього портфеля

$$R_{\Pi} = xR_k + (1-x)R_M,$$

сподівана норма прибутку

$$m_{\Pi} = xm_k + (1-x)m_M, \tag{2.11}$$

а стандартне відхилення

$$\sigma_{\Pi} = (x^2\sigma_k^2 + (1-x)^2\sigma_M^2 + 2x(1-x)\sigma_{kM})^{\frac{1}{2}}. \tag{2.12}$$

Система рівнянь (2.11)—(2.12) задає в параметричному вигляді залежність сподіваної норми прибутку m_{Π} від величини ризику σ_{Π} (в якості параметра виступає величина x). Точки $M_{\Pi}(\sigma_{\Pi};\, m_{\Pi})$ у системі координат «σ — m» лежать під лінією ринку капіталів (пряма $R_F M_M$ на рис. 2.5), яка задається рівнянням

$$m_E = R_F + \frac{m_M - R_F}{\sigma_M}\sigma_E, \tag{2.13}$$

утворюючи при цьому опуклу криву портфелів $(\sim M_k M_{\Pi} M_M)$, що проходить через точку $M_M(\sigma_M; m_M)$.

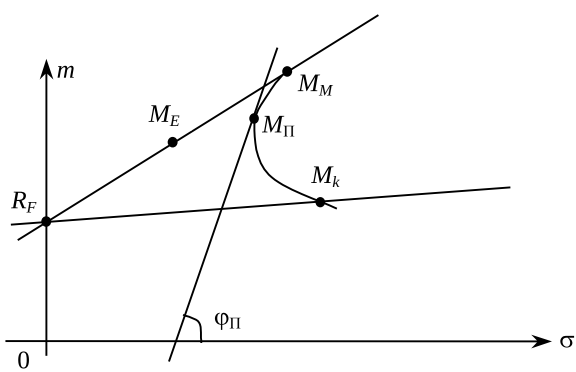


Рис. 2.5. Геометрична інтерпретація процесу виведення рівняння ринкової лінії цінних паперів

Очевидно, що точці $M_M(\sigma_M; m_M)$ відповідає значення параметра $x=0$. Враховуючи, що точка $M_M(\sigma_M; m_M)$ належить також лінії ринку капіталів (2.13), висновуємо, що пряма (2.13) дотикається до кривої портфелів у точці $M_M(\sigma_M; m_M)$.

Ураховуючи, що крива портфелів задається співвідношеннями (2.11), (2.12), знаходимо тангенс кута нахилу до осі абсцис дотичної до цієї кривої в точці $M_\Pi(\sigma_\Pi; m_\Pi)$:

$$\mathrm{tg}\,\varphi(M_\Pi)=\frac{dm_\Pi}{d\sigma_\Pi}=\frac{\frac{dm_\Pi}{dx}}{\frac{d\sigma_\Pi}{dx}}.$$

Оскільки

$$\frac{dm_\Pi}{d\sigma_\Pi}=m_k-m_M;\qquad \frac{d\sigma_\Pi}{dx}=\frac{x(\sigma_k^2+\sigma_M^2-2\sigma_{kM})+\sigma_{kM}-\sigma_M^2}{(x^2\sigma_k^2+(1-x)^2\sigma_M^2+2x(1-x)\sigma_{kM})^{\frac{1}{2}}},$$

то

$$\mathrm{tg}\,\varphi(M_\Pi)=\frac{(m_k-m_M)(x^2\sigma_k^2+(1-x)^2\sigma_M^2+2x(1-x)\sigma_{kM})^{\frac{1}{2}}}{x^2(\sigma_k^2+\sigma_M^2-2\sigma_{kM})+\sigma_{kM}-\sigma_M^2}.$$

За $x=0$ маємо:

$$\mathrm{tg}\,\varphi(M_M)=\frac{(m_k-m_M)\sigma_M}{\sigma_{kM}-\sigma_M^2}.$$

Оскільки в точці M_M дотична до кривої портфелів збігається з лінією ринку капіталів (2.13), для якої тангенс кута нахилу до осі абсцис

$$\mathrm{tg}\,\varphi(M_M)=\frac{dm_\Pi}{d\sigma_\Pi}=\frac{m_M-R_F}{\sigma_M},$$

приходимо до рівності

$$\frac{(m_k-m_M)\sigma_M}{\sigma_{kM}-\sigma_M^2}=\frac{m_M-R_F}{\sigma_M},$$

з якої отримуємо рівняння *ринкової лінії цінних паперів:*

$$m_k=R_F+\left(\frac{m_M-R_F}{\sigma_M^2}\right)\sigma_{kM}.$$

З урахуванням того, що $\sigma_{kM}=\rho_{kM}\sigma_k\sigma_M$, отримуємо рівняння прямої $R_F M_k$ (параметричне рівняння ринкової лінії цінних паперів):

$$m_k=R_F+\left(\rho_{kM}\,\frac{m_M-R_F}{\sigma_M^2}\right)\sigma_k.$$

2.8. ПОЗНАЧЕННЯ, ВИКОРИСТОВУВАНІ В РОЗДІЛІ 2

W — кількісна міра ризику;

$F(\omega) = P(\Omega < \omega)$ — (інтегральна) функція розподілу ймовірності щодо значень випадкової величини Ω;

$P(\Omega \in [\alpha;\beta])$ — ймовірність того, що значення випадкової величини Ω належить множині $[\alpha;\beta]$;

$f(\omega)$ — функція щільності (диференціальна функція) розподілу ймовірності щодо значень випадкової величини Ω;

$\omega_{дп}$, $\omega_{кр}$, $\omega_{кт}$ — відповідно допустимий, критичний, катастрофічний рівень збитків;

$P_{дп}$, $P_{кр}$, $P_{кт}$ — відповідно ймовірність попадання в область допустимого, критичного, катастрофічного ризику;

$W(\omega) = P(\Omega \geq \omega) = 1 - F(\omega)$ — ймовірність перевищення фіксованого рівня ω;

$W_{дп}$, $W_{кр}$, $W_{кт}$ — відповідно показник допустимого, критичного, катастрофічного ризику підприємця;

T — обсяг вибірки;

$\Omega = \Omega^{\pm} = (\omega_1;...;\omega_n)$ — дискретна випадкова величина, що має позитивний (негативний) інгредієнт;

$P = (p_1;...;p_n)$ — розподіл імовірності щодо настання значень випадкової величини Ω;

$M(\Omega)$ — сподіване значення (математичне сподівання) випадкової величини Ω;

$Mo(\Omega)$ — модальне значення (мода) випадкової величини Ω;

$Me(\Omega)$ — медіанне значення (медіана) випадкової величини Ω;

$G(\Omega)$ — зважене середньогеометричне значення випадкової величини Ω;

$D(\Omega)$ — дисперсія (варіація) випадкової величини Ω;

$\sigma(\Omega) = \sqrt{D(\Omega)}$ — середньоквадратичне (стандартне) відхилення випадкової величини Ω від її сподіваного значення $M(\Omega)$;

$D_{Mo}(\Omega), D_{Me}(\Omega), D_G(\Omega), D_{Z_F}(\Omega)$ — міра розсіювання значень економічного показника навколо центра групування $Mo(\Omega)$, $Me(\Omega)$, $G(\Omega)$, Z_F;

$\sigma_{Mo}(\Omega), \sigma_{Me}(\Omega), \sigma_G(\Omega), \sigma_{Z_F}(\Omega)$ — середньоквадратичне відхилення від центра групування відповідно $Mo(\Omega)$, $Me(\Omega)$, $G(\Omega)$, Z_F;

Z_0, $Z = Z(\Omega)$ — відповідно заплановане (порогове) значення економічного показника, центр групування реалізацій випадкової величини Ω;

$SV_Z(\Omega)$ — семіваріація випадкової величини Ω відносно порогового значення Z;

$SSV_Z(\Omega) = \sqrt{SV_Z(\Omega)}$ — семіквадратичне відхилення випадкової величини Ω відносно порогового значення Z;

$\alpha^- = (\alpha_1;...;\alpha_n)$ — вектор індикаторів несприятливих відхилень випадкової величини Ω відносно порогового значення Z;

$\beta^+ = (\beta_1;...;\beta_n)$ — вектор індикаторів сприятливих відхилень випадкової величини Ω відносно порогового значення Z;

$Risk(\Omega)$ — оцінка ступеня ризику;

λ — параметр, що відображає суб'єктивну оцінку СПР щодо міри важливості певних елементів (коефіцієнт несхильності до ризику);

K_Z — коефіцієнт очікуваних збитків;

M_Z^+, M_Z^- — сподівані значення сприятливих, очікування несприятливих відхилень випадкової величини Ω відносно порогового значення Z;

Ω_Z^+, Ω_Z^- — множина відповідно сприятливих значень (відхилень), несприятливих значень (відхилень) випадкової величини Ω відносно порогового значення Z;

P_Z^+, P_Z^- — сумарна ймовірність настання відповідно сприятливих, несприятливих відхилень випадкової величини Ω відносно порогового значення Z;

T_Z^+, T_Z^- — кількість відповідно сприятливих, несприятливих відхилень спостережуваних значень випадкової величини Ω відносно порогового значення Z;

$CV(\Omega^+)$, $CV_m(\Omega^+)$ — відповідно коефіцієнт варіації, модифікований коефіцієнт варіації випадкової величини $\Omega = \Omega^+$;

$CSV(\Omega^+)$, $CSV_m(\Omega^+)$ — відповідно коефіцієнт семіваріації, модифікований коефіцієнт семіваріації випадкової величини $\Omega = \Omega^+$;

$As(\Omega)$, $Ex(\Omega)$ — коефіцієнт відповідно асиметрії, ексцесу випадкової величини Ω;

$\beta_{kI} = \dfrac{\operatorname{cov}(R_k;R_I)}{D(R_I)} = \rho_{kI}\dfrac{\sigma_k}{\sigma_I}$ — коефіцієнт систематичного ризику (коефіцієнт «бета») k-го активу (щільність зв'язку між біржовим курсом акції k-го виду та загальним станом ринку, що відображається ринковим індексом I);

$L_{\text{Т}}$ — частка терміноволіквідних активів у портфелі;

$K_{\text{Л}}$ — коефіцієнт ліквідності портфеля;

$C_{\text{Т}}$, $C_{\text{В}}$, $C_{\text{С}}$, $C_{\text{М}}$ — вартість відповідно терміноволіквідних, високоліквідних, середньоліквідних, малоліквідних активів у портфелі;

N — кількість активів, що складають портфель;

$X = (x_1;...x_N)$ — структура портфеля активів;

$R_{\text{П}} = \sum_{k=1}^{N}(x_k\, R_k)$ — норма прибутку (випадкова величина) портфеля активів;

$m_{\text{П}} = \sum_{k=1}^{N}(x_k\, m_k)$ — сподівана норма прибутку портфеля активів;

$\beta_{\text{П}I} = \sum_{k=1}^{N}(x_k\, \beta_{kI})$ — коефіцієнт «бета» портфеля активів;

$\sigma_{\text{П}}^2 = \beta_{\text{П}I}^2 \sigma_I^2 + \sigma_{\varepsilon_{\text{П}}}^2$ — оцінка рівня загального ризику портфеля активів;

$\sigma_{M_{\text{П}}}^2 = \beta_{\text{П}I}^2 \sigma_I^2$ — оцінка рівня ринкового ризику портфеля активів;

$\sigma_{\varepsilon_{\text{П}}}^2$ — оцінка рівня власного ризику портфеля активів;

R_F — норма прибутку безризикового активу;

R_M — норма прибутку ринкового портфеля;

$R_E = (1-x)R_F + xR_M$ — норма прибутку ефективного портфеля;

$m_E = (1-x)\, R_F + x\, m_M$ — сподівана норма прибутку ефективного портфеля активів;

m_M, σ_M — відповідно сподівана норма прибутку та оцінка загального ризику ринкового портфеля;

x — частка капіталу, що інвестується у ринковий портфель;

$\sigma_E = \sqrt{D(R_E)} = x\sigma_M$ — оцінка загального ризику ефективного портфеля;

$\sigma_{\text{П}M}$, $\beta_{\text{П}M}$ — відповідно коваріація, коефіцієнт «бета» між портфелем інвестора і ринковим портфелем.

РОЗДІЛ 3

МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНОГО РИЗИКУ: КОНЦЕПЦІЯ ТЕОРІЇ ГРИ

Скорочення, використовувані у розділі:
СПР — суб'єкт прийняття рішень;
ІС — інформаційна ситуація;
ВВ — випадкова величина;
УГО — умовна грошова одиниця.

Здійснюючи оцінювання, приймаючи рішення в умовах ризику, зумовленого невизначеністю, розпливчастістю, конфліктністю, відсутністю повної (числової) інформації, неможливо повністю уникнути певного суб'єктивізму. А тому прийняття оптимальних (раціональних) економічних рішень має здійснюватися за умов мінімального рівня суб'єктивізму і раціонального (прийнятного) рівня ризику.

Якісний та кількісний аналіз ризику, кількісна оцінка його ступеня є передумовами, що збільшують можливості отримання оптимального (раціонального) рішення з використанням при цьому вдало побудованих, адекватних економіко-математичних моделей, методів математичного аналізу, зокрема математичного апарату теорії гри.

Згідно з концепцією теорії гри визначаються основні елементи теоретико-ігрових моделей прийняття рішень в умовах невизначеності, конфліктності та зумовленого ними ризику [11, 20, 22, 34, 36, 59, 64, 104].

Як зазначалось у розділі 1, правила поведінки СПР (гравця) — критерії вибору СПР своєї оптимальної стратегії — формуються на основі функціонала оцінювання (матриці платежів) статистичної гри

$$F=\left(f_{kj}:\quad k=1,\dots,m;\quad j=1,\dots,n\right)=\begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1j} & \cdots & f_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k1} & \cdots & f_{kj} & \cdots & f_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{m1} & \cdots & f_{mj} & \cdots & f_{mn} \end{pmatrix},$$

де f_{kj} — міра ефективності використання СПР своєї *чистої стратегії* s_k, коли економічне середовище («природа») знаходиться у стані θ_j $(k = 1,..., m; \quad j = 1,..., n)$. Як і раніше, ймовірність реалізації стану економічного середовища θ_j позначатимемо через q_j, де $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1, \;\; q_j \geq 0, \;\; j = 1,..., n.$

Надалі вважатимемо, що *k*-й рядок матриці платежів *F* визначає дискретну ВВ $F(s_k)$ (*вектор оцінювання*), яка має такий закон розподілу:

$F(s_k)$	f_{k1}	f_{k2}	…	f_{kn}
Q	q_1	q_2	…	q_n

Тобто вектор оцінювання $F(s_k)$ характеризується використанням СПР своєї чистої стратегії s_k. У свою чергу, стовпчики матриці платежів *F* складають значення оцінок ефективності усіх чистих стратегій СПР в умовах реалізації відповідного стану економічного середовища, а тому вважатимемо, що *j*-й стовпчик функціонала оцінювання *F* характеризує «використання» економічним середовищем (другим гравцем) свого стану θ_j (*j*-ї чистої стратегії). Позначимо цей (*j*-й) стовпчик через $F(\theta_j)$ і надалі називатимемо його вектором оцінювання *j*-го стану (*j* = 1,…, *n*) економічного середовища (*j*-ї чистої стратегії другого гравця).

Взагалі кажучи, СПР може використовувати не тільки свої чисті стратегії s_k $(k = 1,..., m)$: за виконання певних умов можливе використання *змішаної стратегії* s_P, що визначається вектором (розподілом) $P = (p_1;...; p_m)$ $\left(\sum_{k=1}^{m} p_k = 1; \; p_k \geq 0, \; k = 1, \ldots, m\right)$, де p_k — імовірність використання СПР своєї чистої стратегії s_k. Можна вважати, що задаючи розподіл імовірності *Q*, другий гравець, по суті, визначає свою змішану стратегію θ_Q (тут: $Q = (q_1;...; q_n)$; $\sum_{j-1}^{n} q_j = 1$; $q_j \geq 0$, j = 1,…, *n*; q_j — імовірність «використання» другим гравцем своєї чистої стратегії θ_j). Оскільки вектор $Q = (q_1;...; q_n)$ залишається незмінним, другий гравець у статистичній грі є пасивним щодо вибору своїх чистих стратегій, які відповідають альтернативним станам економічного середовища.

Розв’язання статистичної гри у змішаних стратегіях дещо різниться від розв’язання парної матричної гри з нульовою сумою (див. пункт 1.5.1, детальніше в [72, 91]). Наприклад, виявлення і виключення з розгляду дублюючих і домінуючих чистих стратегій здійснюється тільки для стратегій СПР, тобто для рядків матриці F. Про інші відмінності йтиметься далі.

Для вибору СПР оптимального рішення (оптимальної чистої стратегії s_{k_o} або оптимальної змішаної стратегії s_P^*, де: $P^* = \left(p_1^*;...;p_m^*\right)$; $\sum\limits_{k=1}^{m} p_k^* = 1$; $p_k^* \geq 0$, $k = 1,...,m$) або множини еквівалентних оптимальних рішень можуть використовуватися різні критерії прийняття рішень у полі основних інформаційних ситуацій. Спочатку сформулюємо ці критерії у традиційній формі, коли на їх основі статистична гра розв'язується у чистих стратегіях, а потім узагальнимо їх на випадок розв'язання гри у змішаних стратегіях.

3.1. ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ЗА ЗАДАНОГО РОЗПОДІЛУ ЙМОВІРНОСТІ

Як уже зазначалось, I_1 — перша інформаційна ситуація (ІС) має місце у випадку заданого апріорного розподілу ймовірності станів економічного середовища, тобто коли відомі компоненти вектора $Q = (q_1;...;q_n)$, де q_j — імовірність реалізації j-го стану, і при цьому:

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1; \quad q_j \geq 0, \quad j = 1,...,n. \tag{3.1}$$

Ця ситуація поширена в більшості практичних задач прийняття рішень за умов ризику. При цьому ефективно використовуються конструктивні методи теорії ймовірності та математичної статистики, особливо точкові статистичні оцінки.

Розглянемо деякі з основних критеріїв прийняття рішень в полі першої ІС.

3.1.1. Критерій Байєса та його модифікації

Сутність критерію Байєса полягає у порівнянні між собою математичних сподівань ВВ, що задаються векторами оцінювання $F(s_k)$, які ідентифікують відповідні рішення (чисті стратегії).

Згідно з критерієм Байєса оптимальне рішення s_{k_0} (чи множина оптимальних рішень) у випадку, коли $F = F^+$, визначається умовою

$$s_{k_0} \; :^* \; B^+(s_{k_0}; Q) = \max_{k=1,\dots,m} B^+(s_k; Q). \tag{3.2}$$

Величина

$$B^+(s_k; Q) = \sum_{j=1}^{n} q_j f_{kj}^+ = M(F^+(s_k)) = m_k^+, \; k = 1,\dots, m$$

називається *байєсівською оцінкою рішення (чистої стратегії)* s_k СПР.

Порядковий номер оптимального рішення (чистої стратегії) СПР визначається з допомогою функції

$$k_0 = \arg\max_{k=1,\dots,m} B^+(s_k; Q).$$

Якщо функціонал оцінювання має негативний інгредієнт ($F = F^-$, тобто відображає ризики, збитки, непередбачені виплати тощо), то величину

$$B^-(s_k; Q) = \sum_{j=1}^{n} (q_j f_{kj}^-) = M(F^-(s_k)) = m_k^-, \quad k = 1,\dots, m$$

називають *байєсівським ризиком рішення (чистої стратегії)* $s_k \in S$ СПР. Оптимальне рішення визначається умовою

$$s_{k_0} : B^-(S_{k_0}; Q) = \min_{k=1,\dots,m} B^-(S_k; Q), \tag{3.3}$$

а його порядковий номер функцією

$$k_0 = \arg\min_{k=1,\dots,m} B^-(s_k; Q).$$

Під час використання критеріїв (3.2) чи (3.3) необхідно звернути увагу на таке *застереження:* рішення (чисту стратегію) можна вважати оптимальним лише в тому випадку, коли у СПР є підстави для того, щоб усі елементи функціонала оцінювання F віднести до зони допустимого ризику. Якщо ж це не так, то використання критерію Байєса є *некоректним*, він не враховує варіацію. У цьому випадку для прийняття рішень ризик доцільно розглянути як векторну величину, компонентами якої є такі показ-

---

* Символ «:» у математичних викладках є еквівалентом слів «для якого».

ники, як величина допустимого, критичного та катастрофічного ризиків тощо (див. пункт 2.3.6).

Дослідження показують, що навіть у випадку *сприятливої* (щодо СПР) ситуації рішення, прийняте лише на основі критерію Байєса, не є адекватним, тобто воно не враховує всі аспекти реальної ситуації. А тому оцінки, отримані згідно з цим критерієм, часто використовуються як складові складніших критеріїв, що враховують розкид значень функціонала оцінювання на множині станів економічного середовища (це розглядатиметься далі). До останніх належить критерій, наведений у [33]:

$$s_{k_0} : U^+\left(s_{k_0};\ Q;\ \lambda(\gamma)\right) = \max_{k=1,\dots,m} U^+\left(s_{k_0};\ Q;\ \lambda(\gamma)\right),$$

де: $U^+\left(s_{k_0}; Q; \lambda(\gamma)\right) = B^+\left(s_k; Q\right) - \lambda(\gamma) Risk^-\left(s_k; Q\right)$; коефіцієнт $\lambda(\gamma) \geq 0$ і вибирається на основі заданого СПР рівня надійності $\gamma \in [0; 1]$; $Risk^-(s_k; Q)$ — оцінка ризику (середньоквадратичне чи семіквадратичне відхилення).

Якщо від функціонала оцінювання $F = F^+$ перейти до матриці невикористаних можливостей (матриці ризиків) $Z = Z^-$, то вибір оптимального рішення (стратегії) можна здійснювати аналогічно. При цьому слід скористатися критерієм (3.3), де

$$B^-(s_k;\ Q) = \sum_{j=1}^{n} q_j z_{kj}^-.$$

Але, як це показано у додатку до розділу 3 (пункт 3.9.2, теорема 3.3), оптимальна чиста стратегія s_{k_0}, вибір якої ґрунтується на критерії Байєса з використанням матриці невикористаних можливостей Z^-, одночасно є оптимальною згідно з цим критерієм, якщо використовувати функціонал оцінювання F.

Цей факт ще раз підтверджує раніше зроблений висновок щодо неврахування ризику за використання критерію Байєса.

Наведемо кілька прикладів.

Приклад 3.1. Відома матриця платежів

$$F^+ = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 9 & 4 & 2 \\ 8 & 8 & 8 & 6 & 10 \\ 3 & 12 & 15 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Визначити оптимальну чисту стратегію СПР, використовуючи критерій Байєса: а) для матриці F^+; б) для матриці невикористаних можливостей (ризиків) Z^-, якщо вектор розподілу ймовірності сценаріїв має вигляд $Q = (0{,}1;\ 0{,}3;\ 0{,}4;\ 0{,}1;\ 0{,}1)$.

Розв'язання. Складемо розрахункову табл. 3.1.

Таблиця 3.1

k	f_{k1}	f_{k2}	f_{k3}	f_{k4}	f_{k5}	B_k^+	z_{k1}^-	z_{k2}^-	z_{k3}^-	z_{k4}^-	z_{k5}^-	B_k^-
1	6	12	9	4	2	8,4	2	0	6	2	8	3,6
2	8	8	8	6	10	8	0	4	7	0	0	4
3	3	12	12	4	0	10,3	5	0	0	2	10	1,7
$\beta_k^{\max}$	8	12	15	6	10	—	—	—	—	—	—	—

Прийняті позначення: $f_k^{\max} = \max\limits_{k=1,2,3} f_{kj}^+$ — найкращий результат СПР за реалізації j-го сценарію $(j = 1,\ldots,5)$; $B_k^+ = \sum\limits_{j=1}^{5}\left(q_j f_{kj}^+\right)$ — байєсівське значення функціонала оцінювання для чистої стратегії s_k $(k = 1,\ 2,\ 3)$;

$z_{kj}^- = f_k^{\max} - f_{kj}^+$ — елементи матриці ризиків $Z^- = \left(z_{kj}^-:\ k = 1,\ 2,\ 3;\ j = 1,\ldots,5\right)$; $B_k^- = \sum\limits_{j=1}^{5}\left(q_j z_{kj}^-\right)$ — байєсівський ризик СПР за прийняття чистої стратегії s_k $(k = 1,\ 2,\ 3)$.

Згідно з табл. 3.1 маємо:

а) оскільки

$$B_{k_0}^+ = \max_{k=1,2,3} B^+(s_k; Q) = \max(8{,}4;\ 8;\ 10{,}3) = 10{,}3 = B_3^+,$$

то

$$k_0 = \arg\max_{k=1,2,3} B^+(s_k; Q) = 3;$$

б) оскільки

$$B_{k_0}^- = \min_{k=1,2,3} B^-(s_k; Q) = \min(3{,}6;\ 4;\ 1{,}7) = 1{,}7 = B_3^-,$$

то

$$k_0 = \arg\min_{k=1,2,3} B^-(s_k; Q) = 3.$$

Таким чином, згідно з критерієм Байєса оптимальні чисті стратегії збіглися як у випадку використання матриці платежів F^{+}, так і у випадку матриці невикористаних можливостей Z^{-}, тобто СПР треба скористатися чистою стратегією s_3.

Відповідь: а) $s_{k_0} = s_3$; б) $s_{k_0} = s_3$.

Якщо до моменту прийняття рішення є можливість провести експерименти щодо досліджуваного економічного об'єкта, то на основі аналізу результатів цих експериментів можна уточнити апріорні ймовірності відповідно до отриманої інформації. Такі ймовірності називаються *апріорними* і для обчислення їх використовуються так звані формули Байєса [48].

Приклад 3.2. Підприємство випускає певну продукцію партіями фіксованого обсягу. Через випадкові збої у виробничому процесі можливий випуск партій з неприпустимо високим відсотком бракованої продукції. Визначають такі стани економічного середовища: θ_1 — придатна партія виробів; θ_2 — бракована партія виробів.

Нехай браковані вироби у придатній партії становлять 4 %, у непридатній — 15 %. Проведені на підприємстві розрахунки показують, що ймовірність виробництва бракованої партії дорівнює 0,20, отже, придатна для відправлення споживачам партія має ймовірність 0,80. Таким чином, $P(\Theta = \theta_1) = 0{,}80$ і $P(\Theta = \theta_2) = 0{,}20$.

Підприємство відправляє партії товарів двом споживачам *А* та *Б*. Контрактом обумовлено, що відсоток бракованих деталей, які відправляються споживачам *А* та *Б*, не повинен перевищувати 5 та 8% відповідно. За один відсоток перевищення встановлених меж передбачається штраф розміром 100 УГО. З іншого боку, виробництво партії товарів більш високої якості збільшує витрати підприємства на 80 УГО за кожен відсоток.

Задача має два варіанти рішення (дві альтернативи): s_1 — відправити партію товарів споживачеві *А*, s_2 — відправити партію товарів споживачеві *Б*.

Припустимо також, що підприємець (менеджер) вирішує перевірити два вироби з усієї партії. В результаті перевірки може бути встановлено, що: 1) обидва вироби придатні; 2) один з виробів придатний; 3) обидва вироби браковані. Нехай ξ_1, ξ_2, ξ_3 позначають ці три можливі події відповідно.

Підприємець повинен прийняти рішення: кому із споживачів — *А* чи *Б* — відправляти певну партію виробів.

Розв'язання. Функціонал оцінювання у цій ситуації доцільно подати у вигляді матриці витрат в УГО, тобто $F = F^-$.

Рішення s_1 припускає, що споживач *А* прийме партію виробів (5 % браку без штрафу). Якщо партія має 4 % браку (θ_1), виробник зазнає збитків (5 – 4) × 80 = 80 (УГО). Але якщо партія товарів матиме 15 % браку (θ_2), то штраф становитиме (15 – 5) × 100 = = 1000 (УГО). Аналогічно щодо рішення s_2: відправляючи споживачеві *Б* партію, яка містить 4 % браку (θ_1), виробник зазнає збитків (8 – 4) × 80 = 320 (УГО). Якщо партія містить 15 % браку (θ_2), штраф становитиме (15 – 8) × 100 = 700 (УГО). Отже, маємо

$$F^- = \begin{pmatrix} & \theta_1 & \theta_2 \\ s_1 & 80 & 1000 \\ s_2 & 320 & 700 \end{pmatrix}.$$

Зазначимо, що коли підприємець прагне обрати рішення, яке включає збитки від штрафу (принцип гарантованого результату за критерієм Вальда), тобто безризикове рішення, то він має відправити партію виробів споживачеві *Б*. (Перевірте.)

Коли підприємець приймає рішення, користуючись (це суттєво) наявною інформацією щодо $P(\theta_1)$ та $P(\theta_2)$, то**,** використовуючи критерій Байєса, одержимо, що $s_{k_0} = s_1$, тобто партію виробів доцільно відправити споживачеві *А*. (Перевірте.)

Відмітимо, що рішення підприємця повинно залежати від результатів ξ_1, ξ_2 та ξ_3.

Вироби можуть братися як з придатної (θ_1), так і з бракованої (θ_2) партії.

Позначимо через *N* — обсяг вибірки щодо експеременту, через k_i — кількість придатних виробів у вибірці за настання випадкової події ξ_i, через α_j — імовірність вибору придатного виробу в умовах *j*-го стану економічного середовища (θ_j). Тоді, скориставшись формулою Бернуллі [48], визначаємо ймовірності настання події $\xi_i (i = 1, 2, 3; \ j = 1, 2)$ за умови настання стану θ_j економічного середовища:

$$P\left(\xi_i \middle| \theta_j\right) = P_N^{k_i} = C_N^{k_i} \cdot \alpha_j^{k_i} \left(1 - \alpha_j\right)^{N-k_i}.$$

Ураховуючи, що в нашому випадку $N=2$ (вибірки складаються з двох виробів), $k_1=2$; $k_2=1$; $k_3=0$; $\alpha_1=0{,}96$; $\alpha_2=0{,}85$, отримуємо розподіли ймовірності результату експерименту залежно від якості партії виробів:

$$P(\xi_1|\theta_1)=C_2^2(0{,}96)^2\times(0{,}04)^0=0{,}9216;$$

$$P(\xi_2|\theta_1)=C_2^1(0{,}96)^1\times(0{,}04)^1=0{,}0768;$$

$$P(\xi_3|\theta_1)=C_2^0(0{,}96)^0\times(0{,}04)^2=0{,}0016;$$

$$P(\xi_1|\theta_2)=C_2^2(0{,}85)^2\times(0{,}15)^0=0{,}7225;$$

$$P(\xi_2|\theta_2)=C_2^1(0{,}85)^1\times(0{,}15)^1=0{,}255;$$

$$P(\xi_3|\theta_2)=C_2^0(0{,}85)^0\times(0{,}15)^2=0{,}0225.$$

Якщо вважати, що економічне середовище може набувати *n* різних станів, то повна ймовірність настання події ξ_i обчислюється за формулою

$$P(\xi_i)=\sum_{j=1}^{n}\left(P(\theta_j)P(\xi \mid \theta_j)\right).$$

У нашому випадку $n=2$; $P(\theta_1)=q_1=0{,}8$; $P(\theta_2)=q_2=0{,}2$, а тому отримуємо:

$$P(\xi_1)=\sum_{j=1}^{2}\left(P(\theta_j)P(\xi_1 \mid \theta_j)\right)=0{,}8\times0{,}9216+0{,}2\times0{,}7225=0{,}8821;$$

$$P(\xi_2)=\sum_{j=1}^{2}\left(P(\theta_j)P(\xi_2 \mid \theta_j)\right)=0{,}8\times0{,}0768+0{,}2\times0{,}225=0{,}11244;$$

$$P(\xi_3)=\sum_{j=1}^{2}\left(P(\theta_j)P(\xi_3 \mid \theta_j)\right)=0{,}8\times0{,}0016+0{,}2\times0{,}0225=0{,}00578.$$

Оскільки рішення приймається після проведення контрольної перевірки, то важливим інструментом для його прийняття вже будуть імовірності, що враховують результати перевірки. Такими є апостеріорні ймовірності, що обчислюються згідно з формулою Байєса [48], а тому їх називають також *байєсівськими ймовірностями*:

$$P(\theta_j \mid \xi_i)=\frac{P(\theta_j)P(\xi_i \mid \theta_j)}{P(\xi_i)}.$$

З урахуванням попередніх результатів отримуємо:

$$q_1^{(1)}=P(\theta_1 \mid \xi_1)=\frac{0{,}8\times0{,}9216}{0{,}8821}=0{,}83619;$$

$$q_2^{(1)} = P(\theta_2 \mid \xi_1) = \frac{0{,}2 \times 0{,}7225}{0{,}8821} = 0{,}16381;$$

$$q_1^{(2)} = P(\theta_1 \mid \xi_2) = \frac{0{,}8 \times 0{,}768}{0{,}11244} = 0{,}54642;$$

$$q_2^{(2)} = P(\theta_2 \mid \xi_2) = \frac{0{,}2 \times 0{,}0225}{0{,}11244} = 0{,}45358;$$

$$q_1^{(3)} = P(\theta_1 \mid \xi_3) = \frac{0{,}8 \times 0{,}0016}{0{,}00578} = 0{,}22145;$$

$$q_2^{(3)} = P(\theta_2 \mid \xi_3) = \frac{0{,}2 \times 0{,}0225}{0{,}00578} = 0{,}77855.$$

Отже, згідно з критерієм Байєса, враховуючи результати контрольної перевірки, очікувані витрати обчислюються за формулою

$$B^-\left(s_k; Q^{(i)} \mid \xi_i\right) = \sum_{j=1}^{n} \left(q_j^{(i)} f_{kj}^-\right); \;\; k = 1,\ldots,\, m; \;\; i = 1,\ldots,\, N.$$

Випадок 1. Подія ξ_1 — обидва вибрані вироби придатні:

$$B^-\left(s_1; Q^{(1)} \mid \xi_1\right) = \sum_{j=1}^{2} \left(q_j^{(1)} f_{1j}^-\right) =$$
$$= 80 \times 0{,}83619 + 1000 \times 0{,}16381 = 230{,}7052 \text{ (УГО)};$$
$$B^-\left(s_2; Q^{(1)} \mid \xi_1\right) = \sum_{j=1}^{2} \left(q_j^{(1)} f_{2j}^-\right) =$$
$$= 320 \times 0{,}83619 + 700 \times 0{,}16381 = 382{,}2478 \text{ (УГО)}.$$

Мінімум очікуваних витрат досягається за $s_{k_0} = s_1$, а тому в цьому випадку рішення полягає у відправленні партії товарів споживачеві *A*.

Випадок 2. Подія ξ_2 — один з вибраних виробів є стандартним, а другий — бракованим:

$$B^-\left(s_2; Q^{(2)} \mid \xi_2\right) = \sum_{j=1}^{2} \left(q_j^{(2)} f_{1j}^-\right) =$$
$$= 80 \times 0{,}54642 + 1000 \times 0{,}45358 = 479{,}2936 \text{ (УГО)};$$
$$B^-\left(s_2; Q^{(2)} \mid \xi_2\right) = \sum_{j=1}^{2} \left(q_j^{(2)} f_{2j}^-\right) =$$
$$= 320 \times 0{,}54642 + 700 \times 0{,}45358 = 492{,}4564 \text{ (УГО)}.$$

У цьому випадку рішення полягає у відправленні партії товарів споживачеві Б, оскільки згідно з критерієм Байєса це забезпечує менші очікувані витрати.

Випадок 3. Подія ξ_3 — обидва вибрані вироби браковані:

$$B^-\left(s_3; Q^{(3)} \middle| \xi_3\right) = \sum_{j=1}^{2}\left(q_j^{(3)} f_{1j}^-\right) =$$
$$= 80 \times 0{,}22145 + 1000 \times 0{,}77855 = 796{,}226 \left(\text{УГО}\right);$$
$$B^-\left(s_3; Q^{(3)} \middle| \xi_3\right) = \sum_{j=1}^{2}\left(q_j^{(3)} f_{2j}^-\right) =$$
$$= 320 \times 0{,}22145 + 700 \times 0{,}77855 = 615{,}849 \left(\text{УГО}\right).$$

Оскільки мінімум очікуваних витрат досягається за $s_{k_0} = s_2$, то рішення підприємця полягає у відправленні продукції споживачеві *Б*.

3.1.2. Критерії мінливості (варіації) значень елементів функціонала оцінювання

Кожній чистій стратегії s_k СПР можна поставити у відповідність величину ризику у вигляді міри мінливості елементів f_{kj} вектора оцінювання $F(s_k)$ відносно центра групування елементів цього вектора.

Позначимо центр групування значень ВВ $F^+(s_k)$ через $Z_k = Z(F(s_k); Q)$. Тоді, як це вже зазначалося в розділі 2, в якості центра групування можна використовувати: а) математичне сподівання, тобто $Z_k = B(F(s_k); Q) = B_k$; б) зважене середньогеометричне, тобто $Z_k = G(F(s_k))$; в) моду, тобто $Z_k = Mo(F(s_k))$; г) медіану, тобто $Z_k = Me(F(s_k))$, тощо.

Центр групування можна визначити і для сукупності елементів f_{kj} $(k = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$, що є складовими функціонала оцінювання F (для сукупності ВВ $F(s_k)$, $k = 1, \ldots, m$). Якщо зазначений центр групування, аналогічно попередньому, позначити через Z_F (пам'ятаючи при цьому, що $Z_F = Z(F)$, тобто центр групування є функцією від сукупності всіх елементів, що складають матрицю *F*), то для визначення його можна скористатися такими формулами:

а) $Z_F = \dfrac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} B_k$, тобто середньоарифметичне щодо оцінок Байєса чистих стратегій СПР;

б) $Z_F^+ = \max\limits_{k=1,\dots,m} Z_k^+$, якщо $F = F^+$;

в) $Z_F^- = \min\limits_{k=1,\dots,m} Z_k^-$, якщо $F = F^-$;

г) $Z_F = V^*$, тобто ціна гри з нульовою сумою, що визначається функціоналом оцінювання $F^{\pm}$, тощо.

В описаних ситуаціях оптимальну чисту стратегію можна вибирати виходячи з умови мінімальної міри мінливості елементів векторів оцінювання відносно відповідних центрів групування:

$$s_{k_0} : D_Z\left(s_{k_0}; Q\right) = \min_{k=1,\dots,m} D_Z\ (s_k; Q).$$

При цьому порядковий номер оптимальної стратегії

$$k_0 = \arg\min_{k=1,\dots,m} D_Z\ (s_k; Q),$$

а величина $D_Z(s_k;\ Q)$ $(k = 1,\dots,\ m)$ обчислюється за формулою

$$D_Z(s_k;\ Q) = \sum_{j=1}^{n} q_j \left(f_{kj} - Z_k\right)^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} q_j \left(f_{kj} - B_k\right)^2 + (B_k - Z_k)^2 = D(s_k;\ Q) + (B_k - Z_k)^2$$

або ж, за використання центра групування всіх елементів функціонала оцінювання F, за формулою

$$D(s_k; Q) = \sum_{j=1}^{n} q_j \left(f_{kj} - Z_F\right)^2 = D(s_k;\ Q) + (B_k - Z_F)^2.$$

Розглянемо окремо випадок, коли в якості центра групування елементів для k-ї чистої стратегії вибирається математичне сподівання, тобто $Z_k = B_k = M(F_k)$. Міру мінливості оцінюють за допомогою дисперсії

$$D(F_k;\ Q) = \sigma_k^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(q_j \left(f_{kj} - B_k\right)^2\right),\ k = 1,\dots,\ m.$$

Згідно з критерієм мінімальної дисперсії (мінімальної мінливості) оптимальна чиста стратегія s_{k_0} СПР знаходиться відповідно до умови:

$$s_{k_0} : D\left(F_{k_0}; Q\right) = \sigma_{k_0}^2 = \min_{k=1,\dots,m} D(F_k; Q),$$

порядковий номер оптимальної чистої стратегії

$$k_0 = \arg \min_{k=1,\dots,m} D(F_k; Q).$$

Слід зазначити, що одним з недоліків цього критерію є те, що він не враховує структуру матриці платежів F.

Приклад 3.3. Виходячи з умови прикладу 3.1, знайти оптимальну чисту стратегію s_{k_0} СПР згідно з критерієм мінімальної дисперсії.

Розв'язання. Обчислимо дисперсію для чистої стратегії s_1. Відповідні розрахунки оформимо у вигляді таблиці:

f_{1j}	6	12	9	4	2	Σ
q_j	0,1	0,3	0,4	0,1	0,1	1
$q_j f_{1j}$	0,6	3,6	3,6	0,4	0,2	8,4
$q_j f_{1j}^2$	3,6	43,2	32,4	1,6	0,4	81,2

Шукана дисперсія

$$\sigma_1^2 = D\left(F_1^+;\ Q\right) = \sum_{j=1}^{5}\left(q_j\, f_{1j}^2\right) - \left(B_1^+\right)^2 = 81{,}2 - (8{,}4)^2 = 10{,}64.$$

Аналогічно обчислюються дисперсії σ_2^2 та σ_3^2:

$$\sigma_2^2 = D\left(F_2^+; Q\right) = \sum_{j=1}^{5}\left(q_j\, f_{2j}^2\right) - \left(B_2^+\right)^2 = 64{,}8 - 8^2 = 0{,}8;$$

$$\sigma_3^2 = D\left(F_3^+; Q\right) = \sum_{j=1}^{5}\left(q_j\, f_{3j}^2\right) - \left(B_3^+\right)^2 = 135{,}7 - (10{,}3)^2 = 29{,}61.$$

Оскільки

$$\sigma_{k_0}^2 = \min_{k=1,2,3} \sigma_k^2 = \min(10{,}64;\ 0{,}8;\ 29{,}61) = 0{,}8 = \sigma_2^2,$$

то згідно з критерієм мінімальної дисперсії оптимальною чистою є стратегія за номером

$$k_0 = \arg \min_{k=1,2,3} \sigma_k^2 = 2.$$

Відповідь: $s_{k_0} = s_2$.

Якщо вважається, що ризик пов'язаний лише з несприятливими для СПР ефектами по відношенню до центра групування Z_k, то оптимально чиста стратегія вибирається згідно з умовою

$$s_{k_0} : SV_Z\left(s_{k_0}; Q\right) = \min_{k=1,\dots,m} SV_Z\left(s_k; Q\right);$$

порядковий номер

$$k_0 = \arg \min_{k=1,\dots m} SV_Z\left(s_k; Q\right),$$

а величини $SV_Z\left(s_k; Q\right)$ $(k = 1,\dots, m)$ обчислюються за формулою

$$SV_Z\left(s_k; Q\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(q_j \alpha_{kj}\left(f_{kj} - Z_k\right)^2\right)$$

або ж за величиною

$$SV_Z\left(s_k; Q\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(q_j \alpha_{kj}\left(f_{kj} - Z_F\right)^2\right),$$

де $\alpha_k = (\alpha_{k1},\dots,\alpha_{kn})$ — вектор несприятливих відхилень значень ВВ $F(s_k)$ відносно Z_k $(k = 1,\dots, m)$ (чи Z_F), тобто

$$\alpha_{kj} = \begin{cases} 0, & \text{у випадку сприятливого відхилення } f_{kj} \text{ від } Z_k; \\ 1, & \text{у випадку несприятливого відхилення } f_{kj} \text{ від } Z_k. \end{cases}$$

У випадку, коли $F = F^+$ і порівнюються чисті стратегії, для яких збільшення величини ризику відповідає збільшенню значення показника ефективності (тобто він має позитивний інгредієнт), для вибору оптимальної чистої стратегії можна скористатися критеріями, що базуються на оцінках ризику у відносному вираженні (за допомогою модифікованих коефіцієнтів варіації):

$$s_{k_0} : CV_m\left(s_{k_0}; Q\right) = \min_{k=1,\dots,m} \frac{Risk^-(F(s_k); Q)}{Z^+(F(s_k); Q) - Z_0}, \tag{3.4}$$

де Z_0 — фіксоване значення економічного показника. Порядковий номер оптимальної чистої стратегії

$$k_0 = \arg \min_{k=1,\dots, m} CV_m\left(s_k; Q\right).$$

Величина $Risk^{-}(F(s_k);\,Q)$ в (3.4) — оцінка величини ризику в абсолютному вираженні, адекватна щодо розмірності величині $Z^{+}(F(s_k);\,Q)$.

Наприклад, якщо $Risk^{-}(F(s_k);\,Q)=\sigma_k^{-}$, а $Z^{+}(F(s_k);\,Q)=B^{+}(s_k;\,Q)$, то отримуємо критерій мінімального коефіцієнта варіації. Якщо ж $Z^{+}(F(s_k);\,Q)=Mo(F(s_k))$, а величина ризику

$$Risk^{-}(F(s_k);\,Q)=\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\alpha_{kj}q_j\left(f_{kj}-Mo(F(s_k))\right)^2\right)\right)^{\frac{1}{2}},$$

то використовується критерій мінімального модального коефіцієнта семіваріації. Останній доцільно використовувати також тоді, коли кожній чистій стратегії відповідає свій розподіл імовірності станів економічного середовища. Тобто функціоналу оцінювання F відповідає матриця розподілу ймовірності

$$Q=\left(q_{kj}:k=1,\ldots,\,m;\;\; j=1,\ldots,\,n\right)=\begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{m1} & \cdots & q_{mn} \end{pmatrix};$$

$$\sum_{j=1}^{n}q_{kj}=1,\quad k=1,\ldots,\,m,$$

де q_{kj} — імовірність настання *j*-го стану економічного середовища у випадку вибору СПР своєї *k*-ї чистої стратегії.

Вибір оптимальної чистої стратегії у випадку, коли $F=F^{\pm}$, можна здійснити і на основі низки критеріїв, що носять об’єктивно-суб’єктивний характер, зокрема:

$$s_{k_0}:\;K^{\pm}\left(s_{k_0};\,Q;\,\lambda\right)=\underset{k=1,\ldots,n}{opt}\;K^{\pm}(s_k;\,Q;\,\lambda).$$

Тут операція «*opt*» відповідає знаходженню максимального значення, якщо критерій має позитивний інгредієнт, і мінімального — якщо має негативний інгредієнт. Критерій ефективності чистої стратегії s_k задається формулою

$$e^{\pm}(s_k;\,Q;\,\lambda)=(1-\lambda)Z^{\pm}(F_k;\,Q)\mp\lambda\quad Risk^{-}(F(s_k);\,Q),$$

де параметр λ — коефіцієнт несхильності до ризику, що відображає в числовій формі ставлення до ризику і задається СПР, $\lambda\in[0;\,1]$. Зазначимо, що запропоновану групу критеріїв можна віднести до *модифікованих критеріїв.*

3.2. ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ЗА НЕВІДОМОГО РОЗПОДІЛУ ЙМОВІРНОСТІ

Процес знаходження оптимальної чистої стратегії в полі інформаційних ситуацій I_2, I_3, I_4 за невеликими відмінностями аналогічний вибору її в полі I_1. Спільним є те, що можна скористатися будь-яким критерієм прийняття рішень, використовуваних у полі інформаційної ситуації I_1. Відмінність полягає у тому, що попередньо необхідно знайти наближену оцінку розподілу ймовірності станів економічного середовища.

3.2.1. Принцип максимальної невизначеності Гіббса—Джейнса

Принцип Гіббса—Джейнса дає змогу отримати оцінку апріорного розподілу ймовірності станів економічного середовища в полях I_3 та I_4. Автори цього принципу в якості міри невизначеності щодо «поведінки» економічного середовища використовували функцію

$$H(Q) = -\sum_{j=1}^{n} \left(q_j \ln q_j \right),$$

яка носить назву *ентропії Шеннона*.

Функція $H(Q)$ має такі властивості:

1) $H(Q)$ неперервно диференційна по всіх змінних q_j $(j = 1, ..., n)$, на множині допустимих розподілів імовірності станів економічного середовища

$$\Delta_Q = \left\{ Q = (q_1; ...; q_n): \sum_{j=1}^{n} q_j = 1; \quad q_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, n \right\};$$

2) $H(Q) \geq 0$ для всіх $Q \in \Delta_Q$;

3) $H(Q) = 0$ у випадку, коли розподіл Q є виродженим (одна з компонент вектора Q — одиниця, а решта — нулі);

4) $H(Q)$ опукла на Δ_n;

5) $H(Q)$ симетрична відносно точки $Q = (q_1; ...; q_n) = \left(\frac{1}{n}; ...; \frac{1}{n} \right)$ на Δ_Q;

6) $H(Q)$ адитивна функція своїх змінних q_j, $k = 1, ..., n$.

За формального відтворення невідомого розподілу станів економічного середовища на основі принципу Гіббса—Джейнса виходять з того, що найменш сумнівним розподілом є той, який максимізує функцію $H(Q)$. А тому точковою оцінкою $\hat{Q} = (\hat{q}_1;...;\hat{q}_n)$ апріорного розподілу ймовірності станів економічного середовища в полі I_4 (за відсутності додаткової інформації) є розв'язок екстремальної задачі:

$$H\left(\hat{Q}\right) = \max_{Q \in \Delta_Q} H\left(Q\right) = \max_{Q \in \Delta_Q} \left(-\sum_{j=1}^{n} \left(q_j \ln q_j\right) \right); \tag{3.5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1; \tag{3.6}$$

$$q_j \geq 0; \; j = 1,...,n. \tag{3.7}$$

За наявності додаткової інформації (обмежень) щодо величин q_j $(j = 1,...,n)$ (наприклад в полі I_3) чи сподіваного значення показника економічної ефективності або його дисперсії задача нелінійного програмування (3.5)—(3.7) поряд з обмеженнями (3.6), (3.7) може включати низку інших умов. Наприклад:

$$\begin{cases} \alpha_j \leq q_j \leq \beta_j; \\ \underline{B_k} \leq B\left(s_k; Q\right) \leq \overline{B}_k; \\ \underline{D_k} \leq D\left(\underline{s_k}; Q\right) \leq \overline{D}_k, \end{cases}$$

де $\alpha_j, \beta_j, \underline{B_k}, \overline{B}_k, \underline{D_k}, \overline{D}_k$ — задані константи ($j = 1,..., n$; $k = 1,...,n$). Детальніше екстремальні задачі такого виду розглядаються в [34, 36, 104]. Для їх розв'язання можна скористатися методом множників Лагранжа.

Приклад 3.4. Показати, що

$$\max_{Q \in \Delta_Q} H(Q) = H\left(\hat{Q}\right) = \ln n,$$

де $\hat{Q} = \left(\hat{q}_1;...;\hat{q}_n\right)$, а $\hat{q}_j = \frac{1}{n}$, $j = 1,...,n.$

Розв'язання. Поставлена задача є еквівалентною задачі на умовний екстремум (3.5)—(3.7), а тому для її розв'язання складаємо функцію Лагранжа:

$$L(Q;\, \lambda) = H(Q) + \lambda \left(1 - \sum_{j=1}^{n} q_j \right),$$

де λ — множник Лагранжа, що відповідає обмеженню (3.6) (обмеження (3.7) враховується наявністю в структурі функції $H(Q)$ логарифмічної функції).

Необхідною умовою екстремуму функції багатьох змінних є рівність нулю усіх її частинних похідних першого порядку:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(Q;\lambda)}{\partial q_l} = 0, \quad l = 1,\dots,n; \\ \dfrac{\partial L(Q;\lambda)}{\partial \lambda} = 0. \end{cases}$$

Враховуючи, що

$$\frac{\partial L(Q;\lambda)}{\partial q_l} = \frac{\partial H(Q)}{\partial q_l} + \lambda \cdot \frac{\partial}{\partial q_l}\left(1 - \sum_{j=1}^{n} q_j\right) = \frac{\partial}{\partial q_l}\left(-\sum_{j=1}^{n}\left(q_j \ln q_j\right)\right) + \lambda(0-1) =$$
$$= (-\ln q_l - 1) - \lambda = -1 - \lambda - \ln q_l; \;\; l = 1, \dots, n;$$

$$\frac{\partial L(Q;\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\partial H(Q)}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\lambda \cdot \left(1 - \sum_{j=1}^{n} q_j\right)\right) = 0 + 1 - \sum_{j=1}^{n} q_j = 1 - \sum_{j=1}^{n} q_j,$$

приходимо до системи рівнянь:

$$\begin{cases} -1 - \lambda - \ln q_l = 0; \quad l = 1,\dots,n; \\ 1 - \sum\limits_{j=1}^{n} q_j = 0. \end{cases}$$

З перших n рівнянь системи отримуємо, що

$$q_1 = q_2 = \dots = q_n = e^{-1-\lambda}.$$

Оскільки $1 = \sum\limits_{j=1}^{n} q_j = \sum\limits_{j=1}^{n} e^{-1-\lambda} = n \cdot e^{-1-\lambda}$, то $e^{-1-\lambda} = \dfrac{1}{n}$, тобто розв’язком цієї системи рівнянь є вектор $\hat{Q} = \left\{\dfrac{1}{n};\dots;\dfrac{1}{n}\right\}$.

Якщо скористатись апаратом дослідження типу екстремумів функції багатьох змінних (наприклад, дослідивши знаки головних мінорів матриці Гессе*), можна показати, що $\hat{Q} = \left(\dfrac{1}{n};\dots;\dfrac{1}{n}\right)$ є точкою максимуму ентропії Шеннона $H(Q)$ і при цьому

$$\max_{Q \in \Delta_Q} H(Q) = H\left(\hat{Q}\right) = -\sum_{j=1}^{n}\left(\hat{q}_j^* \ln \hat{q}_j\right) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} = -\frac{1}{n} n \ln \frac{1}{n} = \ln n,$$

що й треба було довести.

---

* Див. додаток 3.9.3 до розділу 3.

Зауважимо, що до апріорного закону розподілу $\hat{Q} = \left(\frac{1}{n};...;\frac{1}{n}\right)$ можна прийти також з позиції принципу Бернуллі—Лапласа (принципу недостатніх підстав), згідно з яким можливі стани економічного середовища розглядаються як рівноймовірні, якщо немає жодної інформації про умови їх настання. А тому принцип Бернуллі—Лапласа можна розглядати як частинний випадок принципу Гіббса—Джейнса.

3.2.2. Друга інформаційна ситуація

Відповідно до класифікатора вважається, що в полі другої ІС (I_2) суб'єкту ризику відомий закон розподілу ймовірності з точністю до невідомих параметрів. Якщо ці параметри складають вектор $\omega = (\omega_1;...;\omega_l)$, то отримуємо такий закон розподілу ймовірності станів економічного середовища:

$$Q(\omega) = (q_1(\omega);...;\ q_n(\omega)),$$

де: $\sum_{j=1}^{n} q_j(\omega) = 1;\quad q_j(\omega) \geq 0\ \ (j = 1,...,\ n);\quad q_j(\omega)$ — ймовірність j-го сценарію, що залежить від невідомих параметрів ω.

У [36, 104] розглядаються різні класи критеріїв прийняття рішень, ставиться задача параметричного синтезу оптимальних рішень, наводяться статистичні методи оцінювання значень параметрів, що складають вектор ω.

Коротко зупинимося на деяких основних підходах. Оскільки ω — вектор невідомих параметрів, то для нього також можна розглядати ІС $I_l^{\omega}(l = 1,...,\ 6)$, які називають ІС невідомих параметрів. У полі кожної з ІС щодо невідомих параметрів можна вибрати величини цих параметрів, що задовольняють, наприклад, принцип максимальної невизначеності Гіббса—Джейнса за певних обмежень. Після цього на основі знайденої оцінки $\hat{\omega}$ вектора параметрів будується оцінка апріорного закону розподілу ймовірності $\hat{Q} = (\hat{q}_1;...;\ \hat{q}_n)$, а це, в свою чергу, дає можливість використання критеріїв прийняття рішень, що вивчалися в полі ІС I_1.

Відповідно до класифікатора інформаційних ситуацій у випадку I_1^{ω} — відомий закон розподілу ймовірності вектора параметрів ω. А тому в якості точкової оцінки значень ймовірностей $q_j\ (j = 1,...,\ n)$ можна використати величини

$$\hat{q}_j = M(q_j(\omega)).$$

Інший підхід базується на використанні параметричних критеріїв: Байєса, мінімальної дисперсії, модального тощо. Наприклад, згідно з параметричним критерієм Байєса оптимальна чиста стратегія s_{k_o} вибирається відповідно до умови:

$$s_{k_0} : M\left(B\left(s_{k_0}; Q(\omega)\right)\right) = \underset{k=1,\ldots,n}{opt} M\left(B\left(s_k; Q(\omega)\right)\right).$$

За наявності достатньої за обсягом вибірки інформації для оцінки невідомих параметрів можна скористатися статистичними методами. Наприклад, коли з точністю до невідомих параметрів відома функція щільності розподілу ймовірності станів економічного середовища, то невідомі параметри можна визначити на основі методу максимальної правдоподібності.

3.2.3. Третя інформаційна ситуація

Для ІС I_3, згідно з класифікатором, характерним є те, що апріорі закон розподілу ймовірності станів економічного середовища є невідомим, але відомі деякі співвідношення впорядкованості щодо цих станів.

3.2.3.1. Ряд пріоритетів. Перша формула Фішберна

Уважається, що в полі інформаційної ситуації I_3 на основі вербальної (чи статистичної) інформації можна на якісному рівні встановити пріоритетність станів економічного середовища. Тобто для кожної пари станів економічного середовища можна вказати, що один з них має більший пріоритет (в плані більшої ймовірності настання) або що вони є еквівалентними (мають однакову ймовірність настання). Якщо розглянути два стани економічного середовища θ_s та θ_k і ввести символи «$\succ$» — має вищий приорітет та «~» — еквівалентний, то між цими станами можуть мати місце співвідношення: $\theta_s \succ \theta_k$, або $\theta_k \succ \theta_s$, або $\theta_k \sim \theta_s$.

Міркуючи аналогічно, для всіх станів економічного середовища можна побудувати ряд пріоритету:

$$RI^{\Theta} = \left(\theta_{i_1}; \theta_{i_2}; \ldots; \left[\theta_{i_k}; \theta_{i_{k+1}}\right]; \ldots; \theta_{i_n}\right), \tag{3.8}$$

де: i_k $(k = 1,\ldots, n)$ — номери станів економічного середовища; θ_{i_k} — стан з найбільшим пріоритетом (з найбільшою ймовірністю настання); θ_{i_n} — стан з найнижчим пріоритетом (з найменшою ймовірністю настання); $[\theta_{i_k}; \theta_{i_{k+1}}]$ — квадратними дужками виділяються еквівалентні стани (тобто $\theta_{i_k} \sim \theta_{i_{k+1}}$).

Отже, відповідно до побудованого ряду пріоритетів можна стверджувати, що $q_{i_1} \geq q_{i_2} \geq ... \geq q_{i_n}$. Тобто має місце *просте лінійне співвідношення впорядкованості*. В цій ситуації Фішберн [36, 104, 107] при відшуканні точкової і, певною мірою, суб'єктивної оцінки апріорного розподілу ймовірності станів економічного середовища запропонував виходити з того, що величини (оцінки) $\hat{q}_{i_j} \to \hat{q}_{i_j}$ мають утворювати спадну арифметичну прогресію. Виходячи з висунутої гіпотези він показав, що оцінки $\hat{q}_{i_j}$ можна обчислювати за формулою

$$P\left(\Theta = \theta_{i_j}\right) = q_{i_j} \approx \hat{q}_{i_j} = \frac{2(n - j + 1)}{n(n+1)}, \quad j = 1,..., n. \tag{3.9}$$

Легко переконатися, що сума величин $\hat{q}_{i_j}$, обчислених згідно з (3.9), дорівнює одиниці.

Наприклад, для $n = 5$ маємо:

$$\hat{q}_{i_1} = \frac{10}{30}; \ \hat{q}_{i_2} = \frac{8}{30}; \ \hat{q}_{i_3} = \frac{6}{30}; \ \hat{q}_{i_4} = \frac{4}{30}; \ \hat{q}_{i_5} = \frac{2}{30};$$

$$\sum_{j=1}^{5} \hat{q}_{i_j} = \frac{10}{30} + \frac{8}{30} + \frac{6}{30} + \frac{2}{30} = 1.$$

3.2.3.2. Ряд бінарних відношень пріоритету

У випадку, коли на вербальному рівні здійснено побудову ряду пріоритету RI і СПР володіє невеликою за обсягом статистичною інформацією (якої ще недостатньо для статистичної оцінки розподілу ймовірності), можна на основі цієї інформації здійснити кількісне уточнення ряду пріоритетів (3.8). Це уточнення можна подати у вигляді ряду бінарних відношень пріоритету:

$$RV^{\Theta} = \left(\nu_{i_1}; \nu_{i_2}; ...; \nu_{i_n}\right), \tag{3.10}$$

де ν_{i_j} $\left(j = 1,..., n\right)$ — числові оцінки результатів послідовних попарних порівнянь між собою станів економічного середовища з позиції можливого настання їх. Наприклад, якщо $\nu_{i_j} = t$, то це вказує на те, що ймовірність настання стану θ_{i_j} у t разів більша за ймовірність настання стану θ_{ij+1}. Якщо $\nu_{i_k} = 1$, то це вказує на однакову ймовірність настання випадкових подій θ_{i_k} та $\theta_{i_{k+1}}$.

Очевидно, що для пари множин $\{RI^{\Theta}; RV^{\Theta}\}$ усі компоненти $\nu_{i_j} \geq 1$ $(j = 1,..., n)$. Якщо (для зручності) покласти $\nu_{i_n} = 1$, то для обчислення відповідних точкових і, певною мірою, суб'єктивних оцінок імовірностей можна скористатися формулою

$$P\left(\Theta = \theta_{i_j}\right) = q_{i_j} \approx \hat{q}_{i_j} = \frac{\prod\limits_{s=j}^{n} \nu_{i_s}}{\sum\limits_{j=1}^{n} \prod\limits_{s=j}^{n} \nu_{i_s}}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Наприклад, якщо

$$RI^{\Theta} = \left(\theta_{i_1}; \left[\theta_{i_2}; \theta_{i_3}\right]; \theta_{i_4}; \theta_{i_5}\right); \quad RV^{\Theta} = \left(\frac{16}{9}; 1; \frac{9}{4}; \frac{4}{2}; 1\right),$$

то з урахуванням того, що

$$\sum_{j=1}^{5} \prod_{s=j}^{5} \nu_{i_s} = \frac{16}{9} \times 1 \times \frac{9}{4} \times \frac{4}{2} \times 1 + 1 \times \frac{9}{4} \times \frac{4}{2} \times 1 + \frac{9}{4} \times \frac{4}{2} \times 1 + \frac{4}{2} \times 1 + 1 = 20,$$

отримуємо оцінки ймовірностей:

$$\hat{q}_{i_1} = \frac{\frac{16}{9} \times 1 \times \frac{9}{4} \times \frac{4}{2} \times 1}{20} = 0{,}4; \qquad \hat{q}_{i_2} = \frac{1 \times \frac{9}{4} \times \frac{4}{2} \times 1}{20} = 0{,}225;$$

$$\hat{q}_{i_3} = 0{,}225; \quad \hat{q}_{i_4} = 0{,}1; \quad \hat{q}_{i_5} = 0{,}05.$$

3.2.3.3. Друга формула Фішберна

Нехай вектор пріоритетів сформовано і на основі наявної статистичної інформації можна стверджувати, що мають місце *частково посилені лінійні співвідношення впорядкованості*, тобто

$$P\left(\Theta = \theta_{i_1}\right) = q_{i_1} \geq q_{i_2} + q_{i_3} + \ldots + q_{i_n};$$
$$P\left(\Theta = \theta_{i_2}\right) = q_{i_2} \geq q_{i_3} + q_{i_4} + \ldots + q_{i_n};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P\left(\Theta = \theta_{i_{n-1}}\right) = q_{i_{n-1}} \geq q_{i_n}.$$

У цій ситуації Фішберн [36, 104, 107] для відшукання точкової оцінки апріорного розподілу ймовірності станів економічного середовища запропонував виходити з того, що величини $\hat{q}_{i_j}$ мають утворювати спадну геометричну прогресію. Виходячи з висунутої гіпотези він показав, що суб'єктивні оцінки ймовірностей $\hat{q}_{i_j}$ можна обчислювати за формулою

$$P\left(\Theta = \theta_{i_J}\right) = q_{i_j} \approx \hat{q}_{i_j} = \frac{2^{n-j}}{2^n - 1}, \quad j = 1,...n.$$

Наприклад, за $n = 5$ маємо:

$$\hat{q}_{i_1} = \frac{16}{31}; \quad \hat{q}_{i_2} = \frac{8}{31}; \quad \hat{q}_{i_3} = \frac{4}{31}; \quad \hat{q}_{i_4} = \frac{2}{31}; \quad \hat{q}_{i_5} = \frac{1}{31};$$

$$\sum_{j=1}^{5} \hat{q}_{i_j} = \frac{16}{31} + \frac{8}{31} + \frac{4}{31} + \frac{2}{31} + \frac{1}{31} = 1.$$

3.2.3.4. Інтервальні оцінки ймовірностей. Третя формула Фішберна

Якщо СПР може вказати інтервали, яким належать імовірності станів економічного середовища,

$$\alpha_j \le q_j \le \beta_j, \quad j = 1,..., n,$$

то говорять, що мають місце *інтервальні співвідношення впорядкованості*. У цьому випадку Фішберн [36, 104, 107] для отримання точкової оцінки апріорного розподілу ймовірності запропонував формулу

$$P\left(\Theta = \theta_j\right) = q_j \approx \hat{q}_j = \alpha_j + \frac{1 - \sum_{s=1}^{n} \alpha_s}{\sum_{s=1}^{n} \left(\beta_s - \alpha_s\right)} \cdot \left(\beta_j - \alpha_j\right).$$

При цьому накладаються умови: $\sum_{s=1}^{n} (\beta_s - \alpha_s) > 0$; $\sum_{s=1}^{n} \alpha_s \le 1$; $\sum_{s=1}^{n} \beta_s \ge 1$.

Якщо, наприклад,

$$q_1 \in [0;\ 0{,}2]; \quad q_2 \in [0{,}1;\ 0{,}3]; \quad q_3 \in [0{,}3;\ 0{,}6];$$
$$q_4 \in [0{,}15;\ 0{,}3]; \quad q_5 \in [0;\ 0{,}1],$$

то

$$\sum_{s=1}^{5} (\beta_s - \alpha_s) = \sum_{s=1}^{5} \beta_s - \sum_{s=1}^{5} \alpha_s = 1{,}5 - 0{,}55 = 0{,}95$$

і тоді:

$$\hat{q}_1 = 0 + \frac{1-0{,}55}{0{,}95} \times (0{,}2-0) = 0{,}0947;$$

$$\hat{q}_2 = 0{,}1 + \frac{1-0{,}55}{0{,}95} \times (0{,}3-0{,}1) = 0{,}1947;$$

$$\hat{q}_3 = 0{,}4421; \quad \hat{q}_4 = 0{,}2211; \quad \hat{q}_5 = 0{,}0474.$$

3.2.4. Четверта інформаційна ситуація

Для ІС I_4 характерним є повне незнання закону розподілу ймовірності станів економічного середовища. А тому оцінка апріорного розподілу має базуватися на відповідних допущеннях (гіпотезах).

В якості таких допущень можна використати принцип максимальної невизначеності Гіббса—Джейнса або принцип недостатніх підстав Бернуллі—Лапласа. В полі I_4, тобто за відсутності будь-якої інформації про можливості настання того чи іншого стану економічного середовища, раніше (див. пункт 3.2.1) було встановлено, що згідно з обома цими принципами точкова (до певної міри суб'єктивна) оцінка апріорного розподілу задається вектором

$$\hat{Q} = (\hat{q}_1; \hat{q}_2; ...; \hat{q}_n) = \left(\frac{1}{n}; \ \frac{1}{n}; \ ...; \ \frac{1}{n}\right).$$

Оптимальне рішення в полі I_4 можна прийняти, використовуючи критерій Бернуллі—Лапласа. Згідно з цим критерієм у випадку, коли $F = F^+$, оптимальна чиста стратегія задовольняє умову

$$s_{k_0} \ : B^+\left(s_{k_0}; \hat{Q}\right) = \max_{k=1,\dots,m} B^+\left(s_k; \hat{Q}\right),$$

де

$$B^+\left(s_k; \hat{Q}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\hat{q}_j \, f_{kj}^+\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_{kj}^+ .$$

У випадку, коли функціонал оцінювання має негативний інгредієнт $\left(F = F^-\right)$, оцінка Байєса для чистої стратегії s_k обчислюється за формулою

$$s_{k_0} : B^-\left(s_k; \hat{Q}\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_{kj}^- ,$$

а оптимальне рішення знаходимо згідно з умовою:

$$s_{k_0}\ : B^{-}\left(s_{k_0};\hat{Q}\right)=\min_{k=1,\ldots,m} B^{-}\left(s_k;\hat{Q}\right).$$

Очевидно, що критерій Бернуллі—Лапласа можна розглядати як частинний випадок критерію Байєса.

Використовуючи в якості закону розподілу ймовірності станів економічного середовища вектор $\hat{Q}$, в полі I_4 можна скористатися критерієм мінімальної дисперсії, семіваріації тощо.

3.3. КРИТЕРІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ЗА НАЯВНОСТІ ПРОТИДІЇ ЕКОНОМІЧНОГО СЕРЕДОВИЩА

Відповідно до наведеного раніше класифікатора в полі ІС: I_1, I_2, I_3, I_4 стани економічного середовища реалізуються згідно із заданим або гіпотетичним законом розподілу ймовірності. Факт існування закону розподілу свідчить про те, що ці ІС характеризують пасивне економічне середовище.

П’ята ІС характеризується антагоністичними інтересами економічного середовища щодо СПР у процесі прийняття ним рішень, тобто I_5 характеризує активне економічне середовище. Суть активності проявляється в тому, що економічним середовищем (другим гравцем) реалізуються заходи, спрямовані на максимально можливу протидію здійсненню планів, які приймаються СПР. При цьому висувається гіпотеза, що обрання чистої стратегії другим гравцем (стану економічного середовища) з множини $\Theta=(\theta_1;\ \theta_2;\ \ldots;\ \theta_n)$ спрямовані на зведення до мінімуму значень функціонала оцінювання на множині $S=(s_1;s_2;\ldots;s_n)$ чистих стратегій першого гравця.

Така ситуація, з одного боку, характеризує конкурентну боротьбу на ринку товарів і послуг, а з іншого — вона може характеризувати несхильність СПР до ризику.

А тому в полі I_5 використовуються критерії, які орієнтують СПР на найнесприятливіший для нього розвиток подій і відображають песимістичну оцінку ситуації. Дії СПР мають бути вкрай обережними, оскільки поведінка і цілі економічного середовища в полі I_5 є абсолютно протилежними щодо СПР, що змушує останнього розраховувати на найгірше. Процес прийняття рішень у цій ситуації здійснюється згідно з основним правилом теорії парних ігор з нульовою сумою: СПР намагається забезпечити собі гарантований рівень з множини значень функціонала оцінювання $F = \left(f_{kj} : k = 1, \ldots, m;\ \ j = 1, \ldots, n\right)$.

Отже, у ситуації I_5 невизначеність цілком зумовлена тим, що суб'єкту керування невідомо, в якому стані знаходитиметься економічне середовище. Але в теоретичній моделі ступінь невизначеності зменшено в силу припущення, що економічне середовище є антагоністичним щодо СПР.

3.3.1. Критерій Вальда

Як уже зазначалося, орієнтація на гарантований результат — це стратегія, що її повинен дотримуватися СПР (перший гравець). Стратегією другого гравця (економічного середовища) є максимальна протидія щодо реалізації планів СПР. Нехай $F = F^+$ і перший гравець вибирає чисту стратегію s_k. Тоді наслідком реалізації стратегії другого гравця є отримання першим гравцем виграшу, що становить величину

$$\alpha_k^+ = \min_{j=1,\ldots,n} f_{kj}^+.$$

Отже, α_k^+ і є тим гарантованим результатом, що на нього в полі I_5 повинен орієнтуватися СПР за вибору своєї чистої стратегії s_k.

Але за першим гравцем (СПР) залишається право вибору будь-якого рішення з множини $S = (s_1; \ldots;\ s_m)$, а тому, з урахуванням того, що першим обирає своє рішення СПР (тобто має місце задача перспективного планування), його оптимальна чиста стратегія s_{k_0} повинна задовольняти умову:

$$s_{k_0}:\quad \alpha_{k_0}^+ = \max_{k=1,\ldots,m} \alpha_k^+ = \max_{k=1,\ldots,m}\ \min_{j=1,\ldots,n} f_{kj}^+. \tag{3.11}$$

Номер оптимальної чистої стратегії СПР

$$k_0 = \arg\left(\max_{k=1,\ldots,m}\ \min_{j=1,\ldots,n} f_{kj}^+\right).$$

Формула (3.11) і відображає суть критерію Вальда (у випадку, коли $F = F^+$).

Оскільки має місце гра з нульовою сумою і для першого гравця елементи f_{kj} функціонала оцінювання задають значення його відповідних виграшів, то з позиції другого гравця ці ж елементи

f_{kj} відображають відповідні величини його програшів (тобто заданий функціонал оцінювання з точки зору другого гравця має негативний інгредієнт). А тому, якби першим обирав своє рішення другий гравець, його оптимальна чиста стратегія була б:

$$\theta_{j_0}: \quad \beta^-_{j_0} = \min_{j=1,\ldots,n} \beta^-_j = \min_{j=1,\ldots,n} \max_{k=1,\ldots,m} f^-_{kj}.$$

Номер цієї стратегії

$$j_0 = \arg\left(\min_{j=1,\ldots,n} \max_{k=1,\ldots,m} f^-_{kj}\right).$$

Якщо функціонал оцінювання $F = F^-$ (має негативний інгредієнт, з точки зору першого гравця — СПР), то суть критерію Вальда відображає формула

$$s_{k_0}: \alpha^-_{k_0} = \min_{k=1,\ldots,m} \alpha^-_k = \min_{k=1,\ldots,m} \max_{j=1,\ldots,n} f^-_{kj}.$$

Номер оптимальної чистої стратегії першого гравця

$$k_0 = \arg\left(\min_{k=1,\ldots,m} \max_{j=1,\ldots,n} f^-_{kj}\right).$$

Аналогічно оптимальна чиста стратегія θ_{j_0} другого гравця задовольняє умову

$$\theta_{j_0}: \beta^+_{j_0} = \max_{j=1,\ldots,n} \beta^+_j = \max_{j=1,\ldots,n} \min_{k=1,\ldots,m} f^+_{kj},$$

а її номер

$$j_0 = \arg\left(\max_{j=1,\ldots,n} \min_{k=1,\ldots,m} f_{kj}\right).$$

Приклад 3.5. За невідомого розподілу $Q = (q_1;\ldots;\, q_5)$ станів економічного середовища виходячи з функціонала оцінювання $F = F^+$, описаного в прикладі 3.1, визначити оптимальну чисту стратегію СПР на основі критерію Вальда.

Розв'язання. Для кожної стратегії знаходимо відповідні гарантовані рівні:

$$\alpha^+_1 = \min_{j=1,\ldots,5} f^+_{1j} = \min\{6;\ 12;\ 9;\ 4;\ 2\} = 2;$$

$$\alpha^+_2 = \min_{j=1,\ldots,5} f^+_{2j} = \min\{8;\ 8;\ 8;\ 6;\ 10\} = 6;$$

$$\alpha^+_3 = \min_{j=1,\ldots,5} f^+_{3j} = \min\{3;\ 12;\ 15;\ 4;\ 0\} = 0.$$

Оскільки

$$\alpha^{+}_{k_0} = \max_{k=1,2,3} \alpha^{+}_{k} = \max\{2;\ 6;\ 0\} = 6 = \alpha^{+}_{2},$$

то

$$k_0 = \arg\max_{k=1,2,3} \alpha_k = 2,$$

тобто для СПР згідно з критерієм Вальда оптимальною чистою стратегією є s_2.

3.3.2. Лінійне перетворення функціонала оцінювання. Критерій Севіджа

Цей критерій називають ще критерієм мінімаксного ризику. Початковим етапом щодо побудови критерію Севіджа є перехід від функціонала оцінювання $F = F^{\pm}$ до матриці ризику (невикористаних можливостей) $Z = Z^{-} = \left(z^{-}_{kj} : k = 1, \dots, m;\ \ j = 1, \dots,\ n\right)$. Тоді згідно із Севіджем оптимальною слід вважати чисту стратегію

$$s_{k_0} : \alpha^{-}_{k_0} = \min_{k=1,\dots,m} \alpha^{-}_{k} = \min_{k=1,\dots,m}\ \max_{j=1,\dots,n} z_{kj}.$$

Її номер

$$k_0 = \arg\left(\min_{k=1,\dots,m}\ \max_{j=1,\dots,n} z_{kj}\right).$$

Приклад 3.6. За невідомого розподілу станів економічного середовища виходячи з функціонала оцінювання $F = F^{+}$, описаного в прикладі 3.1, визначити оптимальну чисту стратегію СПР на основі критерію Севіджа.

Розв'язання. Скористаємося матрицею невикористаних можливостей (ризику), отриманою у розв'язуванні прикладу 3.1:

$$Z^{-} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 & 2 & 8 \\ 0 & 4 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\alpha^{-}_{k_0} = \min_{k=1,2,3}\ \max_{j=1,\dots,5} z_{kj} = \min\{8;\ 7;\ 10\} = 7;$$

$$k_0 = \arg\left(\min_{k=1,\dots,m}\ \max_{j=1,\dots,n} z_{kj}\right) = 2.$$

Відповідь: $s_{k_0} = s_2$.

3.4. ШОСТА ІНФОРМАЦІЙНА СИТУАЦІЯ

Відповідно до класифікатора інформаційних ситуацій для I_6 характерною є наявність чинників, що зумовлюють «проміжну» між I_1, I_2, I_3, I_4 та I_5 поведінку економічного середовища.

На відміну від інформаційних ситуацій I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, в полі яких відшукувались оптимальні чисті стратегії, критерії, що використовуються в полі I_6, забезпечують вибір раціональних (компромісних) рішень.

Класичними прикладами такого виду критеріїв є критерій Гурвіца, модифіковані критерії, критерій Ходжеса—Лемана, Менчеса та ін. Вони детально вивчалися в [32, 34, 36, 64]. Їх можна розглядати як частинні випадки ієрархічної моделі прийняття багатоцільових і багатокритеріальних рішень. Ця модель розглядається в розділі 4 посібника.

3.5. КРИТЕРІЙ ПАРЕТТО. АКТИВНІ ЧИСТІ СТРАТЕГІЇ

Незалежно від наявної інформаційної ситуації СПР може вибирати оптимальну чисту стратегію на основі критерію Паретто.

Згідно з Паретто чиста стратегія s_k вважається не гіршою за чисту стратегію s_l (позначається: $s_k \succeq s_l$, s_k, $s_l \in S$), якщо для всіх елементів відповідних їм векторів оцінювання F_k і F_l мають місце оцінки: $f_{kj}^{+} \geq f_{lj}^{+}$, якщо $F = F^{+}$, або $f_{kj}^{-} \leq f_{lj}^{-}$, якщо $F = F^{-}$.

Якщо $s_k \succeq s_l$ і хоча б для однієї компоненти, наприклад, $f_{k\nu}$ $(1 \leq \nu \leq n)$ вектора F_k має місце строга нерівність $f_{k\nu}^{+} > f_{l\nu}^{+}$ (у випадку, коли $F = F^{+}$) чи $f_{k\nu}^{-} < f_{l\nu}^{-}$ (у випадку, коли $F = F^{-}$), то чиста стратегія s_k вважається кращою за s_l (записують: $s_k \succ s_l$).

Чиста стратегія s_{k_0} вважається *оптимальною за Паретто,* якщо у множині чистих стратегій *S* не знайдеться кращої за s_{k_0}.

Чиста стратегія $s_l \in S$ називається *покращуваною*, якщо існує $s_k \in S$ така, що $s_k \succ s_l$ (вважають, що s_k є *домінуючою* щодо s_l). У випадку відсутності чистої стратегії, оптимальної за Паретто, утворюють множину *непокращуваних* чистих стратегій. Позначимо цю множину через S_{Π} і називатимемо її *множиною Паретто* (очевидно, що $S_{\Pi} \subseteq S$).

Надалі чисті стратегії СПР, що утворюють множину Паретто S_{Π}, називатимемо *активними стратегіями* (першого гравця).

Аналогічно можна ввести до розгляду множину Паретто чистих стратегій другого гравця $\Theta_{\Pi} \subseteq \Theta$.

Якщо ж задачу вибору оптимальної чистої стратегії СПР розв'язувати на основі Паретттової множини S_{Π} (а доцільність такого підходу має достатньо підстав), то функціонал оцінювання F може дещо «звузитися».

3.6. РОЗВ'ЯЗАННЯ СТАТИСТИЧНОЇ ГРИ У ЗМІШАНИХ СТРАТЕГІЯХ

Як уже зазначалося, розв'язок статистичної гри можна шукати у вигляді змішаної стратегії за надання їй адекватної економічної інтерпретації.

Уточнюючи дане в розділі 1 визначення, *змішаною стратегією* s_P СПР називатимемо стратегію, котрій відповідає вектор оцінювання $F(s_P)$, що є лінійною комбінацією векторів оцінювання, які, в свою чергу, відповідають чистим стратегіям СПР:

$$F(s_P) = \sum_{k=1}^{m} (p_k F(s_k)) = p_1 F(s_1) + ... + p_m F(s_m), \tag{3.12}$$

де: p_k — імовірність використання СПР своєї чистої стратегії s_k; $\sum_{k=1}^{m} p_k = 1$, $p_k \geq 0$ $(k = 1, ..., m)$; вектор $P = (p_1; ...; p_k)$ — розподіл імовірності щодо використання СПР своїх чистих стратегій.

Якщо $P = e_k = (0;\ 0;\ ...;\ 0;\ 1;\ 0;\ ...;\ 0)$ (k-та компонента вектора e_k є одиницею, а решта — нулі), то

$$F(s_P) = 0 \times F(s_1) + ... + 1 \times F(s_k) + ... + 0 \times F(s_m) = F(s_k),$$

тобто чисту стратегію s_k $(k = 1, ..., m)$ можна розглядати як частинний випадок змішаної стратегії s_P. При цьому говорять, що вектори e_k $(k = 1, ..., m)$ утворюють канонічний базис лінійного m-вимірного простору. Тоді

$$P = \sum_{k=1}^{m} (p_k e_k) = p_1 e_1 + ... + p_m e_m.$$

Величина $p_k \quad (k=1,\dots,\ m)$ може трактуватися, наприклад, як імовірність використання k-ї чистої стратегії s_k СПР, якщо мова йде про планування на шерег періодів, тобто про прийняття низки аналогічних рішень, рознесених у часі. Однак при цьому кожне наступне рішення має враховувати реальну ситуацію, що склалася на момент його прийняття.

За планування на певний проміжок часу величина $p_k \ (k=1,\dots,m)$ може інтерпретуватись як імовірність використання СПР чистої стратегії s_k, якщо мова йде про управління декількома однорідними об'єктами, відносно кожного з яких приймається одна (чиста) стратегія з множини $S=(s_1;\dots;\ s_m)$.

І нарешті, компоненти $p_k \quad (k=1,\dots,\ m)$ змішаної стратегії s_p СПР можуть інтерпретуватись як відносні частки, що відповідають розподілу капіталу між різними активами при створенні портфеля (раніше, у розділі 1, ми позначали їх через x_k $k=1,\dots,\ m$).

3.6.1. Критерії прийняття рішень у змішаних стратегіях у полі першої інформаційної ситуації

З низки критеріїв, використовуваних у полі I_1, детальніше розглянемо критерій Байєса та мінімальної дисперсії.

Нагадаємо, що згідно з класифікатором інформаційних ситуацій у випадку I_1 вважається відомим закон розподілу ймовірності станів економічного середовища

$$Q=(q_1;\dots;\ q_n);\quad \sum_{j=1}^{n} q_j=1.$$

Оскільки чистій стратегії s_k СПР відповідає вектор оцінювання $F_k \ (k=1,\dots,\ m)$ (розглядаємо його як дійсну випадкову величину), то ця стратегія характеризується такими числовими параметрами:

$$B_k=B(s_k;Q)=M(F(s_k))=\sum_{j=1}^{n}\left(q_j f_{kj}\right),\ \ k=1,\dots,\ m;$$

$$\sigma_k^2=D(s_k;Q)=D(F(s_k))=\sum_{j=1}^{n}\left(q_j f_{kj}^2\right)-B_k^2,\ \ k=1,\dots,\ m;$$

$$\rho_{kl} = \rho(F(s_k); F(s_l)) = \frac{\operatorname{cov}(F(s_k); F(s_l))}{\sigma_k \sigma_l} = \frac{\sum_{j=1}^{n}(q_j f_{kj} f_{lj}) - B_k B_l}{\sigma_k \sigma_l},$$

$$k = 1,\ldots, m, \quad l = 1,\ldots, m.$$

Оскільки $F(s_1),\ldots, F(s_m)$ є дійсними ВВ, то $F(s_P)$, задана згідно з (3.12), є теж випадковою величиною, яка має такі числові характеристики:

$$B_P = B(s_P; P) = M(F(s_P)) = \sum_{k=1}^{m}(p_k B_k) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(p_k q_j f_{kj}); \qquad (3.13)$$

$$\sigma_P^2 = D(s_P;\ P) = D(F(s_P)) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}(p_k p_l \sigma_{kj}) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}(p_k p_l \sigma_k \sigma_l \rho_{kl}), \quad (3.14)$$

де: $\sigma_{kl} = \operatorname{cov}(F(s_k); F(s_l)) = \sigma_k \sigma_l \rho_{kl}$, $k = 1,\ldots, m$, $l = 1,\ldots, m$; B_P — байєсівська оцінка змішаної стратегії s_P; σ_P — середньоквадратичне відхилення відносно B_P.

Зауважимо, що для змішаної стратегії s_P байєсівська оцінка B_P (3.13) збігається зі значенням функції платежів $V = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(p_k q_j f_{kj})$ парної гри з нульовою сумою, що визначається матрицею $F = (f_{kj})$. Як бачимо, в полі першої ІС характеристики B_P та σ_P^2 є функціями m змінних p_k $(k = 1,\ldots, m)$:

$$B_P = V = \sum_{k=1}^{m} p_k B_k = \psi(P) = \psi(p_1;\ldots; p_m);$$

$$\sigma_P^2 = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} p_k p_l \sigma_{kj} = \eta(P) = \eta(p_1;\ldots; p_m).$$

Ураховуючи, що $\min\limits_{k=1,\ldots,m} B_k \le B_P \le \max\limits_{k=1,\ldots,m} B_k$, в якості критерію вибору оптимально змішаної стратегії доцільно вибрати критерій мінімальної дисперсії. Тобто оптимальною СПР вважає змішану стратегію s_{P^*}, де $P^* = (p_1^*;\ldots; p_n^*)$, що задовольняє умови:

$$\begin{aligned} \sigma_{P^*}^2 &= D(s_{P^*}; P^*) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}(p_k^* p_l^* \sigma_{kj}) = \\ &= \min_{P \in \Delta_P} \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}(p_k p_l \sigma_{kl}) = \min_{P \in \Delta_P} \eta(p_1;\ldots; p_m); \end{aligned} \qquad (3.15)$$

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1; \tag{3.16}$$

$$p_k \geq 0, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{3.17}$$

У формулі (3.16) множина

$$\Delta_P = \left\{ P = (p_1; \ldots; p_m) : \sum_{k=1}^{m} p_k = 1;\ p_k \geq 0,\ k = 1, \ldots, m \right\}.$$

Оскільки задана згідно з (3.14) характеристика (дисперсія) змішаної стратегії s_P є невід'ємною величиною

$$\sigma_P^2 = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} (p_k p_l \sigma_{kl}) \geq 0$$

(відповідна їй коваріаційна матриця $C = \mathrm{cov}(F_P) = (\sigma_{kl} : \ k = 1, \ldots, m;$ $l = 1, \ldots, m)$ є додатною напіввизначеною), то функція (квадратична форма) $\eta(P)$ досягає свого мінімального значення на множині Δ_P допустимих значень вектора *P*. Для розв'язання оптимізаційної задачі (3.15)—(3.17) (враховуючи структуру цільової функції) доречно скористатися методами квадратичного програмування [91].

Зупинимося на двох підходах, з позиції теорії парних ігор з нульовою сумою, до розв'язання задачі визначення стратегії, що забезпечує мінімум дисперсії (цільовій функції (3.15)).

Сутність *першого підходу* з'ясовує теорема 3.1.

Теорема 3.1. Нехай у парній грі з нульовою сумою, що визначається матрицею $F = (f_{kj} : k = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots,\ n)$, відсутня сідлова точка, V^* — ціна гри, s_{P^*} та Θ_{Q^*} — оптимальні змішані стратегії гравців, де $P^* = (p_1^*; \ldots; p_m^*)$, а $Q^* = (q_1^*; \ldots; q_n^*)$. Тоді, якщо $q_j^* > 0$, $j = 1, \ldots, n$ (тобто усі чисті стратегії другого гравця є активними):

а) оптимальній змішаній стратегії СПР (першого гравця) відповідає вектор оцінювання

$$F(s_{P^*}) = \sum_{k=1}^{m} \left(p_k^* F(s_k) \right) = V^* e,$$

де: $V^* = \mathrm{const}$; $e = (1; \ldots; 1)$ — вектор-рядок, що має *n* компонент, рівних одиниці;

б) дисперсія, що відповідає змішаній стратегії s_{P^*}, приймає мінімальне значення і при цьому

$$\sigma_{P^*}^{*2} = \min_{P \in \Delta_P} \eta(p_1; \ldots; p_m) = 0.$$

Зауваження 3.1. Доведення цієї теореми наведене в додатку до розділу 3 (пункт 3.9.2).

Зауваження 3.2. За виконання умов теореми 3.1 оптимальна змішана стратегія s_{P^*} першого гравця, знайдена згідно з критерієм мінімальної дисперсії, є безризиковою, оскільки її дисперсія дорівнює нулю: $\sigma^2_{P^*} = 0$.

Зауваження 3.3. Необхідною (але недостатньою) умовою того, що всі чисті стратегії другого гравця будуть його активними стратегіями (тобто $q_j^* > 0,$ для всіх $j = 1,...,n$), є виконання умови $m \geq n$, тобто кількість чистих стратегій СПР повинна бути не меншою кількості станів економічного середовища.

Другий підхід до розв'язання задачі визначення стратегії, що мінімізує дисперсію, базується на розв'язанні парної гри з нульовою сумою з коваріаційною матрицею $C = \mathrm{cov}(F_p)$. Попередньо сформулюємо необхідні умови екстремуму функції багатьох змінних (3.15) за виконання умови (3.16). Для цього складаємо відповідну функцію Лагранжа:

$$L(p_1;...;p_m;\lambda) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}(p_k p_l \sigma_{kl}) - \lambda(p_1 + ... + p_m - 1),$$

знаходимо частинні похідні по змінних $p_1,..., p_m$ та λ, складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial p_k} = 0, \quad k = 1,..., m; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0, \end{cases}$$

або:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{m} \sigma_{kl} p_l = \lambda, \quad k = 1,..., m; \\ \sum\limits_{l=1}^{m} p_l = 1 \end{cases} \tag{3.18}$$

(тут λ — множник Лагранжа).

Можна показати [55], що рішення системи лінійних рівнянь (3.18) знаходиться за формулою

$$P^* = \lambda^* e C^{-1}, \tag{3.19}$$

а мінімально можливе значення дисперсії

$$\sigma^2_{P^*} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\left(p_k^* p_l^* \sigma_{kl}\right) = \frac{1}{eC^{-1}e^T} = \lambda^*. \qquad (3.20)$$

У формулах (3.19)—(3.20) через C^{-1} позначено матрицю, обернену до матриці коваріації C (вважається, що матриця C — невироджена). Виведення зазначених формул наведено в додатку до розділу 3 (пункт 3.9.1).

Зауваження 3.4. Оскільки в разі отримання формули (3.19) не врахована умова (3.17), то вектор P^*, отриманий згідно з (3.19), може містити від'ємні компоненти. На практиці за виникнення такої ситуації з метою забезпечення виконання умови (3.17) з розгляду відкидають ту чисту стратегію СПР, яка відповідає найменшій (від'ємній) компоненті вектора P^*. Якщо її позначимо через s_{k^-}, що задовольняє умові (3.17), то її номер $k^- = \arg\min\left(p_1^*,..., p_m^*\right)$ і при цьому $p_{k^-} < 0$.

Після вилучення чистої стратегії s_{k^-} знову розв'язується оптимізаційна задача, аналогічна (3.15)—(3.17). Цей процес триває до моменту отримання оптимальної змішаної стратегії s_{P^*}, для якої компоненти вектора P^* задовольняють умову (3.17).

Сутність *другого підходу* з'ясовує теорема 3.2.

Теорема 3.2. Нехай розглядається парна гра з нульовою сумою, що описана в умові теореми 3.1. Тоді, якщо $p_k^* > 0\,(k = 1,..., m)$, $q_j^* > 0\,(j = 1,..., n)$, то $m = n$ та $P^* = Q^*$ і при цьому мінімальне значення дисперсії $\sigma^2_{P^*} = V^*$.

Доведення теореми наведено в додатку до розділу 3 (пункт 3.9.2).

3.6.2. Критерії прийняття рішень у змішаних стратегіях за невідомого розподілу ймовірності

Якщо в полі інформаційної ситуації I_2 чи I_3, чи I_4 вдалося знайти точкову оцінку $\hat{Q} = (\hat{q}_1;...;\hat{q}_n)$ невідомого розподілу ймовірності $Q = (q_1;...;q_n)$ станів економічного середовища (сценаріїв), то на підґрунті $\hat{Q}$ можна скористатися будь-яким критерієм прийняття рішень, що є характерним для I_1. Наприклад, критерієм мінімальної дисперсії функціонала оцінювання (3.14).

За невідомого розподілу ймовірності $Q=(q_1;...;q_n)$ станів економічного середовища оцінка Байєса B_P (3.13) та дисперсія σ_P^2 (3.14) є функціями $m+n$ змінних $p_k\ (k=1,...,m)$ та $q_j\ (j=1,...,n)$. Тоді пошук оптимальної змішаної стратегії s_{P^*} СПР зводиться до розв'язання задачі на умовний екстремум, де в якості цільової функції можуть використовуватися такі критерії (за умови, що $F=F^+$, $P\in\Delta_P$, $Q\in\Delta_Q$):

$$\Phi_1(P;\ Q)=B_P^+=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(p_k q_j f_{kj}^+\right)\to\max_{P,\ Q};$$

$$\Phi_2(P;\ Q)=\sigma_P^2=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\left(p_k p_l \sigma_{kl}\right)\to\min_{P,\ Q};$$

$$\Phi_3(P;\ Q)=\alpha_1 B_P^+-\alpha_2\sigma_P\to\max_{P,\ Q};$$

$$\Phi_4(P;\ Q)=\alpha_1\left(B_P^+\right)^H+\alpha_2\left(H(Q)\right)^H\to\max_{P,\ Q};$$

$$\Phi_5(P;\ Q)=\alpha_1\left(H(Q)\right)^H-\alpha_2\left(\sigma_P\right)^H\to\max_{P,\ Q},$$

де: α_1, α_2 — коефіцієнти пріоритету, що задаються СПР, за умов $\alpha_1+\alpha_2=1$; $\alpha_1\ge 0$, $\alpha_2\ge 0$. Індекс «*H*» справа зверху біля виразів у дужках означає операцію нормалізації (наприклад, природну, Севіджа тощо). Детальніше про методи нормалізації йтиметься в розділі 4, присвяченому розв'язуванню багатоцільових і багатокритеріальних задач.

Крім зазначених вище, можуть використовуватися цільові функції виду

$$\Phi_6(P;\ Q)=\alpha_1\left(B_P^+\right)^H+\alpha_2\left(H(Q)\right)^H-\alpha_3\left(\sigma_P\right)^H\to\max_{P,\ Q},$$

де: $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$, $\alpha_i\ge 0$, $i=1,\ 2,\ 3$; $P\in\Delta_P$, $Q\in\Delta_Q$.

Як бачимо, наведені цільові функції можуть об'єднувати декілька показників (наприклад, математичне сподівання B_P, дисперсію σ_P^2 та ентропію Шеннона $H(Q)$). Детальніше такого виду об'єднувальні критерії розглядатимуться в розділі 4.

За виконання умов теореми 3.1 у полі цих інформаційних ситуацій можна використовувати ігровий підхід для пошуку оптимальної змішаної стратегії СПР. У багатьох випадках знайдена ігровим методом оптимальна змішана стратегія СПР задає шукану точку екстремуму відповідної цільової функції за накладених обмежень.

3.6.3. Критерій прийняття рішень у змішаних стратегіях у випадку протидії економічного середовища

У полі п’ятої інформаційної ситуації (I_5) інтереси СПР та економічного середовища абсолютно й повністю антагоністичні. А тому цілі та поведінка економічного середовища є адекватними цілям і поведінці другого гравця в парній грі з нульовою сумою. Математична модель задачі вибору оптимальної змішаної стратегії СПР згідно з критерієм Вальда за найгірших для СПР дій економічного середовища є задачею з двома критеріями $\left(F = F^{+}\right)$:

$$V = B_P^{+} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(p_k q_j f_{kj}^{+}\right) \to \max_{P \in \Delta_P}; \tag{3.21}$$

$$V = B_P^{+} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(p_k q_j f_{kj}^{+}\right) \to \min_{Q \in \Delta_Q}. \tag{3.22}$$

За існування сідлового елемента $f_{k_0 j_0}$ платіжної матриці F мають місце вироджені розподіли $P^0 = (0;\ ...;\ 0;\ 1;\ 0;\ ...;\ 0)$ та $Q^0 = (0;\ ...;\ 0;\ 1;\ 0;\ ...;\ 0)$, в яких ненульові елементи (одиниці) знаходяться відповідно на k_0-му та j_0-му місцях. Тоді ціна гри дорівнює $V^* = f_{k_0 j_0}$.

У випадку відсутності сідлового елемента платіжної матриці $F = F^{+}$ рішення парної гри з нульовою сумою будемо відшукувати у змішаних стратегіях. Це означає, що «координатам» сідлових точок можна поставити у відповідність «стратегії», що знаходяться в «проміжках» між елементами дискретних множин S та Θ. Ці «стратегії» можна розглядати як «лінійні комбінації» елементів множин S та Θ з коефіцієнтами, що задають вектори $P^* = \left(p_1^*;...;\ p_m^*\right)$ та $Q^* = \left(q_1^*;...;q_n^*\right)$ відповідно.

За вибору першим гравцем (СПР) допустимої змішаної стратегії з розподілом $P=(p_1;...;p_m)$ вектор

$$F^+(s_p)=\left(\sum_{k=1}^{m}(p_k f_{k1}); \ ...; \ \sum_{k=1}^{m}(p_k f_{kn})\right)$$

відображає його можливі виграші, а величина

$$V(P;\ Q^*)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(p_k q_j^* f_{kj}\right) \text{ —}$$

його сподіваний виграш. Якщо ж $P=P^*$, то

$$V^* = V(P^*;\ Q^*)=\max_{P\in\Delta_P} V(P;\ Q^*)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(p_k^* q_j^* f_{kj}\right) \text{ —}$$

величина максимально можливого сподіваного виграшу першого гравця (СПР).

І навпаки, за вибору другим гравцем змішаної стратегії з розподілом $Q=(q_1,...,q_n)$ вектор

$$F_Q^- =\left(\sum_{j=1}^{n}\left(q_j f_{1j}\right); \ ...; \ \sum_{j=1}^{n}\left(q_j f_{nj}\right)\right)$$

відображає його можливі програші, а величина

$$V(P^*;\ Q)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(p_k^* q_j f_{kj}\right) \text{ —}$$

його сподіваний програш. Якщо $Q=Q^*$, то

$$V^* = V(P^*;\ Q^*)=\min_{Q\in\Delta_Q} V(P^*;\ Q)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(p_k^* q_j^* f_{kj}\right) \text{ —}$$

величина мінімально можливого сподіваного програшу другого гравця (економічного середовища).

У випадку, коли $F=F^-$, вибір оптимальної змішаної стратегії згідно з критерієм Вальда за найгірших для СПР дій економічного середовища зводиться до двокритеріальної задачі:

$$V = B_P^- = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(p_k q_j f_{kj}^-\right)\to \min_{P\in\Delta_P}; \tag{3.23}$$

$$V = B_P^- = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(p_k q_j f_{kj}^-\right)\to \max_{Q\in\Delta_Q}. \tag{3.24}$$

Якщо від функціонала оцінювання $F = F^{\pm}$ перейти до матриці ризиків (невикористаних можливостей) $Z = Z^{-}$, то оптимальну змішану стратегію СПР можна вибрати згідно з критерієм Севіджа. У цьому випадку має місце двокритеріальна задача виду (3.23)—(3.24), де замість f_{kj}^{-} використовуються елементи z_{kj}^{-} матриці Z^{-}.

Зазначимо, що у випадку, коли виникає необхідність змінити інгредієнт функціонала оцінювання на протилежний, цього можна досягнути двома шляхами:

а) множенням на –1 елементів функціонала **F**, тобто переходом до функціонала $\tilde{\boldsymbol{F}} = -\boldsymbol{F} = \left(-f_{kj} : k = 1,\ldots, m;\ j = 1,\ldots,n\right)$;

б) транспонуванням матриці $\boldsymbol{F}$, тобто переходом до матриці $\boldsymbol{F}^{T} = \left(f_{jk} : j = 1,\ldots,n;\ k = 1,\ldots, m\right)$.

Якщо отримані матриці ($-\boldsymbol{F}$ та $\boldsymbol{F}^{T}$) не мають сідлового елемента, то оптимальною змішаною стратегією $\boldsymbol{P}^{*}$ СПР буде або оптимальна змішана стратегія першого гравця у грі, що визначається матрицею $-\boldsymbol{F} = \left(-f_{kj} : k = 1,\ldots, n;\ k = 1,\ldots,m\right)$, або оптимальна змішана стратегія другого гравця у грі, що визначається матрицею $\boldsymbol{F}^{T} = \left(f_{jk} : j = 1,\ldots, n;\ k = 1,\ldots, m\right)$. При цьому точкова оцінка розподілу ймовірності $\boldsymbol{Q}^{*}$ станів економічного середовища визначає або оптимальну змішану стратегію другого гравця (у грі, коли використовується $-\boldsymbol{F} = (-f_{kj} : k - 1,\ldots, m;\ j = 1,\ldots, n))$, або оптимальну змішану стратегію першого гравця (у грі, коли використовується $\boldsymbol{F}^{T} = (f_{jk} : j = 1,\ldots, n;\ k = 1,\ldots,m))$. Крім того, сідловий елемент у матриці $-\boldsymbol{F} = (-f_{kj} : k = 1,\ldots, m;\ j = 1,\ldots,n)$ відсутній тоді і тільки тоді, коли відсутній сідловий елемент у матриці $\boldsymbol{F}^{T} = \left(f_{jk} : j = 1,\ldots, n;\ k = 1,\ldots, m\right)$, і при цьому ціни ігор, що визначаються цими матрицями, рівні між собою за абсолютною величиною і мають протилежні знаки.

У полі шостої ІС (I_6), за аналогією з попереднім, можна узагальнити відповідні критерії пошуку оптимальної змішаної стратегії (критерії Гурвіца, Ходжеса—Лемана, модифіковані тощо). При цьому слід ураховувати таку особливість: якщо в полі I_6 заданий розподіл імовірності станів економічного середовища $\boldsymbol{Q}$ і в парній грі з нульовою сумою, що визначається матрицею $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^{+} = \left(f_{kj}^{+} : k = 1,\ldots, m;\ j = 1,\ldots,n\right)$, відсутня сідлова точка, то $\boldsymbol{Q}^{*}$ (що відповідає оптимальній змішаній стратегії другого гравця) не збігається з $\boldsymbol{Q}$ (тобто $\boldsymbol{Q}^* \neq \boldsymbol{Q}$). Це відбувається за рахунок введення у відповідні критерії суб'єктивного чинника — параметра λ (коефіцієнта несхильності до ризику, що визначається СПР).

3.7. КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ТА ТЕМИ ДЛЯ ОБГОВОРЕННЯ

1. Які компоненти визначають ситуацію прийняття рішення в умовах ризику на основі теоретико-ігрової моделі? Їх сутність.
2. Матриця ризику, її побудова, економічна сутність її елементів.
3. Чисті та змішані стратегії СПР. Їх економічна сутність.
4. Оптимальні чисті та оптимальні змішані стратегії. Методи їх визначення.
5. Класифікація інформаційних ситуацій. Який принцип лежить в основі цієї класифікації?
6. Назвіть основні критерії, використовувані для прийняття рішень у полі I_1.
7. Поясніть, у чому полягає сутність критерію Байєса та вкажіть на його недоліки щодо урахування ризику.
8. Чи будуть збігатися оптимальні чисті стратегії, отримані згідно з критерієм Байєса, у випадку використання функціонала оцінювання $F = F^-$ та відповідної йому матриці ризику $Z = Z^-$? Чому?
9. Які критерії знаходження оптимальних чистих стратегій належать до критеріїв мінімальної мінливості?
10. Чи у всіх випадках критерій Байєса і критерій мінімальної дисперсії визначають ту саму оптимальну чисту стратегію?
11. Поясніть, чому виникає необхідність оцінювати ризик у відносному вираженні.
12. Поясніть, у чому полягає доцільність використання такого показника ризику, як семіваріація. Наведіть формули для її обчислення.
13. Що спонукало введення до розгляду показників ризику, які містять суб'єктивну складову? Назвіть їх. Яким чином ураховується ставлення СПР до ризику?
14. Принципи застосування теорії гри для моделювання ризику за частково або повністю невідомого розподілу ймовірності станів економічного середовища.
15. Яку функцію покладено в основу принципу Гіббса—Джейнса? Сутність цього принципу.
16. Наведіть приклади ситуацій, коли (в полі I_3) вдається здійснити точкову оцінку розподілу ймовірності станів економічного середовища. Хто автор деяких формул, використовуваних при цьому?

17. Принципи застосування теорії гри для моделювання ризику в полі I_4.

18. Що є характерним для інформаційної ситуації I_5? Якою має бути стратегія поведінки СПР за вибору своїх рішень у полі I_5? Наведіть основні критерії, використовувані при цьому.

19. Чим різняться рішення, що приймаються в полі I_6, від рішень, що приймаються в полі інших інформаційних ситуацій?

20. Дайте визначення змішаної стратегії. Її економічна сутність.

21. Яка змішана стратегія вважається оптимальною для СПР згідно з критерієм мінімальної дисперсії?

22. Наведіть необхідну умову того, що всі чисті стратегії другого гравця будуть його активними стратегіями.

23. Дайте визначення активної стратегії. Її економічне трактування.

24. Сутність критерію Паретто. Яку особливість має матриця невикористаних можливостей у випадку існування чистої стратегії, оптимальної за Паретто?

25. Використання теоретико-ігрової моделі в теорії портфеля й можливі підходи до розв’язання цієї проблеми.

26. Сценарний аналіз розвитку політичного ризику та використання теорії гри.

27. Аналіз інвестиційних проектів і концепція теорії гри для врахування ступеня ризику.

3.8. ПРИКЛАДИ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. У разі переходу на випуск нових видів продукції можливі три варіанти дій (три чисті стратегії) СПР. Результат вибору однієї дії (чистої стратегії) із заданої множини залежить від невизначеного стану економічного середовища. Цих станів може бути чотири. У заданому розподілі ймовірності станів економічного середовища $\boldsymbol{Q}=(0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}6;\ 0{,}1)$ знайти оптимальну чисту стратегію s_{k_0} СПР, використовуючи: а) критерій Байєса; б) критерій мінімальної дисперсії.

Функціонал оцінювання відомий і задається матрицею

$$\boldsymbol{F}=\left(f_{kj}:k=1,,2,\ 3;\ \ j=1,\ 2,\ 3,\ 4\right)=\begin{pmatrix}21 & 60 & 13 & 11\\ 44 & 28 & 23 & 20\\ 73 & 94 & 40 & 47\end{pmatrix},$$

де f_{kj} — прибуток СПР, якщо він використовує стратегію s_k $(k=1,\ 2,\ 3)$ в умовах *j*-го стану економічного середовища θ_j $(j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$.

Чи приводять ці критерії до одного й того ж рішення? Порівняйте відповідні показники з результатом використання оптимальної змішаної стратегії. Який інгредієнт має функціонал оцінювання F?

Зауваження. Порівняння відповідних елементів рядків дає змогу виявити домінування третьої чистої стратегії СПР над першою, тобто активними стратегіями є друга та третя чисті стратегії. Аналогічно виявляються активні стратегії другого гравця, якими є третя та четверта чисті стратегії. Таким чином, $p_1^* = 0$; $q_1^* = 0$; $q_2^* = 0$. Отже, для обчислення p_2^*, p_3^*, q_3^*, q_4^* та ціни гри V^* необхідно розв'язати парну гру з нульовою сумою, що визначається матрицею

$$\boldsymbol{F}' = \left(f'_{kj} : k = 1,\ 2;\ \ j = 1,\ 2\right) = \begin{pmatrix} 23 & 20 \\ 40 & 47 \end{pmatrix}.$$

2. Приватна крамниця на початок зими має 2000 одиниць товару. Попит на товар є постійним і досить високим, але може змінюватися залежно від еластичності (стану економічного середовища), причому θ_1 — висока еластичність попиту, θ_2 — середня еластичність попиту.

Враховуючи існуючий попит та обмежену кількість товару на складі (найближчим часом поставки цього товару не передбачаються), власник оцінює три варіанти рішень:

1) підняти ціну на 10 %; 2) підняти ціну на 15 %; 3) підняти ціну на 20 %.

За високої цінової еластичності підвищення ціни на 10% може призвести до зниження продажу —1900 шт., на 15% — 1800 шт. товару. За середньої цінової еластичності в разі підвищення ціни на 10 % власник крамниці очікує реалізацію 1800 шт., на 15% — 1700 шт., на 20% — до 1500 шт.

Собівартість товару становить 30 грн/шт., середня ціна (до підвищення) — 50 грн.

3. Еластичність попиту залежить від характеру наступної зими: ξ_1 — сувора зима; ξ_2 — м'яка зима.

Різниця між валовою виручкою, одержаною після підняття ціни, та собівартістю товарів утворює валовий прибуток (функціонал оцінювання).

У результаті експертних оцінок визначено ймовірності еластичності попиту на даний товар залежно від характеру зими:

$$P(\theta_1 / \xi_1) = 0{,}9;\ \ P(\theta_2 / \xi_2) = 0{,}1;\ \ P(\theta_1 / \xi_2) = 0{,}4;\ \ P(\theta_2 / \xi_2) = 0{,}6.$$

З імовірністю 0,7 прогнозується настання м’якої зими. Який з варіантів підняття ціни має вибрати власник крамниці, щоб найкраще використати свої можливості? Чи є взагалі сенс піднімати ціну, якщо за старої ціни буде реалізовано весь запас товару?

4. Підприємство випускає продукцію партіями фіксованого обсягу. Через випадкові збої у виробничому процесі можливий випуск партій з неприпустимо високим відсотком бракованої продукції. Визначено стани економічного середовища: 1) партія виробів придатна; 2) партія виробів непридатна.

Уважається, що браковані вироби у придатній партії становлять 3 %, а в непридатній —10 %.

Підприємство відправляє партії товарів трьом споживачам: *A*, *B* і *C*. Контрактом обумовлено, що відсоток бракованої продукції, яка відправляється споживачам *A*, *B* і *C*, не повинен перевищувати відповідно 4 %, 6 % і 8 %. За один відсоток перевищення встановлених меж передбачається штраф у розмірі 50 УГО. Водночас виробництво партії товарів вищої якості збільшує витрати підприємства на 40 УГО за кожен відсоток зниження браку.

Керівництво підприємства розглядає три варіанти рішень (три альтернативи):

1) відправити партію товарів споживачеві *A*;

2) відправити партію товарів споживачеві *B*;

3) відправити партію товарів споживачеві *C*.

Проведені на підприємстві розрахунки показують, що ймовірність виробити непридатну партію дорівнює 0,1, придатну — 0,9.

Функціонал оцінювання визначається у вигляді матриці витрат.

Виберіть рішення, яке б:

а) гарантувало мінімальний рівень витрат;

б) гарантувало мінімальний рівень ризику невикористаних можливостей;

в) гарантувало найменші очікувані витрати;

г) найвигідніше враховувало величину очікуваних витрат і забезпечило придатність цього рішення з коефіцієнтом ризику 0,7 у випадку, коли у керівництва виникли б сумніви щодо достовірності інформації про розподіл імовірності виготовлення придатної та непридатної партій.

5. (Вибір оптимального варіанта капіталовкладень для будівництва електростанцій.) Необхідно прийняти рішення щодо будівництва у регіоні електростанції великої потужності. Розглядаються такі раціональні альтернативні варіанти (стратегії): s_1 —

будівництво великого водосховища і гідроелектростанції; s_2 — спорудження теплової електростанції, основним паливом для якої є газ, а резервним — мазут; s_3 — спорудження атомної електростанції.

Отже, маємо множину стратегій $S = (s_1;\ s_2;\ s_3)$. Економічну ефективність кожного варіанта обчислено з урахуванням витрат на будівництво та експлуатаційних витрат.

На експлуатаційні витрати гідроелектростанції впливають кліматичні умови, зокрема ті, що визначають рівень води у водосховищах.

Випадкові чинники, що впливають на економічну ефективність теплової станції, — це ціни на мазут і газ, неритмічна робота транспорту взимку, що призводить до неритмічних поставок мазуту, тощо.

Економічна ефективність атомної електростанції залежить від значних витрат на будівництво, забезпечення стійкої роботи агрегатів і системи управління під час її експлуатації.

Погодні умови в основному впливатимуть на витрати з експлуатації гідро- та теплоелектростанції. Отже, на ефективність теплової електростанції впливатимуть як погодні умови, так і ціни на газ і мазут.

Випадкові чинники, від яких залежить економічна ефективність варіантів капіталовкладень, згрупуємо так, що в результаті матимемо множину з чотирьох можливих сценаріїв (станів природи, станів довкілля) $\Theta = (\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3,\ \theta_4)$ з урахуванням окупності:
θ_1 — ціни на газ і мазут низькі, а кліматичні умови сприятливі;
θ_2 — ціни на газ і мазут високі, а кліматичні умови сприятливі;
θ_3 — ціни на газ і мазут низькі, а кліматичні умови несприятливі;
θ_4 — ціни на газ і мазут високі, а кліматичні умови несприятливі.

6. (Інвестиції у розробку власних корисних копалин.) Розвідування надр у регіоні показало наявність родовища золота. Необхідно прийняти рішення, чи розробляти родовище, тобто інвестувати будівництво комплексу (s_1), чи ухилитися від цих інвестицій (s_2). Отже, маємо множину стратегій $S = (s_1;\ s_2)$. Геологічні пошукові роботи дали змогу відкрити родовище, але не дали відповіді на запитання, будувати чи не будувати комплекс.

У даному випадку станами довкілля (сценаріями) буде глибина залягання, оскільки точна глибина невідома. Якщо глибина відносно невелика, то економічна ефективність розробок буде високою. Якщо ж глибина відносно велика, то ефективність може виявитися низькою і видобуток золота може бути збитковим. Уведемо позначення щодо станів довкілля (множина Θ): θ_1 — родовище знаходиться на глибині, сприятливій для розробок; θ_2 — родовище знаходиться як на малій, так і на великій глибинах; θ_3 — родовище знаходиться (в основному) на великій глибині.

Результати обчислення ефективності (у млн грн.) наведено у таблиці:

S \ Θ	θ_1	θ_2	θ_3
s_1	100	30	– 30
s_2	0	0	0

За результатами додаткових геологічних досліджень отримано множину $\varepsilon = (\xi_1;\ \xi_2;\ \xi_3)$, де ξ_1, ξ_2, ξ_3 — мала середня, поміркована середня й велика середня глибина залягання шарів відповідно. За даними цих додаткових досліджень оцінено умовні ймовірності отримання окремих результатів для відповідних станів довкілля Θ:

$$p(\xi_1 \mid \theta_1) = 0{,}7; \qquad p(\xi_1 \mid \theta_2) = 0{,}3; \qquad p(\xi_1 \mid \theta_3) = 0{,}1;$$
$$p(\xi_2 \mid \theta_1) = 0{,}2; \qquad p(\xi_2 \mid \theta_2) = 0{,}5; \qquad p(\xi_2 \mid \theta_3) = 0{,}2;$$
$$p(\xi_3 \mid \theta_1) = 0{,}1; \qquad p(\xi_3 \mid \theta_3) = 0{,}2; \qquad p(\xi_3 \mid \theta_3) = 0{,}7.$$

Відомо також, що:

$$p(\theta_1) = 0{,}2; \qquad p(\theta_2) = 0{,}5; \qquad p(\theta_3) = 0{,}3.$$

7. Обсяги виручки (вимірюються в УГО), що може отримувати банк від реалізації акцій чотирьох компаній, залежать від стану економічного середовища. Аналітики банку прогнозують можливе настання одного з трьох станів економічного середовища, а розрахунки можливої виручки подають у вигляді функціонала оцінювання (матриці):

$$F = \begin{pmatrix} 6{,}0 & 6{,}2 & 5{,}5 \\ 7{,}5 & 7{,}1 & 7{,}0 \\ 7{,}4 & 7{,}5 & 8{,}0 \\ 7{,}0 & 5{,}8 & 6{,}0 \end{pmatrix}.$$

Відомо, що стани економічного середовища можуть реалізовуватися, відповідно, з імовірностями: $q_1 = 0{,}3$; $q_2 = 0{,}5$; $q_3 = 0{,}2$.

Вибрати оптимальне рішення згідно з критеріями:

а) мінімальної семіваріації;

б) мінімального модифікованого коефіцієнта семіваріації;

в) модифікованого (з використанням модального значення і семіквадратичного відхилення), якщо $\lambda = 0{,}7$;

г) Ходжеса—Лемана, якщо $\lambda = 0{,}9$.

Вказівка. Вважати, що оптимальне рішення знаходиться серед тих, які утворюють множину Паретто.

8. Брокер отримав завдання продати 1000 акцій компанії «Альфа» протягом одного дня. Акції компанії є достатньо високоліквідними, що гарантує реалізацію 1000 акцій протягом одного дня за ціною 140 УГО. Проведений аналіз економічної ситуації в країні дає підстави чекати зростання курсу акцій протягом дня до 142 УГО або навіть до 144 УГО.

Брокер оцінив імовірності досягнення цін на акції так: 140 УГО за акцію — $q_1 = 0{,}4$ (імовірність того, що протягом дня ціна на акції не зміниться) та відповідно 142 УГО — $q_2 = 0{,}5$; 144 УГО — $q_3 = 0{,}1$.

Правила гри такі: якщо брокер орієнтується на певне підвищення ціни на акції, то він чекає цього підвищення до кінця дня. Якщо ж таке підвищення не настане, то у брокера існує домовленість з перекупниками про те, що він реалізує ці акції за ціною 138 УГО за акцію.

Якщо брокер орієнтуватиметься на ціну в 142 УГО, то існує ймовірність (рівна 0,1) того, що один лот акцій не буде проданий протягом дня за цією ціною і в кінці дня непродані акції доведеться реалізовувати за ціною 138 УГО за акцію. Якщо ж він орієнтуватиметься на ціну 144 УГО, то аналогічна ситуація може мати місце з ймовірністю 0,2. Брокер має можливість продавати акції лотами по 500 штук.

Брокеру необхідно вибрати оптимальну чисту стратегію щодо реалізації акцій, яка б забезпечувала:

а) найбільший сподіваний прибуток;

б) мінімальний ризик щодо невикористання своїх можливостей.

9. Знайти точкову оцінку $\hat{Q} = (\hat{q}_1; ...; \hat{q}_n)$ на основі максимізації ентропії Шеннона

$$H(\hat{Q}) = \max_{Q \in \Delta_Q} H(Q)$$

за виконання обмежень:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(q_j f_{kj}\right)=\bar{f}_k, \quad k=1,\ldots,m;$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1; \quad q_j \geq 0, \quad j=1,\ldots,n,$$

де $\bar{f}_k = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_{kj} \quad (k=1,\ldots,m).$

10. За переходу на випуск нових видів продукції можливі три варіанти, кожному з яких відповідає випуск певного виду продукції, але можливий і змішаний варіант, коли випускається комбінація цих видів продукції. Економічний ефект випуску певного виду продукції залежить від невизначеного стану економічного середовища (економічне середовище може набувати одного з трьох своїх станів). Відома також платіжна матриця (функціонал оцінювання):

$$F=\left(f_{kj}: k=1,\ 2,\ 3; \ \ j=1,\ 2,\ 3\right)=\begin{pmatrix} 0{,}35 & 0{,}40 & 0{,}25 \\ 0{,}20 & 0{,}30 & 0{,}10 \\ 0{,}10 & 0{,}35 & 0{,}80 \end{pmatrix},$$

де f_{kj} — прибуток (в УГО), який можна отримати в результаті використання k-го варіанта випуску продукції в умовах j-го стану економічного середовища $(k=1,\ 2,\ 3; \quad j=1,\ 2,\ 3)$.

Знайти оптимально чистий варіант випуску продукції, використовуючи: а) критерій Вальда; б) критерій Севіджа.

Знайти оптимальний змішаний варіант випуску продукції. Навести економічне трактування ціни гри.

3.9. ДОДАТОК ДО РОЗДІЛУ 3

3.9.1. Розв'язання задачі визначення оптимальної змішаної стратегії суб'єкта прийняття рішень у матричній формі

Використовуючи введені раніше позначення

$$C=\operatorname{cov}\left(F_p\right)=\left(\sigma_{kl}: k=1,\ldots,m; \ \ l=1,\ldots,m\right),$$

$$e=(1;\ldots;\ 1); \ \ P=(p_1;\ldots;\ p_m); \ \ Q=(q_1;\ldots;\ q_n),$$

характеристики змішаної стратегії СПР можна записати у матричній формі:

$$B_P = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(p_k q_j f_{kj}\right) = PFQ^T;$$

$$\sigma_P^2 = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}(p_k p_l \sigma_{kl}) = PCP^T;$$

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_m = Pe^T = 1.$$

Оптимізаційна задача (3.15)—(3.17) матиме вигляд

$$\sigma_{P^*}^2 = \min_{P \in \Delta_P} PCP^T;$$

$$Pe^T = 1;$$

$$p_k \geq 0, \quad k = 1, \ldots, m,$$

а система лінійних рівнянь (3.18) — вигляд

$$\begin{cases} PC = \lambda e & (3.25) \\ Pe^T = 1. & (3.26) \end{cases}$$

Якщо матриця C — невироджена (тобто для неї існує обернена — C^{-1}), то з рівняння (3.25) знаходимо оптимальну стратегію P^*:

$$P^* = \lambda^* eC^{-1}.$$

Підставивши P^* у рівняння (3.26), отримуємо:

$$\lambda^* eC^{-1}e^T = 1,$$

звідки маємо, що

$$\lambda^* = \frac{1}{eC^{-1}e^T},$$

тобто оптимальна змішана стратегія

$$P^* = \frac{eC^{-1}}{eC^{-1}e^T}.$$

Мінімальне значення дисперсії при цьому дорівнює

$$\sigma_{P^*}^2 = P^* CP^{*T} = \frac{1}{eC^{-1}e^T} = \lambda^*.$$

3.9.2. Доведення теорем

Теорема 3.1. Нехай у парній грі з нульовою сумою, що визначається матрицею $F = \left(f_{kj} : k = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n\right)$, відсутня сідлова точка; s_{P^*} та θ_{Q^*} — оптимальні змішані стратегії, яким відповідають вектори $P^* = \left(p_1^*;...; p_m^*\right)$ та $Q^* = \left(q_1^*;...; q_n^*\right)$, а V^* — ціна гри. Тоді, якщо усі $q_j^* > 0$ $(j = 1,..., n)$, то:

а) оптимальній змішаній стратегії СПР відповідає вектор оцінювання

$$F\left(s_{P^*}\right) = \sum_{k=1}^{m} p_k^* F(s_k) = V^* e;\ V^* = \text{const};$$

б) мінімальне значення дисперсії

$$\sigma_{P^*}^2 = \min_{P \in \Delta_P} \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\left(p_k p_l \sigma_{kl}\right) = \min_{P \in \Delta_P} \eta\left(p_1;...; p_m\right) = 0.$$

Доведення. а) З теорії гри відомо, що коли другий гравець використовує будь-яку свою активну стратегію, а перший гравець — свою оптимальну змішану стратегію s_{P^*}, де $P^* = \left(p_1^*;...; p_m^*\right)$, то сподіване значення виграшу першого гравця рівне ціні гри

$$V^* = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(p_k^* q_j^* f_{kj}\right).$$

Згідно з умовою теореми усі чисті стратегії другого гравця є його активними стратегіями, тобто для усіх $j = 1,..., n$ компоненти $q_j^* > 0.$ А тому компоненти ВВ F_{P^*}

$$f_{P^* j} = F\left(s_{P^*}\right) e_j = \sum_{k=1}^{m}\left(p_k^* f_{kj}\right) = V^*, \quad j = 1,..., n$$

є рівними ціні гри, тобто

$$F\left(s_{P^*}\right) = \sum_{k=1}^{m}\left(p_k^* F(s_k)\right) = V^* e,$$

де $V^* = \text{const},$ що й треба було довести.

б) Оскільки

$$\sigma_{P^*}^2 = D\left(F\left(s_{P^*}\right)\right) = D\left(V^* e\right) = D(\text{const}) = 0,$$

то з урахуванням невід'ємності дисперсії отримуємо:

$$0 = \sigma^2_{P^*} = \min_{P \in \Delta_P} \sigma^2_P = \min_{P \in \Delta_P} \eta(p_1;...; p_m),$$

що й треба було довести.

Теорема 3.2. Нехай у парній грі з нульовою сумою, що визначається коваріаційною матрицею $C = (\sigma_{kl} : k = 1,..., m;\ l = 1,..., m)$, де $\sigma_{kl} = \mathrm{cov}(F(s_k);\ F(s_l))$, відсутня сідлова точка; s_{P^*} та θ_{Q^*} — оптимальні змішані стратегії гравців; V^* — ціна гри. Тоді, якщо компоненти векторів P^* та Q^* є строго більшими нуля $\left(p_k^* > 0,\ k = 1,...,\ m;\right.$ $\left.q_l^* > 0,\ l = 1,...,\ m\right)$, то $P^* = Q^*$ і при цьому мінімальне значення дисперсії $\sigma^2_{P^*} = V^*$.

Доведення. Оскільки згідно з умовою теореми $p_k^* > 0\ \ (k = 1,...,\ m)$; $q_l^* > 0\ \ (l = 1,...,\ m)$, то усі чисті стратегії гравців є їх активними стратегіями. А тому використання своєї оптимальної змішаної стратегії першим гравцем проти будь-якої стратегії другого гравця приводить до сподіваного виграшу, рівного за величиною ціні гри V^*. Тобто мають місце співвідношення:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{m} \left(p_k^* \sigma_{kl}\right) = V^*, \quad l = 1,..., m; \\ \sum\limits_{k=1}^{m} p_k^* = 1; \end{cases} \qquad (3.27)$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{l=1}^{m} \left(p_l^* \sigma_{kl}\right) = V^*, \quad k = 1,..., m; \\ \sum\limits_{l=1}^{m} p_l^* = 1. \end{cases} \qquad (3.28)$$

Зіставляючи системи (3.27) та (3.28) із системою (3.18) і враховуючи, що $\sigma_{kl} = \sigma_{lk}$, висновуємо, що рішення системи (3.27) — вектор $P^* = \left(p_1^*;...;\ p_m^*\right)$ і рішення системи (3.28) — вектор $Q^* = \left(q_1^*;...;\ q_m^*\right)$ є розв'язками системи (3.18). А тому мають місце рівності:

$$P^* = Q^* = \lambda^* e C^{-1}; \qquad V^* = \sigma^2_{P^*} = \lambda^* = \left(e C^{-1} e^T\right)^{-1},$$

що й треба було довести.

Теорема 3.3. Довести, що перехід від функціонала оцінювання $F^{\pm}$ до матриці невикористаних можливостей Z^{-} не впливає на вибір оптимальної чистої стратегії згідно з критерієм Байєса.

Доведення. По суті, доведення теореми зводиться до встановлення такого факту: чиста стратегія, що є оптимальною згідно з критерієм Байєса, одночасно є оптимальною з позиції мінімуму сподіваного ризику невикористаних можливостей.

Нехай для визначеності

$$F = F^{+} = \begin{pmatrix} f_{11}^{+} & \ldots & f_{1n}^{+} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{k1}^{+} & \ldots & f_{kn}^{+} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{m1}^{+} & \ldots & f_{mn}^{+} \end{pmatrix}.$$

Тоді для чистої стратегії s_k оцінка Байєса

$$B_F^{+}(s_k;\ Q) = \sum_{j=1}^{n}\left(q_j f_{kj}^{+}\right) = M\left(F^{+}(s_k)\right),$$

а для оптимальної чистої стратегії s_{k_0}

$$B_F^{+}\left(s_{k_0};\ Q\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(q_j f_{k_0 j}^{+}\right) = M\left(F^{+}\left(s_{k_0}\right)\right) = \max_{s_k \in S} B_F^{+}(s_k;\ Q) \geq B_F^{+}(s_k;\ Q).$$

У випадку, коли $F = F^{+}$, матриця невикористаних можливостей

$$Z = Z^{-} = \left(z_{kj}^{-} : k = 1, \ldots, m;\ \ j = 1, \ldots, n\right) = \begin{pmatrix} f_1^{\max} - f_{11}^{+} & \ldots & f_n^{\max} - f_{1n}^{+} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1^{\max} - f_{k1}^{+} & \ldots & f_n^{\max} - f_{kn}^{+} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1^{\max} - f_{m1}^{+} & \ldots & f_n^{\max} - f_{mn}^{+} \end{pmatrix},$$

де $f_j^{\max} = \max\limits_{s_k \in S} f_{kj}^{+}$. Тоді

$$B_Z^{-}\left(s_{k_0};\ Q\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(q_j z_{k_0 j}^{-}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(q_j\left(f_j^{\max} - f_{k_0 j}^{+}\right)\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left(q_j f_j^{\max}\right) - \sum_{j=1}^{n}\left(q_j f_{k_0 j}^{+}\right) \leq \sum_{j=1}^{n}\left(q_j f_j^{\max}\right) - \sum_{j=1}^{n}\left(q_j f_{kj}^{+}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left(q_j\left(f_j^{\max} - f_{kj}^{+}\right)\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(q_j z_{kj}^{-}\right) = B_Z^{-}\left(s_{k_0};\ Q\right),$$

тобто

$$B_Z^-\left(s_{k_0};\ Q\right)=\min_{s_k\in S} B_Z^-(s_k;\ Q),$$

що й треба було довести.

Якщо $F=F^-$, то

$$Z=Z^-=\left(z_{kj}^-:k=1,\dots,m;\ \ j=1,\dots,n\right)=\begin{pmatrix} f_{11}^- - f_1^{\min} & \dots & f_{1n}^+ - f_n^{\min} \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{k1}^- - f_1^{\min} & \dots & f_{kn}^+ - f_n^{\min} \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{m1}^- - f_1^{\min} & \dots & f_{mn}^+ - f_n^{\min} \end{pmatrix}.$$

Ураховуючи, що у цьому випадку

$$B_F^-\left(s_{k_0};Q\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(q_j f_{k_0 j}^-\right)=M\left(F^-(s_k)\right)=\min_{s_k\in S} B_F^-\left(s_k;Q\right)\le B_F^-\left(s_k;Q\right),$$

отримуємо:

$$B_Z^-(s_k;\ Q)=\sum_{j=1}^{n} q_j\left(f_{kj}^- - f_j^{\min}\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(q_j f_{kj}^-\right)-\sum_{j=1}^{n}\left(q_j f_j^{\min}\right)=$$

$$=B_F^-\left(s_k;Q\right)-\sum_{j=1}^{n}\left(q_j f_j^{\min}\right)\ge B_F^-\left(s_k;Q\right)-\sum_{j=1}^{n}\left(q_j f_j^{\min}\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left(q_j\left(f_{k_0 j}^- - f_j^{\min}\right)\right)=B_Z^-\left(s_{k_0};Q\right),$$

тобто

$$B_Z^-\left(s_{k_0};\ Q\right)=\min_{s_k\in S} B_Z^-(s_k;\ Q),$$

що й треба було довести.

Покажемо, що мають місце обернені твердження. А саме: якщо

$$B_Z^-\left(s_{k_0};\ Q\right)=\min_{s_k\in S} B_Z^-(s_k;\ Q), \tag{3.29}$$

то у випадку, коли $F=F^+$, є справедливими оцінки

$$B_F^+(s_k;\ Q)\le B_F^+\left(s_{k_0};\ Q\right), \qquad k=1,\dots,\ m,$$

а якщо $F=F^-$ — оцінки

$$B_F^-(s_k;\ Q)\ge B_F^-\left(s_{k_0};\ Q\right), \qquad k=1,\dots,\ m.$$

Насправді, якщо $F=F^+$, то згідно з (3.29) має місце нерівність

$$B_Z^-\left(s_{k_0};\ Q\right)\le B_Z^-(s_k;Q), \qquad k=1,\dots,\ m. \tag{3.30}$$

У свою чергу, зі співвідношення (3.30) випливає, що

$$\sum_{j=1}^{n}\left(q_j\left(f_j^{\max}-f_{k_0 j}^{+}\right)\right)\leq\sum_{j=1}^{n}\left(q_j\left(f_j^{\max}-f_{kj}^{+}\right)\right),$$

тобто

$$\sum_{j=1}^{n}\left(q_j\, f_{k_0 j}^{+}\right)\geq\sum_{j=1}^{n}\left(q_j\, f_{kj}^{+}\right),$$

що й треба було довести.

Якщо ж $F=F^{-}$, то згідно з (3.30) отримуємо, що

$$\sum_{j=1}^{n}\left(q_j\left(f_{k_0 j}^{-}-f_j^{\min}\right)\right)\leq\sum_{j=1}^{n}\left(q_j\left(f_{kj}^{-}-f_j^{\min}\right)\right),$$

тобто

$$\sum_{j=1}^{n}\left(q_j\, f_{k_0 j}^{-}\right)\leq\sum_{j=1}^{n}\left(q_j\, f_{kj}^{-}\right),$$

що й треба було довести.

3.9.3. Метод множників Лагранжа. Матриця Гессе

Метод множників Лагранжа є одним з найбільш ефективних методів розв’язання класичної задачі математичного програмування:

$$F(x_1;...;x_n)\to\max_{x\in R^n};\tag{3.31}$$

$$g_i(x_1;...;x_n)=b_i,\quad i=1,...,m;\tag{3.32}$$

$$x=(x_1;...;x_n).$$

Сутність методу полягає у знаходженні стаціонарної точки функції Лагранжа (необхідних умов існування екстремуму функції)

$$L(x_1;...;x_n;\lambda_1;...;\lambda_m)=F(x_1;...;x_n)+\sum_{i=1}^{m}(\lambda_i(b_i-g_i(x_1;...;x_n))),\tag{3.33}$$

тобто до розв’язання системи $(m+n)$ алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x_j}=0,\quad j=1,...,n; & (3.34)\\[2mm] \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i}=0,\quad i=1,...,m. & (3.35)\end{cases}$$

Якщо розв'язок системи рівнянь (3.34)—(3.35) позначити через $X^* = (x^*;\ \lambda^*) = (x_1^*;...;x_n^*;\ \lambda_1^*;...;\lambda_m^*)$, то має місце рівність

$$L(x_1^*;...;x_n^*;\ \lambda_1^*;...;\lambda_m^*) = F(x_1^*;...;x_n^*)$$

і за використання достатніх умов існування екстремуму точка $x^* = (x_1^*;...;x_n^*)$ є розв'язком задачі математичного програмування (3.31)—(3.32).

До достатніх умов існування екстремуму відноситься від'ємна визначеність чи від'ємна напіввизначеність матриці Гессе

$$G(X^*) = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}\bigg|_{X^*} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L(X^*)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L(X^*)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 L(X^*)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 L(X^*)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L(X^*)}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 L(X^*)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial^2 L(X^*)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 L(X^*)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 L(X^*)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

(вона утворена з других похідних функції Лагранжа, що беруться по вектору змінних $x = (x_1;...;x_n)$).

Нагадаємо, що матриця $G(X^*)$ є *від'ємно визначеною*, якщо знаки її головних мінорів почергово змінюються. Наприклад, для функції Лагранжа

$$L(Q;\ \lambda) = H(Q) + \lambda\left(1 - \sum_{j=1}^{n} q_i\right),$$

побудованої у прикладі 3.4, матриця Гессе має вигляд

$$G(Q;\ \lambda^*) = \frac{\partial^2 L(Q, \lambda^*)}{\partial Q^2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{q_1^*} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{q_2^*} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{q_n^*} \end{pmatrix},$$

її головні мінори набувають значень

$$M_1 = \left|-\frac{1}{q_1^*}\right| = -\frac{1}{q_1^*}; \qquad M_2 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{q_1^*} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{q_2^*} \end{vmatrix} = \frac{1}{q_1^* q_2^*};$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{q_1^*} & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{q_2^*} & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{q_3^*} \end{vmatrix} = -\frac{1}{q_1^* q_2^* q_3^*};$$

$$M_n = \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{q_1^*} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{q_2^*} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \dfrac{1}{q_n^*} \end{vmatrix} = (-1)^n \frac{1}{q_1^* q_2^* \ldots q_n^*}.$$

А тому, враховуючи, що $Q^* = \hat{Q} = \left(\frac{1}{n}; \frac{1}{n}; \ldots; \frac{1}{n}\right)$, тобто що $q_j^* = \frac{1}{n} > 0,$ доходимо висновку щодо почергової зміни знаків головних мінорів. Отже, виконуються достатні умови існування максимуму і точка $\hat{Q} = \left(\frac{1}{n}; \ldots; \frac{1}{n}\right)$ є точкою максимуму ентропії $H(Q)$.

У випадку загальної задачі нелінійного програмування

$$F(x_1; \ldots; x_n) \to \max_{x \in R^n}; \qquad (3.36)$$

$$g_i(x_1; \ldots; x_n) \le b_i, \quad i = 1, \ldots, m; \qquad (3.37)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, \ldots, n, \qquad (3.38)$$

функція Лагранжа знову має вигляд (3.33). Якщо знайти розв’язок системи рівнянь (3.34)—(3.35) $X^* = (x^*; \lambda^*)$, де $\lambda^* = (\lambda_1^*; \ldots; \lambda_m^*)$, то точка $x^* = (x_1^*; \ldots; x_n^*)$ буде розв’язком задачі (3.36)—(3.38) у випадку, коли X^* є сідловою точкою функції Лагранжа, тобто

$$L(x; \lambda^*) \le L(x^*; \lambda *) \le L(x^*; \lambda).$$

При цьому усі $x_j \ge 0$ $(j = 1, \ldots, n)$ а $\lambda_i \ge 0$ $(i = 1, \ldots, m)$. Тобто точка $X^* = (x^*; \lambda^*)$ забезпечує максимум функції Лагранжа за сукупністю всіх невід’ємних значень змінної $x=(x_1;...;x_n)$ та мінімум за сукупністю всіх невід’ємних множників Лагранжа $\lambda^*=(\lambda_1;...;\lambda_m)$.

Ця ситуація виникає тоді, коли цільова функція $F(x)$ (строго) опукла вверх, а функції $g_i(x)$ $(i=1,...,m)$, що задають обмеження, (строго) опуклі вниз.

Зазначимо також, що знання значень множників Лагранжа не є зайвим. Навпаки, з їх допомогою можна отримати цінну інформацію про економічну сутність задачі, оскільки вони вимірюють чутливість оптимального значення цільової функції $F(x^*)$ до зміни констант b_i, що задають обмеження (3.37), а саме:

$$\lambda_i^*=\frac{\partial F\left(x_1^*;...;x_n^*\right)}{\partial b_i}, \qquad i=1,...,m$$

(тут $x^*=x^*(b_1;...;b_m)$).

Наприклад, якщо деякий множник Лагранжа дорівнює нулю, то невеликі зміни збурення відповідної константи обмежень не впливатимуть суттєво на оптимальне значення цільової функції. Особливо важливою є інтерпретація множників Лагранжа в задачах раціональної економічної діяльності. В задачах розподілу ресурсів цільова функція має розмірність вартості, тобто ціни, помноженої на обсяг продукції (таким, наприклад, є прибуток, виручка, витрати), а з допомогою обмежень установлюється певне значення деякої кількісної характеристики (наприклад, обсягів витрат). Оскільки в таких задачах з допомогою відповідного множника Лагранжа вимірюється чутливість величини, що має розмірність вартості, щодо зміни певної кількості, то він (цей множник) має розмірність ціни. Множники Лагранжа часто називають *тіньовими цінами* (відповідних ресурсів).

3.10. ПОЗНАЧЕННЯ, ВИКОРИСТОВУВАНІ В РОЗДІЛІ 3

$S=(s_1;...;s_m)$ — множина альтернативних рішень СПР (чистих стратегій першого гравця);

$P=(p_1;...;p_m)$ — розподіл імовірності щодо використання СПР (першим гравцем) своїх чистих стратегій;

$P^*=(p_1^*;...;p_m^*)$ — оптимальний розподіл імовірності щодо використання СПР (першим гравцем) своїх чистих стратегій;

S^* — множина оптимальних рішень (чистих стратегій) СПР ($S^* \subseteq S$);

S_{Π} — множина Паретто щодо чистих стратегій;

s_{k_0} — оптимальне рішення (чиста стратегія) СПР (першого гравця);

k_0 — порядковий номер оптимального рішення (чистої стратегії);

$\Theta = (\theta_1;...;\theta_n)$ — множина станів економічного середовища (чистих стратегій другого гравця);

θ_{j_o} — оптимальна чиста стратегія другого гравця;

j_0 — порядковий номер оптимальної чистої стратегії другого гравця;

$Q = (q_1;...;q_n)$ — апріорний розподіл імовірності щодо реалізації другим гравцем (економічним середовищем) своїх станів (чистих стратегій);

$\widehat{Q} = (\widehat{q}_1;...;\widehat{q}_n)$ — оцінка апріорного розподілу ймовірності щодо реалізації другим гравцем (економічним середовищем) своїх станів (чистих стратегій);

θ_Q, θ_{Q^*} — відповідно змішана та оптимальна змішана стратегія другого гравця, що визначається вектором розподілу ймовірності відповідно Q, Q^*;

$F = (f_{kj} : k = 1,...,m;\ j = 1,...,n)$ — функціонал оцінювання (платіжна матриця);

$f_{kj} = f(s_k;\theta_j)$ — кількісна оцінка ефективності використання СПР своєї чистої стратегії s_k у випадку, коли економічне середовище знаходиться у стані θ_j ($k = 1,...,m$; $j = 1,...,n$);

$F(s_k) = (f_{k1};...;f_{kn})$ — вектор оцінювання чистої стратегії s_k ($k = 1,...,m$) СПР (першого гравця);

$F(\theta_j) = (f_{1j};...;f_{mj})^T$ — вектор оцінювання стану θ_j ($j = 1,...,n$) економічного середовища (чистої стратегії другого гравця);

$Z = (z_{kj} : k = 1,...,m;\ j = 1,...,n)$ — матриця ризику (невикористаних можливостей);

z_{kj} — кількісна оцінка збитків (невикористаних можливостей), які може отримати СПР у випадку вибору ним стратегії s_k ($k = 1,...,m$) в умовах стану економічного середовища θ_j, порівняно з результатом, який отримав би СПР за вибору найвигіднішої для нього стратегії в умовах цього ж стану θ_j;

s_P — змішана стратегія СПР (першого гравця), що визначається вектором розподілу ймовірності $P = (p_1; ...; p_m)$;

$F(s_P)$ — вектор оцінювання змішаної стратегії s_P СПР (першого гравця);

θ_Q — змішана стратегія другого гравця (економічного середовища), що визначається вектором (розподілом імовірності) $Q = (q_1; ...; q_n)$;

$B^{\pm}(s_k; Q), B^{\pm}(F(s_k); Q)$ — оцінка Байєса рішення s_k, $k = 1, ..., m$ (чистої стратегії) СПР;

$P(\xi_i)$ — імовірність настання випадкової події ξ_i;

$P(\xi_i \mid \theta_j)$ — імовірність настання випадкової події ξ_i за умови, що вже відбулася випадкова подія θ_j;

C_N^k — число сполучень з N елементів по k (елементів);

P_N^k — імовірність появи випадкової події рівно k разів у серії з N незалежних дослідів;

$Z_k = Z(F(s_k); Q) = Z(F(s_k))$, $Z_F = Z(F)$ — центр групування значень випадкової величини відповідно $F(s_k)$, F;

$G(F(s_k))$ — зважене середньогеометричне випадкової величини $F(s_k)$;

$Mo(F(s_k))$ — мода випадкової величини $F(s_k)$;

$Me(F(s_k))$ — медіана випадкової величини $F(s_k)$;

$D(s_k; Q)$, $D(F(s_k))$ — дисперсія випадкової величини $F(s_k)$;

σ_k — середньоквадратичне відхилення випадкової величини $F(s_k)$;

$D_Z(s_k; Q)$ — міра мінливості елементів вектора оцінювання $F(s_k)$ відносно центра групування $Z(F(s_k))$ його елементів;

$SV(s_k; Q)$ — семіваріація випадкової величини $F(s_k)$;

$\alpha_k = (\alpha_{k1}; ...; \alpha_{kn})$ — вектор індикаторів несприятливих відхилень значень випадкової величини $F(s_k)$ відносно центра групування;

$CV_m(s_k; Q)$ — модифікований коефіцієнт варіації випадкової величини $F(s_k)$;

$Risk^{-}(F(s_k); Q)$ — оцінка величини ризику в абсолютному вираженні;

$H(Q)$ — ентропія Шеннона (міра невизначеності);

$L(Q;\lambda)$ — функція Лагранжа (λ — множник Лагранжа);

$\omega = (\omega_1;\ldots;\omega_L)$ — вектор параметрів;

RI^{Θ} — ряд пріоритету щодо станів економічного середовища;

RV^{Θ} — ряд бінарних відношень пріоритету щодо станів економічного середовища;

B_P, σ_P — числові характеристики (відповідно байєсівська оцінка та середньоквадратичне відхилення випадкової величини $F(s_P)$) ;

s_{P^*}, θ_{Q^*} — оптимальні змішані стратегії гравців, що визначаються розподілами P^*, Q^* ;

$\Phi_j(P;Q)$, $j=1,\ldots,6$ — цільові функції;

$\Delta_P = \{P=(p_1;\ldots;p_m): \sum_{k=1}^{m} p_k = 1;\ p_k \geq 0,\ k=1,\ldots,m\}$ — множина допустимих розподілів імовірності щодо чистих стратегій першого гравця (рішень СПР);

$\Delta_Q = \{Q=(q_1;\ldots;q_n): \sum_{j=1}^{n} q_j = 1;\ q_j \geq 0,\ j=1,\ldots,n\}$ — множина допустимих розподілів імовірності щодо чистих стратегій другого гравця (станів економічного середовища);

$V(P;Q)$ — критерій (величина) сподіваного виграшу СПР;

$G(X)$ — матриця Гессе;

$M_1,\ldots,M_n$ — головні мінори матриці Гессе.

РОЗДІЛ 4

БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНІ ІГРОВІ МОДЕЛІ

Скорочення, використовувані у розділі:
НОРМ — нормалізація;
СПР — суб'єкт прийняття рішень;
УГО — умовна грошова одиниця;
ЧС — чиста стратегія.

4.1. СУТНІСТЬ ПРОБЛЕМИ ПРИЙНЯТТЯ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНИХ РІШЕНЬ

Слово *критерій* перекладається з грецької як засіб судження. Його наукова сутність — це мірило для оцінювання предмета (явища) чи ознака, взята за основу класифікації.

Нехай СПР обрано певну ціль щодо розвитку економічної системи, множину альтернативних стратегій (рішень), реалізація яких дає змогу досягти поставленої цілі, а також низку критеріїв оцінювання цих стратегій (в якості критеріїв можуть використовуватися спеціалізовані економічні показники). Науковий аналіз проблем прийняття рішень в економічній діяльності та підприємництві починається з моменту, коли хоча б частина альтернатив і (чи) критеріїв відома. У сучасній науці стосовно прийняття рішень центральне місце посідають багатокритеріальні задачі вибору. Вважається, що врахування багатьох критеріїв наближує постановку задачі до реального життя.

Наприклад, СПР вибирає банк для розміщення своїх грошових ресурсів. У якості альтернатив обрано три банки і виокремлено такі критерії вибору: відсоткова ставка, капітал банку, його імідж, ліквідність.

Зазначимо, що традиційно заведено розрізняти три основних класи задач прийняття рішень:

1. *Упорядкування альтернатив*. Для низки задач вважається досить обґрунтованою вимога щодо впорядкування стратегій (об'єктів) на множині альтернатив. Так, наприклад, члени родини впорядковують за ступенем необхідності майбутні витрати на

придбання певних товарів і послуг, керівники фірм упорядковують за критерієм прибутковості та іншими критеріями об'єкти капіталовкладень тощо. У загальному випадку вимога щодо впорядкування альтернатив означає необхідність визначити відносну цінність кожної з них.

2. *Розподіл альтернатив за класами рішень*. Такі задачі зустрічаються у повсякденному житті, наприклад, у разі купівлі квартири чи будинку. В разі обміну квартири люди, як правило, розділяють альтернативи на дві групи: такі, що заслуговують і не заслуговують більш детального вивчення, що потребує витрат часу і коштів. Групи товарів розрізняються за якістю тощо.

3. *Виокремлення (вибір) кращої альтернативи*. Ця задача традиційно вважається однією з основних у прийнятті рішень. Вона часто зустрічається на практиці. Вибір одного предмета для купівлі, вибір місця праці, вибір інвестиційного проекту з множини альтернативних варіантів — це типові приклади.

Наголосимо, що багатокритеріальні задачі — це задачі, обтяжені невизначеністю, конфліктністю та породженим ними ризиком. Частина інформації, необхідна для вичерпного та однозначного визначення вимог до рішення, принципово відсутня на момент прийняття цього рішення. Дослідник відносно часто, в принципі, вербально може визначити основні змінні, враховуючи зв'язки (залежності) між ними, тобто побудувати концептуальну модель, що відображає ситуацію. Але залежності між критеріями взагалі не можуть бути визначені на ґрунті лише об'єктивної інформації, що є в розпорядженні дослідника. Такі проблеми, згідно з класифікацією, запропонованою в 1958 р. у статті Г. Саймона та А. Ньюелла [139], слід віднести до *слабоструктурованих*, оскільки тут нестача об'єктивної інформації є принципово неусуненою на момент прийняття рішення, тобто об'єктивно існує невизначеність і породжений нею ризик.

Існує низка проблем, у котрих відомий лише перелік основних параметрів, але кількісні взаємозв'язки між ними встановити неможливо (відсутня необхідна інформація). Інколи ясно лише, що зміна параметрів у певних межах впливає на рішення. У таких випадках структура, що розуміється як множина зв'язків між параметрами, не визначена і проблема називається *неструктурованою*. Типовими неструктурованими проблемами є вибір професії, вибір місця роботи тощо. Усі ці проблеми потребують урахування невизначеності та моделювання ризику, кількісна оцінка якого, у свою чергу, теж є багатокритеріальною.

4.2. ФОРМАЛЬНА ПОСТАНОВКА БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ

Один з підходів до розв’язання задачі прийняття багатокритеріальних рішень (стратегій) на основі економіко-математичних моделей оцінювання ризику — це дослідження економічної проблеми на базі теоретико-ігрової концепції. Ігрові моделі, як відомо, дають змогу аналізувати і приймати рішення в умовах невизначеності, конфліктності та породженого ними ризику.

Як і в попередніх розділах, для позначення основних елементів теоретико-ігрової моделі використовуватимемо ідентифікатори: $S=(s_1;...;s_m)$ — множина альтернативних рішень СПР (чистих стратегій першого гравця); $\Theta=(\theta_1;...;\theta_n)$ — множина станів економічного середовища (чистих стратегій другого гравця); $F=(f_{kj}:k=1,...,m;\ j=1,...,n)$ — функціонал оцінювання (платіжна матриця гри).

Мета, яка переслідується під час формування набору критеріїв оцінки якості стратегій, полягає в найбільш повному виділенні тих аспектів наслідків, які беруться до уваги під час порівняння різноманітних варіантів стратегій. При цьому набір критеріїв має задовольняти таким вимогам, як повнота, ненадмірність, операційність тощо.

Позначимо через $e=\left(e_1;...;e_Q\right)$ *множину локальних критеріїв*, які вибрав СПР для порівняльного аналізу стратегій. Тоді кожній стратегії $s_k\in S$ ставиться у відповідність вектор $E(s_k)=\left(e_1(s_k);...;e_Q(s_k)\right)$, який є кількісним відображенням спектру її якісних характеристик, що виділяються на основі цільового функціонала оцінювання F. Елемент $e_q(s_k)=e_q(F(s_k))=e_q(f_{k1};...;f_{kn})$ вектора $E(s_k)$ являє собою реалізацію q-го критерію якості (кількісна оцінка q-ї якісної характеристики стратегії s_k), $F(s_k)=(f_{k1};...;f_{kn})$ — вектор оцінювання, що відповідає стратегії s_k.

Уведемо також до розгляду множину Λ, складовими якої є вектори пріоритету об’єктів (інформаційних ситуацій, критеріїв якості стратегій тощо), що фігурують у процесі виокремлення оптимальних багатокритеріальних стратегій.

За вибору стратегії СПР доцільно оцінювати її з позиції незбіжних і, зокрема, суперечливих критеріїв. При цьому оптимальні значення цих критеріїв досягаються на різних елементах (стратегіях) з множини S. Це вказує на те, що вибір будь-якої стратегії з множини S, швидше за все, одночасно не забезпечить оптимум усім локальним критеріям. А тому перед СПР постає питання: згідно з яким принципом здійснювати вибір раціональної стратегії, «найкращої» з позиції усіх критеріїв якості. Вихід полягає в тому, щоб удатися до певної схеми компромісу критеріїв для досягнення поставленої цілі та дотримуватися його у виборі раціональної (компромісної) стратегії.

Отже, перед СПР постає задача вибору оптимальної (компромісної) стратегії s_{k_0}, що визначається двома умовами:

1. Стратегія має бути здійсненною, тобто $s_{k_0} \in S$;

2. Стратегія має бути найкращою у плані прийнятого в задачі принципу компромісу з урахуванням множини векторів пріоритету Λ.

Якщо через $(E(s_k);\Lambda)$ позначити сукупну інформацію, що характеризує різні аспекти якості стратегії s_k та визначає важливість тієї чи іншої інформації для прийняття стратегій, то оптимальна (серед компромісних) стратегія має задовольняти умову:

$$s_{k_0}: \ \left(E\left(s_{k_0}\right);\Lambda\right) = opt\{(E(s_k);\Lambda) : s_k \in S\}, \tag{4.1}$$

де символом *opt* позначено відповідний оператор оптимізації.

Оператор *opt* визначає принцип оптимальності, тобто принцип, що встановлює спосіб вибору найкращої стратегії серед множини усіх допустимих. Принцип оптимальності являє собою математичний вираз (математичну модель) прийнятого у задачі принципу компромісу. Конкретну сутність оператора *opt* необхідно вказувати для кожного випадку задачі прийняття рішення.

4.3. КОНЦЕПТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ РОЗВ'ЯЗАННЯ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНИХ ЗАДАЧ

Під час розв'язання багатокритеріальних задач виникає низка специфічних проблем, що мають не формальний (тобто не пов'язаний зі способами обчислювань), а концептуальний характер. З них основна — це вибір принципу оптимальності, який визначає властивості оптимальної стратегії і дає відповідь на основне запитання — в якому аспекті оптимальна стратегія краща за інші стратегії (має над ними перевагу). В моделі (4.1) відповідь на це запитання еквівалентна розкриттю сутності оператора оптимальності *opt*.

Суттєвою відмінністю багатокритеріальних задач від однокритеріальних є те, що для багатокритеріальних є множина різних принципів компромісу та відповідних їм принципів оптимальності, які можуть призвести до різних оптимальних стратегій. Останній факт висуває серйозні вимоги щодо вибору принципу оптимальності.

Розглянемо основні проблеми, пов'язані з розв'язанням багатокритеріальних задач і вибором оптимального рішення.

4.3.1. Визначення області компромісу

У багатокритеріальних задачах прийняття рішень часто виникають протиріччя між деякими критеріями оцінювання якості цих стратегій. Область *S* допустимих (альтернативних) стратегій розпадається на дві множини, що не перетинаються: область згоди $S^{\text{зг}}$ та область компромісу $S^{\text{кп}}\left(S = S^{\text{зг}} \cup S^{\text{кп}}; \varnothing = S^{\text{зг}} \cap S^{\text{кп}}\right)$.

В області згоди $\left(S^{\text{зг}}\right)$ протиріч між критеріями немає, а тому є можливість щодо поліпшення якості стратегії одночасно згідно з усіма критеріями або, в крайньому випадку, без погіршання (зниження) рівня будь-якого критерію. В області компромісу існують протиріччя між деякими критеріями, а тому поліпшення якості стратегії згідно з одними критеріями призводить до погіршання її якості згідно з іншими.

Очевидно, що оптимальна стратегія s_{k_0} може належати тільки області компромісу $\left(s_{k_0} \in S^{\text{кп}}\right)$, оскільки в області узгодженості стратегія може і має поліпшуватися згідно з усіма критеріями. А тому пошук оптимальної стратегії необхідно здійснювати лише в області компромісу $S^{\text{кп}}$. Отже, ми прийшли до проблеми 1 — *виділення області компромісу* $S^{\text{кп}}$ з області допустимих стратегій. Виділення області компромісу $S^{\text{кп}}$, як правило, є першим етапом розв'язання багатокритеріальних задач прийняття рішень. Важливий практичний результат цього етапу — це звуження множини компромісних стратегій і цим самим поліпшення якості стратегій, що приймаються. В окремих випадках оптимальними, з прийнятою для практики точністю, можна вважати стратегії, що складають множину $S^{\text{кп}}$, тобто можна обмежитися вибором в якості оптимальної будь-якої стратегії $s_{k_0} \in S^{\text{кп}}$.

4.3.2. Вибір схеми компромісу та відповідного її принципу оптимальності

Подальший пошук оптимальних стратегій (рішень) в області компромісу можна здійснити тільки на основі певної схеми компромісу. Кількість можливих схем компромісу досить велика, а тому вибір однієї з них є вельми складною концептуальною проблемою.

Вибір схеми компромісу адекватний розкриттю сутності оператора оптимізації *opt* у (4.1). Якщо під час здійснення математичних викладок відслідкувати, щоб відповідні показники мали позитивний інгредієнт, то (4.1) можна записати в такому вигляді:

$$s_{k_0} : \left(E\left(s_{k_0}\right);\ \Lambda\right) = opt\{(E(s_k);\ \Lambda) : s_k \in S\} =$$
$$= opt\left\{(E(s_k); \lambda) : s_k \in S^{\text{КП}}\right\} = \max_{s_k \in S} \varphi^+((E(s_k);\ \Lambda)),$$

де $\varphi^+((E(s_k);\ \Lambda))$ — деяка скалярна функція від вектора критеріальних оцінок $E(s_k)$ та множини пріоритету Λ.

Отже, вибір того чи іншого принципу оптимальності зводить багатокритеріальну задачу до скалярної задачі прийняття рішень і цю проблему часто називають *проблемою скаляризації* (проблема 2). Її розв'язання об'єктивно необхідне для будь-якої багатокритеріальної задачі прийняття рішень, оскільки фактичну реалізацію допускає лише однокритеріальна схема обчислень.

4.3.3. Нормалізація критеріїв

Ця проблема виникає в тих задачах, де локальні критерії якості стратегій (які виділяють ті аспекти наслідків, що мають братися до уваги в разі порівняння різноманітних варіантів стратегій) мають різні одиниці вимірювання або, у разі однорідних економічних показників, різні порядки величин, що їх вимірюють. Необхідно нормалізувати інформацію про економічний об'єкт, тобто привести її до одного, бажано — безрозмірного, масштабу вимірювань. На даний час розроблено велику кількість різних схем нормалізації.

Отже, третя концептуальна проблема — це *вибір методу нормалізації інформації.*

4.3.4. Урахування пріоритету

У багатокритеріальних задачах прийняття рішень локальні критерії якості стратегій, а також інформаційні ситуації, яким властиві ці критерії, мають різну важливість для СПР. Це необхідно врахувати для вибору оптимальної стратегії, віддаючи певну перевагу більш важливим критеріям чи інформаційним ситуаціям. Практично ця проблема зводиться до коригування вибраної схеми компромісу. А тому четвертою концептуальною проблемою є *вибір схеми урахування пріоритету*, а також *встановлення ступеня важливості* тих чи інших об'єктів.

Зазначені вище проблеми є найбільш важливими, але вони не вичерпують усієї низки труднощів з розв'язання багатокритеріальних задач прийняття рішень. Усі вони, окрім першої, носять концептуальний характер. Як відомо, вирішуючи концептуальні проблеми, звичайно доводиться використовувати евристичні процедури різного роду, в яких суттєву роль відведено експертам. Розв'язання такого роду задач бажано проводити на основі наукової аргументації і за умови формалізованого використання евристичних процедур.

Вирішення проблем 4.3.1—4.3.4, а також інших проблем концептуального характеру, робить можливим розв'язання багатокритеріальної задачі прийняття рішень. Реалізація процесу її розв'язання обтяжена новими труднощами, в основному обчислювального характеру, які зумовлені розробленням алгоритму пошуку оптимальної стратегії.

Але центральною проблемою багатокритеріальної задачі прийняття рішень залишається вибір схеми компромісу та відповідного принципу оптимальності.

4.4. СПОСОБИ НОРМАЛІЗАЦІЇ

Нормалізація інформації є досить складною концептуальною проблемою. Вона виникає в усіх багатокритеріальних задачах прийняття рішень (про причини її виникнення йшлося у пункті 4.3.3). Виняток становлять задачі, де в якості принципу компромісу використовується принцип сумарної відносної поступки (пункт 4.7.7.2).

Як і раніше, для кількісної ідентифікації різних аспектів якості стратегії $s_k \in S$ використовуватимемо Q критеріїв. А тому, аналізуючи відповідну стратегію, отримуємо вектор кількісних (критеріальних) характеристик стратегії s_k:

$$E(s_k)=\left(e_1(s_k);\ldots;e_q(s_k);\ldots;e_Q(s_k)\right), \quad k=1,\ldots,m.$$

Ураховуючи, що СПР аналізує m стратегій, які утворюють множину S, отримуємо матрицю кількісних показників різних аспектів їх якості:

$$E=\left(e_q(s_k): k=1,\ldots,m;\ q=1,\ldots,Q\right)=\begin{array}{c} \\ s_1 \\ \ldots \\ s_k \\ \ldots \\ s_m \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & \ldots & e_q & \ldots & e_Q \end{array} \\ \begin{pmatrix} e_1(s_1) & \ldots & e_q(s_1) & \ldots & e_Q(s_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e_1(s_k) & \ldots & e_q(s_k) & \ldots & e_Q(s_k) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e_1(s_m) & \ldots & e_q(s_m) & \ldots & e_Q(s_m) \end{pmatrix} \end{array}.$$

Якщо аналізується q-й аспект (критерій) щодо усіх стратегій СПР, то отримуємо q-й стовпчик матриці E (вектор оцінок стратегій СПР згідно з q-м критерієм якості):

$$E(e_q)=\left(e_q(s_1);\ldots;e_q(s_k);\ldots;e_q(s_m)\right)^T, q=1,\ldots,Q.$$

(Для зручності викладення цей вектор часто подаватимемо у транспонованому вигляді.)

4.4.1. Зміна інгредієнта

Цей метод нормалізації інформації використовується у разі необхідності зміни внутрішньої ознаки інформації — її інгредієнта — на протилежну.

Уведемо позначення: «$\xrightarrow{\text{НОРМ}}$» — операція нормалізації; $e_q(s_k)$ — початковий елемент; $e_q^{\text{Н}}(s_k)$ — нормалізований елемент. Розглянемо два методи нормалізації щодо зміни інгредієнта економічного показника:

1) зміна знака економічного показника $\left(e_q(s_k)\right)^{\pm} \xrightarrow{\text{НОРМ}} \left(e_q^{\text{Н}}(s_k)\right)^{\mp}$, де $e_q^{\text{Н}}(s_k)=-e_q(s_k)$;

2) перехід до оберненого значення економічного показника $\left(e_q(s_k)\right)^{\pm} \xrightarrow{\text{НОРМ}} \left(e_q^{\text{Н}}(s_k)\right)^{\mp}$, де $e_q^{\text{Н}}(s_k)=\dfrac{1}{e_q(s_k)}$, $e_q(s_k)\neq 0$.

4.4.2. Нормалізація зі збереженням одиниць вимірювання (абсолютна нормалізація)

У разі необхідності збереження одиниць вимірювання економічної інформації використовується нормалізація зі збереженням одиниць вимірювання (абсолютна нормалізація). Її називають також *порівняльною* нормалізацією.

Нехай якість стратегій, що утворюють множину $S=(s_1;...;s_m)$, визначається на основі критерію e_q $(q=1,...,Q)$. Отримано вектор оцінок стратегій згідно з q-м критерієм

$$E(e_q)=(e_q(s_1);...;e_q(s_k);...;e_q(s_m))^T,\quad k=1,\dots,m;\quad q=1,..,Q,$$

і нехай $E(e_q)=E^+(e_q)$ (критеріальні оцінки стратегій мають позитивний інгредієнт). Тоді

$$(E(e_q))^+ \xrightarrow{\text{НОРМ}} (E^{\text{Н}}(e_q))^+. \tag{4.2}$$

Запишемо $E^{\text{Н}}(e_q)$ (вектор нормалізованих оцінок стратегій СПР згідно з q-м критерієм якості) у розгорнутому вигляді:

$$E^{\text{Н}}(e_q)=(e_q^{\text{Н}}(s_1);...;e_q^{\text{Н}}(s_k);...;e_q^{\text{Н}}(s_m))^T;\quad q=1,...,Q,$$

де

$$e_q^{\text{Н}}(s_k)=e_q(s_k)-\min_{s_i\in S} e_q(s_i),\quad k=1,...,m. \tag{4.3}$$

Якщо ж $E(e_q)=E^-(e_q)$ (має негативний інгредієнт), то

$$e_q^{\text{Н}}(s_k)=\max_{s_i\in S} e_q(s_i)-e_q(s_k) \tag{4.4}$$

і при цьому

$$(E(e_q))^- \xrightarrow{\text{НОРМ}} (E^{\text{Н}}(e_q))^+.$$

Зауважимо, що абсолютно нормалізовані елементи вимірюються в тих самих одиницях, що й початкові показники ефективності.

4.4.3. Відносна нормалізація

Метод приведення інформації щодо стратегій до безрозмірної нормованої форми базується на понятті «ідеальна» якість стратегій, яку можна задавати у вигляді вектора

$$E^{\text{ідеал}}=(e_1^{\text{ідеал}};...;e_Q^{\text{ідеал}}). \tag{4.5}$$

Використовуючи компоненту $e_q^{\text{ідеал}}$, вектор-стовпчик оцінок стратегій (щодо q-го критерію якості) $E(e_q)$ приводиться до нормованої форми таким чином:

$$E(e_q) \xrightarrow{\text{НОРМ}} E^{\text{Н}}(e_q), \quad q = 1,\ldots,Q,$$

де

$$e_q^{\text{Н}}(s_k) = \frac{e_q(s_k)}{e_q^{\text{ідеал}}}, \quad k = 1,\ldots,m. \tag{4.6}$$

Успішне розв'язання проблеми нормалізації великою мірою залежить від правильного та об'єктивного визначення «ідеальної» якості стратегій. Спосіб визначення ідеального вектора ефективності стратегій і визначає метод відносної нормалізації.

В якості ідеального вектора ефективності стратегій можна використовувати, наприклад, вектор, компонентами якого є максимально можливі значення локальних критеріїв, тобто

$$e_q^{\text{ідеал}} = \left(\max_{s_i \in S} e_1(s_i);\ldots.; \max_{s_i \in S} e_q(s_i);\ldots; \max_{s_i \in S} e_Q(s_i) \right).$$

Тоді нормалізовані згідно з цим методом (часто його, власне, називають *методом відносної нормалізації*) значення показників ефективності обчислюються за формулою

$$e_q^{\text{Н}}(s_k) = \frac{e_q(s_k)}{\max\limits_{S_i \in S} e_1(s_i)}, \; q = 1,\ldots,Q; \; k = 1,\ldots,m.$$

Недоліком такого способу нормалізації є його суттєва залежність від максимально можливого рівня критеріїв, що визначається умовами задачі.

Якщо ж СПР визначає (суб'єктивно) рівні «ідеальної» якості стратегій, задаючи фіксовані величини $e_q^{\text{фікс}}$ $(q = 1,\ldots,Q)$, то у формулі (4.6) покладають

$$e_q^{\text{ідеал}} = e_q^{\text{фікс}}, \quad q = 1,\ldots,Q.$$

Суттєвим недоліком цього методу нормалізації є складність і суб'єктивність щодо визначення величин $e_q^{\text{фікс}}$ $(q = 1,\ldots,Q)$. Це призводить до суб'єктивних нормалізованих оцінок якостей стратегій.

4.4.4. Природна нормалізація

Поєднуючи метод абсолютної нормалізації, що характеризується формулою (4.3), з відносною нормалізацією, ідеальний вектор ефективності (4.5) якої має компоненти

$$e_q^{\text{ідеал}} = \max_{s_i \in S} e_q(s_i) - \min_{s_i \in S} e_q(s_i), \tag{4.7}$$

отримуємо метод *природної нормалізації*. Елемент $e_q^{\text{Н}}(s_k)$ нормалізованого згідно з цим методом вектора $E(e_q)$ обчислюється за формулою

$$e_q^{\text{Н}}(s_k) = \frac{e_q(s_k) - \min\limits_{s_i \in S} e_q(s_i)}{\max\limits_{s_i \in S} e_q(s_i) - \min\limits_{s_i \in S} e_q(s_i)}.$$

Очевидно, що

$$e_q^{\text{Н}}(s_k) \in [0;\, 1], \quad q = 1,\ldots,Q, \quad k = 1,\ldots,m.$$

Природна нормалізація не змінює інгредієнт економічного показника, тобто

$$\big(E(e_q)\big)^{\pm} \xrightarrow{\text{НОРМ}} \big(E^{\text{Н}}(e_q)\big)^{\pm}.$$

4.4.5. Нормалізація Севіджа

Поєднуючи формули (4.4) та (4.7), отримуємо метод *нормалізації Севіджа*. Елемент $e_q^{\text{Н}}(s_k)$ нормалізованого згідно з цим методом вектора $E(e_q)$ обчислюється за формулою

$$e_q^{\text{Н}}(s_k) = \frac{\max\limits_{s_i \in S} e_q(s_i) - e_q(s_k)}{\max\limits_{s_i \in S} e_q(s_i) - \min\limits_{s_i \in S} e_q(s_i)}$$

і при цьому

$$e_q^{\text{Н}}(s_k) \in [0;\, 1], \; q = 1,\ldots,Q, \; k = 1,\ldots,m.$$

Очевидно, що нормалізація Севіджа змінює інгредієнт економічного показника на протилежний:

$$\big(E(e_q)\big)^{\pm} \xrightarrow{\text{НОРМ}} \big(E^{\text{Н}}(e_q)\big)^{\mp}.$$

За своєю суттю нормалізація Севіджа робить дві послідовні операції: 1) змінює інгредієнт показника ефективності; 2) нормалізує інформацію згідно з методом природної нормалізації.

Зауваження 4.1. Нормалізовані згідно з природною нормалізацією чи нормалізацією Севіджа елементи приймають свої значення з проміжка [0; 1] і є безрозмірними, що й зумовлює широке використання їх на практиці.

Зауваження 4.2. За нормалізації елементів функціонала оцінювання його стовпчики розглядаються як окремі об'єкти і нормалізуються незалежно один від одного згідно з обраним методом.

Приклад 4.1. СПР аналізує сім альтернативних стратегій з позиції цільового функціонала оцінювання (прибутки в УГО). Стратегія має прийматися на основі двох критеріїв оцінки її якостей: Байєса та мінімального середньоквадратичного відхилення. Суб'єктом керування обчислено оцінки Байєса та середньоквадратичні відхилення для цих стратегій, поданих у вигляді векторів:

$$B=(136;\ 115;\ 139{,}5;\ 129;\ 80;\ 150;\ 118{,}5)^T,$$

$$\sigma=(18;\ 14{,}5;\ 12{,}4;\ 11{,}7;\ 13{,}8;\ 14{,}85;\ 11)^T.$$

Необхідно нормалізувати отриману інформацію і побудувати нормалізовану матрицю.

Розв'язання. Покладаючи $e_1(s_k)=B(s_k)$, $e_2(s_k)=\sigma(s_k)$, отримуємо матрицю

$$E=\begin{pmatrix} B(s_1) & \sigma(s_1) \\ \dots & \dots \\ B(s_7) & \sigma(s_7) \end{pmatrix}$$

та вектори

$$E(s_k)=(B(s_k);\sigma(s_k)),\quad k=1,\dots,m;$$

$$E(e_1)=(B(s_1);\dots;B(s_7))^T,$$

$$E(e_2)=(\sigma(s_1);\dots;\sigma(s_7))^T.$$

Оскільки елементи векторів B і σ різняться на порядок, то їх необхідно нормалізувати. З урахуванням того, що вектор B має позитивний інгредієнт $\left(B = B^{+}\right)$, скористаємося методом природної нормалізації:

$$e_1^{\text{Н}}(s_1) = B^{\text{Н}}(s_1) = \frac{B(s_1) - \min\limits_{S_i \in S} B(s_i)}{\max\limits_{s_i \in S} B(s_i) - \min\limits_{s_i \in S} B(s_i)} = \frac{136 - 80}{150 - 80} = 0{,}8;$$

$$e_1^{\text{Н}}(s_2) = \frac{115 - 80}{150 - 80} = 0{,}45; \qquad e_1^{\text{Н}}(s_3) = 0{,}85;$$

$$e_1^{\text{Н}}(s_4) = 0{,}7; \qquad e_1^{\text{Н}}(s_5) = 0{,}0; \qquad e_1^{\text{Н}}(s_6) = 1{,}0; \qquad e_1^{\text{Н}}(s_7) = 0{,}55,$$

тобто

$$E(e_1) = E(B) \xrightarrow{\text{НОРМ}} E^{\text{Н}}(B) = (0{,}8; 0{,}45; 0{,}85; 0{,}7; 0{,}0; 1{,}0; 0{,}55)^T.$$

Оскільки $\sigma = \sigma^{-}$, то його нормалізуємо за допомогою методу нормалізації Севіджа:

$$e_2^{\text{Н}}(s_1) = \sigma^{\text{Н}}(s_1) = \frac{\max\limits_{s_i \in S} \sigma(s_i) - \sigma(s_k)}{\max\limits_{s_i \in S} \sigma(s_i) - \min\limits_{s_i \in S} \sigma(s_i)} = \frac{18 - 18}{18 - 11} = 0{,}0;$$

$$e_2^{\text{Н}}(s_2) = \frac{18 - 18}{18 - 11} = 0{,}5; \qquad e_2^{\text{Н}}(s_3) = 0{,}8;$$

$$e_2^{\text{Н}}(s_4) = 0{,}9; \qquad e_2^{\text{Н}}(s_5) = 0{,}6; \qquad e_2^{\text{Н}}(s_6) = 0{,}45; \qquad e_2^{\text{Н}}(s_7) = 1{,}0,$$

тобто

$$E(e_2) = E(\sigma) \xrightarrow{\text{НОРМ}} E^{\text{Н}}(\sigma) = (0{,}0\,; 0{,}5\,; 0{,}8\,; 0{,}9\,; 0{,}6\,; 0{,}45\,; 1{,}0)^T.$$

Будуємо матрицю:

$$E^{\text{Н}} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}45 & 0{,}85 & 0{,}7 & 0{,}0 & 1{,}0 & 0{,}55 \\ 0{,}0 & 0{,}5 & 0{,}8 & 0{,}9 & 0{,}6 & 0{,}45 & 1{,}0 \end{pmatrix}^T.$$

Зазначимо, що матриця нормалізованої інформації $E^{\text{Н}}$ має позитивний інгредієнт.

4.5. СПОСОБИ ВІДОБРАЖЕННЯ ПРІОРИТЕТУ

Як вже зазначалось у пункті 4.4.4, локальні об’єкти O_l^k $(l = 1,\ldots,L)$ у межах *k*-ї групи однорідних об’єктів (інформаційних ситуацій, локальних критеріїв оцінки стратегій тощо) з точки зору СПР мають різну пріоритетність (різний ступінь важливості) в процесі визначення оптимальної стратегії багатокритеріальної задачі. Найпоширенішими моделями відображення пріоритетності об’єктів є такі:

- *ряд пріоритету* (RI);
- *ряд бінарних відношень пріоритету* (RV);
- *вектор вагових коефіцієнтів пріоритету* (U).

4.5.1. Ряд пріоритету

На основі вербальної (чи статистичної) інформації здійснюється суто якісне відображення пріоритету щодо однорідних об’єктів O_l^k $(l = 1,..., L;\ k = 1,..., K)$ на основі нестрогого співвідношення пріоритетності [34] «💻» (не гірше ніж):

$$O_{i_1}^k \text{💻} O_{i_2}^k \text{💻} \ldots \text{💻} O_{i_L}^k$$

і будується *ряд пріоритету*

$$RI^k = \left(O_{i_1}^k;...;O_{i_l}^k;...;O_{i_L}^k\right), \tag{4.8}$$

де: $O_{i_1}^k$ — об’єкт з найвищим пріоритетом; $\theta_{i_L}^k$ — об’єкт з найнижчим пріоритетом у межах k-ї групи однорідних об’єктів $(k = 1,..., K)$; K — кількість груп однорідних об’єктів. Наприклад, $K = 3$ і при цьому групу однорідних об’єктів з номером $k = 1$ складають функціонали оцінювання, з номером $k = 2$ — інформаційні ситуації з номером, $k = 3$ — локальні критерії оцінки якості стратегій.

4.5.2. Ряд бінарних відношень пріоритету

Нехай ряд пріоритету побудований для k-ї групи однорідних об’єктів. Тоді, за наявності (невеликої за обсягом) додаткової інформації про об’єкти, що досліджуються, СПР може здійснити кількісне уточнення ряду (4.8), яке подається у вигляді:

$$RV^k = \left(v_{i_1}^k;...;v_{i_l}^k;...;v_{i_L}^k\right), \tag{4.9}$$

де $v_{i_l}^k$ $(l = 1,..., L)$ — числові оцінки результатів попарних порівнянь досліджуваних об’єктів. Очевидно, що будь-яка компонента

$v_{i_l}^k$ вектора RV^k, упорядкованого згідно з рядом пріоритету RI^k (4.8), задовольняє умову:

$$v_{i_l}^k \ge 1, \qquad l = 1, \ldots, L.$$

Якщо об'єкти $O_{i_l}^k$, $O_{i_{l+1}}^k$ рівнозначні $\left(O_{i_l}^k \sim O_{i_{l+1}}^k\right)$, то відповідна компонента $V_{i_l}^k = 1.$ Для зручності обчислень покладається $v_{i_L}^k = 1.$

4.5.3. Вектор вагових коефіцієнтів пріоритету

Компоненти $u_{i_l}^k \ (l = 1, \ldots, L)$ вектора вагових коефіцієнтів для *k*-ї групи однорідних об'єктів

$$U^k = \left(u_{i_1}^k, \ldots, u_{i_l}^k, \ldots, u_{i_L}^k\right), \quad k = 1, \ldots, K \tag{4.10}$$

задовольняють умови нормування:

$$0 \le u_{i_l}^k \le 1, \qquad\qquad l = 1, \ldots, L,$$

$$\sum_{l=1}^{L} u_{i_l}^k = 1.$$

Сутність компонентів вектора вагових коефіцієнтів: $u_{i_l}^k$ — це ваговий коефіцієнт, що визначає відносну перевагу i_l-го об'єкта *k*-ї однорідної групи над рештою об'єктів.

Якщо локальні об'єкти $O_l^k \ (l = 1, \ldots, L)$ впорядковано згідно з рядом пріоритету RI^k, то очевидно, що для елементів вектора U^k мають місце співвідношення

$$u_{i_l}^k \ge u_{i_{l+1}}^k, \quad l = 1, \ldots, L-1.$$

Крім того, компоненти векторів RV^k та U^k зв'язані співвідношеннями

$$v_{i_l}^k = \frac{u_{i_l}^k}{u_{i_{l+1}}^k}; \qquad\qquad u_{i_l}^k = \frac{\prod_{l=1}^{L} v_{i_l}^k}{\sum_{l=1}^{l} \prod_{k=1}^{L} v_{i_l}^k}.$$

На практиці процедури побудови векторів RI^k, RV^k та U^k здійснюються в такому порядку: спочатку задається вектор RI^k, потім будується вектор RV^k і лише після цього на основі векторів RI^k та RV^k будується вектор вагових коефіцієнтів U^k $(k=1,\ldots,K)$.

Якщо для *k*-ї групи однорідних об'єктів побудовано вектор RI^k і між його елементами має місце строге співвідношення пріоритетності «👌» (тобто $O_{i_l}^k$ 👌 $O_{i_{l+1}}^k$, для усіх $l=1,\ldots,L-1$), то елементи вектора вагових коефіцієнтів пріоритету можна обчислити згідно з методикою, запропонованою Фішберном [32, 36, 107]. За Фішберном, оцінки вагових коефіцієнтів $\hat{u}_{i_l}^k$ локальних об'єктів у даній ситуації мають утворювати спадну арифметичну прогресію з елементами

$$\hat{u}_{i_l}^k = \frac{2(L-l+1)}{L(L+1)}; \qquad u_{i_l}^k \approx \hat{u}_{i_l}^k.$$

Якщо СПР на основі наявної в нього інформації може стверджувати, що важливість *l*-го об'єкта *k*-ї групи однорідних об'єктів вища за сумарну важливість об'єктів, які в ряді пріоритету RI^k знаходяться справа відносно нього, тобто що

$$O_{i_l}^k \text{ 👌 } O_{i_{l+1}}^k + \ldots + O_{i_L}^k, \qquad l=1,\ldots,L,$$

то, за Фішберном [32, 36, 107], оцінки вагових коефіцієнтів пріоритету мають утворювати спадну геометричну прогресію з елементами

$$\hat{u}_{i_l}^k = \frac{2^{L-l}}{2^L-1}; \qquad u_{i_l}^k \approx \hat{u}_{i_l}^k.$$

У випадку, коли СПР може вказати прийнятні (для нього) інтервали, яким мають належати вагові коефіцієнти пріоритету локальних об'єктів, тобто побудувати співвідношення

$$\alpha_l^k \le u_l^k \le \beta_l^k, \qquad l=1,\ldots,L,$$

то, згідно з методикою, запропонованою Фішберном [36], оцінки вагових коефіцієнтів обчислюються за формулою

$$\hat{u}_l^k = \alpha_l^k + \frac{1-\sum_{j=1}^{L}\alpha_j^k}{\sum_{j=1}^{L}\left(\beta_j^k-\alpha_j^k\right)}\left(\beta_l^k-\alpha_l^k\right); \qquad u_l^k \approx \hat{u}_l^k, \qquad l=1,\ldots,L. \tag{4.11}$$

Як це випливає з формули (4.11), для її використання немає потреби в попередній побудові ряду бінарних відношень пріоритету.

4.6. УРАХУВАННЯ ПРІОРИТЕТУ

Виділяють два принципово відмінні підходи до урахування пріоритету локальних об'єктів у багатокритеріальних задачах прийняття рішень:

- принцип *жорсткого врахування* пріоритету;
- принцип *гнучкого врахування* пріоритету.

4.6.1. Принцип жорсткого врахування пріоритету

Цей принцип базується на тому, що однорідні локальні об'єкти розміщуються відповідно до їх важливості в ряді пріоритету (для *k*-ї групи):

$$RI^k = \left(O_{i_1}^k;...;O_{i_l}^k;...;O_{i_L}^k\right).$$

На основі ряду пріоритету однорідної групи об'єктів, яка має, в свою чергу, найвищий пріоритет, здійснюється пошук оптимальної стратегії (стратегій) згідно з принципом послідовної оптимізації (пункт 4.7.4.1).

Перевагою методу жорсткого пріоритету є те, що він потребує лише впорядкування об'єктів однорідної групи у вигляді ряду пріоритету RI^k, а не визначення кількісних характеристик ряду пріоритету RV^k і вектора вагових коефіцієнтів U^k.

Суттєвим недоліком принципу жорсткого пріоритету є те, що він практично віддає необмежену перевагу найбільш важливому об'єкту відповідної однорідної групи об'єктів.

4.6.2. Принцип гнучкого урахування пріоритету

Цей принцип вимагає обов'язкового визначення кількісних оцінок компонентів векторів RV^k та U^k, що дає змогу більш «справедливо» врахувати «інтереси» усіх об'єктів *k*-ї однорідної групи. Практична реалізація принципу гнучкого пріоритету зводиться до трансформації простору однорідних об'єктів, тобто до відповідної зміни масштабу щодо кожного об'єкта (який розглядається як координата у відповідному просторі однорідних об'єктів). Після трансформації простору замість множини однорідних об'єктів *k*-ї групи $O^k = \left(O_1^k;...;O_l^k;...;O_L^k\right)$ розглядатиметься пара множин:

$$\left\{O^k;U^k\right\} = \left\{\left(O_1^k;u_1^k\right);....;\left(O_l^k;u_l^k\right);....;\left(O_L^k;u_L^k\right)\right\}.$$

На практиці найчастіше використовують два способи гнучкого врахування пріоритету:

1) *лінійний,* коли

$$\left(O_l^k; u_l^k\right) = O_l^k \cdot u_l^k, \quad l = 1,\dots,L,$$

де $O_l^k \cdot u_l^k$ — символічне подання операції множення величини u_l^k на кількісні показники, що характеризують об'єкт O_l^k;

2) *показниковий,* коли

$$\left(O_l^k; u_l^k\right) = \left(O_l^k\right)^{u_l^k}, \quad l = 1,\dots,L,$$

де $\left(O_l^k\right)^{u_l^k}$ — символічне подання операції піднесення до степеня кількісних показників, що характеризують об'єкт O_l^k.

Після цього здійснюється вибір оптимальної стратегії на основі одного з можливих принципів оптимальності (див. пункт 4.7.4), але вже у трансформованому просторі об'єктів.

4.7. ПРИЙНЯТТЯ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНИХ РІШЕНЬ

4.7.1. Побудова та геометрична інтерпретація області компромісів у просторі критеріїв

Розглянемо Q-вимірний евклідовий простір $\Re^Q$ векторів $E(s) = (e_1(s);\dots;e_Q(s))$, що утворюються реалізаціями локальних критеріїв якості для кожної стратегії $(s \in S)$. На координатних осях при цьому відкладаються значення реалізацій цих критеріїв.

Позначимо через Ω_E відображення множини альтернативних стратегій S (у загальному випадку можна вважати, що вона є неперервною) в простір $\Re^Q$ критеріїв якості. Область утворюють можливі (допустимі) значення вектора локальних критеріїв, а тому математичну модель оптимізаційної задачі (4.1) у випадку, коли приймається одноцільове рішення, можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} s_{k_0} : \left(E\left(s_{k_0}\right);\lambda\right) = opt\left\{\left(E\left(s_k\right);\lambda\right) : \ s_k \in S\right\} = \\ = opt\left\{\left(E\left(s_k\right);\lambda\right) : \ E\left(s_k\right) \in \Omega_E\right\}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Ураховуючи, що $S = S^{\text{ЗГ}} \cup S^{\text{КП}}$, а також що шукана оптимальна стратегія $s_{k_0} \in S^{\text{КП}}$ (незалежно від обраного принципу компромісу), побудуємо відображення областей $S^{\text{ЗГ}}$ і $S^{\text{КП}}$ у просторі критеріїв $\Re^Q$ і виділимо відповідні області $\Omega_E^{\text{ЗГ}}$ і $\Omega_E^{\text{КП}}$ — області згоди та компромісу у просторі критеріїв. Зв'язок між областями $S^{\text{КП}} \to \Omega_E^{\text{КП}}$ та $S^{\text{ЗГ}} \to \Omega_E^{\text{ЗГ}}$ продемонструємо на прикладі двовимірного простору $\Re^2$ (задача з двома критеріями якості стратегій), якому належать вектори $E(s) = (e_1(s); e_2(s))$, $s \in S$. Цей випадок допускає таку геометричну інтерпретацію. Нехай область Ω_E допустимих значень вектора $E(s)$ є опуклою, замкнутою і їй відповідає заштрихована частина рис. 4.1.

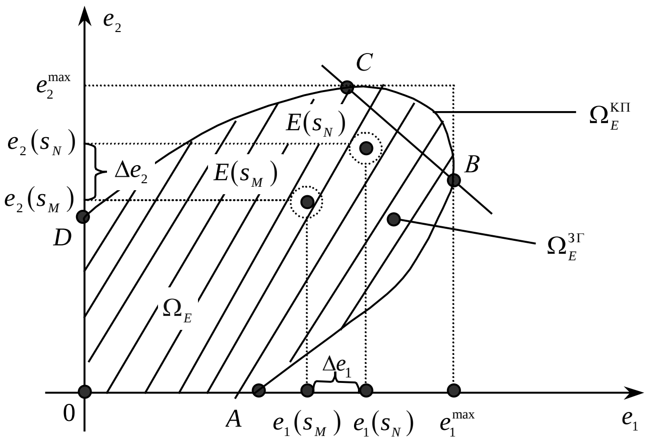


Рис. 4.1. Побудова областей компромісу та згоди

Виберемо точку $E(s_{\text{М}}) \in \Omega_E$, яка є для даної області внутрішньою (тобто входить в Ω_E з деяким своїм околом). Оскільки $E(s_{\text{М}})$ є внутрішньою точкою, то в області Ω_E знайдеться (не обов'язково внутрішня для області Ω_E) точка $E(s_N)$ така, що $E(s_N) \succ E(s_{\text{М}})$. Це означає, що у випадку, коли $E = E^+$, повинні мати місце співвідношення

$$e_q^+(S_N) \geq e_q^+(S_M), \quad q = 1, ..., Q$$

і хоча б для одного критерію (наприклад, e_{q_0}, тобто за $q = q_0$) повинна мати місце строга нерівність $e_{q_0}^+(s_N) > e_{q_0}^+(s_M)$ (якщо $E = E^-$, то $e_q^-(s_N) \leq e_q^-(s_M)$, $q = 1, ..., Q$, $e_{q_0}^-(s_N) < e_{q_0}^-(s_M)$).

Отже, будь-яка внутрішня точка області Ω_E є *покращуваною*. А тому *непокращувані* точки можуть знаходитися лише на границі області Ω_E. Наведені міркування дають змогу зробити висновок, що область компромісу $\Omega_E^{\text{КП}}$ становить частину границі області Ω_E.

На рис. 4.1 точка $E(s_N) \succ E(s_M)$, (оскільки $e_1(s_N) - e_1(s_M) = \Delta e_1 > 0$; $e_2(s_N) - e_2(s_M) = \Delta e_2 > 0$). Непокращувані точки складають $\cup BC$, яка є частиною границі області Ω_E, тобто $\Omega_E^{\text{КП}} = \cup BC$. Область $\Omega_E^{\text{ЗГ}}$ збігається з рештою границі та внутрішньою частиною області Ω_E:

$$\Omega_E^{\text{ЗГ}} = \Omega_E - \cup BC.$$

У точці B досягає свого максимального значення локальний критерій e_1, а в точці C — локальний критерій e_2.

Відповідно до зазначеного раніше оптимальне значення $E(s_{k_0}) = (e_1(s_{k_0}); e_2(s_{k_0}))$ вектора критеріїв двокритеріальної одноцільової задачі прийняття рішення — це точка, що належить дузі $\cup BC$ $(E(s_{k_0}) \in \cup BC)$. Вибір конкретної точки дуги BC (оптимальної стратегії) залежить від принципу компромісу, який з позиції СПР є справедливим для відповідної ситуації прийняття рішення.

4.7.2. Апроксимація області компромісу

Проблема побудови області компромісу $S^{\text{КП}}$ у дискретних задачах прийняття рішень полягає в недостатньому обсязі необхідної інформації. При цьому (часто) відсутні залежності, на основі яких можна було б її згенерувати (поповнити). Один з підходів до побудови множини, що апроксимує $S^{\text{КП}}$, полягає у порівнянні між собою векторів $E(s_k)\ (k = 1, ..., m)$, виділяючи при цьому у множину $S^{\text{ПОК}}$ стратегії, що покращуються (стратегія s_l покращується стратегією s_k, якщо $E(s_k) \succ E(s_l)$). Одночасно в множину $S^{\text{НПК}}$ виділяються стратегії, що не покращуються. Тоді множину $S^{\text{НПК}}$ можна використовувати як наближення (апроксимацію) області $S^{\text{КП}}$, тобто вважати, що $S^{\text{НПК}} \approx S^{\text{КП}}$.

Зауваження 4.3. Множину $S^{\text{НПК}}$ називають також *множиною Паретто*. В дискретних задачах прийняття рішень може мати місце ситуація, коли $S^{\text{НПК}} = S,$ тобто вся множина альтернативних стратегій утворена з непокращуваних стратегій.

Для апроксимації області компромісу в просторі критеріїв скористаємося лінійною функцією (Q-вимірною гіперплощиною). Реалізацію процесу побудови *апроксимуючої (опорної) гіперплощини* можна здійснити згідно з таким двохкроковим алгоритмом.

Нехай $E = E^{+}$.

Крок 1. Для q-го критерію e_q визначаємо його максимальне щодо множини стратегій значення

$$e_q^{\max} = e_q\left(s_{k_q}\right) = \max_{s_k \in S} e_q(s_k), \quad q = 1,\dots,Q \tag{4.13}$$

і фіксуємо номер k_q стратегії, на якій досягається цей максимум.

Крок 2. Будується опорна гіперплощина, що проходить через точки

$$e_q(s_{k_q}) = (e_1(s_{k_q});\dots;e_q(s_{k_q});\dots;e_Q(s_{k_q})), \quad q = 1,\dots,Q.$$

Рівняння апроксимуючої гіперплощини знаходиться шляхом розкриття визначника:

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_Q & 1 \\ e_1(s_{k_1}) & e_2(s_{k_1}) & \dots & e_Q(s_{k_1}) & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_1(s_{k_Q}) & e_2(s_{k_Q}) & \dots & e_Q(s_{k_Q}) & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{4.14}$$

де $e_1,\dots,e_Q$ — змінні, що набувають своїх значень на відповідних координатних осях.

Після розкриття визначника у лівій частині рівняння (4.14) шляхом зведення подібних доданків і введення відповідних позначень отримуємо лінійне рівняння:

$$a_1 e_1 + \dots + a_Q e_Q + \beta = 0. \tag{4.15}$$

На рис. 4.1 геометричним утіленням опорної гіперплощини є пряма BC, на рис. 4.4 — пряма $E(s_6)E(s_7)$.

Виходячи зі здійсненої побудови, доходимо висновку, що множину $\Omega_E^{\text{КП}}$ і оптимальний розв’язок багатокритеріальної задачі слід відшукувати серед точок, що лежать «над» опорною гіперплощиною.

Для прийняття багатокритеріальних рішень у задачах з неперервною областю допустимих стратегій апроксимацію області компромісу $\Omega_E^{\text{КП}}$ можна здійснити аналогічним чином.

Зауваження 4.4. Якщо $E = E^-$, то для побудови опорної гіперплощини використовуються величини $e_q^{\min} = \min\limits_{s_k \in S} e_q(s_k)$. Тоді множина компромісу $\Omega_E^{\text{КП}}$ знаходиться «під» опорною площиною.

Приклад 4.2. Виходячи з умови прикладу 4.1 побудувати: а) множину Паретто для альтернативних стратегій СПР (множину непокращуваних стратегій); б) опорну гіперплощину, що апроксимує область компромісу $\Omega_E^{\text{КП}}$.

Розв'язування. а) Оскільки $\sigma = \sigma^-$, то для зручності викладок перейдемо до позитивного інгредієнта:

$$\sigma^- \xrightarrow{\text{НОРМ}} \left(-\sigma^-\right)^+ = E^+(\sigma) = (-18; -14{,}5; -12{,}4; -11{,}7; -13{,}8; -14{,}85; -11)^T.$$

Розглянемо вектори стратегій:

$$E^+(s_1) = (136; -18);\ \ E^+(s_2) = (115;\ -14{,}5);\ \ E^+(s_3) = (139{,}5;\ -12{,}4);$$

$$E^+(s_4) = (129;\ -11{,}7);\ \ E^+(s_5) = (80;\ -13{,}8);\ \ E^+(s_6) = (150;\ -14{,}85);$$

$$E^+(s_7) = (118{,}5;\ -11).$$

Оскільки $E_3^+ \succ E_1^+$; $E_3^+ \succ E_2^+$; $E_3^+ \succ E_5^+$; $E_4^+ \succ E_7^+$; $E_6^+ \succ E_1^+$; $E_7^+ \succ E_2^+$; $E_7^+ \succ E_5^+$, то доходимо висновку, що $S^{\text{НПК}} = \{E_3; E_4; E_6; E_7\}$.

Побудована $S^{\text{НПК}}$ збігається з множиною стратегій, що визначає $\Omega_E^{\text{КП}}$ у прикладі 4.4 (рис. 4.4).

Аналогічний результат отримуємо, використовуючи нормалізовану інформацію.

б) Ураховуючи, що

$$e_1^{\max} = e_1(s_6) = 150 = B_6^+; \qquad e_2^{\max} = e_1(s_7) = -11 = -\sigma_7^-,$$

визначаємо рівняння опорної гіперплощини:

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & 1 \\ 150 & -14{,}85 & 1 \\ 118{,}5 & -11 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи отриманий визначник, маємо:

$$-3{,}85e_1-31{,}5e_2+109{,}725=0.$$

Оскільки $E=E^+$, то області $\Omega_E^{\text{КП}}$ відповідають точки, що лежать «над» опорною гіперплощиною. Це означає, що точки з $\Omega_E^{\text{КП}}$ і початок координат лежать по різні сторони відносно опорної гіперплощини. Ці точки мають додатне відхилення [52] від гіперплощини.

Нагадаємо: коли опорна гіперплощина задається рівнянням (4.15), то відхилення точки $E(s^*)=(e_1(s^*);...;e_Q(s^*))$ від цієї площини обчислюється за формулою

$$\delta(E(s^*))=\mu a_1e_1(s^*)+...+\mu a_Qe_Q(s^*)+\mu b, \qquad (4.16)$$

де $\mu=\pm\dfrac{1}{\sqrt{a_1^2+...+a_Q^2}}$ — нормуючий множник, який береться зі знаком, що є протилежним до знака вільного члена рівняння гіперплощини.

У нашому випадку вільний член рівняння опорної гіперплощини $b=109{,}725>0$, а тому

$$\mu=-\frac{1}{\sqrt{3{,}85^2+31{,}5^2}}=\frac{1}{\sqrt{1007{,}0725}}\approx-0{,}0315.$$

Отже,

$$\delta\left(E\left(s^*\right)\right)=0{,}121e_1\left(s^*\right)+0{,}992e_2\left(s^*\right)-3{,}456.$$

Підставляючи в отримане співвідношення (по черзі) координати векторів стратегій $E(s_k)$, $k=1,...,7$, переконуємося, що

$$\delta(E(s_1))=-4{,}856;\quad \delta(E(s_2))=-3{,}925;\quad \delta(E(s_3))=1{,}123;$$

$$\delta(E(s_4))=0{,}0776;\quad \delta(E(s_5))=-7{,}4656;\quad \delta(E(s_6))=0;\quad \delta(E(s_7))=0.$$

Згідно з викладеним, апроксимацією $\Omega_E^{\text{КП}}$ є множина точок $E(s_3)$, $E(s_4)$, $E(s_6)$ та $E(s_7)$.

Якщо скористатися нормалізованою інформацією щодо векторів стратегій, то, враховуючи, що

$$e_1^{\max}=e_1^{\text{Н}}(s_6)=1;\ \ E_1^{\max}\left(s_6\right)=\left(1{,}0;\,0{,}45\right);\ \ e_2^{\max}=e_2^{\text{Н}}(s_7)=1;$$
$$E_2^{\max}\left(s_7\right)=\left(0{,}55;\,1{,}0\right),$$

згідно з 4.14 отримуємо рівняння опорної гіперплощини:

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & 1 \\ 1 & 0{,}45 & 1 \\ 0{,}55 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad => \quad -0{,}55e_1 - 0{,}45e_2 + 0{,}7525 = 0.$$

Величини відхилень точок (що відповідають векторам стратегій) від опорної гіперплощини обчислюються за допомогою формули

$$\delta\left(E^{\text{Н}}\left(s^*\right)\right) = 0{,}774e_1^{\text{Н}}\left(s^*\right) + 0{,}633e_2^{\text{Н}}\left(s^*\right) - 1{,}059.$$

Підставляючи в отримане співвідношення координати нормалізованих векторів стратегій

$$E^{\text{Н}}(s_1) = (0{,}8;\ 0{,}0);\ \ E^{\text{Н}}(s_2) = (0{,}45;\ 0{,}5);\ \ E^{\text{Н}}(s_3) = (0{,}85;\ 0{,}8);$$
$$E^{\text{Н}}(s_4) = (0{,}7;\ 0{,}9);\ \ E^{\text{Н}}(s_5) = (0{,}0;\ 0{,}6);\ \ E^{\text{Н}}(s_6) = (1{,}0;\ 0{,}45);$$
$$E^{\text{Н}}(s_7) = (0{,}55;\ 1{,}0),$$

отримуємо, що

$$\delta\left(E^{\text{Н}}(s_1)\right) = -0{,}440;\ \ \delta\left(E^{\text{Н}}(s_2)\right) = -0{,}394;\ \ \delta\left(E^{\text{Н}}(s_3)\right) = 0{,}105;$$
$$\delta\left(E^{\text{Н}}(s_4)\right) = 0{,}525;\ \ \delta\left(E^{\text{Н}}(s_5)\right) = -0{,}679;\ \ \delta\left(E^{\text{Н}}(s_6)\right) = 0;\ \ \delta\left(E^{\text{Н}}(s_7)\right) = 0.$$

Як бачимо, множина $\Omega_E^{\text{КП}}$, як і в попередніх випадках, апроксимується точками, яким відповідають стратегії s_3, s_4, s_6, s_7.

4.7.3. Схеми компромісу

У літературі з теорії прийняття рішень [45, 56, 92, 103, 104, 107] описується низка різних схем компромісу щодо критеріїв прийняття одноцільових рішень. Вибір конкретної схеми компромісу певною мірою залежить від принципу (способу) врахування пріоритетів, установлених СПР щодо різних об'єктів, які фігурують у процесі прийняття рішень.

Залежно від принципу врахування пріоритету виділяють:

- схеми компромісу за жорсткого врахування пріоритету;
- схеми компромісу за гнучкого врахування пріоритету.

4.7.4. Компроміси за жорсткого врахування пріоритету

Компроміси за жорсткого врахування пріоритету (або *принцип жорсткого пріоритету*) базуються на тому, що локальні критерії розташовуються згідно з їхньою важливістю у ряд пріоритету

$$RI^E = (e_{i_1};...;e_{i_q};...;e_{i_Q}),$$

де i_q — порядковий номер локального критерію, що має q-й рівень важливості. На основі ряду пріоритету здійснюється *послідовна оптимізація* відповідно до локальних критеріїв.

4.7.4.1. Принцип послідовної оптимізації

Сутність принципу полягає в тому, що він реалізується на основі жорсткого врахування пріоритету і при цьому не допускається підвищення рівнів менш важливих критеріїв оцінки якості стратегій, якщо це викликає хоча б незначне зниження рівня більш важливого критерію з ряду пріоритету. Реалізацію цього принципу опишемо у вигляді п'ятикрокового алгоритму (вважається, що $E = E^+$).

Крок 1. Згідно з рядом пріоритету вибирається найважливіший e_{i_1} локальний критерій і для нього відшукується оптимум. Знайдене (оптимальне) значення фіксується і виділяється стратегія чи множина оптимальних стратегій $S_{i_1}^{\text{опт}}$, на якій реалізується це оптимальне значення найважливішого критерію.

Крок 2. Якщо множина $S_{i_1}^{\text{опт}}$ утворена лише однією (оптимальною) стратегією, то на цьому процес послідовної оптимізації затверджується.

Крок 3. Якщо ж $S_{i_1}^{\text{опт}}$ включає не менш двох (оптимальних та еквівалентних згідно з найважливішим критерієм) стратегій, то знайдене оптимальне значення $e_{i_1}^{\max}$ найважливішого критерію фіксується у вигляді додаткового обмеження, за якого (тобто на множині $S_{i_1}^{\text{опт}}$) відшукується оптимум відповідно до другого за важливістю критерію e_{i_2}. Будується звужена множина оптимальних згідно з критеріями e_{i_1} та e_{i_2} стратегій $S_{i_1 i_2}^{\text{опт}}$.

Крок 4. Якщо $S_{i_1 i_2}^{\text{опт}}$ містить одну стратегію, то процес затверджено. В іншому випадку ($S_{i_1 i_2}^{\text{опт}}$ складається не менше ніж з двох стратегій) переходимо до оптимізації згідно з критерієм e_{i_3} за фіксованих оптимальних значень $e_{i_1}^{\max}$ та $e_{i_2}^{\max}$.

Крок 5. Процес триває, допоки будуть перебрані всі локальні критерії або в множині оптимальних стратегій залишиться лише одна стратегія.

Як бачимо, згідно з принципом послідовної оптимізації здійснюється поступове звуження області стратегій, що завжди приводить до єдиної (оптимальної) стратегії чи підмножини (оптимальних) стратегій. Але в багатьох практичних задачах його використання недоцільне, оскільки оптимізація за першим (найважливішим) критерієм найчастіше приводить до єдиної (оптимальної) стратегії, тобто, по суті, розв'язання багатокритеріальної задачі зводиться до оптимізації згідно з одним (найважливішим) критерієм без урахування решти критеріїв.

4.7.4.2. Принцип виділення найважливішого критерію

Тут з множини локальних критеріїв якості стратегій вибирається найважливіший (згідно з рядом пріоритету) — e_{i_1}. Щодо решти критеріїв, то накладається вимога про обмеженість знизу (чи зверху) їхніх рівнів, тобто рівні їхніх кількісних значень не повинні бути меншими (чи більшими) певних (зафіксованих) значень $e_{i_q}^{\text{фікс}}$, $q = 2,..., Q$. У результаті багатокритеріальна (векторна) задача прийняття рішення у випадку, коли $E = E^{+}$, зводиться до одноцільової (скалярної):

$$s_{k_0} : (E(s_{k_0});\ RI^E) = opt\left\{\left(E(s_k);\ RI^E\right) : E(s_k) \in \Omega_E^{\text{фікс}}\right\} = \max_{s_k \in S^{\text{фікс}}} e_{i_1}(s_k),$$

де $\Omega_E^{\text{фікс}}$, $S^{\text{фікс}}$ — частини відповідних областей компромісу, що відповідають умовам:

$$e_{i_q}(s_k) \geq e_{i_q}^{\text{фікс}}, \quad q = 2,..., Q; \quad k = 1,..., m.$$

Якщо ж $E = E^{-}$, то

$$s_{k_0} : (E(s_{k_0});\ RI^E) = opt\left\{\left(E(s_k);\ RI^E\right) : E(s_k) \in \Omega_E^{\text{фікс}}\right\} = \min_{s_k \in S^{\text{фікс}}} e_{i_1}(s_k),$$

де множини $\Omega_E^{\text{фікс}}$, $S^{\text{фікс}}$ складаються з елементів відповідних областей компромісу, що задовольняють умовам:

$$e_{i_q}(s_k) \leq e_{i_q}^{\text{фікс}}, \quad q = 2,..., Q; \quad k = 1,..., m.$$

4.7.4.3. Принципи послідовної поступки

Принцип послідовної оптимізації може дати непогані результати в разі використання квазіоптимального підходу. Відповідно до цього підходу на кожному етапі послідовної оптимізації здійснюється *квазіоптимізація*, тобто пошук не єдиного точного оптимуму згідно з локальним критерієм якості (єдиної стратегії), а деякої підмножини стратегій, що є «близькими» до оптимальної (тобто розширення множини оптимальних стратегій). При цьому рівень допустимого відхилення від точного оптимуму задається з урахуванням важливості критеріїв, точності постановки задачі, а також з урахуванням деяких практичних міркувань.

Реалізацію принципу послідовної поступки опишемо у вигляді шестикрокового алгоритму за умови, що $E = E^{+}$.

Крок 1. Для найважливішого з позиції ряду пріоритету локального критерію e_{i_1} знаходимо оптимальне значення:

$$e_{i_1}^{\max} = \max_{s_k \in S} e_{i_1}(s_k).$$

Крок 2. Виходячи з практичних міркувань та точності, з якою фіксується економічна інформація (часто вона буває невеликою), СПР визначається «поступка» Δe_{i_1}, на яку він згоден піти для підвищення рівня критерію e_{i_2}.

Крок 3. Накладаємо на значення критерію e_{i_1} додаткову умову, щоб він був не меншим, ніж $e_{i_1} - \Delta e_{i_1}$, і будуємо множину стратегій, що задовольняє цій умові:

$$S^{\Delta e_{i_1}} = \left\{ s_k \in S : e_{i_1}(s_k) \geq e_{i_1}^{\max} - \Delta e_{i_1} \right\}.$$

Крок 4. На множині $S^{\Delta e_{i_1}}$ знаходимо оптимальне значення локального критерію e_{i_1}:

$$e_{i_2}^{\max} = \max_{s_k \in S^{\Delta e_{i_1}}} e_{i_2}(s_k).$$

Крок 5. Визначається «поступка» Δe_{i_2} і будується множина

$$S^{\Delta e_{i_2}} = \left\{ s_k \in S^{\Delta e_{i_1}} : e_{i_2}(s_k) \geq e_{i_2}^{\max} - \Delta e_{i_2} \right\}.$$

Крок 6. Процес продовжується до тих пір, коли будуть перебрані усі локальні критерії або коли множина $S^{\Delta e_{i_q}}$ $(q \ge 1)$ складатиметься тільки з однієї стратегії.

Такий спосіб визначення компромісної (оптимальної) стратегії зручний тим, що згідно з ним легко встановити, за рахунок якої «поступки» в одному локальному критерії отримується «виграш» у другому. Свобода у виборі стратегії, що досягається за рахунок навіть незначних «поступок», може виявитися суттєвою, оскільки в околі оптимуму найчастіше ефективність рішень (стратегій) змінюється незначно.

4.7.4.4. Переваги та недоліки принципу жорсткого врахування пріоритету

Перевагою принципу жорсткого врахування пріоритету є те, що він не потребує визначення кількісних характеристик пріоритету, які використовуються у побудові ряду бінарних відношень пріоритету RV та вектора вагових коефіцієнтів U, базується лише на впорядкуванні локальних критеріїв у ряд пріоритету RI.

До недоліків слід віднести, зокрема, те, що він віддає, практично, необмежену перевагу найбільш важливому локальному критерію оцінки якості стратегій (рішень).

Приклад 4.3. Виходячи з умови прикладу 4.1 знайти оптимальну стратегію згідно з: а) принципом послідовної оптимізації; б) принципом виділення найважливішого критерію; в) принципом послідовної поступки.

Розв'язання. а) Нехай ряд пріоритету має вигляд

$$RI^E = (e_1;\ e_2). \tag{4.17}$$

Тоді, згідно з принципом послідовної оптимізації, знаходимо оптимум (максимум) серед значень критерію e_1:

$$\max\{0{,}8;\ 0{,}45;\ 0{,}85;\ 0{,}7;\ 0{,}0;\ 1{,}0;\ 0{,}55\} = 1 = e_1(s_6).$$

Оскільки $S_1^{\text{ОПТ}} = (s_6)$, тобто включає один елемент, то процес зупиняється і згідно з принципом послідовної оптимізації оптимальною є стратегія s_6 $(s_{k_0} = s_6)$.

Якщо ряд пріоритету матиме вигляд

$$RI^E = (e_2;\ e_1), \tag{4.18}$$

то, міркуючи аналогічно, доходимо висновку, що згідно з принципом послідовної оптимізації оптимальною є стратегія $s_7\ \left(s_{k_0} = s_7\right)$.

б) Нехай ряд пріоритету має вигляд (4.17), тобто найважливішим для СПР є критерій e_1. Нехай також СПР наклав обмеження щодо критерію e_2, а саме:

$$e_2(s_k) \geq e_2^{\text{фікс}} = 0{,}875.$$

Оскільки $S^{\text{фікс}} = \{s_k : e_2(s_k) \geq 0{,}875\} = (s_4;\, s_7)$, то $s_{k_0} = \arg\max\limits_{s_k \in S^{\text{фікс}}} e_1(s_k) = s_4$ (оскільки $e_1(s_7) = 0{,}55 < e_1(s_4) = 0{,}7$).

Отже, згідно з принципом виділення найважливішого критерію, оптимальною є стратегія $s_4\ (s_{k_0} = s_4)$.

Якщо ряд пріоритету має вигляд (4.18), а на критерій e_1 СПР накладено обмеження $e_1(s_k) \geq e_1^{\text{фікс}} = 0{,}875$, то $S^{\text{фікс}} = s_6$, тобто згідно з принципом виділення найважливішого критерію оптимальною є стратегія $s_6\ (s_{k_0} = s_6)$.

в) Нехай ряд пріоритету має вигляд (4.17). Це означає, що найважливішим є критерій e_1 і для нього $e_1^{\max} = \max\limits_{s_k \in S} e_1(s_k) = e(s_6) = 1$.

Нехай також СПР визначив щодо критерію e_1 «поступку» $\Delta e_1 = 0{,}25$, тоді
$S^{\Delta e_1} = \{s_k \in S:\ e_1(s_k) \geq 1 - 0{,}25\} = (s_3;\ s_4;\ s_6)$; $s_{k_0} = \arg\max\limits_{s_k \in S^{\Delta e_1}} e_2(s_k) = s_4$.

Ураховуючи те, що $e_2(s_4) = 0{,}9$; $e_2(s_6) = 0{,}45$, за рахунок «поступки», що її визначив СПР відносно критерію e_1, він отримав для другого критерію «приріст» $\Delta e_2 = e_2(s_4) - e_2(s_6) = 0{,}45$.

Отже, згідно з принципом послідовної поступки СПР віддасть перевагу стратегії $s_4\ (s_{k_0} = s_4)$. А це означає, що для нього «приріст» $\Delta e_2 = 0{,}45$ є важливішим за «поступку» $\Delta e_1 = 0{,}25$.

Нехай тепер ряд пріоритету має вигляд (4.18) і $\Delta e_2 = 0{,}25$. Тоді, міркуючи аналогічно, отримуємо, що згідно з принципом послідовної поступки СПР віддасть перевагу стратегії $s_3\ (s_{k_0} = s_3)$, тобто для нього «приріст» $\Delta e_1 = 0{,}3$ є важливішим за «поступку» $\Delta e_2 = 0{,}25$.

4.7.5. Компроміси за гнучкого врахування пріоритету

Компроміс за гнучкого врахування пріоритету (або *принцип гнучкого пріоритету*) передбачає обов'язкове визначення кількісних характеристик пріоритету, що задаються або рядом *RV* (бінарних відношень пріоритету), або вектором *U* (вагових коефіцієнтів пріоритету). Це дає змогу «справедливіше» врахувати знання щодо інформаційних ситуацій і (чи) відповідних їм локальних критеріїв оцінки якостей стратегій (рішень). Фактично реалізація принципу гнучкого пріоритету зводиться до трансформації простору критеріїв, до відповідної зміни масштабів щодо кожного критерію (у випадку лінійного врахування вагових коефіцієнтів пріоритету замість критеріїв e_q $(q=1,...,Q)$ розглядатимуться зважені критерії $e_q^U = u_q e_q$, у випадку показникового врахування — зважені критерії $e_q^U = ((e_q)^{U_q})$.

У пунктах 4.7.6—4.7.10 розглядаються принципи оптимальності щодо вибору оптимальних стратегій в полі трансформованого (чи нетрансформованого) простору локальних критеріїв. За необхідності (коли критерії використовуватимуться в полях різних інформаційних ситуацій) будуть ураховуватися пріоритети інформаційних ситуацій.

А тому модель оптимізаційної задачі (4.12), з урахуванням пріоритету інформаційних ситуацій і локальних критеріїв оцінки якості рішень, можна подати у вигляді

$$s_{k_0} : \left(E\left(s_{k_0}\right); U^I; U^E\right) = opt\left\{\left(E\left(s_k\right); U^I; U^E\right) \;:\; E\left(s_k\right) \in \Omega_E\right\}. \qquad (4.19)$$

У подальших викладках будемо використовувати такі позначення:

$U^I = \left(u_1^I; \ldots; u_5^I\right)$ — вектор вагових коефіцієнтів пріоритету щодо інформаційних ситуацій, компоненти якого задовольняють умови нормування:

$$0 \le u_j^I \le 1; \qquad \sum_{j=1}^{5} u_j^I = 1;$$

$E_j\left(s_k\right) = (e_{j1}(s_k), \ldots, e_{jQ_j}(s_k))$ — вектор локальних критеріїв якості стратегії s_k, що є характерними для *j*-ї інформаційної ситуації $(j=1,...,5; \quad k=1,...,m)$;

Q_j — кількість локальних критеріїв, що використовуються СПР у полі j-ї інформаційної ситуації $(j = 1,..., 5)$;

$U_j^E = (u_{j1}^E; \ldots; u_{jQ_j}^E)$ — вектор вагових коефіцієнтів пріоритету локальних критеріїв якості стратегій, що є характерними для j-ї (j = 1,…, 5) інформаційної ситуації, компоненти якого задовольняють умови нормування:

$$0 \le u_{jq} \le 1; \quad \sum_{q=1}^{Q_j} u_{jq} = 1; \quad j = 1, \ldots, 5.$$

У загальному випадку вектор вагових коефіцієнтів пріоритету (за врахування як пріоритету інформаційних ситуацій, так і пріоритету локальних критеріїв якості стратегій) має вигляд

$$\begin{aligned} U^{IE} &= \left(u_1^I U_1^E; \ldots; u_5^I U_5^E\right) = \left(u_j^I u_{jq}^E : \ q = 1, \ldots, Q_j; \ j = 1, \ldots, 5\right) = \\ &= \left(u_q^{IE} : \ q = 1, \ldots, Q\right), \end{aligned} \tag{4.20}$$

де $Q = \sum_{j=1}^{5} Q_j$. Легко показати, що компоненти вектора U^{IE} задовольняють умови нормування вагових коефіцієнтів пріоритету:

$$0 \le u_j^I \ u_{jq}^E \le 1; \quad \sum_{j=1}^{5} \sum_{q=1}^{Q_j} \left(u_j^i \ u_{jq}^E\right) = 1.$$

Якщо приймається одноцільове багатокритеріальне рішення в полі однієї (j-ї) інформаційної ситуації, то $U^I = \left(0; \ldots; \ 0; \ u_j^I; \ 0; \ldots; \ 0\right)$, де $u_j^I = 1$, і тоді

$$U^{IE} = \left(0; \ldots; \ 0; \ u_{j1}^E; \ldots; \ u_{jQ_j}^E; \ 0; \ldots; \ 0\right). \tag{4.21}$$

4.7.6. Принцип рівномірності

Принцип рівномірності в загальному випадку полягає у прагненні до рівномірного та гармонійного поліпшення якості рішення згідно з усіма локальними критеріями. Даний принцип має кілька різновидів і використовується після того, як здійснено нормалізацію локальних критеріїв. Якщо це не обумовлено додатково, то вважатимемо, що нормалізований вектор локальних критеріїв якості має позитивний інгредієнт, тобто що $E^{\text{Н}}(s_k) = \left(E^{\text{Н}}(s_k)\right)^+$. Для спрощення запису індекс «Н» надалі пропускатимемо.

4.7.6.1. Принцип рівності

Згідно з *принципом (гіпотезою) рівності* найкращим вважається компромісне рішення, для якого досягається рівність усіх зважених локальних критеріїв (рис. 4.2, *а*). У випадку *лінійного способу* врахування пріоритету дану схему компромісу (згідно з математичною моделлю (4.12)) можна подати у вигляді

$$s_{k_0}: \quad \left(E\left(s_{k_0}\right); U^{IE}\right) = opt\left\{\left(E\left(s_k\right); U^{IE}\right) : E\left(s_k\right) \in \Omega_E^{\text{КП}}\right\} =$$
$$= \left\{ s_{k_0} \in S^{\text{КП}} : u_1^I u_{11}^E e_{11}\left(s_{k_0}\right) = \ldots = u_1^I u_{1Q_1}^E e_{1Q_1}\left(s_{k_0}\right) = u_2^I u_{21}^E e_{21}\left(s_{k_0}\right) = \ldots = \right.$$
$$\left. = u_5^I u_{5Q_5}^E e_{5Q_5}\left(s_{k_0}\right)\right\}.$$

Якщо цей принцип використовувати для прийняття одноцільових БК рішень у полі однієї (j-ї) інформаційної ситуації, то з урахуваннями (4.21) модель задачі прийняття рішення буде такою:

$$s_{k_0} : \left(E\left(s_{k_0}\right); U^{IE}\right) = \left\{ s_{k_0} \in S^{\text{КП}} : u_{j1}^E e_{j1}\left(s_{k_0}\right) = \ldots = u_{jQ_j}^E e_{jQ_j}\left(s_{k_0}\right)\right\}.$$

У випадку *показникового способу* врахування пріоритету отримуємо:

$$s_{k_0} : \left(E\left(s_{k_0}\right); U^{IE}\right) = \left\{ s_{k_0} \in S^{\text{КП}} : \left(e_{11}\left(s_{k_0}\right)\right)^{u_1^I u_{11}^E} = \ldots = \left(e_{1Q_1}\left(s_{k_0}\right)\right)^{u_1^I u_{1Q_1}^E} = \right.$$
$$\left. = \ldots = \left(e_{21}\left(s_{k_0}\right)\right)^{u_2^I u_{21}^E} = \ldots = \left(e_{5Q_5}\left(s_{k_0}\right)\right)^{u_5^I u_{5Q_5}^E} \right\},$$

або ж у полі однієї (j-ї) інформаційної ситуації

$$s_{k_0} : \left(E\left(s_{k_0}\right); U^{IE}\right) = \left\{ s_{k_0} \in S^{\text{КП}} : \left(e_{j1}\left(s_{k_0}\right)\right)^{u_{j1}^E} = \ldots = \left(e_{jQ_j}\left(s_{k_0}\right)\right)^{u_{jQ_j}^E} \right\}.$$

Якщо ж з погляду СПР усі локальні критерії мають однаковий пріоритет, то у полі j-ї інформаційної ситуації (за обох способів урахування пріоритету) отримуємо:

$$s_{k_0} : \left(E\left(s_{k_0}\right); U^{IE}\right) = \left\{ s_{k_0} \in S^{\text{КП}} : e_{j1}\left(s_{k_0}\right) = \ldots = e_{jQ_j}\left(s_{k_0}\right)\right\}.$$

Для зручності в подальших викладках використовуватимемо позначення:

$$E^U(s_k) = \left(e_1^U(s_k); \ldots; e_q^U(s_k); \ldots; e_Q^U(s_k)\right),$$

де: $e_q^U(s_k) = u_q^{IE} e_q(s_k)$ — у випадку лінійного способу або $e_q^U(s_k) = \left(e_q(s_k)\right)^{u_q^{IE}}$ — у випадку показникового способу врахування пріоритету; $u_q^{IE} = u_j^I \ u_{jl}^E$ — ваговий коефіцієнт пріоритету і при цьому $\sum_{q=1}^{Q} u_q^{IE} = 1$; q — порядковий номер критерію, використовуваного СПР $\left(q = q(j;\, l) = l + \sum_{t=0}^{j-1} Q_t,\quad j = 1,\ldots,5;\quad Q_0 = 0\right)$; l — порядковий номер критерію, використовуваного у полі j-ї інформаційної ситуації $(l = 1,\ldots, Q_j)$.

Принцип рівності унаочнює рис. 4.2, *а*. Слід зауважити, що цей принцип іноді є занадто «жорстким». Він може призвести до вибору стратегії s_{k_0}, що знаходиться поза межами області компромісних стратегій (тобто $s_{k_0} \notin S^{\text{КП}}$ і відповідно $E^U(s_{k_0}) \notin \Omega_{E^U}^{\text{КП}}$, рис. 4.2, *б*). Можуть мати місце ситуації, коли в множині стратегій відсутня стратегія, яка є оптимальною згідно з критерієм рівності (рис. 4.2, *в*), особливо у випадку дискретних задач прийняття багатокритеріальних рішень (рис. 4.2, *г*).

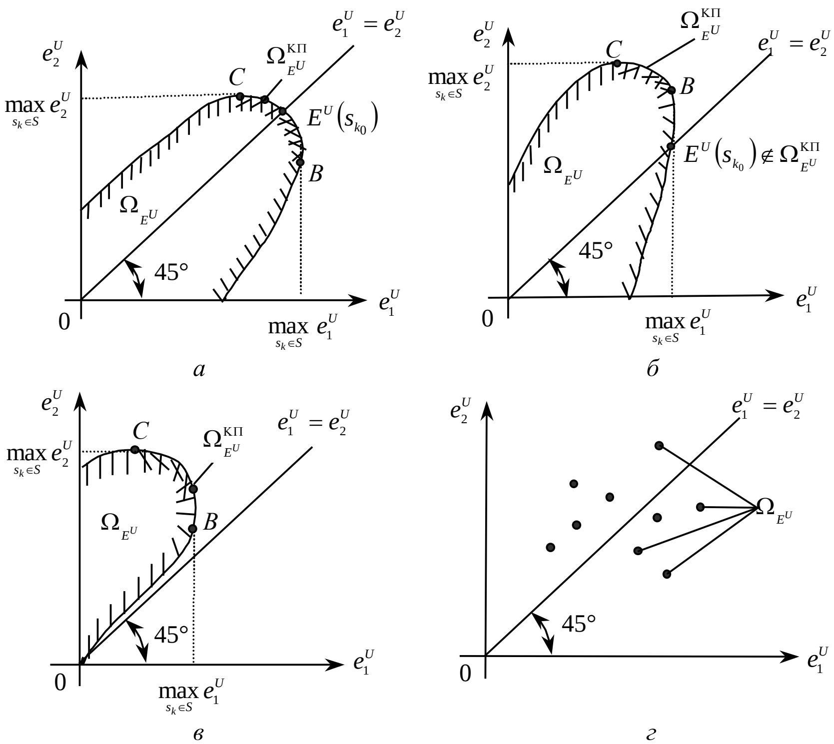


Рис. 4.2. Вибір оптимальної стратегії згідно з принципом рівності:
а) $E^U(s_{k_0}) \in \Omega_{E^U}^{\text{КП}}$; *б*) $E^U(s_{k_0}) \notin \Omega_{E^U}^{\text{КП}}$, але $E^U(s_{k_0}) \in \Omega_{E^U}$; *в*) $E^U(s_{k_0}) \notin \Omega_{E^U}$;
г) дискретний випадок

4.7.6.2. Принцип квазірівності

Тут ідея рівності, висунута в попередньому пункті (у принципі рівності), реалізується наближено (з певною точністю): стратегія вважається найкращою, якщо значення окремих локальних критеріїв відрізняються один від одного не більше, ніж на фіксовану величину ε $(\varepsilon > 0)$.

Якщо цей принцип оптимальності використовувати в полі однієї (j-ї) інформаційної ситуації, то його математичну модель можна подати у вигляді:

а) лінійний спосіб урахування пріоритету:

$$s_{k_0}: \left(E\left(s_{k_0}\right); U^{IE}\right) = opt\left\{\left(E\left(s_k\right); U^{IE}\right): E\left(s_k\right) \in \Omega_E^{\text{КП}}\right\} =$$

$$= \left\{s_{k_0} \in S^{\text{КП}}: \max_{1 \le j \le 5} \max_{1 \le q,\ l \le Q_j} \left| u_{jq}^E e_{jq}\left(s_{k_0}\right) - u_{jl}^E e_{jl}\left(s_{k_0}\right)\right| \le \varepsilon\right\};$$

б) показниковий спосіб урахування пріоритету:

$$s_{k_0}: \left(E\left(s_{k_0}\right); U^{IE}\right) = \left\{s_{k_0} \in S^{\text{КП}}: \max_{1 \le j \le 5} \max_{1 \le q, l \le Q_j} \left| e_{jq}\left(s_{k_0}\right)^{u_{jq}^E} - \left(e_{jl}\left(s_{k_0}\right)\right)^{u_{jl}^E}\right| \le \varepsilon\right\}.$$

Якщо для СПР усі локальні критерії є рівнозначними, то математична модель цього принципу є такою:

$$s_{k_0}: \left(E\left(s_{k_0}\right); U^{IE}\right) = \left\{s_{k_0} \in S^{\text{КП}}: \max_{1 \le q, l \le Q_j} \left| e_{jq}\left(s_{k_0}\right) - e_{jl}\left(s_{k_0}\right)\right| \le \varepsilon\right\}.$$

Принцип квазірівності для двовимірного випадку унаочнює рис. 4.3. Усі стратегії, що відповідають дузі $B'C'$, яка, у свою чергу, відповідає смузі шириною 2ε, оптимальні згідно з прийнятим принципом оптимальності.

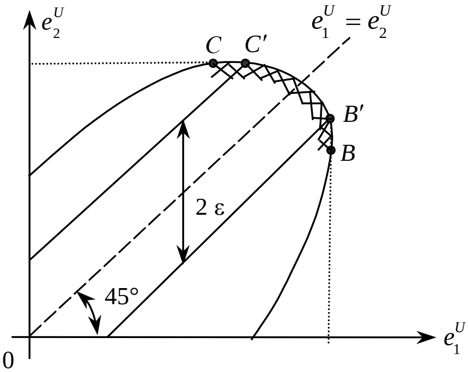


Рис. 4.3. Вибір оптимальної стратегії згідно з принципом квазірівності

4.7.6.3. Принцип максиміну (мінімаксу)

Якщо локальні критерії мають позитивний інгредієнт, то ідея рівномірності проявляється в намаганні підвищувати рівень усіх критеріїв за рахунок максимального «підтягування» найгіршого з них (що має найменше значення). Принцип оптимальності, що відповідає такій схемі компромісу (максиміну), у випадку використання лінійного способу урахування пріоритету можна записати у вигляді

$$s_{k_0}: \left(E^+\left(s_{k_0}\right);\, U^{IE}\right) = opt\left\{\left(E^+(s_k), U^{IE}\right) :\ E^+(s_k) \in \Omega_E^{\text{КП}}\right\} =$$
$$= \max_{s_k \in S^{\text{КП}}} \min_{1 \le j \le 5} \min_{1 \le q \le Q_j} \left(u_j^I\ u_{jq}^E\ e_{jq}^+(s_k)\right).$$

У межах однієї (j-ї) інформаційної ситуації

$$s_{k_0}: \left(E^+\left(s_{k_0}\right); U^{IE}\right) = \max_{s_k \in S^{\text{КП}}} \min_{1 \le q \le Q_j} \left(u_{jq}^E\ e_{jq}^+\left(s_k\right)\right).$$

У випадку використання показникового способу врахування пріоритету

$$s_{k_0}: \left(E^+\left(s_{k_0}\right);\ U^{IE}\right) = \max_{s_k \in S^{\text{КП}}} \min_{1 \le j \le 5} \min_{1 \le q \le Q_j} \left(e_{jq}^+\left(s_k\right)\right)^{u_j^I\ u_{jq}^E},$$

а в межах однієї (j-ї) інформаційної ситуації

$$s_{k_0}: \left(E^+\left(s_{k_0}\right); U^{IE}\right) = \max_{s_k \in S^{\text{КП}}} \min_{1 \le q \le Q_j} \left(e_{j_q}^+\left(s_k\right)\right)^{u_{j_q}^E}.$$

Якщо для СПР є рівнозначними як інформаційні ситуації, так і відповідні їм локальні критерії, то

$$s_{k_0}: \left(E^+\left(s_{k_0}\right); U^{IE}\right) = \max_{s_k \in S^{\text{КП}}} \min_{1 \le j \le 5} \min_{1 \le q \le Q_j} e_{j_q}^+\left(s_k\right).$$

У ситуації, коли локальні критерії мають негативні інгредієнти, за лінійного врахування пріоритету цей принцип оптимальності (мінімакс) має вигляд

$$s_{k_0}: \left(E^-\left(s_{k_0}\right);\ U^{IE}\right) = \min_{s_k \in S^{\text{КП}}} \max_{1 \le j \le 5} \max_{1 \le q \le Q_j} \left(u_j^I\ u_{jq}^E\ e_{jq}^-\left(s_k\right)\right).$$

Аналогічні співвідношення отримуємо і у випадках, що розглядались вище. Розглянутий принцип називається також *принципом гарантованого результату*.

4.7.6.4. Принцип максимального відхилення

Нехай нормалізований вектор локальних критеріїв якості стратегій має позитивний інгредієнт і пріоритет локальних критеріїв ураховується лінійним способом.

Тоді згідно з *принципом максимального відхилення* оптимальною вважається стратегія $s_{k_0} \in S^{\text{КП}}$, для якої відхилення точки $E(s_{k_0})$ від опорної гіперплощини є максимальним.

Рівняння опорної гіперплощини задається згідно з (4.14) і, як встановлено у додатку до розділу 4, пункт 4.11.1, є інваріантним щодо зміни компонентів вектора вагових коефіцієнтів пріоритету $U^{IE} = \left(u_1^{IE}, ..., u_q^{IE}, ..., u_Q^{IE}\right)$ за умови, що серед коефіцієнтів u_q^{IE} ($q = 1,...,Q$) немає рівних нулю (тобто, що $\prod_{q=1}^{Q} u_q^{IE} \neq 0$). Інваріантність рівняння (4.14) вказує на те, що принцип максимального відхилення може базуватися на нормалізованій інформації щодо локальних критеріїв якості стратегій без урахування вектора пріоритету U^{IE}.

Якщо від рівняння (4.14) перейти до рівняння (4.15), то згідно з (4.16) відхилення точки $E(s_k)$ від опорної гіперплощини обчислюється за формулою

$$\delta(s_k) = \mu\, a_1 e_1(s_k) + ... + \mu\, a_Q e_Q(s_k) + \mu b\,.$$

Тоді математична модель принципу максимального відхилення від опорної гіперплощини має вигляд:

$$s_{k_0} : \left(E^{+}\left(s_{k_0}\right);\, U^{IE}\right) = \max_{s_k \in S^{\text{КП}}} \delta(s_k). \tag{4.22}$$

Ще раз звертаємо увагу на те, що висновки, отримані згідно з принципом максимального відхилення у випадку, коли всі локальні критерії є рівнопріоритетними, залишаються правильними й у випадку, коли локальні критерії мають різний пріоритет.

4.7.6.5. Модифікований принцип квазірівності

Якщо СПР віддає перевагу принципу рівності щодо локальних критеріїв якості стратегій, то для вибору оптимальної стратегії можна скористатися модифікованим принципом квазірівності. Його сутність розкриває п’ятикроковий алгоритм.

Крок 1. Серед стратегій $s_k \in S^{\text{КП}}$ відшукуються такі, що задовольняють принцип рівності локальних критеріїв. Якщо хоч одну таку стратегію знайдено, то вона оптимальна для СПР.

Якщо ж така стратегія відсутня (а це має місце у більшості випадків), то переходимо до виконання кроку 2.

Крок 2. Для кожної стратегії s_k $(k = 1, ..., m)$ складаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} u_1 \ e_1(s_k) = ... = u_Q \ e_Q(s_k); \\ u_1 + ... + u_Q = 1 \end{cases}$$

і розв'язуємо її відносно невідомих вагових коефіцієнтів пріоритету u_q $(q = 1,..., Q)$:

$$u_1^k = 1 \Bigg/ \left(e_1(s_k) \sum_{q=1}^{Q} \frac{1}{e_q(s_k)} \right); \quad u_2^k = u_1^k \frac{e_1(s_k)}{e_2(s_k)}; \ldots ; u_Q^k = u_1^k \frac{e_1(s_k)}{e_Q(s_k)}.$$

Крок 3. Для кожної стратегії s_k складаємо вектор вагових коефіцієнтів пріоритету:

$$U^{s_k} = \left(u_1^k; ...; u_Q^k \right), \ k = 1, ..., m.$$

Крок 4. Оптимальною є стратегія s_{k_0}, що забезпечує екстремум цільовій функції. Зазначимо, що в якості цільової функції (принципу оптимальності) можуть використовуватися, наприклад:

- принцип мінімаксу:

$$s_{k_0} : \ \Delta u_{k_0} = \min_{s_k \in S^{\text{КП}}} \max_{1 \le q, \, l \le Q} \left| u_q^k - u_l^k \right|;$$

- принцип мінімального сумарного відхилення:

$$s_{k_0} : \ \Delta u_{k_0}^{\Sigma} = \min_{s_k \in S^{\text{КП}}} \sum_{q=1}^{Q-1} \sum_{l=q+1}^{Q} | u_q^k - u_l^k | ;$$

- принцип мінімального середньогеометричного відхилення:

$$s_{k_0} : \ \Delta u_{k_0}^{\Pi} = \min_{s_k \in S^{\text{КП}}} \prod_{q=1}^{Q-1} \prod_{l=q+1}^{Q} \left(1 + | u_q^k - u_l^k | \right)$$

тощо.

Крок 5. Якщо оптимальними виявляться кілька стратегій, то перевага віддається тій, що має вищий пріоритет, який визначається згідно з правилом: кращій стратегії відповідає більше (з урахуванням знака) відхилення від опорної гіперплощини (вважається, що $E = (E^{\text{Н}})^{+}$).

Нехай СПР, окрім вибору принципу квазірівності, вносить у процес вибору оптимальної стратегії суб'єктивізм також завдяки вибору рівня допустимого відхилення значень цільових функцій

$$\Delta_k = \Delta u_k = \max_{1 \le q,\, l \le Q} |u_q^k - u_l^k|, \quad \Delta_k = \Delta u_k^{\Sigma} = \sum_{q=1}^{Q-1} \sum_{l=q+1}^{Q} |u_q^k - u_l^k|,$$

$$\Delta_k = \Delta u_k^{\Pi} = \prod_{q=1}^{Q-1} \prod_{l=q+1}^{Q} \left(1 + \frac{|u_q^k - u_l^k|}{Q}\right)$$

від їх мінімумів відповідно $\Delta_{k_0} = \Delta u_{k_0}$, $\Delta_{k_0} = \Delta u_{k_0}^{\Sigma}$ чи $\Delta_{k_0} = \Delta u_{k_0}^{\Pi}$. Якщо цей рівень покласти рівним ε $(\varepsilon > 0)$, то критерій оптимальності, що враховує встановлений СПР рівень компромісу, набуває вигляду:

$$s_{k_0}: \quad \delta(s_{k_0}) = \max\left\{\delta(s_k): \left|\Delta_k - \Delta_{k_0}\right| \le \varepsilon; \quad s_k \in S\right\}.$$

Приклад 4.4. Виходячи з умови прикладу 4.1 і вважаючи, що для СПР обидва локальні критерії мають однаковий пріоритет: а) побудувати лінію, що апроксимує область компромісів для вектора локальних критеріїв; б) вибрати оптимальну стратегію згідно з принципом рівномірності; в) вибрати оптимальну стратегію згідно з принципом максимального відхилення.

Розв'язання. Скористаємося результатами прикладу 4.1 і запишемо нормалізовані вектори локальних критеріїв якості стратегій:

$$E(s_1) = (0{,}8;\ 0{,}0); \quad E(s_2) = (0{,}45;\ 0{,}5); \quad E(s_3) = (0{,}85;\ 0{,}8);$$
$$E(s_4) = (0{,}7;\ 0{,}9); \quad E(s_5) = (0{,}0;\ 0{,}6); \quad E(s_6) = (1{,}0;\ 0{,}45);$$
$$E(s_7) = (0{,}55;\ 1{,}0).$$

а) На рис. 4.4 кожному вектору критеріїв поставлено у відповідність точку $E(s_k)$ $(k = 1, \ldots, 7)$. Оскільки $\max\limits_{s_k \in S} e_B^{\text{Н}}(s_k) = 1$, $\max\limits_{s_k \in S} e_\sigma^{\text{Н}}(s_k) = 1$, то точки $E(s_6)$ та $E(s_7)$ можна розглядати як такі, що обмежують область компромісів $\Omega_E^{\text{КП}}$ критеріїв якості.

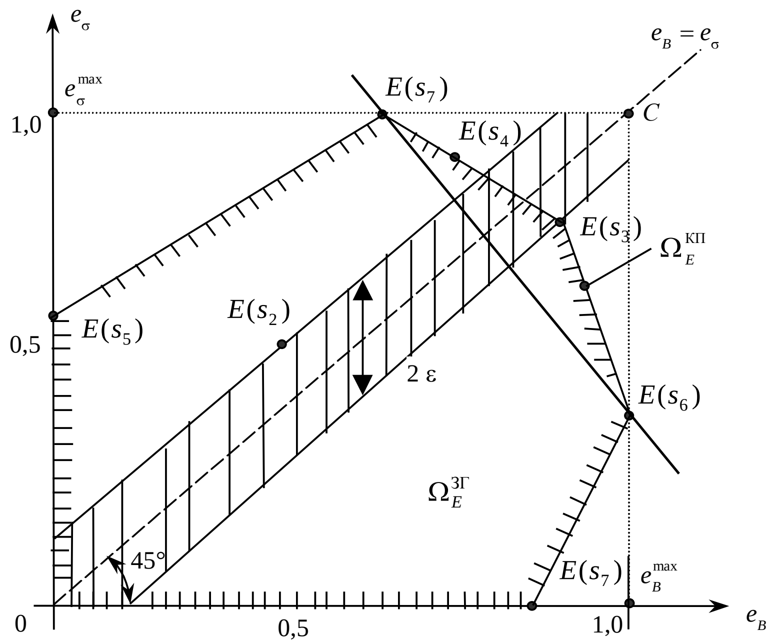


Рис. 4.4. Геометрична інтерпретація прикладу 4.4

Згідно з умовою прикладу $u_1^{IE} = u_2^{IE} = 0{,}5$, а тому в подальших викладках вагові коефіцієнти пріоритету можна не враховувати.

Отже, з урахуванням структури області компромісів та беручи до уваги, що розглядається дискретна задача, апроксимацією області компромісів $\Omega_E^{\text{КП}}$ критеріїв якості можна вважати ламану $E(s_7)E(s_3)E(s_6)$.

б) Оскільки задача прийняття рішення є дискретною і жодна з точок, що відповідають стратегіям СПР, не лежить на бісектрисі $0C$, то згідно з принципом рівності задача не має розв'язку.

Якщо покласти $\delta = 0{,}05$, то в заштриховану смугу (див. рис. 4.4) шириною $2\varepsilon = 0{,}1$ потрапили дві точки: $E(s_2)$ та $E(s_3)$. Для них

$$|e_B(s_2) - e_\sigma(s_2)| = |0{,}45 - 0{,}5| = 0{,}05 \le \delta;$$

$$|e_B(s_3) - e_\sigma(s_3)| = |0{,}85 - 0{,}8| = 0{,}05 \le \delta.$$

Оскільки точка $E(s_2)$ належить області згоди $\left(E(s_2) \in \Omega_E^{\text{ЗГ}}\right)$, а точка $E(s_3) \in \Omega_E^{\text{КП}}$, то згідно з принципом квазірівності оптимальною є стратегія $s_{k_0} = s_3$.

З урахуванням того, що

$$\min_{1\le q\le 2} e_q(s_k) = e_B(s_5) = e_\sigma(s_1) = 0;\ \ \max_{s_k\in S} e_B(s_k) = e_B(s_6) = 1;$$

$$\max_{s_k\in S} e_\sigma(s_k) = e_\sigma(s_7) = 1,$$

отримуємо стратегії s_6 та s_7, які згідно з принципом гарантованого результату є оптимальними.

Як бачимо, всі отримані оптимальні стратегії належать області компромісів $\Omega_E^{\text{КП}}$ критеріїв якості.

в) Скористаємося результатами прикладу 4.2 щодо значень відхилень точок області компромісу від опорної гіперплощини:

$$\delta(s_3) = 0{,}105;\quad \delta(s_4) = 0{,}052;\quad \delta(s_6) = 0;\quad \delta(s_7) = 0.$$

Тоді згідно з принципом максимального відхилення від опорної гіперплощини та скориставшись (4.22), отримуємо:

$$\max_{s_k\in S^{\text{КП}}} \delta(s_k) = \max\ \{0{,}105;\, 0{,}0525;\, 0;\, 0\} = 0{,}105;\quad s_{k_0} = \arg\max_{s_k\in S^{\text{КП}}} \delta(s_k) = s_3.$$

Отже, згідно з принципом максимального відхилення оптимальною є третя стратегія $(s_{k_0} = s_3)$.

4.7.7. Принципи справедливої поступки (знижки)

Принцип справедливої поступки має два різновиди: *принцип абсолютної поступки* і *принцип відносної поступки*. Обидва базуються на оцінці та зіставленні приростів і зменшенні рівнів локальних критеріїв якості, що в області компромісів $\Omega_E^{\text{КП}}$ неминуче.

4.7.7.1. Принцип абсолютної поступки

Принцип справедливої абсолютної поступки стверджує: справедливим є такий компроміс, за якого сумарний абсолютний рівень зниження одного чи кількох зважених локальних критеріїв якості стратегії не перевищує сумарного абсолютного рівня підвищення значень інших зважених критеріїв.

Розглянемо два вектори ефективності з області компромісу $\Omega_{E^U}^{\text{КП}}$:

$$E^U(s_k) = \left(e_1^U(s_k);\ldots;e_Q^U(s_k)\right);\quad E^U(s_l) = \left(e_1^U(s_l);\ldots;e_Q^U(s_l)\right).$$

Згідно з цим принципом у разі переходу від точки $E^U(s_l)$ до $E^U(s_k)$ якість зміни вектора локальних критеріїв характеризується величиною сумарної абсолютної поступки

$$\Delta_{lk}^{\text{абс}} = \sum_{q=1}^{Q} \Delta_{lk} e_q^U = \sum_{q=1}^{Q} \left(e_q^U(s_k) - e_q^U(s_l) \right) = \sum_{q=1}^{Q} e_q(s_k) - \sum_{q=1}^{Q} e_q(s_l). \quad (4.23)$$

Якщо величина $\Delta_{lk}^{\text{абс}}$ є додатною, тобто $\left(\Delta_{lk}^{\text{абс}} > 0\right)$, то стратегія s_k, що відповідає вектору $E^U(s_l)$, вважається кращою за стратегію s_l, що відповідає вектору $E^U(s_l)$ $(s_k \succ s_l)$. Звідси випливає принцип оптимальності: с*тратегія* s_{k_0} *є оптимальною згідно з принципом абсолютної поступки, якщо для неї величина* $\Delta_{k_0 e}^{\text{абс}} \le 0$ *за переходу від точки* $E^U\left(s_{k_0}\right)$ *до будь-якої найближчої точки* $E^U(s_l)$ $(l = 1, ..., m)$.

Нехай стратегія s_{k_0} є оптимальною, тобто $\Delta_{k_0 l}^{\text{абс}} \le 0$ для усіх $s_l \in S^{\text{КП}}$. Тоді згідно з (4.23)

$$\sum_{q=1}^{Q} e_q^U\left(s_{k_0}\right) = \sum_{q=1}^{Q} e_q^U(s_l) - \Delta_{k_0 l}^{\text{абс}} \ge \sum_{q=1}^{Q} e_q^U(s_l),$$

тобто згідно з принципом абсолютної поступки

$$\sum_{q=1}^{Q} e_q^U\left(s_{k_0}\right) = \max_{s_l \in S^{\text{КП}}} \sum_{q=1}^{Q} e_q^U(s_l).$$

Отже, *сутність принципу абсолютної поступки полягає у максимізації суми зважених локальних критеріїв якості*. А тому математичну модель цього принципу можна подати у вигляді

$$s_{k_0} : \left(E\left(s_{k_0}\right); U^{IE}\right) = opt\left\{\left(E\left(s_k\right); U^{IE}\right) : \left(s_k\right) \in \Omega_E^{\text{КП}}\right\} = \max_{s_k \in S^{\text{КП}}} \sum_{q=1}^{Q} e_q^U\left(s_k\right). \quad (4.24)$$

У випадку лінійного способу врахування пріоритету модель (4.24) має вигляд

$$s_{k_0} : \left(E\left(s_{k_0}\right); U^{IE}\right) = \max_{s_k \in S^{\text{КП}}} \sum_{q=1}^{Q} \left(u_q^{IE} e_q\left(s_k\right)\right).$$

У цьому випадку принцип абсолютної поступки носить назву *критерію зваженої сумарної (інтегральної) ефективності* [32].

Якщо ж пріоритет ураховується згідно з показниковим методом, то *модель* (4.24) записується у вигляді

$$s_{k_0} : \left(E\left(s_{k_0}\right);\ U^{IE}\right) = \max_{s_k \in S^{\text{КП}}} \sum_{q=1}^{Q} \left(e_q\left(s_k\right)\right)^{u_q^{IE}}.$$

Слабким місцем принципу абсолютної поступки є те, що він може допускати різку диференціацію рівнів значень окремих локальних критеріїв якості, оскільки високе значення інтегрального критерію можна отримати за рахунок високого рівня одних локальних критеріїв при порівняно малих значеннях інших.

4.7.7.2. Принцип відносної поступки (знижки)

Принцип відносної поступки стверджує, що справедливим є такий компроміс, за якого сумарний відносний рівень зниження одного чи кількох зважених локальних критеріїв якості стратегій не перевищує сумарного відносного рівня підвищення сумарного рівня значень інших зважених критеріїв.

Як і в пункті 4.7.7.1, розглянемо дві точки: $E^U(s_k)$, $E^U(s_l)$, що належать області $\Omega_{E^U}^{\text{КП}}$. Тоді згідно з даним принципом якість зміни локальних критеріїв у разі переходу від точки $E^U(s_l)$ до точки $E^U(s_k)$ характеризується величиною сумарної відносної поступки

$$\Delta_{lk}^{\text{відн}} = \sum_{q=1}^{Q} \frac{\Delta_{lk} e_q^U}{e_q^U(s_l)} = \sum_{q=1}^{Q} \frac{e_q^U(s_k) - e_q^U(s_l)}{e_q^U(s_l)}.$$

Стратегія $s_k \succ s_l$, якщо за переходу від точки $E^U(s_l)$ до точки $E^U(s_k)$ величина $\Delta_{lk}^{\text{відн}}$ є додатною $\left(\Delta_{lk}^{\text{відн}} > 0\right)$. Звідси випливає принцип оптимальності: *стратегія s_{k_0} згідно з принципом відносної поступки є оптимальною, якщо за переходу від точки $E^U\left(s_{k_0}\right)$ до будь-якої сусідньої точки $E^U(s_k)$ величина* $\Delta_{k_0 k}^{\text{відн}} \le 0$.

У додатку до розділу 4 (пункт 4.11.2) показано, що має місце співвідношення

$$\prod_{q=1}^{Q} e_q^U(s_{k_0}) > e^{\Delta_{k_0 l}^{\text{відн}}} \prod_{q=1}^{Q} e_q^U\left(s_k\right).$$

Оскільки стратегія s_{k_0} є оптимальною згідно з принципом відносної поступки, то $\Delta_{k_0 l}^{\text{відн}} < 0$, а тому $e^{-\Delta_{k_0 l}^{\text{відн}}} \geq 1$, тобто для будь-якої неоптимальної стратегії s_k

$$\prod_{q=1}^{Q} e_q^U\left(s_{k_0}\right) > \prod_{q=1}^{Q} e_q^U\left(s_k\right).$$

Отже, *згідно з принципом відносної поступки*

$$\prod_{q=1}^{Q} e_q^U\left(s_{k_0}\right) = \max_{s_k \in S^{\text{КП}}} \prod_{q=1}^{Q} e_q^U\left(s_k\right),$$

тобто *його сутність полягає у максимізації добутку зважених локальних критеріїв якості.* А тому математичну модель цього принципу можна подати у такому вигляді:

$$s_{k_0} : \left(E\left(s_{k_0}\right);\ U^{IE}\right) = opt\left\{\left(E(s_k);\ U^{IE}\right) : E(s_k) \in \Omega_E^{\text{КП}}\right\} = \\ = \max_{s_k \in S^{\text{КП}}} \prod_{q=1}^{Q} e_q^U\left(S_k\right). \tag{4.25}$$

У випадку лінійного способу врахування пріоритету модель (4.25) можна записати так:

$$s_{k_0} : \left(E\left(s_{k_0}\right); U^{IE}\right) = \max_{s_k \in S^{\text{КП}}} \prod_{q=1}^{Q} \left(u_q^{IE}\ e_q\left(s_k\right)\right) = \left(\prod_{q=1}^{Q} u_q^{IE}\right) \max_{s_k \in S^{\text{КП}}} \prod_{q=1}^{Q} e_q\left(s_k\right),$$

тобто за лінійного врахування пріоритету принцип відносної поступки інваріантний щодо пріоритету локальних критеріїв якості стратегій.

Якщо ж для врахування пріоритету використовується показниковий спосіб, то модель (4.25) набуває вигляду:

$$s_{k_0} : \left(E(s_{k_0});\ U^{IE}\right) = \max_{s_k \in S^{\text{КП}}} \prod_{q=1}^{Q} \left(e_q\left(s_k\right)\right)^{u_q^{IE}}.$$

У цьому випадку принцип відносної поступки носить назву *критерію зваженого середньогеометричного* [19].

Для обох способів урахування пріоритету принцип відносної поступки є досить чутливим щодо числових значень критеріїв, причому за рахунок відносності поступки відбувається автоматичне зниження «ціни» поступки для локальних критеріїв з більшим значенням, і навпаки. В результаті відбувається значне згладжування рівнів локальних критеріїв.

Важливою перевагою принципу відносної поступки є те, що він у випадку, коли нормалізовані значення локальних критеріїв приймають невід'ємні значення $\left(e_q(s_k) \geq 0,\ q = 1, ..., Q;\ k = 1, ..., m\right)$, не потребує попередньої нормалізації відповідної інформації, тобто він є інваріантом щодо масштабу та одиниць вимірювання критеріїв. Якщо ж серед ненормалізованих величин $e_q(s_k)$ знайдуться від'ємні, то для побудови відповідного критерію можна скористатися підходом, запропонованим у [133].

Приклад 4.5. Виходячи з умови прикладу 4.1 і вважаючи, що з погляду СПР ваговий коефіцієнт пріоритету для першого локального критерію становить $u_1^{IE} = 0{,}6$, а для другого — $u_2^{IE} = 0{,}4$, вибрати оптимальну стратегію згідно з: а) принципом абсолютної поступки; б) принципом відносної поступки.

Розв'язання. В прикладі 4.4 встановлено, що області компромісів належать стратегії s_3, s_4, s_6 та s_7. Їм відповідають нормалізовані вектори локальних критеріїв: $E(s_3) = (0{,}85;\, 0{,}8)$; $E(s_4) = (0{,}7;\, 0{,}9)$; $E(s_6) = (1{,}0;\, 0{,}45)$; $E(s_7) = (0{,}55;\, 1{,}0)$.

а) У випадку лінійного способу врахування пріоритету отримуємо:

$$\sum_{q=1}^{2} e_q^U(s_3) = 0{,}6 \times 0{,}85 + 0{,}4 \times 0{,}8 = 0{,}83;$$

$$\sum_{q=1}^{2} e_q^U(s_4) = 0{,}6 \times 0{,}7 + 0{,}4 \times 0{,}9 = 0{,}78;$$

$$\sum_{q=1}^{2} e_q^U(s_6) = 0{,}6 \times 1{,}0 + 0{,}4 \times 0{,}45 = 0{,}78;$$

$$\sum_{q=1}^{2} e_q^U(s_7) = 0{,}6 \times 0{,}55 + 0{,}4 \times 1{,}0 = 0{,}73.$$

У випадку показникового способу врахування пріоритету:

$$\sum_{q=1}^{2} e_q^U(s_3) = (0{,}85)^{0{,}6} + (0{,}8)^{0{,}4} = 1{,}822;$$

$$\sum_{q=1}^{2} e_q^U(s_4) = (0{,}7)^{0{,}6} + (0{,}9)^{0{,}4} = 1{,}7664;$$

$$\sum_{q=1}^{2} e_q^U(s_6) = (1{,}0)^{0{,}6} + (0{,}45)^{0{,}4} = 1{,}727;$$

$$\sum_{q=1}^{2} e_q^U(s_7) = (0{,}55)^{0{,}6} + (1{,}0)^{0{,}4} = 1{,}699.$$

Отже, згідно з принципом абсолютної поступки для даного прикладу, за обох способів урахування пріоритету, оптимальною є стратегія s_3.

б) У випадку лінійного врахування пріоритету отримуємо:

$$\prod_{q=1}^{2} e_q^U(s_3) = 0{,}6 \times 0{,}4 \times 0{,}85 \times 0{,}8 = 0{,}1632;$$

$$\prod_{q=1}^{2} e_q^U(s_4) = 0{,}6 \times 0{,}4 \times 0{,}7 \times 0{,}9 = 0{,}1512;$$

$$\prod_{q=1}^{2} e_q^U(s_6) = 0{,}6 \times 0{,}4 \times 1{,}0 \times 0{,}45 = 0{,}108;$$

$$\prod_{q=1}^{2} e_q^U(s_7) = 0{,}6 \times 0{,}4 \times 0{,}55 \times 1{,}0 = 0{,}132.$$

У випадку показникового способу врахування пріоритету:

$$\prod_{q=1}^{2} e_q^U(S_3) = (0{,}85)^{0,6} \times (0{,}8)^{0,4} = 0{,}830;$$

$$\prod_{q=1}^{2} e_q^U(S_4) = (0{,}7)^{0,6} \times (0{,}9)^{0,4} = 0{,}774;$$

$$\prod_{q=1}^{2} e_q^U(S_6) = (1{,}0)^{0,6} \times (0{,}45)^{0,4} = 0{,}727;$$

$$\prod_{q=1}^{2} e_q^U(S_7) = (0{,}55)^{0,6} \times (1{,}0)^{0,4} = 0{,}699.$$

Отже, згідно з принципом відносної поступки для даного прикладу, за обох способів урахування пріоритету, оптимальною також є стратегія s_3.

4.7.8. Ієрархічна модель прийняття одноцільових багатокритеріальних рішень у полі однієї інформаційної ситуації

В основу ієрархічної моделі прийняття одноцільових багатокритеріальних рішень у полі однієї інформаційної ситуації покладено принцип гнучкого врахування пріоритету локальних критеріїв в якості стратегій СПР.

Нехай СПР визначено одну ціль, якій відповідає функціонал оцінювання $F = (f_{ki} :\ k = 1,...,m; i = 1,...,n)$. Аналітиками визначено ступінь інформованості, що відповідає j-й інформаційній ситуації

$I_j\,(j=1,\ldots,5)$. Визначено також Q_j критеріїв, які в сукупності в полі j-ї інформаційної ситуації достатньою мірою характеризують кожну з альтернативних стратегій $s_k \in S \quad (k=1,\ldots,m)$.

Сутність пропонованої моделі полягає у визначенні рейтингу кожної з альтернативних стратегій як об'єктивно-суб'єктивної характеристики їх з урахуванням позитивних і негативних ознак (ризику), що властиві цим стратегіям. В основі моделі лежать такі процедури, як нормалізація та згортання інформації.

Критерій *згортки* являє собою функцію, що відображає матрицю розмірів $m \times n$ у матрицю розмірів $m \times 1$ (у стовпчик). В якості критеріїв згортки можна використовувати внутрішні частини локальних критеріїв оцінки якості стратегій. Для позначення оператора згортки на основі критерію e_q використовуватимо символ «$\xrightarrow{e_q}$» $(q=1,\ldots,Q_j)$. Крім локальних критеріїв, в якості критеріїв згортки можна використовувати принципи гнучкого врахування пріоритету на основі вектора вагових коефіцієнтів *U*. В цьому випадку оператор зваженого згортання матриці позначатимемо символом «$\xrightarrow{KU}$».

Якщо СПР уважає за доцільне вибір стратегії, що є компромісною відносно вибраних Q_j локальних критеріїв, то це можна здійснити згідно з ієрархічною моделлю, структуру якої наведено на рис. 4.5 [17].

На рис. 4.5 використано такі умовні позначення: Ze_{jq} — оператори згортання цільового функціонала оцінювання *F*, які відповідають локальним критеріям якості стратегії, використовуваним у полі інформаційної ситуації I_j $(q=1,\ldots,Q_j;\quad j=1,\ldots,5)$; Q_j — кількість операторів згортання, використовуваних у полі j-ї інформаційної ситуації; $\widetilde{Fe}_{jq}$ — вектор-стовпчик, який є результатом згортання матриці *F* з допомогою відповідного оператора $(q=1,\ldots,Q_j)$; $U_j^E=\left(u_{j1}^E;\ldots;u_{jQ_j}^E\right)$ — вектор вагових коефіцієнтів пріоритету, що відображає пріоритетність відповідних критеріїв прийняття рішень $\left(u_{jq}^E \ge 0;\ \sum_{q=1}^{S_j} u_{jq}^E = 1\right)$; FI_j — інтегральний функціонал оцінювання (матриця розмірів $m \times Q_j$, утворена з векторів-стовпчиків $\widetilde{Fe}_{jq}, q=1\ldots,Q_j$); НОРМ — операція нормалізації матриці FI_j; FI_j^{H} — нормалізована матриця; *KU* — оператор зваженого згортання матриці FI_j^{H} з урахуванням вектора вагових коефіцієнтів пріоритету U_j^E; $\widetilde{FI}_j$ — вектор-стовпчик, отриманий в результаті зваженого згортання матриці $FI_j^{\text{Н}}$ і на основі якого можна вибрати оптимальну стратегію; s_{k_0} — оптимальна (компромісна) стратегія.

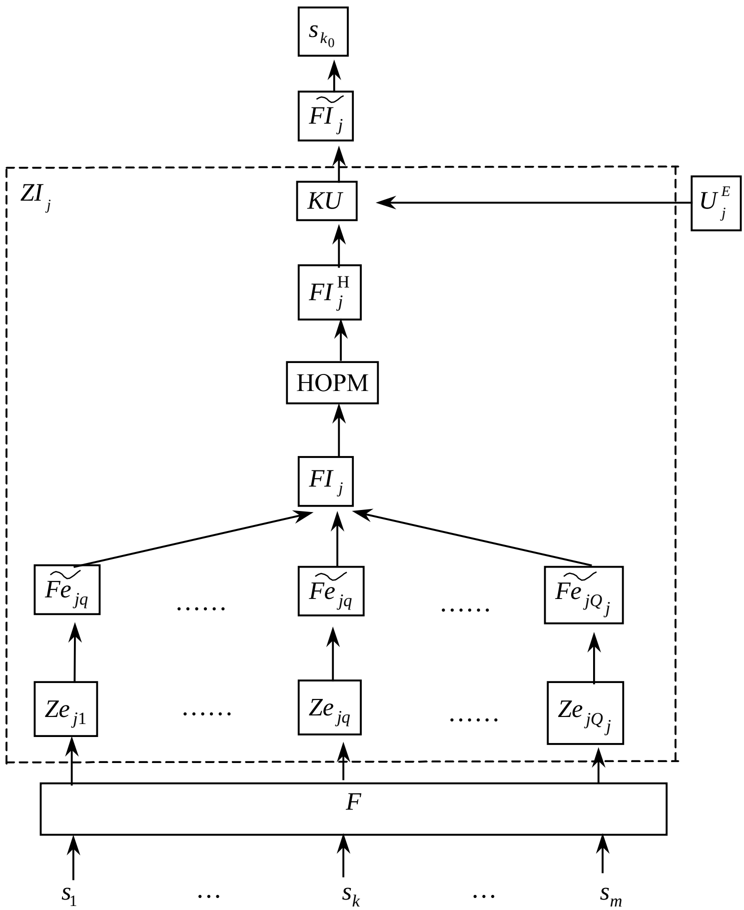
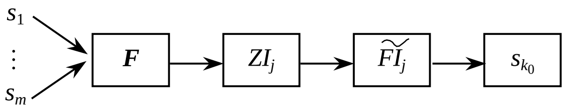


Рис. 4.5. Структура ієрархічної моделі прийняття рішення в полі однієї інформаційної ситуації I_j $(j = 1,...,5)$ (за наявності одного функціонала оцінювання)

Якщо позначити через ZI_j оператор згортання цільового функціонала оцінювання $\boldsymbol{F}$ у полі інформаційної ситуації I_j, то структуру ієрархічної моделі прийняття рішення в полі однієї інформаційної ситуації на основі одного функціонала оцінювання можна подати у вигляді:



Зауважимо, що на базі ієрархічної моделі прийняття одноцільових багатокритеріальних рішень в полі шостої інформаційної ситуації (I_6) можна сконструювати такі критерії прийняття рішення, як модифіковані Гурвіца, а також низку нових критеріїв з використанням семіваріації, коефіцієнта варіації тощо [32].

Приклад 4.6. Перед керівництвом регіональної філії комерційного банку стоїть проблема щодо вибору найпривабливішого кредитного проекту серед його постійної клієнтури, оскільки він у змозі надати лише один «великий» кредит в іноземній валюті. Найбільш економічно обґрунтованими щодо отримання «великих» кредитів та кредитних ліній виявилися проекти чотирьох «великих» клієнтів.

За оцінками фахівців аналітичного відділу регіональної філії комерційного банку (а також незалежної консалтингової фірми), вважаються ймовірними чотири варіанти розвитку кредитно-договірних відносин (чотири стани економічного середовища):

θ_1 — вчасне повернення кредиту зі своєчасною виплатою відсотків за користування кредитними ресурсами банку;

θ_2 — вчасна сплата відсотків, але з несвоєчасним поверненням кредиту та нарахуванням пені за порушення строкових умов договору;

θ_3 — пролонгація кредиту зі зростанням відсоткової ставки та одночасним збільшенням запланованих витрат банку на ведення кредитної справи і втрат, пов’язаних із тимчасовим «заморожуванням» кредитних ресурсів;

θ_4 — повернення заборгованості за кредитом та відсотками за користування ним лише при використанні банком права на реалізацію заставного майна позичальника за умови строкового «заморожування» кредитних ресурсів (суттєве зростання витрат на ведення кредитної справи).

Оцінювання ефективності проекту щодо надання кредиту проводиться на основі прогнозних варіантів отримання прибутку по кожній кредитній операції у розрізі можливих напрямів розвитку кредитного договору. Відповідні розрахунки базуються на статистичній інформації щодо кредитних договорів за минулі роки. Результати наведено у табл. 4.1.

Таблиця 4.1

Можливий позичальник	Варіант розвитку кредитно-договірних відносин (прибуток в УГО)			
	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
s_1	5,00	5,25	3,70	1,20
s_2	4,75	4,78	3,02	2,75
s_3	2,50	2,02	2,00	0,98
s_4	3,00	2,70	2,60	2,55
Q_1 (розподіл імовірності)	0,55	0,25	0,15	0,05

Паралельно аналогічні дослідження проводилися й незалежною консалтинговою фірмою (згідно з домовленістю з керівництвом комерційного банку). Результати наведено у табл. 4.2.

Таблиця 4.2

Можливий позичальник	Варіант розвитку кредитно-договірних відносин (прибуток в УГО)			
	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
s_1	5,00	4,95	3,28	2,20
s_2	4,75	4,35	2,95	1,75
s_3	2,50	2,65	1,90	1,08
s_4	3,00	2,85	1,96	2,05
Q_2 (розподіл імовірності)	0,27	0,39	0,21	0,13

Аналіз. Оцінка якості проектів має спиратися на критерії, характерні для двох інформаційних ситуацій:

- першої (I_1), оскільки на основі статистичної звітності можна оцінити розподіл імовірності варіантів розвитку кредитно-договірних відносин (розподіл імовірності станів економічного середовища);

• п’ятої (I_5), оскільки ведення кредитних банківських операцій вимагає зведення ризику до мінімуму при збереженні гарантованого рівня прибутковості (тобто економічне середовище слід уважати антагоністичним щодо цілей банку).

Виходячи з двох взаємопротилежних цілей, які переслідує комерційний банк (максимальний прибуток та мінімальний ризик), і з урахуванням наявної інформації для вибору проекту оцінку його якості доцільно здійснювати з допомогою таких локальних критеріїв, як: Байєса та мінімального середньоквадратичного відхилення (для I_1); Вальда та Севіджа (для I_5). А тому для вибору проекту доцільно скористатися принципом гнучкого врахування пріоритету щодо локальних критеріїв якості проектів.

Експерти (як регіональної філії комерційного банку, так і незалежної консалтингової фірми) зупинилися на таких оцінках пріоритету локальних критеріїв:

$U_1^E = (0{,}45;\ 0{,}55)$ — вектор вагових коефіцієнтів пріоритету щодо локальних критеріїв першої інформаційної ситуації ($u_{11}^E = 0{,}45$ для критерію Байєса та $u_{12}^E = 0{,}55$ — для критерію мінімального середньоквадратичного відхилення);

$U_5^E = (0{,}60;\ 0{,}40)$ — вектор вагових коефіцієнтів пріоритету щодо локальних критеріїв п’ятої інформаційної ситуації ($u_{51}^E = 0{,}60$ — для критерію Вальда та $u_{52}^E = 0{,}40$ — для критерію Севіджа).

Під час здійснення згортки інтегральних функціоналів оцінювання було вирішено використовувати критерій зваженої сумарної ефективності, для нормалізації функціоналів оцінювання — скористатися методом природної нормалізації.

Розв’язання. Виходячи з умови прикладу розглянемо спочатку задачу вибору компромісного рішення в полі однієї інформаційної ситуації. Для цього скористаємося ієрархічною моделлю, структуру якої наведено на рис. 4.5 (їй відповідають блоки ZI_1 та ZI_5 розгорнутої ієрархічної моделі, структуру якої наведено на рис. 5.2).

Позначимо через F_1 та F_2 матриці, що відповідають функціоналам оцінювання, наведеним в умові прикладу (очевидно, що $F_1 = F_1^+;\ F_2 = F_2^+$):

$$F_1^+ = \begin{pmatrix} 5{,}00 & 5{,}25 & 3{,}70 & 1{,}20 \\ 4{,}75 & 4{,}78 & 3{,}02 & 2{,}75 \\ 2{,}50 & 2{,}02 & 2{,}00 & 0{,}98 \\ 3{,}00 & 2{,}70 & 2{,}60 & 2{,}55 \end{pmatrix};\quad F_2^+ = \begin{pmatrix} 5{,}00 & 4{,}95 & 3{,}28 & 2{,}20 \\ 4{,}75 & 4{,}35 & 2{,}95 & 1{,}75 \\ 2{,}50 & 2{,}65 & 1{,}90 & 1{,}08 \\ 3{,}00 & 2{,}85 & 1{,}96 & 2{,}05 \end{pmatrix}.$$

а) Поклавши $B^{+}(s_k)=e_{11}^{+}(s_k)$, $\sigma(s_k)=e_{12}^{-}(s_k)$ і використовуючи відповідні оператори згортання, в полі I_1 на основі функціонала F_1 отримуємо:

$$F_1^{+} \xrightarrow{B^{+}} \begin{pmatrix} B_1^{+} \\ B_2^{+} \\ B_3^{+} \\ B_4^{+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}58 \\ 4{,}40 \\ 2{,}23 \\ 2{,}84 \end{pmatrix} = \widetilde{F_1 e_{11}^{+}};$$

$$F_1^{+} \xrightarrow{\sigma^{-}} \begin{pmatrix} \sigma_1^{-} \\ \sigma_2^{-} \\ \sigma_3^{-} \\ \sigma_4^{-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}94 \\ 0{,}79 \\ 0{,}37 \\ 0{,}21 \end{pmatrix} = \widetilde{F_1 e_{12}} \to \left(-\widetilde{F_1 e_{12}}\right)^{+}$$

(перехід від вектора $\widetilde{F_1 e_{12}^{-}}$ до вектора $\left(-\widetilde{F_1 e_{12}^{-}}\right)^{+}$, тобто зміна інгредієнта дає змогу отримати інформацію, однорідну відносно знака інгредієнта);

$$F_1^{+} \to F_1 I_1^{+} = \left(\widetilde{F_1 e_{11}^{+}}; -\widetilde{F_1 e_{12}^{-}}\right) =$$
$$= \begin{pmatrix} 4{,}68 & -0{,}94 \\ 4{,}40 & -0{,}79 \\ 2{,}23 & -0{,}37 \\ 2{,}84 & -0{,}21 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{НОРМ}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}886 & 0{,}205 \\ 0 & 0{,}781 \\ 0{,}249 & 1 \end{pmatrix} = F_1 I_1^{\text{Н}}.$$

Скориставшись критерієм зваженої сумарної ефективності і враховуючи, що коефіцієнти пріоритету $u_{11}^{E}=0{,}45$, $u_{12}^{E}=0{,}55$, згортаємо матрицю $F_1 I_1^{\text{Н}}$ у стовпчик:

$$F_1 I_1^{\text{Н}} \xrightarrow{KU} 0{,}45 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}886 \\ 0 \\ 0{,}249 \end{pmatrix} + 0{,}55 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}205 \\ 0{,}781 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}450 \\ 0{,}511 \\ 0{,}430 \\ 0{,}662 \end{pmatrix} = \widetilde{F_1 I_1^{+}}.$$

Оскільки $\widetilde{F_1 I_1^{+}}$ має позитивний інгредієнт, то найвищий рейтинг (рівний 0,662) має проект s_4, а тому $s_{k_0}=s_4$.

б) У полі інформаційної ситуації I_5 з урахуванням F_1 та накладених умов, покладаючи $V^{+}(s_k)=e_{51}^{+}(s_k)$ (оцінка Вальда стратегії s_k), $S^{-}(s_k)=e_{52}^{-}(s_k)$ (оцінка Севіджа стратегії s_k), отримуємо:

$$F_1^+ \xrightarrow{V^+} \begin{pmatrix} \min\limits_j f_{1j}^1 \\ \min\limits_j f_{2j}^1 \\ \min\limits_j f_{3j}^1 \\ \min\limits_j f_{4j}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}20 \\ 2{,}75 \\ 0{,}98 \\ 2{,}55 \end{pmatrix} = \widetilde{F_1 e_{51}^+};$$

$$F_1^+ \to R^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1{,}55 \\ 0{,}25 & 0{,}47 & 0{,}68 & 0 \\ 2{,}50 & 3{,}23 & 1{,}70 & 1{,}77 \\ 2{,}00 & 2{,}55 & 1{,}10 & 0{,}20 \end{pmatrix} \xrightarrow{S^-} \begin{pmatrix} \max\limits_j r_{1j}^1 \\ \max\limits_j r_{2j}^1 \\ \max\limits_j r_{3j}^1 \\ \max\limits_j r_{4j}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}55 \\ 0{,}68 \\ 3{,}23 \\ 2{,}55 \end{pmatrix} =$$

$$= \widetilde{F_1 e_{52}^-} \to \left(-\widetilde{F_1 e_{52}^-}\right)^+;$$

$$F_1^+ \to F_1 I_5^+ = \left(\widetilde{F_1 e_{51}^+}; -\widetilde{F_1 e_{52}^-}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1{,}20 & -1{,}55 \\ 2{,}75 & -0{,}68 \\ 0{,}98 & -3{,}23 \\ 2{,}55 & -2{,}55 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{НОРМ}} \begin{pmatrix} 0{,}124 & 0{,}659 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0{,}887 & 0{,}267 \end{pmatrix} = F_1 I_5^{\text{Н}}.$$

Враховуючи коефіцієнти пріоритету $u_{51}^E = 0{,}6,\ u_{52}^E = 0{,}4,$ отримуємо:

$$F_1 I_5^{\text{Н}} \xrightarrow{KU} 0{,}6 \times \begin{pmatrix} 0{,}124 \\ 1 \\ 0 \\ 0{,}887 \end{pmatrix} + 0{,}4 \times \begin{pmatrix} 0{,}659 \\ 1 \\ 0 \\ 0{,}267 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}338 \\ 1 \\ 0 \\ 0{,}639 \end{pmatrix} = \widetilde{F_1 I_5^+}.$$

Проект s_2 має найвищий рейтинг (рівний одиниці), а тому $s_{k_0} = s_2$.

в) Знайдемо тепер компромісне рішення в полі інформаційної ситуації I_1 з урахуванням F_2:

$$F_2^+ \xrightarrow{B^+} \begin{pmatrix} 4{,}26 \\ 3{,}83 \\ 2{,}25 \\ 2{,}6 \end{pmatrix} = \widetilde{F_2 e_{11}^+};\quad F_2^+ \xrightarrow{\sigma} \begin{pmatrix} 1{,}02 \\ 1{,}01 \\ 0{,}53 \\ 0{,}44 \end{pmatrix} = \widetilde{F_2 e_{12}^-} \to \left(-\widetilde{F_2 e_{12}^-}\right)^+;$$

$$F_2^+ \to \widetilde{F_2 I_1^+} = \left(\widetilde{F_2 e_{11}^+}; -F_2 e_{12}^-\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 4{,}26 & -1{,}02 \\ 3{,}83 & -1{,}01 \\ 2{,}25 & -0{,}53 \\ 2{,}6 & -0{,}44 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{НОРМ}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}786 & 0{,}017 \\ 0 & 0{,}845 \\ 0{,}174 & 1 \end{pmatrix} = \widetilde{F_2 I_1^{\text{Н}}};$$

$$F_2 I_1^H \xrightarrow{KU} 0{,}45 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}786 \\ 0 \\ 0{,}174 \end{pmatrix} + 0{,}55 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}017 \\ 0{,}845 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}450 \\ 0{,}363 \\ 0{,}456 \\ 0{,}628 \end{pmatrix} = \widetilde{F_2 I_1^+}.$$

Проект s_4 має найвищий рейтинг (рівний 0,628), а тому $s_{k_0} = s_4$.

г) У полі інформаційної ситуації I_5 з урахуванням F_2 та накладених умов отримуємо:

$$F_2^+ \xrightarrow{V^+} \begin{pmatrix} 2{,}2 \\ 1{,}75 \\ 1{,}08 \\ 1{,}96 \end{pmatrix} = \widetilde{F_2 e_{51}^+};$$

$$F_2^+ \to R^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}6 & 0{,}33 & 0{,}45 \\ 2{,}5 & 2{,}3 & 1{,}38 & 1{,}12 \\ 2 & 2{,}1 & 1{,}32 & 0{,}15 \end{pmatrix} \xrightarrow{S^-} \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}6 \\ 2{,}5 \\ 2{,}1 \end{pmatrix} = \widetilde{F_2 e_{52}^-} \to \left(-\widetilde{F_2 e_{52}^-}\right)^+;$$

$$F_2^+ \to F_2 I_5^+ = \left(\widetilde{F_2 e_{51}^+}; -\widetilde{F_2 e_{52}^-}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 2{,}2 & 0 \\ 1{,}75 & -0{,}6 \\ 1{,}08 & -2{,}5 \\ 1{,}96 & -2{,}1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{НОРМ}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}598 & 0{,}76 \\ 0 & 0 \\ 0{,}786 & 0{,}16 \end{pmatrix} = F_2 I_5^{\text{Н}};$$

$$F_2 I_5^H \xrightarrow{KU} 0{,}6 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}598 \\ 0 \\ 0{,}786 \end{pmatrix} + 0{,}4 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}76 \\ 0 \\ 0{,}16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}663 \\ 0 \\ 0{,}536 \end{pmatrix} = \widetilde{F_2 I_5^+}.$$

Проект s_1 має найвищий рейтинг (рівний 1), а тому $s_{k_0} = s_1$.

Згідно з результатами, отриманими у пунктах а) та б), фахівці регіональної філії комерційного банку в разі використання принципу жорсткого врахування пріоритету щодо інформаційних ситуацій можуть віддати перевагу проекту s_4, якщо інформаційна ситуація $I_1 \succ I_5$ (тобто має місце ряд пріоритету $RI^I = (I_1;\ I_5)$), або ж проекту s_2, якщо $I_5 \succ I_1$ (тобто $RI^I = (I_5;\ I_1)$).

У свою чергу, результати, отримані у пунктах в) і г), вказують на те, що фахівці консалтингової фірми віддають перевагу проекту s_1 (інформаційна ситуація I_1 має вищий пріоритет) або s_2 (вищий пріоритет має інформаційна ситуація I_5).

4.7.9. Ієрархічна модель прийняття багатокритеріальних рішень у полі кількох інформаційних ситуацій

В основу ієрархічної моделі прийняття багатокритеріальних (одноцільових) рішень у полі кількох інформаційних ситуацій покладено принцип гнучкого врахування пріоритету як локальних критеріїв якості стратегій СПР, так й інформаційних ситуацій.

Зазначимо, що необхідність прийняття рішень, які є компромісними щодо кількох інформаційних ситуацій, виникає під час аналізу, наприклад, ситуації виходу на новий ринок з продукцією, що вже реалізовувалася на інших ринках, або ситуації, коли конкурентний тиск на певну продукцію протягом фіксованого проміжку часу може або проявитися, або ні.

У такому випадку доцільно використовувати ієрархічну модель, структуру якої наведено на рис. 4.6.

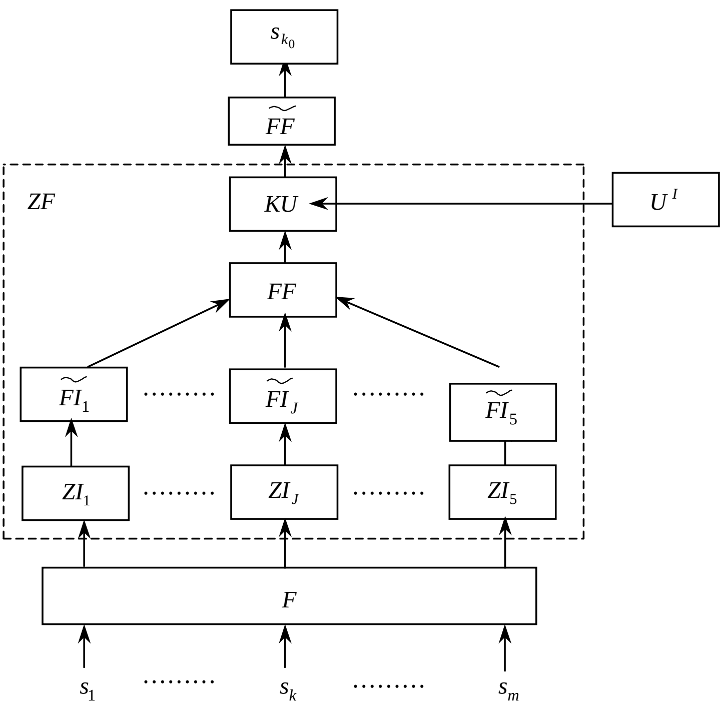
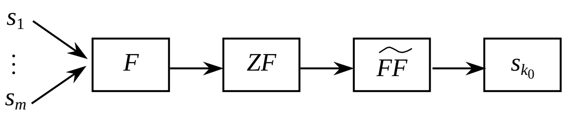


Рис. 4.6. Структура ієрархічної моделі прийняття рішення в полі кількох інформаційних ситуацій (на основі одного функціонала оцінювання)

На рис. 4.6 використано умовні позначення, які мали місце в пункті 4.7.8, і, крім того: $U^I = \left(u_1^I;...;u_5^I\right)$ — вектор вагових коефіцієнтів, що відображають пріоритетність відповідних інформаційних ситуацій $\left(u_j^I \geq 0; \sum_{j=1}^{5} u_j^I = 1\right)$; FF — інтегральний функціонал оцінювання (матриця), утворений з векторів-стовпчиків $\widetilde{FI}_j$ $(j = 1,...,5)$; FF^{H} — нормалізована матриця; $\widetilde{FF}$ — вектор-стовпчик, отриманий в результаті зваженого згортання матриці FF і на основі якого можна вибрати оптимальну стратегію.

Якщо позначити через ZF оператор згортання функціонала оцінювання F у полі кількох інформаційних ситуацій, то структуру відповідної ієрархічної моделі прийняття рішення можна подати у вигляді:



Слід зауважити, що на базі ієрархічної моделі прийняття багатокритеріальних рішень у полі кількох інформаційних ситуацій можна сконструювати критерій Ходжеса—Лемана [32], а також низку інших критеріїв прийняття рішень.

Приклад 4.7. Виходячи з умови прикладу 4.6 необхідно знайти рішення, яке є компромісним щодо інформаційних ситуацій I_1 та I_5, на основі: а) функціонала оцінювання F_1; б) функціонала оцінювання F_2.

У виборі компромісних рішень необхідно врахувати, що пріоритет інформаційних ситуацій визначається вектором вагових коефіцієнтів $U^I = (0{,}42; 0{,}58)$, де $u_1^I = 0{,}42$ — ваговий коефіцієнт пріоритету для I_1, $u_5^I = 0{,}58$ — для I_5.

Розв'язання. Для визначення компромісних рішень скористаємося принципом гнучкого врахування як локальних критеріїв якості проектів, так й інформаційних ситуацій. Для цього скористаємося ієрархічною моделлю, структуру якої наведено на рис. 4.6 (їй відповідають блоки ZF_1 і ZF_2 структури розгорнутої ієрархічної моделі, наведеної на рис. 5.2).

а) Знайдемо компромісне рішення щодо I_1 та I_5 з урахуванням F_1. Для цього на основі векторів-стовпчиків $\widetilde{F_1 I_1^+}$ та $\widetilde{F_1 I_5^+}$, отриманих у прикладі 4.6, утворюємо матрицю FF_1^+. З урахуванням коефіцієнтів пріоритету інформаційних ситуацій $u_1^I = 0{,}42$, $u_5^I = 0{,}58$ згортаємо FF_1^+ у стовпчик:

$$FF_1^+ = \left(\widetilde{F_1 I_1^+}; \widetilde{F_1 I_5^+}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}450 & 0{,}338 \\ 0{,}511 & 1 \\ 0{,}430 & 0 \\ 0{,}662 & 0{,}267 \end{pmatrix} \xrightarrow{KU} 0{,}42 \times \begin{pmatrix} 0{,}450 \\ 0{,}511 \\ 0{,}430 \\ 0{,}662 \end{pmatrix} + 0{,}58 \times \begin{pmatrix} 0{,}338 \\ 1 \\ 0 \\ 0{,}639 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}385 \\ 0{,}795 \\ 0{,}181 \\ 0{,}648 \end{pmatrix} = \widetilde{FF_1}.$$

Згідно з отриманим результатом проект s_2 має найвищий рейтинг, рівний 0,795, тобто цей проект, з точки зору фахівців регіональної філії комерційного банку, і є компромісним рішенням щодо двох інформаційних ситуацій I_1 та I_5 з урахуванням F_1.

б) З урахуванням F_2 у полі інформаційних ситуацій I_1 та I_5, на основі векторів-стовпчиків $\widetilde{F_2 I_1^+}$ та $\widetilde{F_2 I_2^+}$, отриманих у прикладі 4.6, маємо:

$$FF_2^+ = \left(\widetilde{F_2 I_1^+}; \widetilde{F_2 I_5^+}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}450 & 1 \\ 0{,}363 & 0{,}663 \\ 0{,}465 & 0 \\ 0{,}628 & 0{,}536 \end{pmatrix} \xrightarrow{KU} 0{,}42 \times \begin{pmatrix} 0{,}450 \\ 0{,}363 \\ 0{,}465 \\ 0{,}628 \end{pmatrix} + 0{,}58 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}663 \\ 0 \\ 0{,}536 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}769 \\ 0{,}537 \\ 0{,}195 \\ 0{,}575 \end{pmatrix} = \widetilde{FF_2^+}.$$

Отже, згідно з розрахунками, зробленими консалтинговою фірмою, найвищий пріоритет, рівний 0,769, має стратегія s_1, яка і є, на їхній погляд, компромісною щодо інформаційних ситуацій I_1 та I_5.

Отже, висновуємо. Не викликає великого сумніву те, що діяльність регіональної філії комерційного банку контролюється центральним офісом (особливо щодо надання «великих» кредитів в іноземній валюті). Нехай при цьому правлінням комерційного банку жорстко враховується пріоритет щодо функціоналів оцінювання (колективів експертів). Тоді: у випадку, коли $F_1 \succ F_2$ (тобто має місце ряд пріоритету $RI^F = (F_1;\ F_2)$), правління комерційного банку підтримає вибір проекту s_2; у випадку, коли $F_2 \succ F_1$ (тобто $RI^F = (F_2;\ F_1)$), — віддасть перевагу проекту s_1.

4.7.10. Критерій мінімальної відстані між інформаційними матрицями

Для спрощення викладок знову повернемося до задачі, поставленої у пункті 4.7.8. А саме: СПР визначено ціль, якій відповідає функціонал оцінювання $F = (f_{ki} : k = 1,...,m;\ i = 1,...,n)$. Аналітиками визначено ступінь інформованості (їй відповідають інформаційні ситуації I_j $(j = 1, ..., 5)$ і для кожної I_j визначено T_j локальних критеріїв e_t. Покладемо: $T = \sum_{j=1}^{5} T_j$.

Кожному критерію e_t ставиться у відповідність критеріальна матриця

$$K(e_t) = \left(e_{ki}^t : k = 1,...,m; i = 1,...,n\right),\quad t = 1,...,T,$$

елементами якої є оцінки чистих стратегій s_k $(k = 1,...,\ m)$ для кожного стану економічного середовища θ_i $(i = 1,...,\ n)$ згідно з t-м критерієм якості $(t = 1,...,T)$ на основі функціонала оцінювання F.

Наприклад, якщо вибирається критерій Байєса $(t = t_1)$, то

$$K(e_{t_1}) = (e_{ki}^{t_1} = f_{ki} : k = 1,...,\ m;\ i = 1,...,n) = F.$$

У разі вибору критерію мінімальної дисперсії $(t = t_2)$

$$K(e_{t_2}) = (e_{ki}^{t_2} = f_{ki} - B(s_k;Q))^2 : k = 1,...,\ m;\ i = 1,...,\ n)$$

(тут Q — розподіл імовірності щодо станів економічного середовища).

Якщо ж вибирається критерій Вальда $(t = t_3)$, то у випадку, коли $F = F^+$, k-й рядок критеріальної матриці $K(e_{t_3})$ складають елементи, що визначаються згідно з формулою

$$e_{ki}^{t_3} = f_k^{\min} = \min_{\theta_i \in \Theta} f_{ki}^+,\quad i = 1,...,n.$$

Тобто елементи k-го рядка матриці $K(e_{t_3})$ збігаються за величиною і рівні значенню $f_k^{\min}$. У випадку, коли $F = F^-$, елементами k-го рядка критеріальної матриці $K(e_{t_3})$ є рівні між собою величини

$$e_{ki}^{t_3} = f_k^{\max} = \max_{\theta_i \in \Theta} f_{ki}^-,\ i = 1,...,\ n.$$

Очевидно, що для будь-якого критерію якості побудова відповідної критеріальної матриці не викликає значних ускладнень.

З двовимірних матриць $K(e_t)$ $(t=1,\ldots,T)$ утворюємо тривимірну матрицю (куб інформації)

$$K=(e_{ki}^t:\ k=1,\ldots,m;\quad i=1,\ldots,n;\quad t=1,\ldots,T)$$

шляхом паралельного розміщення їх одна над одною (рис. 4.7) уздовж осі аплікат «t» (кожна з матриць $K(e_t)$ $(t=1,\ldots,T)$ зорієнтована у тривимірній прямокутній системі координат таким чином: чистим стратегіям $s_k \in S$ відповідають точки $k=1,\ldots,m$ на осі абсцис «k», станам економічного середовища $\theta_i \in \Theta$ відповідають точки $i=1,\ldots,n$ на осі ординат «i», номери критеріїв якості $t=1,\ldots,T$ є точками, розміщеними на осі «t».

Тоді чистій стратегії $s_k \in S$ відповідає інформаційна матриця, що утворюється внаслідок вертикального перетину куба інформації площиною, що паралельна площині «ордината—апліката» $(i0t)$ і проходить через точку «k» на осі абсцис (відповідає стратегії s_k). Позначимо цю матрицю через $K(s_k)$.

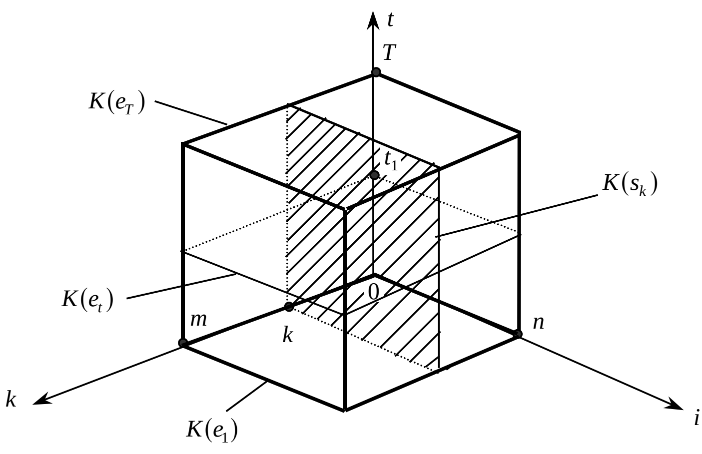


Рис. 4.7. Куб інформації та інформаційна матриця

Якщо згідно з методикою, запропонованою у розділі 3, визначено оптимальну змішану стратегію s_P, яка задається вектором $P=(p_1;\ldots;\ p_m)$, то цій стратегії відповідатиме інформаційна матриця

$$K(s_P)=\sum_{k=1}^{m}(p_k K(s_k))=\left(e_{P_i}^t,\ i=1,\ldots,n;\ t=1,\ldots,T\right).$$

Оскільки рішенню, що збігається з оптимальною змішаною стратегією СПР, властива найбільша стійкість, то в якості компромісної (оптимальної) вважатимемо ту чисту стратегію s_{k_0}, для якої інформаційна матриця $K(s_{k_0})$ найменше відрізняється від матриці $K(s_P)$. Для порівняння матриць можна скористатися метрикою Хеммінга [36].

Якщо задано вектор вагових коефіцієнтів пріоритету $U^{IE} = \left(u_t^{IE} : t = 1,\dots,T\right)$, заданий згідно з (4.20), що враховує як пріоритет локальних критеріїв якості стратегій, так і пріоритет інформаційних ситуацій, яким відповідають ці критерії, то, використовуючи метрику Хеммінга, відстань між інформаційними матрицями $K(s_k)$ і $K(s_P)$ обчислюється за такою формулою [36]:

$$d_{P_k} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{Q} \left(q_i u_t^{IE} \left| e_{ki}^t - e_{Pi}^t \right|\right).$$

Очевидно, що чим меншою є відстань між інформаційними матрицями $K(s_k)$ і $K(s_P)$, тим менш ризикованою (стійкішою) є відповідна чиста стратегія.

А тому математичну модель відповідного принципу оптимальності (критерію *мінімальної відстані між інформаційними матрицями стратегій СПР*) можна подати у вигляді:

$$s_{k_0} : \left(E\left(s_{k_0}\right); U^{IE}\right) = opt\left\{\left(E(s_k); U^{IE}\right) : \quad E(s_k) \in \Omega_E\right\} =$$

$$= \min_{s_k \in S} d_{Pk} = \min_{s_k \in S} \sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{T} \left(q_i u_t^{IE} \left| e_{ki}^t - e_{Pi}^t \right|\right).$$

Якщо ж в оцінюванні відстані між інформаційними матрицями (величини ризику) враховувати лише відхилення, що є несприятливими для СПР, то принцип оптимальності матиме вигляд

$$s_{k_0} : \quad \left(E\left(s_{k_0}\right); U^{IE}\right) = \min_{s_k \in S} d_{Pk} = \min_{s_k \in S} \sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{T} (\alpha_{it} q_i u_t^{IE} \left| e_{ki}^t - e_{Pi}^t \right|),$$

де α_{it} — індикатор несприятливого відхилення, тобто

$$\alpha_{it} = \begin{cases} 0, & \text{у випадку сприятливого для СПР відхилення елемента} \\ & \text{матриці } K(s_k) \text{ від відповідного елемента матриці } K(s_P); \\ 1, & \text{у випадку несприятливого відхилення.} \end{cases}$$

У загальному випадку, в оцінюванні ризику економічного об'єкта (системи), як правило, суб'єкта ризику цікавить низка показників, які відбивають різні грані невизначеності, конфлікту та породженого ними ризику. З нашого погляду, кількісна оцінка міри ризику — це вектор $W = (w_1; w_2; ...)$, де w_i, $i = 1, 2, ...$ — окремі показники (компоненти) міри ризику. Частина з них має об'єктивну природу (дисперсія, семіваріація, коефіцієнт варіації тощо); решта компонент цього вектора є суб'єктивними оцінками ступеня ризику, оскільки вони залежать від ставлення суб'єкта ризику до невизначеності, конфліктності.

У низці випадків компоненти вектора міри ризику (W) можна розподілити на дві підгрупи, одна з яких має обмеження, що задаються нормативами. Ці показники враховуються індивідуально (обмеження, що входять до відповідної математичної моделі, або критеріальні фільтри, що звужують множину альтернативних стратегій), іншу ж підгрупу можна інтегрувати за деякими правилами згортки.

Зазначимо, що в багатоцільових багатокритеріальних задачах соціально-економічного характеру з урахуванням міри ризику як вектора перспективним є використання апарату тензорного аналізу. Його адекватне використання для розв'язування таких задач є одним із пріоритетних напрямів розвитку ризикології.

4.8. КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ТА ТЕМИ ДЛЯ ОБГОВОРЕННЯ

1. Що розуміють під ситуацією прийняття багатокритеріальних рішень?
2. Який вихід можна запропонувати для прийняття багатокритеріальних рішень, якщо переслідуються взаємопротилежні цілі?
3. Які концептуальні проблеми виникають під час розв'язання багатокритеріальних задач?
4. Перелічіть та охарактеризуйте способи нормалізації інформації.
5. Перелічіть та охарактеризуйте способи відображення пріоритету локальних об'єктів.
6. Сформулюйте та охарактеризуйте принципи врахування пріоритету, що найчастіше використовуються на практиці. Їх недоліки та переваги.
7. Які способи гнучкого врахування пріоритету найчастіше використовуються на практиці?
8. Які підмножини множини допустимих рішень називаються областю компромісів та областю згоди?
9. У чому полягає сутність принципу жорсткого врахування пріоритету?
10. Перелічіть та охарактеризуйте схеми компромісу, що використовуються у випадку жорсткого врахування пріоритету.

11. Які переваги та недоліки має принцип жорсткого врахування пріоритету?

12. Перелічіть та охарактеризуйте схеми компромісу за гнучкого врахування пріоритету.

13. У чому полягає сутність принципу гнучкого врахування пріоритету?

14. У чому полягає сутність принципу:

а) послідовної оптимізації;

б) виділення найважливішого критерію;

в) послідовної поступки;

г) рівномірності;

д) рівності;

е) квазірівності;

є) максиміну (мінімаксу);

ж) максимального відхилення;

з) модифікованої квазірівності;

и) справедливої поступки;

і) абсолютної поступки;

ї) відносної поступки?

15. Які переваги та недоліки має принцип абсолютної поступки? відносної поступки?

16. У чому полягає сутність ієрархічної моделі прийняття багатоцільових багатокритеріальних рішень?

17. Побудуйте ієрархічні моделі, що відповідають ситуації прийняття рішення:

а) згідно з модифікованим критерієм;

б) згідно з критерієм Гурвіца;

в) згідно з критерієм Ходжеса—Лемана.

18. Поясніть сутність ієрархічної моделі прийняття рішень у полі кількох інформаційних ситуацій.

19. Дайте економічну інтерпретацію випадку, коли рішення приймається:

а) у полі інформаційних ситуацій I_3 та I_4;

б) у полі інформаційних ситуацій I_1 та I_3.

20. У чому полягає сутність критерію мінімальної відстані між інформаційними матрицями стратегій СПР?

4.9. ТЕМИ РЕФЕРАТІВ

1. Використання ієрархічних моделей у проблемах антикризового управління фірмою.

2. Ієрархічні моделі та їх використання для обрання інноваційних проектів з урахуванням ризику.

3. Застосування багатокритеріального підходу під час аналізу кредитного ризику комерційного банку.

4.10. ПРИКЛАДИ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. СПР, виділивши чотири стани економічного середовища, аналізує п'ять альтернативних стратегій з позиції одного цільового функціонала оцінювання $F = F^-$ (збитки в УГО):

$$F = F^- = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 7 & 9 \\ 5 & 6 & 3 & 8 \\ 4 & 9 & 9 & 5 \\ 6 & 4 & 5 & 9 \\ 7 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розподіл імовірності щодо станів економічного середовища задається вектором $Q = (0,2;\ 0,3;\ 0,4;\ 0,1)$.

Стратегія має прийматися на основі трьох критеріїв оцінки її якості: Вальда (e_1), мінімального середньоквадратичного відхилення (e_2) та Байєса (e_3). Ряд пріоритету щодо критеріїв якості має такий вигляд:

$$RI^E = (e_1;\ e_2;\ e_3).$$

Необхідно знайти оптимальну (компромісну) стратегію згідно з:

а) принципом послідовної оптимізації;

б) принципом виділення найважливішого критерію (значення $e_2^{\text{фікс}}$ та $e_3^{\text{фікс}}$ виберіть самостійно і дослідіть залежність оптимальної стратегії від значень цих величин);

в) принципом послідовної поступки (значення поступок Δe_1, Δe_2 та Δe_3 виберіть самостійно і дослідіть залежність оптимальної стратегії від значень цих величин).

Чи потрібно нормалізувати матрицю E (матрицю кількісних показників якості стратегій)?

2. Виходячи з умови прикладу 1 і вважаючи, що інформаційні ситуації утворюють ряд пріоритету

$$RI^I = (I_5;\ I_1),$$

необхідно:

а) побудувати на основі першої формули Фішберна вектор вагових коефіцієнтів пріоритету локальних критеріїв якості стратегій U^{IE};

б) вибрати оптимальну стратегію згідно з принципом максимального відхилення від опорної гіперплощини.

За відповідних обчислень скористатися лінійним способом урахування пріоритету.

3. Виходячи з умови прикладу 1 і вважаючи, що інформаційні ситуації утворюють ряд пріоритету

$$RI^{I} = (I_5;\ I_1),$$

необхідно:

а) побудувати на основі другої формули Фішберна вектор вагових коефіцієнтів пріоритету локальних критеріїв якості стратегій U^{IE};

б) вибрати оптимальну стратегію згідно з принципом абсолютної поступки;

в) вибрати оптимальну стратегію згідно з принципом відносної поступки.

За відповідних обчислень скористатись: а) лінійним способом урахування пріоритету; б) показниковим способом урахування пріоритету.

4. Виходячи з умов прикладу 1 і вважаючи, що інформаційні ситуації утворюють ряд пріоритету

$$RI^{I} = (I_5;\ I_1),$$

вибрати оптимальну стратегію з допомогою ієрархічної моделі прийняття одноцільових багатокритеріальних рішень у полі двох інформаційних ситуацій.

Відповідні вагові коефіцієнти пріоритету обчислити на основі першої формули Фішберна.

Побудувати відповідну ієрархічну схему прийняття рішення.

5. Виходячи з умови прикладу 1 необхідно:

а) визначити змішану стратегію СПР;

б) побудувати куб інформації, що відповідає вибраним локальним критеріям якості чистих стратегій СПР;

в) побудувати інформаційну матрицю $K(s_P)$, що відповідає змішаній стратегії СПР;

г) визначити оптимальну стратегію на основі критерію мінімальної відстані між інформаційними матрицями змішаної і чистих стратегій СПР.

Для визначення відстані між інформаційними матрицями скористатися метрикою Хеммінга, що враховує: 1) будь-які відхилення щодо елементів відповідних матриць; 2) лише несприятливі відхилення щодо елементів відповідних матриць.

4.11. ДОДАТОК ДО РОЗДІЛУ 4

4.11.1. Інваріантність рівняння опорної гіперплощини

Нехай локальні критерії якості мають позитивний інгредієнт, нормалізовані (наприклад, згідно з методом природної нормалізації) і зважені на основі лінійного способу врахування приорітету. Тобто для стратегії s_k $(k = 1,...,\ m)$ замість вектора

$$E^+(s_k) = \left(e_1^+(s_k);...;\ e_Q^+(s_k)\right)$$

розглядається зважений вектор

$$\left(E^+(s_k);\ U^{IE}\right) = \left(u_1^{IE}\ e_1^+(s_k);...;\ u_Q^{IE}\ e_Q^+(s_k)\right).$$

Для q-го критерію $e_q^U = u_q^{IE}\ e_q$ визначається його максимальне щодо множини стратегій значення

$$e_q^{U\max} = e_q^U\left(s_{k_q}\right) = \max_{s_k \in S}\left(u_q^{IE} e_q(s_k)\right), \quad q = 1,...,Q.$$

На точках

$$E^U\left(s_{k_q}\right) = \left(u_1^{IE} e_1\left(s_{k_1}\right);...;\ u_Q^{IE} e_Q\left(s_{k_Q}\right)\right)$$

будується рівняння опорної гіперплощини для зважених локальних критеріїв якості (вважається, що одночасно всі вагові коефіцієнти пріоритету $u_q^{IE} > 0, \quad q = 1,...,Q$):

$$\begin{vmatrix} u_1^{IE} e_1 & u_2^{IE} e_2 & \cdots & u_Q^{IE} e_Q & 1 \\ u_1^{IE} e_1\left(s_{k_1}\right) & u_2^{IE} e_2\left(s_{k_2}\right) & \cdots & u_Q^{IE} e_Q\left(s_{k_Q}\right) & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & ... \\ u_1^{IE} e_1\left(s_{k_Q}\right) & u_2^{IE} e_2\left(s_{k_Q}\right) & \cdots & u_Q^{IE} e_Q\left(s_{k_Q}\right) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Скориставшись властивостями визначників, отримуємо:

$$u_1^{IE} u_2^{IE} ... u_Q^{IE} \times \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_Q & 1 \\ e_1\left(s_{k_1}\right) & e_2\left(s_{k_1}\right) & \cdots & e_Q\left(s_{k_1}\right) & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e_1\left(s_{k_Q}\right) & e_2\left(s_{k_Q}\right) & \cdots & e_Q\left(s_{k_Q}\right) & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.26}$$

Скоротивши праву та ліву частини отриманого рівняння на множник $u_1^{IE} u_2^{IE} ... u_Q^{IE} \neq 0,$ отримуємо рівняння (4.14). Це вказує на те, що рівняння опорної гіперплощини (4.14) є інваріантним щодо зміни компонентів вектора вагових коефіцієнтів пріоритету.

Згідно з отриманим у пункті 4.7.2 результатом рівняння (4.26) можна записати у вигляді

$$u_1^{IE} \dots u_Q^{IE} a_1 e_1 + \dots + u_1^{IE} \dots u_Q^{IE} a_Q e_Q + \dots + u_1^{IE} \dots u_Q^{IE} b = 0. \qquad (4.27)$$

Ураховуючи, що $e_q^U = u_q^{IE} e_q$, $q = 1,\dots Q$, від (4.27) приходимо до рівняння

$$u_2^{IE} \dots u_Q^{IE} a_1 e_1^U + \dots + u_1^{IE} \dots u_{Q-1}^{IE} a_Q e_Q^U + \dots + u_1^{IE} \dots u_Q^{IE}\ b = 0. \qquad (4.28)$$

Для рівняння (4.28) знаходимо нормуючий множник

$$\mu^U = \pm \frac{1}{\sqrt{\left(u_2^{IE} \dots u_Q^{IE} a_1\right)^2 + \dots + \left(u_1^{IE} \dots u_{Q-1}^{IE} a_Q\right)^2}}.$$

Тоді відхилення точки $E^U(s_k) = \left(e_1^U(s_k);\dots;\ e_Q^U(s_k)\right)$ від опорної гіперплощини (4.28)

$$\delta\left(E^U(s_k)\right) =$$
$$= \mu^U u_2^{IE} \dots u_Q^{IE} a_1 e_1^U(s_k) + \dots + \mu^U u_1^{IE} \dots u_{Q-1}^{IE} a_Q e_Q^U(s_k) + \mu^U u_1^{IE} \dots u_Q^{IE} \beta =$$
$$= \frac{\mu^U u_1^{IE} \dots u_Q^{IE}}{\mu} \left(\mu a_1 e_1(s_k) + \mu a_Q e_Q(s_k) + \mu\beta\right) =$$
$$= \frac{\mu^U u_1^{IE} \dots u_Q^{IE}}{\mu} \delta(E(s_k)) = C\delta(E(s_k)),$$

де $C = \dfrac{\mu^U u_1^{IE} \dots u_Q^{IE}}{\mu} = \text{const}$ за вибраної СПР системи пріоритету, нормуючий множник $\mu = \pm \dfrac{1}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_Q^2}}$.

Тобто за переходу від системи координат $\left(e_1;\dots;e_Q\right)$ до системи координат $\left(e_1^U;\dots;e_Q^U\right)$ відхилення $\delta\left(E^U(s_k)\right)$ точок $E^U(s_k)$ ($k = 1,\dots,m$) від опорної гіперплощини (4.28) є пропорційним (з постійним коефіцієнтом пропорції) величинам відхилень точок $E(s_k)$ $(k = 1,\dots,\ n)$ від опорної гіперплощини (4.15).

Встановлена властивість щодо відхилень $\left(\delta\left(E^U(s_k)\right) = C\delta(E(s_k))\right.$ $\left.(k = 1,\dots,m\right)$ вказує на те, що висновки, отримані згідно з принципом максимального відхилення, у випадку, коли всі локальні критерії є рівнопріоритетними, залишаються справедливими й у випадку, коли локальні критерії мають різний пріоритет.

4.11.2. Сумарна відносна поступка (знижка) як оцінка приросту мультиплікативної функції

Нехай вектор локальних критеріїв якості має позитивний інгредієнт, тобто $E^U(s_k) = \left(E^U(s_k)\right)^+$, і нормалізований таким чином, що має невід'ємні компоненти. Можуть мати місце три випадки:

1) в області $\Omega_{E^U}^{\text{КП}}$ для усіх точок $E^U(s_k)$ компонента $e_{q'}^U(s_k) = 0$, $1 \le q' \le Q$, $s_k \in S^{\text{КП}}$;

2) усі точки $e_{q'}^U(s_k) \in \Omega_{E^U}^{\text{КП}}$ мають хоча б одну нульову компоненту;

3) знайдеться, принаймні, одна точка $e^U(s_{k'}) \in \Omega_{E^U}^{\text{КП}}$ з усіма ненульовими компонетами.

У першому випадку робимо висновок, що область $\Omega_{E^U}^{\text{КП}}$ є виродженою, тобто для усіх її точок певна якість має нульовий рівень. А тому компромісну (оптимальну) стратегію необхідно шукати в $(Q-1)$-вімірному підпросторі (а то й навіть у підпросторі ще нижчої розмірності).

Другий випадок теж належить до виродженого, тобто компромісну (оптимальну) стратегію необхідно шукати в одному з $(Q-1)$-вимірних підпросторів. А тому виникає нова проблема — надання пріоритету цим підпросторам. Але це вже предмет окремого дослідження.

Ми ж досліджуватимемо третій, невироджений випадок. Покажемо, що у цьому випадку всі компоненти вектора $E^U(s_{k_0})$, який відповідає оптимальній згідно з критерієм відносної поступки стратегії $s_{k_0} \in S^{\text{КП}}$, є ненульовими. Нехай це не так, тобто компонента $e_{q'}^U(s_k) = 0$. Тоді за переходу до $s_{k_1} \in S^{\text{КП}}$, стратегія для якої вектор $E^U(s_{k_1})$ має усі ненульові компонети, маємо:

$$\Delta_{k_0 k_1}^{\text{відн}} \frac{e_{q'}^U(s_{k_1}) - e_{q'}^U(s_{k_0})}{e_{q'}^U(s_{k_0})} = \frac{e_{q'}^U(s_{k_1}) - 0}{0} = \frac{e_{q'}^U(s_{k_1})}{0} = +\infty.$$

Отже, $\Delta_{k_0 k_1}^{\text{відн}} = +\infty$, тобто згідно з визначенням стратегія s_{k_0} не є оптимальною щодо принципу відносної поступки.

Отримане протиріччя вказує на те, що у невиродженому випадку всі компоненти вектора $E^U\left(s_{k_0}\right)$ повинні бути додатними (строго більшими від нуля).

Розглянемо дві стратегії: s_k та s_l, що належать області компромісних стратегій $\left(s_k, s_l \in S^{\text{КП}}\right)$, для яких вектори $E^U(s_k)$ та $E^U(s_l)$ мають усі ненульові компоненти $\left(e_q^U(s_l) > 0,\ e_q^U(s_k) > 0,\right.$ $\left. q = 1,\ldots,Q\right)$.

Нехай $e_q^U(s_l) = e_q^U(s_k) + \Delta_{lk}^{e_q^U}$, $q = 1,\ldots, Q$. Розглянемо мультиплікативну функцію

$$\Phi(s_l) = \prod_{q=1}^{Q} e_q^U(s_l).$$

Тоді

$$\Phi(s_l) = \prod_{q=1}^{q}\left(e_q^U(s_k) + \Delta_{lk}^{e_q^U}\right) = \prod_{q=1}^{Q}\left(e_q^U(s_k)\left(1 + \frac{\Delta_{lk}^{e_q^U}}{e_q^U(s_k)}\right)\right) =$$

$$= \left(\prod_{q=1}^{Q} e_q^U(s_k)\right)\left(\prod_{q=1}^{Q}\left(1 + \frac{\Delta_{lk}^{e_q^U}}{e_q^U(s_k)}\right)\right).$$

Прологарифмуємо праву та ліву частини отриманої рівності:

$$\ln \Phi(s_l) = \ln \prod_{q=1}^{Q} e_q^U(s_k) + \ln \prod_{q=1}^{Q}\left(1 + \frac{\Delta_{lk}^{e_q^U}}{e_q^U(s_k)}\right) =$$

$$= \ln \prod_{q=1}^{Q} e_q^U(s_k) + \sum_{q=1}^{Q} \ln\left(1 + \frac{\Delta_{lk}^{e_q^U}}{e_q^U(s_k)}\right) < \ln \prod_{q=1}^{Q} e_q^U(s_k) + \sum_{q=1}^{Q} \frac{\Delta_{lk}^{e_q^U}}{e_q^U(s_k)} =$$

$$= \ln \prod_{q=1}^{Q} e_q^U(s_k) + \Delta_{lk}^{\text{відн}},$$

тобто

$$\ln \prod_{q=1}^{Q} e_q^U(s_k) > \ln \prod_{q=1}^{Q} e_q^U(s_l) - \Delta_{lk}^{\text{відн}},$$

або ж

$$\prod_{q=1}^{Q} e_q^U(s_k) > e^{-\Delta_{lk}^{\text{відн}}} \prod_{q=1}^{Q} e_q^U(s_l) - \Delta_{lk}^{\text{відн}}.$$

Що й необхідно було показати.

4.12. ПОЗНАЧЕННЯ, ВИКОРИСТОВУВАНІ В РОЗДІЛІ 4

$S = (s_1; ...; s_m)$ — множина альтернативних рішень СПР (чистих стратегій першого гравця);

$S^{\text{КП}}$ — множина компромісних стратегій;

$S^{\text{ЗГ}}$ — множина згоди (множина стратегій СПР, що допускають поліпшення);

$S^{\text{ОПТ}}$ — множина оптимальних чистих стратегій СПР;

$S^{\text{фікс}}$ — частина області компромісу щодо стратегій СПР, яка відповідає певній умові фіксації;

s_{k_0} — оптимальна чиста стратегія;

s_P — змішана стратегія СПР (першого гравця), що визначається вектором розподілу P;

$\Theta = (\theta_1; ...; \theta_n)$ — множина станів економічного середовища (чистих стратегій другого гравця);

$F = (f_{kj} : k = 1,..., m; \; j = 1,..., n)$ — функціонал оцінювання (платіжна матриця гри);

$e = (e_1; ...; e_Q)$ — вектор локальних критеріїв;

$E = (e_q(s_k): k = 1,..., m; \; q = 1,..., Q)$ — матриця кількісних показників якості чистих стратегій СПР;

$E(s_k) = (e_1(s_k); ...; e_Q(s_k))$ — вектор кількісних характеристик якості стратегії s_k ($k = 1,..., m$);

$E^U(s_k) = (e_q^U(s_k): \; k = 1,..., m; \; q = 1,..., Q)$ — вектор кількісних характеристик якості стратегії s_k з урахуванням вектора вагових коефіцієнтів пріоритету U;

$e_q(s_k)$ — кількісна оцінка q-ї якісної характеристики чистої стратегії s_k СПР ($q = 1,..., Q; \; k = 1,..., m$);

$Q = \sum_{j=1}^{5} Q_j$ — кількість локальних критеріїв якості альтернативних стратегій, які вибрав СПР для порівняльного аналізу цих стратегій;

Q_j — кількість локальних критеріїв якості стратегій, які використовуються в полі j-ї інформаційної ситуації ($j = 1,..., 5$);

Λ — множина векторів пріоритету;

$O = (O^k : \; k = 1,..., K)$ — множина об’єктів, які аналізуються;

$O^k = (O_1^k;...;O_L^k)$ — множина однорідних об’єктів, які складають k-ту групу ($k = 1,..., K$);

RI — ряд пріоритету;

RI^E, RI^I, RI^F — ряд пріоритету відповідно локальних критеріїв якості стратегій, інформаційних ситуацій, функціоналів оцінювання;

RV — ряд бінарних відношень пріоритету;

U — вектор вагових коефіцієнтів пріоритету;

U_j^E — вектор вагових коефіцієнтів пріоритету критеріїв якості, що є характерними для j-ї інформаційної ситуації ($j = 1,...,5$);

U^I — вектор вагових коефіцієнтів пріоритету інформаційних ситуацій;

U^{IE} — вектор вагових коефіцієнтів пріоритету за одночасного врахування пріоритету як інформаційних ситуацій, так і локальних критеріїв;

Ω_E — область допустимих значень вектора критеріїв якості;

$\Omega_E^{\text{КП}}$ — область компромісу в просторі критеріїв;

$\Omega_E^{\text{ЗГ}}$ — область згоди у просторі критеріїв;

$\Omega_E^{\text{фікс}}$ — частина області компромісу щодо критеріїв, яка відповідає певній умові фіксації;

$\delta(E(s_k))$ — відхилення точки $E(s_k)$ від опорної гіперплощини;

μ — нормувальний множник;

ε, Δ_k, Δu_k, Δe_q, $\Delta_{lk} e_q$, $\Delta_{lk} e_q^U$, $\Delta_{lk}^{\text{аб с}}$, $\Delta_{lk}^{\text{відн}}$ — величини відхилення (поступки) щодо локальних критеріїв якості стратегій СПР;

$E(e_q) = (e_q(s_1);...;e_q(s_m))^T$ — вектор оцінок стратегій СПР згідно з q-м критерієм якості ($q = 1,..., Q$);

$E^{\text{Н}}(e_q) = (e_q^{\text{Н}}(s_1);...;e_q^{\text{Н}}(s_m))^T$ — вектор нормалізованих оцінок стратегій СПР згідно з q-м критерієм якості ($q = 1,..., Q$);

$E^{\text{ідеал}} = (e_1^{\text{ідеал}};...;e_Q^{\text{ідеал}})$ — вектор «ідеальних» оцінок спектру якостей стратегій СПР;

$B = (B(s_1);...;B(s_m))$ — вектор оцінок Байєса чистих стратегій СПР;

$\sigma = (\sigma(s_1);...;\sigma(s_m))$ — вектор середньоквадратичних оцінок чистих стратегій СПР;

$E(B)$, $E(\sigma)$ — вектор оцінок стратегій СПР згідно з критерієм Байєса, критерієм середньоквадратичного відхилення;

$E^{\text{Н}}(B)$, $E^{\text{Н}}(\sigma)$ — вектор нормалізованих оцінок стратегій СПР згідно з критерієм Байєса, критерієм середньоквадратичного відхилення;

Ze_q^j — оператор згортання функціонала оцінювання на основі q-го локального критерію якості у полі j-ї інформаційної ситуації;

$\widetilde{Fe}_{jq}$ — вектор-стовпчик, який є результатом згортання матриці F у полі j-ї інформаційної ситуації на основі локального критерію e_{jq} ($j = 1,...,5$; $q = 1,...,Q_j$);

FI_j — інтегральний функціонал оцінювання (матриця розмірів $m \times Q_j$, утворена з векторів-стовпчиків $\widetilde{Fe}_{jq}$, $j = 1,...,5$; $q = 1,...,Q_j$);

$FI_j^{\text{Н}}$ — нормалізована матриця FI_j ($j = 1,...,5$);

$\widetilde{FI}_j$ — вектор-стовпчик, отриманий в результаті зваженого згортання матриці $FI_j^{\text{Н}}$ ($j = 1,...,5$);

KU — оператор зваженого згортання матриці з урахуванням вектора вагових коефіцієнтів пріоритету;

ZI_j — оператор згортання цільового функціонала оцінювання F у полі j-ї інформаційної ситуації;

FF, FF_l — інтегральний функціонал оцінювання (матриця), утворений з векторів-стовпчиків відповідно $\widetilde{FI}_j$, $\widetilde{F_l I}_j$ на основі функціонала оцінювання відповідно F, F_l, $j = 1,...,5$; $l = 1, 2$;

$FF^{\text{Н}}$ — нормалізована матриця FF;

$\widetilde{FF}$, $\widetilde{FF}_l$ — вектор-стовпчик, отриманий в результаті зваженого згортання відповідно матриці F, F_l ($l = 1, 2$);

ZF — оператор згортання функціонала оцінювання F у полі кількох інформаційних ситуацій;

$K(e_t) = \left(e_{ki}^t : \; k = 1,...,m; i = 1,...,n\right)$ — критеріальна матриця, елементами якої є оцінки чистих стратегій s_k $(k = 1,...,m)$ для кожного стану економічного середовища θ_j $(j = 1,...,n)$ згідно з локальним критерієм якості e_t $(t = 1,...,T)$ на основі функціонала оцінювання F;

$e_{ki}^t = e_t(s_k; \theta_j)$ — оцінка чистої стратегії s_k $(k = 1,...,m)$ для кожного стану економічного середовища θ_j $(j = 1,...,n)$ згідно з локальним критерієм якості e_t $(t = 1,...,T)$;

$K(s_k) = \left(e_{kj}^t, i = 1,\ldots,n; t = 1,\ldots,T\right)$ — інформаційна матриця, що утворюється внаслідок вертикального перетину куба інформації площиною, яка паралельна площині «ордината—апліката» і відповідає чистій стратегії s_k $(k = 1,\ldots,m)$;

$K(s_P) = \left(e_{Pi}^t, i = 1,\ldots,n; t = 1,\ldots,T\right)$ — інформаційна матриця, що утворюється внаслідок вертикального перетину куба інформації площиною, яка паралельна площині «ордината—апліката» і відповідає змішаній стратегії s_P;

$K = (e_{ki}^t : k = 1,\ldots,m;\ i = 1,\ldots,n;\ t = 1,\ldots,T)$ — куб інформації (тривимірна матриця, утворена на основі функціонала оцінювання F з даних, що відповідають множині стратегій СПР S, множині станів економічного середовища Θ і множині локальних критеріїв якості стратегій e);

d_{Pk} — відстань між інформаційними матрицями $K(s_P)$ та $K(s_k)$.

РОЗДІЛ 5

БАГАТОЦІЛЬОВІ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНІ МОДЕЛІ

Скорочення, використовувані у розділі:
СПР — суб'єкт прийняття рішень;
МАІ — метод аналізу ієрархій;
РМАІ — розпливчастий метод аналізу ієрархій;
ІРМАІ — ігровий розпливчастий метод аналізу ієрархій;
ПК — персональний комп'ютер.

5.1. СИСТЕМА ЦІЛЕЙ І БАГАТОЦІЛЬОВА БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНА МОДЕЛЬ

Проблема прийняття рішень (вибору стратегій) в економіці виникає через дві принципові обставини: з одного боку, багатоваріантність економічних рішень, з другого — цілеспрямованість (людські прагнення) економічних систем і зумовлений цим ризик. Множина альтернативних варіантів рішень (стратегій) визначається наявними можливостями економічного розвитку; вибір з цієї множини (а він завжди існує) диктується цілями певної економічної системи. Рішення (стратегія), що приймається, являє собою результат сумісного розгляду цілей і можливостей та узгодження їх.

Для використання математичних методів в аналізі, оцінюванні, управлінні та прийнятті економічних рішень обидві складові задачі вибору повинні мати адекватне відображення в економіко-математичній моделі.

В економіко-математичних дослідженнях переважною є концепція, згідно з якою ціль — це напрям розвитку економічної системи (так звана ціль-напрям). Досить поширеною є інша інтерпретація, коли ціль — це деякий наперед визначений стан, якого необхідно досягти певній економічній системі (так звана ціль-стан).

Зазначимо, що ціль-напрям (*надалі* — ціль) дає змогу порівнювати альтернативні стратегії і, як наслідок, вибирати найкращу, що найбільшою мірою забезпечує максимальне наближення до бажаного стану (цілі-стану).

Найбільш загальні моделі, що переважно використовуються в економічному аналізі, носять якісний характер і або фіксують результати порівняння альтернативних рішень (стратегій) з точки зору цілей економічної системи, або явно аналітично описують результати вибору з множини альтернативних рішень. Ціль описується у першому випадку у вигляді бінарних відношень на множині альтернативних рішень і станів економічного середовища, у другому — функцією виграшу (цільовою функцією).

Поряд з якісним описом цілей як в теоретичних дослідженнях, так і в практиці економіко-математичного моделювання поширені кількісні моделі. Найпростішою та найбільш розповсюдженою моделлю такого типу є цільова функція (у дискретному випадку — функціонал оцінювання), яка зіставляє кожне альтернативне рішення та стан економічного середовища з дійсним числом.

Побудова цільової функції (функціонала оцінювання) економічної системи — досить складна задача. Причини проблем, що виникають під час побудови, зумовлені складним, багатовимірним характером цілей соціально-економічного розвитку, кінцевих результатів економічної діяльності, які стосуються різних складових соціально-економічного буття. В цих умовах *узагальнена ціль* економічної системи, якщо вона допускає вербальне формулювання, з великими труднощами втілюється у вигляді скалярної цільової функції. Причинами, що унеможливлюють таке втілення, є внутрішні протиріччя інтересів і переваг (неспокійне людське серце). А тому замість узагальненої цілі доводиться розглядати *систему цілей* (*векторну цільову функцію*), виділяючи в якості її складових більш прості *часткові цілі*, моделювання яких шляхом побудови цільових функцій (функціоналів оцінювання) вже не є таким проблематичним.

У свою чергу, різнобічні інтереси (цілі) СПР призводять до конфліктів між ними і до зумовленого цим ризику. Наприклад, *у формуванні економічної політики, як правило, беруть до уваги різноманітні цілі, узгоджуючи суперечливі вимоги, зумовлені ситуацією* (проблеми глобалістики, зростання обсягів виробництва, підвищення доходів, активізація та надійність економічного розвитку, зниження ступеня ризику, зниження економічного навантаження тощо).

Описаний підхід є знаряддям подолання об’єктивно існуючого протиріччя між складністю цілей економічних систем і обмеженими можливостями економіко-математичного їх моделювання. Разом з тим є помилковим намагання зв’язати виникнення багатоцільових задач зі специфікою математичного методу дослідження економічних проблем. *Множинність цілей економічних систем має об'єктивний характер і знаходить своє модельне відображення у вигляді задачі прийняття багатоцільових багатокритеріальних рішень.*

5.2. ПРИКЛАДИ БАГАТОЦІЛЬОВИХ ЗАДАЧ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

До багатоцільових (векторних) задач прийняття рішень зводяться задачі, різні за походженням [103].

5.2.1. Прийняття рішення на множині цілей

У задачах такого типу необхідно враховувати декілька цілей (або якостей об'єкта), кожна з цих цілей має бути врахована при виборі оптимального (раціонального) рішення.

Приклад 5.1. Необхідно спроектувати оптимальний варіант літака цивільної авіації, призначення якого — перевезення вантажів. Якість такого літака оцінюється з допомогою таких основних параметрів: P — вага комерційного навантаження; L — дальність польоту без дозаправлення; V — крейсерська швидкість; R — вартість однієї години польоту; C — вартість проектування, розроблення та виготовлення літака. Отже, можливі варіанти ключових параметрів літака мають оцінюватися багатоцільовим (глобальним) функціоналом оцінювання

$$F = (F_P;\ F_L;\ F_V;\ F_R;\ F_C),$$

де F_P, F_L, F_V, F_R, F_C — локальні функціонали оцінювання, що відповідають характеристикам літака.

Особливістю задачі такого типу є те, що локальні функціонали оцінювання (критерії), як правило, є суперечливими і, крім того, мають різні одиниці вимірювання.

5.2.2. Задача розподілу ресурсів

У задачах такого типу розглядається сукупність об'єктів, якість функціонування кожного з яких відображається індивідуальним функціоналом оцінювання. Тоді якість функціонування всієї сукупності об'єктів треба оцінювати на основі «векторного» (глобального) функціонала оцінювання, складеного з часткових (локальних) функціоналів оцінювання, кожен з яких характеризує відповідний об'єкт.

Приклад 5.2. Необхідно розподілити задану кількість певного ресурсу серед N споживачів, які подали замовлення на деяку кількість ресурсу, ступінь вдоволення ресурсом l-го споживача оцінюється функціоналом оцінювання F^l, $l = 1,...,N$. Тоді ступінь загального вдоволення замовлень на ресурс споживачами оцінюється «векторним» функціоналом оцінювання.

$$F = \left(F^1;...;\ F^e;...;\ F^N\right).$$

У задачах такого типу локальні функціонали оцінювання найчастіше мають одну розмірність.

5.2.3. Задача оптимізації на множині умов функціонування

Як уже зазначалося, зміна певного виду умов (*умов першого типу*, наприклад, попиту, смаків тощо) відображається сукупністю станів економічного середовища і враховується у побудові відповідних функціоналів оцінювання. Але є умови, зміна яких призводить до побудови нових функціоналів (критеріїв) оцінювання (це умови другого типу, наприклад, зміна законодавства, статусу фірми тощо).

Тоді якість функціонування об'єкта на всьому спектрі умов необхідно оцінювати на основі «векторного» функціонала оцінювання (критерію якості). На основі цього функціонала оцінювання можна вибрати оптимальний (компромісний) варіант економічного об'єкта.

Розв'язання задач такого типу ускладнюється тим, що зміна умов другого типу спонукає розглядати можливу зміну умов першого типу (станів економічного середовища) не у дискретному, а у неперервному (майже в неперервному) спектрі. Останнє пов'язане із розв'язанням нескінченно вимірних задач (у Банахових просторах).

5.2.4. Урахування динаміки

У задачах такого типу розглядається функціонування об'єктів протягом певного проміжку часу, розбитого на декілька етапів. Якість функціонування об'єкта впродовж кожного етапу залежить від управління на цьому етапі й оцінюється «локальним» функціоналом оцінювання, а на множині етапів — «векторним» функціоналом, складеним з «локальних».

Приклад 5.3. Необхідно визначити оптимальний план функціонування корпорації впродовж фіксованого проміжку часу. Якість функціонування корпорації характеризується функціоналом оцінювання, що відображає обсяги випуску продукції у дискретні моменти часу τ_l, $l = 1,..., N$.

Тоді якість функціонування корпорації протягом цього проміжку часу характеризується «векторним» функціоналом оцінювання

$$F = (F_1(\tau_1);...;\ F_l(\tau_l);...;\ F_N(\tau_N)),$$

на основі якого і має визначатись оптимальний план роботи корпорації.

У задачах такого типу можливий випадок нескінченно вимірного «векторного» функціонала оцінювання, коли оцінка якості рішення (стратегії) здійснюється неперервно.

5.2.5. Ієрархічні моделі

У практиці прийняття рішень зустрічаються задачі, в яких оцінювання рішень здійснюється на основі «векторного» критерію, компоненти якого, у свою чергу, є «векторними», а то й складнішими утвореннями. Ці задачі належать до так званих ієрархічних моделей (схем). Залежно від кількості ступенів впорядкування виділяють дворівневі, трирівневі, багаторівневі ієрархічні моделі прийняття рішень (стратегій).

Приклад 5.4. Необхідно придбати агрегат для сільськогосподарських робіт, одержавши для цього пільговий кредит. Агрегати такого типу виготовляються різними фірмами, а тому відрізняються один від одного низкою характеристик. Основні цілі, переслідувані покупцем, — це ефективність агрегату, його ціна та умови купівлі, надійність в експлуатації.

У свою чергу, ефективність агрегату можна деталізувати на часткові цілі: ремонтопридатність та багатофункціональність, ціну та умови купівлі — на купівлю за готівку, часткову передоплату з подальшою виплатою тощо.

Ураховуючи основні цілі покупця, можна побудувати інтегрований функціонал оцінювання, на основі якого й вибиратиметься конкретний виробник цього агрегату (нульовий рівень ієрархії).

Основні цілі, переслідувані покупцем (ефективність, ціна та умови купівлі, надійність в експлуатації), формалізуються у відповідні функціонали оцінювання. Вони утворюють перший рівень ієрархії.

Деталізуючи такі показники, як ефективність, ціна і умови купівлі, отримуємо другий рівень ієрархії.

До третього рівня ієрархії належать виробники агрегатів даного типу.

5.3. ТЕОРЕТИКО-ІГРОВИЙ ПІДХІД З УРАХУВАННЯМ МНОЖИНИ ЦІЛЕЙ

Нехай системі цілей, на які орієнтується економічна система (фірма і СПР), відповідають цільові функції (функції виграшу)

$$f^l(s;\theta),\ \ s \in S,\ \ \theta \in \Theta,\ \ l = 1,\ldots,N,$$

де: S — множина альтернативних рішень (стратегій); Θ — множина станів економічного середовища; N — кількість цілей, на які орієнтується економічна система. У дискретному випадку (який є адекватним реально існуючій інформації, використовуваній для моделювання економічних процесів) будемо розглядати цільові функціонали оцінювання (матриці)

$$F^l = \left(f_{ki}^l:\quad k = 1,\ldots,m;\quad i = 1,\ldots n\right),\quad l = 1,\ldots,N,$$

де $f_{ki}^l = f^l\left(s_k;\theta_i\right)$ — кількісна оцінка рішення (стратегії) $s_k \in S$ з позиції l-ї цілі за умови, що економічне середовище знаходиться у стані $\theta_i \in \Theta$ (тут $S = (s_1;\ldots;s_m)$, $\Theta = (\theta_1;\ldots;\theta_n)$).

Скориставшись раніше введеною термінологією, ситуацію прийняття багатоцільових багатокритеріальних рішень (стратегій) на базі теоретико-ігрового підходу можна трактувати як сукупність трьох множин $\{S;\ \Theta;\ F\}$, де $F = \left(F^1;\ldots;\ F^N\right)$ — множина всіх цільових функціоналів оцінювання. Між частковими цілями, представленими як компоненти множини F, існують різного роду зв'язки. Зокрема, зв'язок між цілями виникає через те, що вони висувають вимоги до одних і тих же варіантів допустимих рішень (стратегій). Такі зв'язки опосередковані через обмеження, на основі яких формується множина S, і умовно їх можна назвати *внутрішніми*.

У свою чергу, *зовнішні* зв'язки відображають порівняльну важливість цілей, їх нагальність, взаємозамінність тощо. Ці зв'язки зумовлені структурою системи цілей, об'єктивно існуючими відношеннями між її елементами. Звичайно зовнішні зв'язки опосередковані досить складними соціально-економічними взаємодіями, вони носять суперечливий характер і тому важко піддаються як концептуальному (наприклад, глобалізація), так і (особливо) операційному економіко-математичному описові. Незважаючи на те, що такі зв'язки являють собою найважливіші реалії щодо задачі прийняття багатоцільових багатокритеріальних рішень, вони не відображені в множині F і, значить, залишилися за межами моделі $\{S; \Theta; F\}$.

Специфічною для багатоцільових багатокритеріальних задач є проблема досягнення компромісу між частковими цілями або, інакше кажучи, *узгодженості* цих цілей. Така узгодженість вимагає «співрозмірності» різних елементів системи цілей, їх зіставлення, що неможливо без скрупульозного врахування всієї сукупності зв'язків між ними — як внутрішніх, так і зовнішніх, а можливо й уведення певної гіперцілі (метацілі).

Отже, можна констатувати, що множина цільових функціоналів $F = \left(F^1; ...; F^N\right)$, навіть якщо його компоненти поставлені у відповідність до всіх складових системи цілей, не є її еквівалентом і має посилитися додатковою інформацією. В якості такої додаткової інформації надалі будемо використовувати систему пріоритетів функціоналів оцінювання, яка подається у вигляді вектора вагових коефіцієнтів пріоритету

$$U^F = \left(u_1^F; ...; u_N^F\right), \quad \sum_{l=1}^{N} u_l^F = 1.$$

Таким чином, ігрову модель прийняття багатоцільових багатокритеріальних рішень (стратегій) у найзагальнішому вигляді слід розглядати як сукупність чотирьох множин:

$$\left\{S;\ \Theta;\ F;\ U^F\right\}.$$

5.4. КРИТЕРІЙ МІНІМАЛЬНОЇ ВІДСТАНІ МІЖ ІНФОРМАЦІЙНИМИ КУБАМИ

Нехай різні (зокрема й суперечливі) цілі СПР відображаються $\boldsymbol{N}$ функціоналами оцінювання

$$F^l = \left(f_{ki}^l:\ k = 1,..,m;\quad i = 1,...,n_l\right),\ \ l = 1,...,N.$$

Для спрощення викладок вважатимемо, що всі матриці F^l $(l = 1,...,\ N)$ за фіксованої кількості рядків (рівній m) мають однакову кількість стовпчиків, тобто що

$$n_1 = n_2 = ... = n_N = n.$$

Мається на увазі, що побудова кожного функціонала оцінювання відбувається на основі рівних щодо кількості, але не збіжних поелементно множин станів економічного середовища $\Theta^l = \left(\theta_i^l :\ i = 1,...,n\right),\ \ l = 1,...,N$. У випадку, коли функціонали оцінювання будуються на основі однієї і тієї ж множини станів економічного середовища, розподіли ймовірності настання цих станів для кожного з них можуть бути різними.

Нехай аналітиками ідентифіковано інформаційні ситуації, в полі яких необхідно приймати рішення, а також визначено локальні критерії якості стратегій, що відповідають цим інформаційним ситуаціям. Тоді, за аналогією з тим, як це робилось у пункті 4.8.10, для кожного цільового функціонала оцінювання F^l будуємо куб інформації $K^l = \left(e_{ki}^{lt} :\ k = 1,...,m;\ i = 1,...,n;\ t = 1,...,T\right),\ \ l = 1,...,N$. Для чистої стратегії s_k шляхом вертикального перетинання кубів інформації $K^l\ (l = 1,...,N)$ отримуємо N інформаційних матриць $K^l(s_k)$, які, у свою чергу, об’єднуємо в куб інформації щодо стратегії s_k. Цей куб позначимо через $KK(s_k)\ (k = 1,...,m)$.

Для змішаної стратегії s_P куб інформації будуємо згідно з формулою

$$KK(s_P) = \sum_{k=1}^{m} (p_k KK(s_k)).$$

З урахуванням пріоритету функціоналів оцінювання, що задається вектором вагових коефіцієнтів U^F, використовуючи методику Хеммінга, відстань між кубами інформації щодо чистої стратегії s_k та змішаної стратегії s_P визначається за формулою

$$d_{Pk} = \sum_{l=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T}\left(u_l^F u_t^{IE} q_i \left| e_{ki}^{lt} - e_{Pi}^{lt} \right|\right).$$

Тоді математична модель принципу оптимальності для багатоцільової багатокритеріальної задачі має вигляд

$$s_{k_0} :\ \ \left(E\left(s_{k_0}\right); U^{IF}; U^F\right) = opt\left\{\left(E(s_k);\ U^{IF};\ U^F\right): E(s_k) \in \Omega_E\right\} = \min_{s_k \in S} d_{Pk} =$$

$$= \min_{s_k \in S} \sum_{l=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T}\left(u_l^F u_t^{IE} q_i \left| e_{ki}^{lt} - e_{Pi}^{lt} \right|\right).$$

Якщо ж для оцінювання відстані між кубами інформації враховуються лише несприятливі для СПР відхилення, то принцип оптимальності матиме вигляд

$$s_{k_0}: \quad \left(E\left(s_{k_0}\right); U^{IF}; U^{F}\right) = \min_{s_k \in S} \sum_{l=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{T} \left(\alpha_{it}^{l} u_l^F u_t^{IE} q_i \left| e_{ki}^{lt} - e_{Pi}^{lt} \right|\right),$$

де α_{it}^{l} — індикатор несприятливого відхилення.

Зауваження 5.1. У випадку, коли цільові функціонали оцінювання мають різну кількість стовпчиків, тобто при їх побудові враховувалася різна кількість станів економічного середовища $\left(\Theta^l = \left(\theta_1^l;...;\theta_{n_l}^l\right),\ n_l \neq \text{const},\ l = 1,...,N\right)$, діють так:

1) шляхом об'єднання усіх станів економічного середовища, що використовуваних при побудові низки цільових функціоналів оцінювання, утворюється узагальнена множина станів економічного середовища $\widetilde{\Theta}$;

2) кожна із множин Θ^l $(l = 1,...N)$ розширюється до множини $\widetilde{\Theta}$;

3) кожному елементу Θ^l, що належить множині, яка доповнює множину Θ^l до $\widetilde{\Theta}$, присвоюється нульова ймовірність настання і йому у розширеному функціоналі оцінювання $\widetilde{F}^l$ відповідає стовпчик з елементами $\left(B\left(s_1; Q^l\right);...;B\left(s_m; Q^l\right)\right)$ (тут: $B\left(s_k;\ Q^l\right)$ — оцінка Байєса чистої стратегії $s_k \in S$, $Q^l = \left(q_1^l;...;q_{n_l}^l\right)$ — розподіл імовірності станів економічного середовища, яке моделюється множиною Θ^l, $\sum_{i=1}^{n_l} q_i^l = 1$).

Легко переконатися, що функціонали оцінювання $\widetilde{F}^l$ та F^l є еквівалентними в тому плані, що як $\widetilde{F}^l$, так і F^l забезпечують вибір однієї і тієї ж оптимальної чистої стратегії.

5.5. ІЄРАРХІЧНА МОДЕЛЬ ПРИЙНЯТТЯ БАГАТОЦІЛЬОВИХ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНИХ РІШЕНЬ

В основу ієрархічної моделі прийняття багатоцільових багатокритеріальних рішень покладено принцип гнучкого (одночасного) врахування пріоритету локальних критеріїв якості стратегій, інформаційних ситуацій (у полі яких застосовуються ці критерії) та функціоналів оцінювання (які адекватно відображають цілі, що їх хоче досягнути СПР).

Розглянемо задачу знаходження багатоцільового багатокритеріального рішення (стратегії), коли СПР виокремлено N цілей і кожній з них відповідає свій функціонал оцінювання. Функціонали оцінювання можуть мати різні інгредієнти, різну розмірність тощо. Рішення приймається комплексно, тобто виходячи з позиції різних інформаційних ситуацій. Крім того, в полі кожної інформаційної ситуації рішення має враховувати особливості різних критеріїв оцінювання якостей стратегій.

Для розв'язання поставленої задачі доцільно скористатись ієрархічною моделлю, структуру якої наведено на рис. 5.1.

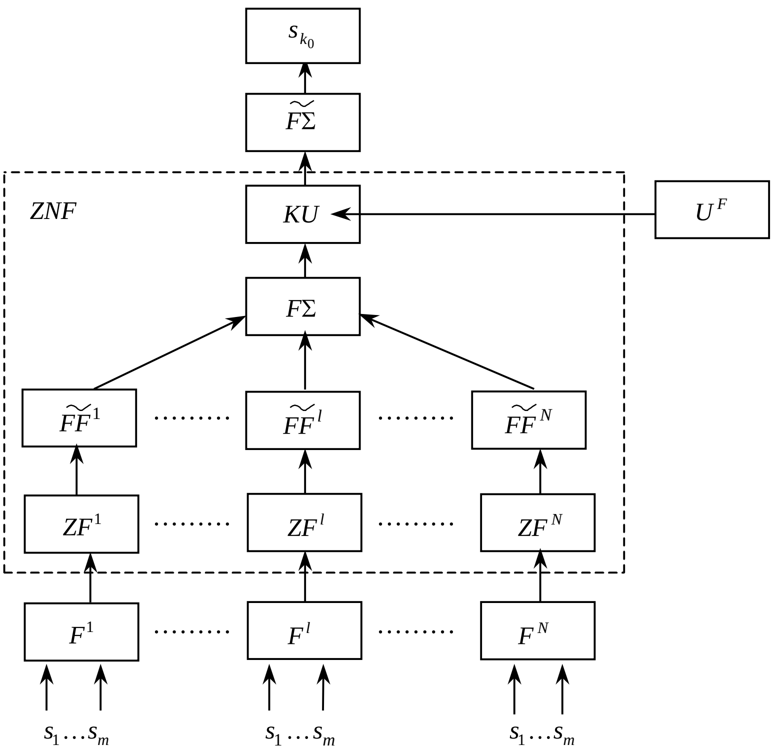
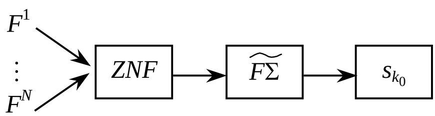


Рис. 5.1. Структура ієрархічної моделі прийняття рішень
за наявності N функціоналів оцінювання

На рисунку вжито умовні позначення, які вже мали місце раніше (пункти 4.7.8 — 4.7.9), а також: ZF^l — оператор згортання функціонала оцінювання F^l у полі кількох інформаційних ситуацій ($l = 1, \ldots, N$); $\widetilde{FF}^l$ — вектор-стовпчик, отриманий у результаті згортання функціонала оцінювання F^l, $l = 1, \ldots, N$; $F\Sigma$ — інтегральний функціонал оцінювання (матриця розмірів $m \times N$); $\widetilde{F\Sigma}$ — вектор-стовпчик, отриманий в результаті зваженого згортання матриці $F\Sigma$ і на основі якого може прийматися рішення; $U^F = \left(u_1^F;...;u_N^F\right)$ — вектор вагових коефіцієнтів пріоритету функціоналів оцінювання $\left(u_l^F \geq 0;\ \sum_{l=1}^{N} u_l^F = 1\right)$.

Якщо позначити через *ZNF* оператор згортання *N* цільових функціоналів оцінювання в полі кількох інформаційних ситуацій, то структуру ієрархічної моделі підтримки прийняття рішення можна подати у вигляді:



Логічним є подальше узагальнення наведеної моделі. Зокрема, у разі прийняття рішень, процеси опрацювання яких є розпаралеленими і здійснюються декількома «штабними» командами (у випадку Організації Об’єднаних Націй, Євросоюзу, корпорації, побудованої на принципах організаційної ієрархії — холдингу, врахування глобального, регіонального (територіального) поділу тощо).

У такому разі може виникнути необхідність у порівнянні інформації, яку містять вектори-стовпчики виду «$F\Sigma$» — рейтинги відповідних рішень (проектів) з позиції нації-держави або кожного структурного підрозділу (чи «штабної» команди). А тому доцільно, якщо виникне така ситуація, ввести ще один рівень ієрархії — рівень президента корпорації (генеральної дирекції фірми і т. ін.).

Перспективним є використання запропонованого підходу до побудови ієрархічних моделей, що враховують динаміку розвитку економічної системи.

Приклад 5.5. Наприкінці фінансового року правлінням комерційного банку в результаті аналізу діяльності своїх підрозділів протягом поточного року було встановлено, що в одній з його регіональних філій під час здійснення кредитних операцій в іноземній валюті мали місце негативні тенденції щодо їх ефективності. А саме, виникла підозра, що висновки стосовно пріоритетності надання кредитів були не зовсім коректними. Це стало прецедентом для залучення до прогнозних досліджень незалежної консалтингової фірми. Але залучення консалтингової фірми не перекреслює, а лише змінює пріоритетність результатів, отриманих аналітиками регіональної філії. Це відображає встановлений експертами центрального офісу комерційного банку вектор вагових коефіцієнтів пріоритету $U^F = \left(u_1^F;\ u_2^F\right) = (0{,}35;\ 0{,}65)$ (тут u_1^F — ваговий коефіцієнт пріоритету функціонала оцінювання F_1; u_2^F — ваговий коефіцієнт пріоритету функціонала оцінювання F_2).

Ураховуючи викладене й виходячи з умов прикладів 4.6 та 4.7, необхідно знайти уточнене (компромісне) рішення щодо надання регіональною філією «великого» кредиту в іноземній валюті.

Розв'язання. Для визначення уточненого компромісного рішення скористаємося принципом гнучкого (одночасного) врахування пріоритету локальних критеріїв якості стратегій, інформаційних ситуацій і функціоналів оцінювання. Для цього скористаємось ієрархічною моделлю, структуру якої наведено на рис. 5.1 (структура розгорнутої ієрархічної моделі наведена на рис. 5.2).

Умова цього прикладу формалізується таким чином: необхідно прийняти компромісне рішення в полі інформаційних ситуацій I_1 та I_5 одночасно, аналізуючи при цьому два функціонали оцінювання. Процес визначення компромісного рішення здійснюється на основі результатів прикладів 4.6 і 4.7. У розгорнутій ієрархічній структурі моделі (рис. 5.2) показано послідовність етапів, що передують моменту прийняття компромісного рішення.

На основі векторів-стовпчиків $\widetilde{FF}_1$ та $\widetilde{FF}_2$, отриманих у прикладі 4.7, утворюємо матрицю $F\Sigma^+$. З урахуванням вагових коефіцієнтів пріоритету функціоналів оцінювання $u_1^F = 0{,}35$, $u_2^F = 0{,}65$ згортаємо $F\Sigma^+$ у стовпчик:

$$F\Sigma^+ = \left(\widehat{\widetilde{FF}}{}_1^+; \widehat{\widetilde{FF}}{}_2^+\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}385 & 0{,}769 \\ 0{,}795 & 0{,}537 \\ 0{,}181 & 0{,}195 \\ 0{,}648 & 0{,}575 \end{pmatrix} \xrightarrow{KU} 0{,}35 \times \begin{pmatrix} 0{,}385 \\ 0{,}795 \\ 0{,}181 \\ 0{,}648 \end{pmatrix} + 0{,}65 \times \begin{pmatrix} 0{,}769 \\ 0{,}537 \\ 0{,}195 \\ 0{,}575 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6346 \\ 0{,}6273 \\ 0{,}1901 \\ 0{,}6006 \end{pmatrix} = \widetilde{F\Sigma}^+.$$

Проект s_1 має найвищий рейтинг (рівний 0,6346), тобто правління комерційного банку рекомендує своїй регіональній філії надати «великий» кредит в іноземній валюті першому «великому» клієнтові.

Як бачимо, рекомендація правління комерційного банку (проект s_1) відрізняється від результату, отриманого експертами регіональної філії (проект s_2). Це викликане, по-перше, недовірою до керівництва філії (нижчий, порівняно з F_2, ваговий коефіцієнт пріоритету, наданий функціоналу оцінювання F_1), по-друге, тим, що розподіл імовірності станів економічного середовища Q_2, наданий консалтинговою фірмою, у значно більшій мірі віддає перевагу (більшу ймовірність настання) стану θ_2 порівняно з розподілом Q_1, наданим експертами регіональної філії.

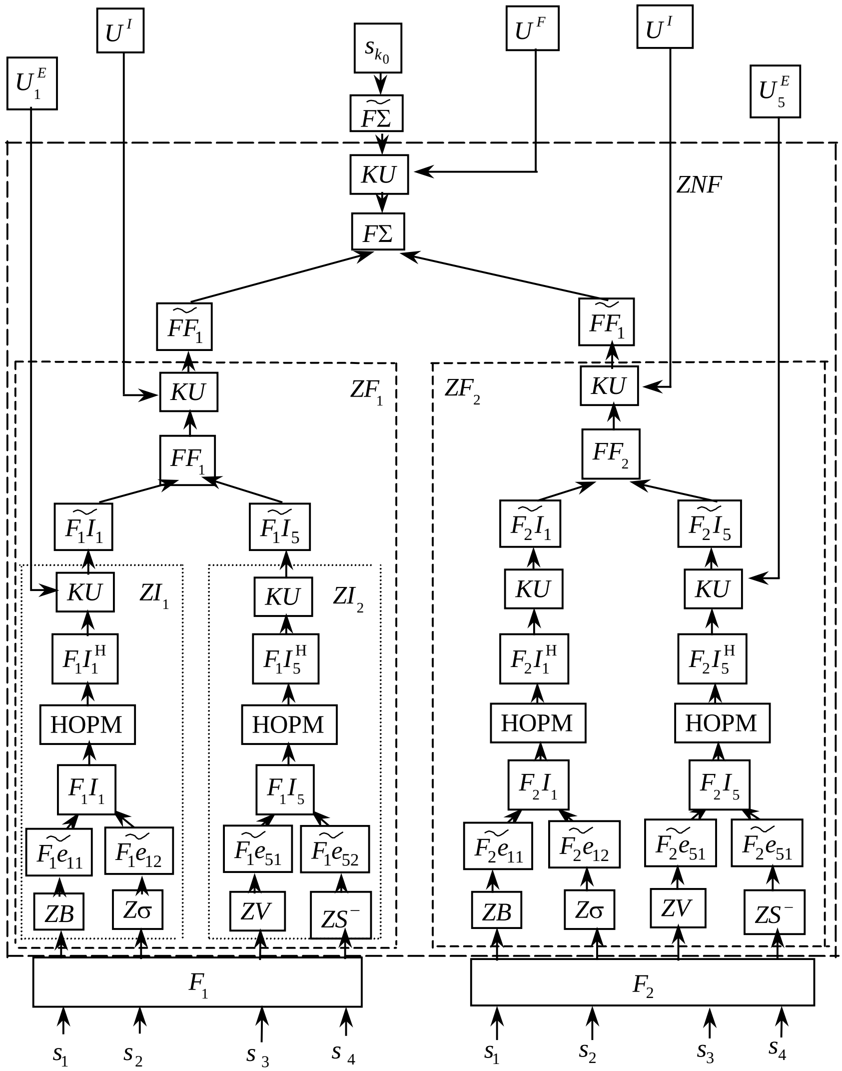


Рис. 5.2. Структура розгорнутої ієрархічної моделі прийняття двоцільового чотирикритеріального рішення комерційним банком

5.6. АНАЛІЗ ІЄРАРХІЙ: ТЕОРЕТИКО-ІГРОВИЙ ПІДХІД

На даний час особливої ваги набувають системи, призначені для підтримування процесів прийняття рішень на усіх рівнях ієрархії соціально-економічних систем, зокрема дорадчі та експертні системи. Назви цих систем повністю відповідають їх призначенню — «давати» на запит користувача поради щодо його поводження у ризиковій ситуації, роблячи це на рівні досвідченого фахівця.

5.6.1. Психологічні аспекти використання методу аналізу ієрархії

Для побудови моделей управління та прийняття рішень необхідна інформація. Але наявної статистичної кількісної інформації, як правило, буває обмаль, великого досвіду теж ніколи не буває забагато. Основним джерелом інформації є люди (СПР, експерти, користувачі). Як правило, людині легше подати необхідні дані у неформалізованому вигляді, на вербальному рівні, на рівні якісного опису та оцінок (так звана м'яка інформація).

Саме цим вимогам найбільшою мірою відповідає, зокрема, розроблений Т. Л. Сааті метод аналізу ієрархій (МАІ) [94, 95]. Його призначення — підтримування прийняття БЦ БК рішень у виборі одного з множини об'єктів (варіантів рішень, стратегій тощо).

Метод аналізу ієрархії (Analytic Hierarchy Process) є систематизованою математичною процедурою для ієрархічного подання елементів, які визначають сутність певної економічної проблеми.

МАІ полягає у декомпозиції проблеми на більш прості складові та подальшій обробці послідовності суджень СПР, що подаються у вигляді попарних порівнянь. Ці судження далі відображаються у кількісній формі. В результаті може бути виражений відносний ступінь (інтенсивність) взаємодії елементів в ієрархії.

МАІ включає також процедуру синтезу множинних суджень, отримання пріоритетності критеріїв і знаходження оптимальних (компромісних) рішень.

МАІ вже набув практичного поширення, зокрема, реалізований у вигляді пакета прикладних програм (ППП) «Expert Choice».

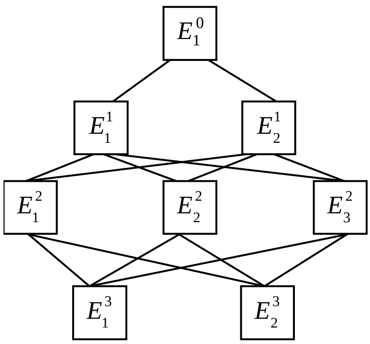
Розв'язання економічної проблеми щодо вибору багатоцільового багатокритеріального рішення (стратегії) розглядається як процес поетапного встановлення пріоритетів цілей та критеріїв. Нагадаємо, що людині притаманні дві ознаки аналітичного мислення [8]: перша — вміння спостерігати та аналізувати результати спостережень, друга — здатність встановлювати взаємозв'язки між спостереженнями, оцінюючи ступені щільності цих взаємозв'язків, а потім синтезувати ці взаємозв'язки у загальне сприйняття спостерігача. Зазначене дає уявлення про принципи ідентичності та декомпозиції, принципи дискримінації, порівняльного судження та синтезування, на яких і базується МАІ.

5.6.2. Принцип ідентичності та декомпозиції

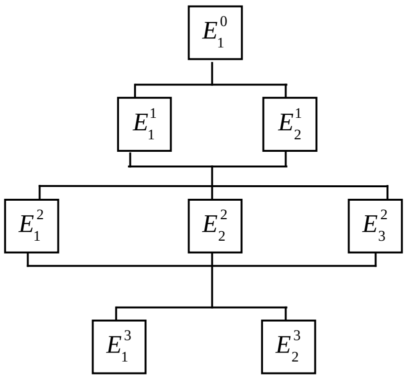
Цей принцип передбачає стуктурування проблеми у вигляді ієрархії, що є першим етапом використання МАІ.

Побудова ієрархії починається з обрисовування відносно складної проблеми дослідження. У найпростішому вигляді ієрархія будується, починаючи з вершини, в якій розміщується глобальна (узагальнена, інтегрована) ціль, через проміжкові рівні (підцілі, чинники, критерії тощо) до найнижчого рівня, яким зазвичай є перелік альтернативних рішень (стратегій).

Існує декілька видів ієрархій: найбільш прості — домінантні, схожі на перекинуте дерево з основою (стовбуром) у вершині; холарії — домінантні дерева з оберненими зв'язками тощо. Подальший огляд обмежимо лише домінантними ієрархіями.



а



б

Рис. 5.3. Варіанти відображення структури домінантної ієрархії:
а — декомпозиція; *б* — синтез

Домінантна ієрархія вважається повною, якщо кожен елемент заданого рівня функціонує як ціль (чи критерій) для всіх елементів наступного, нижчого рівня. Існує декілька альтернативних способів графічного відображення структури повної домінантної ієрархії. Два з них наведено на рис. 5.3 (там E_j^i — елементи ієрархії, верхній індекс вказує на рівень ієрархії, нижній індекс — на їх порядковий номер на відповідному рівні ієрархії).

На рис. 5.3 варіант *а* — конкретизація (декомпозиція) заданої множини елементів (цілей, критеріїв); варіант *б* — протилежний *а* і допускає синтез більш загальних елементів із заданих часткових.

Під час побудови домінантної ієрархії вважається, що виконується принцип ієрархічної неперервності, згідно з яким елементи нижчого рівня ієрархії є попарно порівняльними між собою з погляду елементів більш високого рівня, і цей процес неперервно продовжується від вершини ієрархії до її найнижчого рівня (альтернатив).

Зазначимо, що така форма низхідної декомпозиції може бути використана для розв'язування задач широкого класу. Можлива також модифікація з включенням петель оберненого зв'язку. Широко використовуються також домінантні ієрархії, в яких з різними критеріями (чи частковими цілями) пов'язані множини «альтернатив», що можуть різнитися як за складом, так і за кількістю.

Цей етап МАІ потребує дискусій, в результаті яких вибираються множини цілей (чинників), критеріїв та альтернативних рішень (стратегій). Вибрані множини мають відображати весь діапазон переваг і сприйняттів учасників (СПР, експертів та ін.), при цьому їхня згода щодо усіх компонентів проблеми не обов'язкова. Вирішальною є згода відносно вершини проблеми.

5.6.3. Принцип дискримінації та порівняльних суджень

Наступним етапом після побудови ієрархії є порівняння між собою її елементів. Для цього формується метод порівняння. Найпоширенішим (щодо практичного використання) є метод попарних порівнянь, згідно з яким будується множина матриць попарних порівнянь. Для цього в ієрархії виділяють елементи двох типів: елементи-«батьки» та елементи-«нащадки».

Матриці попарних порівнянь будуються для усіх елементів-«нащадків», віднесених до відповідного «батьківського» елемента. Елементами-«батьками» можуть бути елементи, що належать будь-якому ієрархічному рівню, крім останнього, де розміщені, як правило, альтернативні варіанти рішень (стратегій). Попарні порівняння проводяться у термінах переваг (домінування) одного елемента над іншим.

У загальному вигляді матриця попарних порівнянь формується таким чином. Нехай E_1^{i+1} $(k=1,\ldots,n_{i+1})$ — елемент (альтернатива), що належать $(i+1)$-му рівню ієрархії; $\nu_1^{i,\,j}$ — оцінки ваги (інтенсивності) цього елемента з погляду його «батьківського» елемента E_j^i $(i=0,\,1,\ldots;\;\; j=1,\ldots,\,n_i)$. Результати попарного порівняння елементів $(i+1)$-го рівня ієрархії з погляду їх «батьківського» елемента E_j^i подаються у вигляді матриці

$$A_j^i = \begin{array}{c|cccc} E_j^i & E_1^{i+1} & E_2^{i+1} & \cdots & E_{n_{i+1}}^{i+1} \\ \hline E_1^{i+1} & \dfrac{\nu_1^{i,j}}{\nu_1^{i,j}} & \dfrac{\nu_1^{i,j}}{\nu_2^{i,j}} & \cdots & \dfrac{\nu_1^{i,j}}{\nu_{n_{i+1}}^{i,j}} \\ E_2^{i+1} & \dfrac{\nu_2^{i,j}}{\nu_1^{i,j}} & \dfrac{\nu_2^{i,j}}{\nu_2^{i,j}} & \cdots & \dfrac{\nu_{n_{i+1}}^{i,j}}{\nu_{n_{i+1}}^{i,j}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ E_{n_{i+1}}^{i+1} & \dfrac{\nu_{n_{i+1}}^{i,j}}{\nu_1^{i,j}} & \dfrac{\nu_{n_{i+1}}^{i,j}}{\nu_2^{i,j}} & \cdots & \dfrac{\nu_{n_{i+1}}^{i,j}}{\nu_{n_{i+1}}^{i,j}} \end{array}$$

або у скороченому вигляді

$$A_j^i = \left(a_{kl}^{i,j} : k = 1, \ldots, n_{i+1};\ l = 1, \ldots, n_{i+1}\right) = \left(\frac{\nu_k^{i,j}}{\nu_l^{i,j}} : k = 1, \ldots, n_{i+1};\ l = 1, \ldots, n_{i+1}\right).$$

Якщо ваги (інтенсивності) елементів ієрархії попередньо невідомі, то попарні порівняння здійснюються на основі суб’єктивних суджень СПР, експертів та ін., що чисельно оцінюються згідно з певною шкалою. Один із варіантів такої шкали наведено в табл. 5.1.

Правомірність використання цієї шкали нарівні з іншими доведено теоретично [94]. У тих випадках, коли важко вирізнити стільки проміжкових градацій від абсолютного до слабкого пріоритету або в цьому немає потреби у конкретній задачі, можуть використовуватися шкали з меншою кількістю градацій. Мінімальна шкала може мати дві оцінки: 1 — елементи рівнозначні; 2 — пріоритет одного елемента щодо іншого.

Таблиця 5.1

ШКАЛА ВІДНОСНОЇ ВАЖЛИВОСТІ

Інтенсивність (вага) відносної важливості	Якісна оцінка (терм лінгвістичної змінної)	Пояснення
1	Однаково важливі	Обидва елементи вносять однаковий вклад у досягнення кінцевої цілі
3	Не набагато важливіший	Існують вербальні висловлювання відносно пріоритету одного елемента щодо іншого, але ці висловлювання досить непереконливі
5	Суттєво важливіший	Існують достатньо переконливі до-

		ведення та логічні критерії, що один з елементів є більш важливим (вагомішим)
7	Значно важливіший	Існує переконливе доведення великої значущості одного елемента в порівнянні з іншим
9	Абсолютно важливіший	Усвідомлення пріоритету одного елемента щодо іншого максимально підтверджується
2; 4; 6; 8	Проміжні оцінки між двома сусідніми судженнями	Потрібен певний компроміс
$\frac{1}{\nu}; \nu = 1, ..., 9$	Обернені значення ненульових оцінок	Якщо елементу $E_{j_1}^{i+1}$ в разі порівняння з елементом $E_{j_2}^{i+1}$ надається одна з ненульових інтенсивностей, то елементу $E_{j_1}^{i+1}$ під час порівняння з $E_{j_2}^{i+1}$ надається обернене значення цієї інтенсивності
0	Непорівняльність	Немає сенсу в порівнюванні елементів

Матриця A_j^i в цьому випадку заповнюється цілими (відмінними від нуля) числами та оберненими до них (дробами). Очевидно, що для побудови матриці A_j^i СПР (експерт) здійснює $\frac{n_{i+1}(n_{i+1}-1)}{2}$ попарних порівнянь (тут n_{i+1} — порядок матриці).

Під час проведення попарних порівнянь необхідно відповідати на такі питання: 1) який з двох порівнюваних елементів є важливішим і чи має він більший вплив? 2) реалізація якого з двох порівнюваних елементів є більш імовірною і якому з них віддається перевага?

Для порівняння критеріїв (чи часткових цілей) зазвичай запитують, який (яка) з них важливіший; для порівняння альтернативних рішень (стратегій) відносно «батьківського» елемента — якому з альтернативних рішень віддається перевага або яке з них найбільш імовірне?

МАІ однаковою мірою охоплює чинники, що піддаються, чи не піддаються (intangible) вимірюванню і тоді для них вимагаються вербальні судження.

Методом попарного порівняння альтернатив не завжди можна ефективно скористатися в деяких практичних ситуаціях:

- експерту можуть запропонувати для аналізу більше дев'яти альтернатив. У цьому випадку побудова однорідних матриць попарних порівнянь ускладнюється. Це пов'язано з фізичними обмеженнями інтелекту людини;
- альтернативи можуть надходити до експерта для порівняння не одночасно, а через певні проміжки часу. В цій ситуації неможливо попарно порівняти об'єкти тощо.

У наведених і деяких інших ситуаціях для порівняння (а також оцінювання) альтернатив доцільно скористатися методом порівняння альтернатив відносно стандартів або методом копіювання [5].

5.6.4. Принцип синтезування

Після побудови ієрархічної моделі і складення матриць попарних порівнянь настає черга наступного етапу МАІ — ієрархічного синтезу.

Сутність цього етапу полягає у побудові вектора рейтингових оцінок альтернативних рішень (стратегій) шляхом синтезу векторів пріоритету матриць попарних порівнянь часткових цілей, критеріїв тощо.

Вектори пріоритету щодо елементів певного рівня ієрархії, які попарно порівнюються між собою (рядки матриць попарних порівнянь), можна обчислити в такі способи:

- як головний власний вектор матриці;
- як середньогеометричне елементів рядків матриці (окремо для кожного рядка);
- іншими методами.

Якщо скористатися методом, наведеним у додатку до розділу 5 (пункт 5.10), то отримана оцінка головного власного вектора W_j^i матриці попарних порівнянь A_j^i може використовуватись в якості вагових коефіцієнтів пріоритету щодо елементів $(i+1)$-го рівня ієрархії з погляду «батьківського» елемента ієрархії E_j^i, тобто

$$U_j^i = W_j^i = \left(w_k^{i,j} : \; k = 1,\ldots,n_{i+1}\right); \;\; \sum_{k=1}^{n_{i+1}} w_k^{i,j} = 1.$$

Якщо ж в якості елементів вектора пріоритету використовувати середньогеометричні елементи рядків матриці A_j^i, тобто величини

$$g_k^{i,j} = \sqrt[n_{i+1}]{\prod_{l=1}^{n_{i+1}} a_{kl}^{i,j}} = \frac{\nu_k^{i,j}}{\sqrt[n_{i+1}]{\prod_{l=1}^{n_{i+1}} \nu_l^{i,j}}}, \quad k = 1,\ldots,n_{i+1}, \tag{5.1}$$

то елементи вектора вагових коефіцієнтів пріоритету U_j^i обчислюються за формулою

$$u_k^{i,j} = \frac{g_k^{i,j}}{\sum_{s=1}^{n_{i+1}} g_s^{i,j}}. \tag{5.2}$$

Можна скористатися також іншими підходами щодо побудови вектора U_j^i (див. розділ 4).

Для повної домінантної ієрархії алгоритму ієрархічного синтезу складають такі послідовні кроки.

Крок 1. Відносно елементів E_j^i i-го рівня ієрархії ($j = 1,\ldots,n_i$, n_i — кількість елементів, що утворюють i-й рівень ієрархії) визначаються вектори вагових коефіцієнтів пріоритету елементів $(i+1)$-го рівня ієрархії:

$$U_j^i = \left(u_k^{i,j} : \; k = 1,\ldots,n_{i+1}\right), \quad j = 1,\ldots,n_{i+1}.$$

Утворюється матриця вагових коефіцієнтів пріоритету елементів $(i+1)$-го рівня ієрархії відносно «батьківських» елементів i-го рівня:

$$U^i = \left(U_1^i;\ldots;U_{n_i}^i\right) = \left(u_k^{i,j} : \; k = 1,\ldots,n_{i+1}; \; j = 1,\ldots,n_i\right).$$

Крок 2. Здійснюється власне ієрархічний синтез шляхом множення матриць вагових коефіцієнтів пріоритету:

$$U^{L}_{0,1,\ldots,L-1} = U^{L-1}U^{L-2}\ldots U^{0}_{1},$$

де: U^{0}_{1} — вектор вагових коефіцієнтів пріоритету елементів 1-го рівня ієрархії відносно (з погляду) єдиного елемента 0-го рівня ієрархії — глобальної цілі СПР (цей елемент називають також *кореневим*, або *фокусом* домінантної ієрархії); $U^{L}_{0,1,\ldots,L-1}$ — вектор вагових коефіцієнтів пріоритету елементів *L*-го рівня ієрархії (альтернативних рішень, стратегій тощо) відносно «батьківських» елементів усіх рівнів ієрархії від 0-го до $(L-1)$-го включно; $(L + 1)$ — кількість рівнів ієрархії.

Зауваження 5.2. На практиці досить часто має місце ситуація, коли не всі елементи певного ($(i+1)$-го) рівня ієрархічної моделі ($(i+1) \le L$) порівнюються між собою. У цьому випадку із загальної ієрархічної моделі виокремлюються фрагменти, що утворюють повні домінантні ієрархії.

Нехай виділено фрагмент, що має структуру повної домінантної ієрархії, яка в якості кореневого має елемент E^{i}_{j} і включає *L*-й рівень ієрархічної моделі (множину альтернативних рішень (стратегій) СПР). Відносно всіх елементів виділеної домінантної ієрархії розраховується вектор вагових коефіцієнтів пріоритету альтернативних рішень (стратегій) СПР:

$$^{(i,j)}U^{L}_{i,i+1,\ldots,L-1} = U^{L-1}U^{L-2}\ldots U^{i}_{j},$$

де U^{i}_{j} — вектор вагових коефіцієнтів пріоритету, що у даній повній домінантній ієрархії відповідає елементу E^{i}_{j}.

Якщо виділені повні домінантні ієрархії розглядати як «узагальнені» елементи ієрархічної моделі (див. ієрархічні моделі на рис. 5.1 та 5.2), то, у свою чергу, з ієрархічної моделі можна виділити нові повні домінантні ієрархії, утворені з «узагальнених» елементів. На основі нових повних домінантних ієрархій, з урахуванням векторів $^{(i,j)}U^{L}_{i,i+1,\ldots,L-1}$, знову будуємо відповідні вектори вагових коефіцієнтів альтернативних рішень (стратегій) СПР.

Процес продовжується до моменту досягнення 0-го рівня ієрархічної моделі — глобальної (інтегрованої) цілі СПР.

5.6.5. Оцінка узгодженості суджень

У практичних задачах кількісна (кардинальна) та транзитивна (порядкова) узгодженість суджень порушується, оскільки людські відчуття неможливо виразити точною формулою. Для підвищення узгодженості щодо числових суджень виходять з того, що коли елемент E_k^{i+1} в $a_{kl}^{i,\,j}$ разів є пріоритетнішим за елемент E_l^{i+1}, то E_l^{i+1} в $1/a_{kl}^{i,\,j}$ разів є пріоритетнішим за E_l^{i+1}.

В разі порушення узгодженості ранг матриці попарних порівнянь більший за одиницю і вона має кілька власних значень. Але за невеликих неузгодженостей щодо суджень одне з власних значень буде суттєво більшим за інші і приблизно рівним порядку матриці. Таким чином, узгодженість щодо суджень експерта може характеризуватись величиною відхилення максимального власного значення $\lambda_{\max}^{i,\,j}$ від порядку матриці A_j^i (який рівний n_{i+1}).

В якості оцінки узгодженості суджень експерта у розрізі матриці попарних порівнянь A_j^i використовується індекс

$$\text{ІУС}_j^i = \left(\lambda_{\max}^{i,\,j} - n_{i+1}\right)/(n_{i+1} - 1),$$

де: ІУС_j^i — *індекс узгодженості суджень*; $\lambda_{\max}^{i,\,j}$ — максимальне власне значення матриці попарних порівнянь A_j^i (див. додаток до розділу 5, пункт 5.10.1). Можна показати [94, 95], що за $n_{i+1} = 1$ та за $n_{i+1} = 2$ індекс ІУС = 0.

У випадку, коли безпосереднє обчислення величини $\lambda_{\max}^{i,\,j}$, здійснюване шляхом розв'язання рівняння (5.3) (див. додаток, пункт 5.10.1), спричинює певні труднощі, можна скористатися наближеним методом [8], що складається з двох послідовних кроків.

Крок 1. Для кожного стовпчика матриці попарних порівнянь знаходиться сума його елементів

$$s_l^{i,\,j} = \sum_{k=1}^{n_{i+1}} a_{kl}^{i,\,j}, \quad l = 1,\ldots, n_{i+1};$$

із цих сум утворюється вектор-рядок

$$S_j^i = \left(s_l^{i,\,j}: \quad l = 1,\ldots, n_{i+1}\right).$$

Крок 2. Величина $\lambda_{\max}^{i,\,j}$ покладається рівною добутку векторів S_j^i та U_j^i, тобто

$$\lambda_{\max}^{i,\,j} = S_j^i U_j^i = \sum_{l=1}^{n_{i+1}} \left(s_l^{i,j} u_l^{i,j} \right).$$

Використовується також *відносна оцінка узгодженості суджень*

$$\text{ВУС}_j^i = \text{ІУС}_j^i \big/ \text{М(ІУС)},$$

де: ВУС_j^i — відносна узгодженість суджень експерта у розрізі матриці попарних порівнянь A_j^i; ІУС_j^i — індекс узгодженості суджень у розрізі матриці A_j^i; М(ІУС) — нормативне значення (математичне сподівання) індексу узгодженості суджень, обчислення якого здійснюється експериментально, шляхом імітаційного моделювання матриці попарних порівнянь. У табл. 5.2 наведене значення М(ІУС) залежно від порядку матриці (отримані в праці [94]).

Таблиця 5.2

НОРМАТИВНІ ЗНАЧЕННЯ ІНДЕКСУ УЗГОДЖЕНОСТІ СУДЖЕНЬ

Порядок матриці, *n*	Нормативне значення, М(ІУС)	Порядок матриці, *n*	Нормативне значення, М(ІУС)	Порядок матриці, *n*	Нормативне значення, М(ІУС)
1	0,00	6	1,24	11	1,51
2	0,00	7	1,32	12	1,54
3	0,58	8	1,41	13	1,56
4	0,90	9	1,45	14	1,57
5	0,12	10	1,49	15	1,59

В якості допустимого використовується значення $\text{ВУС}^{\text{доп}} \le 0{,}1$ (у деяких випадках використовується $\text{ВУС}^{\text{доп}} \le 0{,}2$). Якщо ж для матриці попарних порівнянь A_j^i ВУС_j^i перевищує задану норму (0,1 чи 0,2), то це вказує на те, що заповнення матриці попарних порівнянь здійснювалось із суттєвими порушеннями щодо логічності суджень. А тому експертові пропонується перепровірити свої судження, а то й заново структурувати задачу.

Ураховуючи, що за $n_{i+1} = 2$ індекс узгодженості суджень $\text{ІУС}_J^I = 0$, нормативне значення індексу узгодженості суджень М(ІУС) = 0, отримуємо, що $\text{ВУС}_j^i = 0/0$, тобто є невизначеним. Для уникнення невизначеності в цьому випадку (при $n_{i+1} = 2$) покладають $\text{ВУС}_j^i = 0$.

5.6.6. Оцінка узгодженості ієрархії

Оцінювання узгодженості всієї ієрархії здійснюється шляхом складання зважених показників узгодженості всіх її рівнів [5].

Якщо для матриць A_j^i, що відповідають елементам E_j^i i-го рівня ієрархії $(i = 0, 1, \dots, L-1)$, визначено індекси узгодженості суджень ІУС_j^i $(j = 1, \dots, n_i)$ і з цих індексів утворено вектори-рядки

$$\text{ІУС}^i = \left(\text{ІУС}_j^i : \ j = 1, \dots, n_i\right),$$

то індекс узгодженості (ІУІ) повної домінантної ієрархії (що має L рівнів) визначається за формулою

$$\text{ІУІ} = \text{ІУС}^0 + \text{ІУС}^1 U^0 + \text{ІУС}^2 U^1 U^0 + \dots + \text{ІУС}^{L-1} U^{L-2} \dots U^1 U^0.$$

Узгодженість ієрархії можна оцінювати також і на основі відносної оцінки

$$\text{ВУІ} = \text{ІУІ} / \text{М}(\text{ІУІ}),$$

де: ВУІ — відносна оцінка узгодженості ієрархії; М(ІУІ) — нормативне значення індексу узгодженості ієрархії. Для повної домінантної ієрархії М(ІУІ) обчислюється за формулою

$$\text{М}(\text{ІУІ}) = \text{М}\left(\text{ІУС}^0\right) + \text{М}\left(\text{ІУС}^1\right) U^0 + \dots + \text{М}\left(\text{ІУС}^{L-1}\right) U^{L-2} \cdot \dots U^1 U^0;$$

$$\text{М}\left(\text{ІУС}^i\right) = \left(\text{М}\left(\text{ІУС}_j^i\right) : \ j = 1, \dots, n_i\right).$$

Узгодженість ієрархії вважається допустимою, якщо $\text{ВУІ} \le 0{,}1$ (іноді допускається $\text{ВУІ} \le 0{,}2$).

5.6.7. Урахування (суджень) кількох експертів

Для підвищення ступеня об'єктивності та якості процедури прийняття рішення доцільно враховувати думки кожного з експертів. Розрахунок агрегованої оцінки у випадку залучення T експертів, які мають різну компетентність (кваліфікацію), здійснюється за формулою

$$a_{kl}^{i,j} = \prod_{t=1}^{T} \left({}^t a_{kl}^{i,j} \right)^{u_t^{\text{експ}}},$$

де: $a_{kl}^{i,j}$ — результат порівняння t-м експертом пари елементів-«нащадків» E_k^{i+1} та E_l^{i+1} з погляду «батьківського» елемента E_j^i;

$u_t^{\text{експ}}$ — ваговий коефіцієнт пріоритету (компетентності) експерта $\left(\sum_{t=1}^{T} u_t^{\text{експ}} = 1\right)$.

Обчислити коефіцієнти компетентності експертів можна на основі інформації, яку містять вектори вагових коефіцієнтів пріоритету

$$^{t}U_j^i = \left({}^{t}u_k^{i,j} :\ k = 1,\ldots,n_{i+1}\right),\ \ t = 1,\ldots,\ T$$

(вектор ${}^{t}U_j^i$ отримується на основі аналізу матриці попарних порівнянь ${}^{t}A_j^i$, яка заповнена на основі суджень t-го експерта, $t = 1,\ldots,T$). Інформацію, яку містять вектори ${}^{t}U_j^i$, зведемо у табл. 5.3.

Таблиця 5.3

E_j^i	Експерти				
	Експерт 1	…	Експерт t	…	Експерт T
E_1^{i+1}	${}^{1}u_1^{i,j}$	…	${}^{t}u_1^{i,j}$	…	${}^{T}u_1^{i,j}$
…	…	…	…	…	…
E_k^{i+1}	${}^{1}u_k^{i,j}$	…	${}^{t}u_k^{i,j}$	…	${}^{T}u_k^{i,j}$
…	…	…	…	…	…
$E_{n_{i+1}}^{i+1}$	${}^{1}u_{n_{i+1}}^{i,j}$	…	${}^{t}u_{n_{i+1}}^{i,j}$	…	${}^{T}u_{n_{i+1}}^{i,j}$
$\sum$	1	…	1	…	1

Алгоритм обчислення коефіцієнтів компетентності експертів має вигляд рекурентної процедури [36]:

$$\overline{u}_{k,s}^{i,j} = \sum_{t=1}^{T} \left({}^{t}u_k^{i,j}\ u_{t,s-1}\right),\ \ k = 1,\ldots,n_{i+1};\ \ s = 1, 2\ldots;$$

$$\lambda_s = \sum_{k=1}^{n_{i+1}} \sum_{t=1}^{T} \left({}^{t}u_k^{i,j}\ \overline{u}_{k,s}^{i,j}\right),\ \ s = 1,2\ldots;$$

$$u_{k,s}^{i,j} = \frac{1}{\lambda_s} \sum_{t=1}^{T} \left({}^{t}u_k^{i,j}\ \overline{u}_{t,s}^{i,j}\right).$$

Обчислення починають для $s=1$, вибираючи при цьому в якості початкових наближень значень коефіцієнтів компетентності величини

$$u_{1,0} = \ldots = u_{T,0} = \frac{1}{T}.$$

Тоді групові оцінки вагових коефіцієнтів пріоритету об'єктів (елементів $(i+1)$-го рівня ієрархії) першого наближення дорівнюють середньоарифметичним значенням оцінок експертів:

$$\overline{u}_{k,1}^{i,j} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} {}^{t}u_k^{i,j}, \quad k = 1,\ldots,n_{i+1}.$$

Далі обчислюється

$$\lambda_1 = \sum_{k=1}^{n_{i+1}}\sum_{t=1}^{T}\left({}^{t}u_k^{i,j}\ \overline{u}_{k,1}^{i,j}\right),$$

а також перші наближення щодо значень коефіцієнтів компетентності експертів (перша ітерація)

$$u_{t,1} = \frac{1}{\lambda_1}\sum_{k=1}^{n_{i+1}}\left({}^{t}u_k^{i,j}\ \overline{u}_{k,1}^{i,j}\right), \quad t = 1,\ldots,T.$$

Використовуючи перші наближення коефіцієнтів компетентності, можна повторити весь процес обчислень і дістати другі наближення (друга ітерація) $u_{t,2}$ $(t=1,\ldots,T)$. На s-й ітерації отримуємо оцінки $u_{t,s}$ $(t=1,\ldots,T)$. Якщо на $(s+1)$-й ітерації отримуємо, що

$$\sum_{t=1}^{T}\left| u_{t,s+1} - u_{t,s} \right| < \varepsilon,$$

(де $\varepsilon > 0$ і задається наперед), то вважаємо, що подальші обчислення (ітерації) не дають істотного уточнення. Отже, оцінки вектора коефіцієнтів експертів стабілізувались, а тому можна покладати, що

$$u_t^{\text{експ}} \approx u_{t,s}, \quad t = 1,\ldots,T.$$

Приклад 5.6. Три експерти оцінювали елементи $(i+1)$-го рівня ієрархії $(n_{i+1}=2)$ з погляду «батьківського» елемента E_j^i (j-го елемента i-го рівня ієрархії). На основі отриманої інформації побудовано вектори вагових коефіцієнтів пріоритету ${}^{1}U_j^i$ та ${}^{2}U_j^i$ щодо елементів E_1^{i+1} та E_2^{i+1}. Відповідні дані наведено у табл. 5.4.

Таблиця 5.4

E_j^i	Експерти		
	Експерт 1	Експерт 2	Експерт 3
E_1^{i+1}	0,3	0,5	0,2
E_1^{i+1}	0,7	0,5	0,8

Обчислити коефіцієнти компетентності експертів.

Розв'язання. Враховуючи, що $T = 3$, покладаємо $u_{1,0} = u_{2,0} = = u_{3,0} = \frac{1}{3}$ й обчислюємо групові оцінки першого наближення вагових коефіцієнтів пріоритету елементів $(i+1)$-го рівня ієрархії:

$$\overline{u}_{1,1}^{i,j} = \frac{1}{3}(0{,}3 + 0{,}5 + 0{,}2) = 0{,}333;$$

$$\overline{u}_{2,1}^{i,j} = \frac{1}{3}(0{,}7 + 0{,}5 + 0{,}8) = 0{,}667.$$

Обчислюємо зважену суму елементів, що складають табл. 5.4:

$$\lambda_1 = (0{,}3 + 0{,}5 + 0{,}2) \times 0{,}333 + (0{,}7 + 0{,}5 + 0{,}8) \times 0{,}667 = 1{,}667$$

і знаходимо перші наближення значень коефіцієнтів компетентності експертів:

$$u_{1,1} = \frac{1}{1{,}667}(0{,}3 \times 0{,}333 + 0{,}7 \times 0{,}667) = 0{,}340;$$

$$u_{2,1} = \frac{1}{1{,}667}(0{,}5 \times 0{,}333 + 0{,}5 \times 0{,}667) = 0{,}300;$$

$$u_{3,1} = \frac{1}{1{,}667}(0{,}2 \times 0{,}333 + 0{,}8 \times 0{,}668) = 0{,}360.$$

Використовуючи отримані оцінки $u_{1,1}$, $u_{2,1}$ та $u_{3,1}$, на другій ітерації отримуємо

$$\overline{u}_{1,2}^{i,j} = 0{,}324; \quad \overline{u}_{2,2}^{i,j} = 0{,}676; \quad \lambda_2 = 1{,}676;$$

$$u_{1,2} = 0{,}341; \quad u_{2,2} = 0{,}298; \quad u_{3,2} = 0{,}361.$$

На третій ітерації отримуємо:

$$\overline{u}_{1,3}^{i,j} = 0{,}3235; \ \overline{u}_{2,3}^{i,j} = 0{,}6765; \ \lambda_3 = 1{,}6765;$$

$$u_{1,3} = 0{,}341; \ u_{2,3} = 0{,}298; \ u_{3,3} = 0{,}361.$$

Як випливає з результатів третього наближення (третьої ітерації), вектор оцінок коефіцієнтів компетентності експертів стабілізувався, а тому з достатньо великою точністю можна вважати, що

$$u_1^{\text{експ}} \approx u_{1,3} = 0{,}341; \qquad u_2^{\text{експ}} \approx u_{2,3} = 0{,}298; \qquad u_3^{\text{експ}} \approx u_{3,3} = 0{,}361.$$

Зауваження 5.3. Для експертизи можуть залучатися фахівці, різні за професією (наприклад, управлінці, маркетологи, виробничники, аналітики тощо) та кваліфікацією. На якість інформації (що її містять матриці попарних порівнянь) впливає міра їх компетентності щодо проблеми (елементи $(i+1)$-го рівня ієрархії, $i = 0, 1, \ldots, L-1$), яка аналізується, і критерію (елемент E_j^i), відносно якого здійснюється цей аналіз, тобто

$$u_t^{\text{експ}} = u\left(E_j^i; \ E_1^{i+1}; \ \ldots; \ E_{n_{i+1}}^{i+1}\right) = \ ^{(i,\ j)}u_t^{\text{експ}}, \quad t = 1, \ldots, T.$$

А тому оцінку вектора компетентності експертів (і на його основі — урахування їх думок) необхідно здійснювати кожен раз після побудови ними відповідних матриць попарних порівнянь.

5.6.8. Вибір і прогнозування забезпечення банківського кредиту

Кредитна угода передбачає виникнення зобов’язань, які беруться отримувачем позики щодо повернення відповідного боргу. Але наявність зобов’язань ще не гарантує своєчасне його повернення. Інфляційні процеси в економіці можуть викликати знецінення коштів, що надаються у вигляді позики, а також погіршення фінансового стану позичальника, що веде до порушення ним строків повернення кредиту. Це включає не тільки порядок погашення позики, виходячи з реальних економічних умов, не тільки порушення юридично закріпленого зобов’язання у кредитному договорі, але й проблеми щодо форми забезпечення повноти та своєчасного зворотного руху позичених коштів. Під формою забезпечення повернення кредиту розуміють конкретне джерело погашення наявного боргу, юридичне оформлення права кредитора на його використання, організацію банком контролю за достатністю та прийнятністю цього джерела.

Застава майна клієнта — одна з поширених форм повернення банківського кредиту. Прийнятність товарно-матеріальних цінностей для застави визначається якістю цінностей та можливістю кредитора здійснювати контроль за їх збереженням. Критеріями якості товарно-матеріальних цінностей є: швидкість реалізації, відносна стабільність цін, тривалість зберігання тощо. Важливо не тільки визначити критерій якості, вибрати у відповідності до нього цінності, але й забезпечити їх зберігання. У зв'язку із цим найбільш надійним способом забезпечення збереження коштів є передача їх кредитору, тобто банку. Одночасно з цим до нього переходить зобов'язання належним чином утримувати та зберігати предмет застави, нести відповідальність за її втрату чи псування.

Розглянемо приклад використання методу аналізу ієрархії для вибору найбільш надійного забезпечення кредиту. Кількість і склад цілей, критеріїв та альтернативних рішень (стратегій) СПР, що аналізуються, обмежено, оскільки приклад є навчальним.

Приклад 5.7. Комерційний банк вивчає питання щодо надання кредиту одному зі своїх клієнтів. Клієнт пропонує альтернативні варіанти щодо застави, а саме: s_1 — іноземна валюта; s_2 — дорогоцінні метали; s_3 — цінні папери; s_4 — нерухомість* (структуру ієрархічної моделі, що впорядковує цілі, чинники, критерії якості і визначає загальний зиск і витрати щодо альтернатив, які аналізуються, наведено на рис. 5.4 (її узгодили між собою експерти та СПР)).

Визначити найбільш надійну заставу кредиту.

Розв'язання. На рис. 5.4 на 0-му та 1-му рівнях ієрархії розміщено цілі, яких хоче досягнути СПР; на 2-му рівні — основні чинники, що визначають зиск і збитки; на 3-му рівні — критерії якості, що характеризують зиск і витрати, які можуть мати місце після надання кредиту; на 4-му рівні — елементи множини альтернативних рішень СПР (застави).

Оскільки наведена на рис 5.4 структура ієрархічної моделі не є структурою повної домінантної ієрархії (порушення щодо повноти знаходяться на 3-му рівні ієрархії), то з моделі виділяємо шість повних домінантних ієрархій з кореневими елементами, відповідно: E_1^2, E_2^2, E_3^2, E_4^2, E_5^2 та E_6^2. Позначимо ці повні домінантні ієрархії відповідно до їх кореневих елементів — DI_1^2, DI_2^2, DI_3^2, DI_4^2, DI_5^2 та DI_6^2.

---

* Як альтернативні варіанти застави можна розглядати комбіновані (диверсифіковані) альтернативи. Наприклад, іноземна валюта + цінні папери, дорогоцінні метали + нерухомість тощо.

Розглянемо повну домінантну ієрархію DI_1^2. Враховуючи думки експертів, для цієї ієрархії будуємо відповідні зважені матриці попарних порівнянь, а для кожної матриці — вектор вагових коефіцієнтів пріоритету $\left(U_j^i\right)$, максимальне власне число $(\lambda_{\max})$ і відношення узгодженості суджень (ВУС)*.

Послідовність операцій (дій) щодо вибору компромісного рішення наведено у табл. 5.5—5.15.

Таблиця 5.5

МАТРИЦЯ ПОПАРНИХ ПОРІВНЯНЬ A_1^2

Який критерій дає більший вклад в економічний чинник?				
E_1^2 (економічний чинник)	E_1^3 (збільшення вартості)	E_2^3 (повернення вартості)	E_3^3 (ліквідність)	U_1^2
E_1^3 (збільшення вартості)	1	1/3	1/5	0,105
E_2^3 (повернення вартості)	3	1	1/3	0,258
E_3^3 (ліквідність)	5	3	1	0,637
$\lambda_{\max}^{2,1} = 3{,}040$; ВУС$_1^2$ = 0,034				

Таблиця 5.6

МАТРИЦЯ ПОПАРНИХ ПОРІВНЯНЬ A_1^3

Якому з альтернативних варіантів застави віддається перевага відносно критерію E_1^3 — збільшення вартості?					
E_1^3 (збільшення вартості)	s_1 (іноземна валюта)	s_2 (дорогоцінні метали)	s_3 (цінні папери)	s_3 (нерухомість)	U_1^3
s_1 (іноземна валюта)	1	2	5	3	0,476
s_2 (дорогоцінні метали)	1/2	1	3	3	0,297
s_3 (цінні папери)	1/5	1/3	1	1/2	0,087
s_4 (нерухомість)	1/3	1/3	2	1	0,140
$\lambda_{\max}^{3,1} = 4{,}064$; ВУС$_1^3$ = 0,024					

* Надалі для обчислення величин використовується наближений метод, а компоненти векторів вагових коефіцієнтів пріоритету обчислюються згідно з формулами (5.1), (5.2).

Таблиця 5.7

МАТРИЦЯ ПОПАРНИХ ПОРІВНЯНЬ A_2^3

Якому з альтернативних варіантів застави віддається перевага відносно критерію E_2^3 — повернення вартості?					
E_2^3 (повернення вартості)	s_1	s_2	s_3	s_4	U_1^3
s_1	1	1	5	3	0,388
s_2	1	1	5	3	0,388
s_3	1/5	1/5	1	1/4	0,062
s_4	1/3	1/3	4	1	0,162
$\lambda_{\max}^{3,2} = 4{,}070$; ВУС $_2^3$ = 0,026					

Таблиця 5.8

МАТРИЦЯ ПОПАРНИХ ПОРІВНЯНЬ A_3^3

Якому з альтернативних варіантів застави віддається перевага відносно критерію E_3^3 — ліквідність?					
E_3^3 (ліквідність)	s_1	s_2	s_3	s_4	U_1^3
s_1	1	3	4	6	0,551
s_2	1/3	1	2	3	0,255
s_3	1/4	1/2	1	4	0,159
s_4	1/6	1/3	1/4	1	0,065
$\lambda_{\max}^{3,3} = 4{,}115$; ВУС $_3^3$ = 0,042					

На основі отриманої інформації будуємо матрицю

$$^{(2,1)}U^3 = \left(U_1^3;\, U_2^3;\, U_3^3\right) = \begin{pmatrix} 0{,}476 & 0{,}388 & 0{,}551 \\ 0{,}297 & 0{,}388 & 0{,}225 \\ 0{,}087 & 0{,}062 & 0{,}159 \\ 0{,}140 & 0{,}162 & 0{,}065 \end{pmatrix},$$

а стосовно всіх елементів повної домінантної ієрархії DI_1^2 обчислюємо вектор вагових коефіцієнтів пріоритету альтернативних варіантів застав:

$$^{(2,1)}U_{2,3}^4 = {}^{(2,1)}U^3\ U_1^2 = \begin{pmatrix} 0{,}501 \\ 0{,}275 \\ 0{,}126 \\ 0{,}098 \end{pmatrix}.$$

Для повної домінантної ієрархії DI_2^2 маємо:

Таблиця 5.9

МАТРИЦЯ ПОПАРНИХ ПОРІВНЯНЬ A_2^2

Який критерій дає більший вклад у фізичний чинник?			
E_2^2 (фізичний чинник)	E_4^3 (відсутність зносу)	E_5^3 (наявність місця зберігання)	U_2^2
E_4^3 (відсутність зносу)	1	5	0,833
E_5^3 (наявність місця зберігання)	1/5	1	0,167
$\lambda_{\max}^{2,2} = 2{,}0$; ВУС$_2^2 = 0{,}0$			

Таблиця 5.10

МАТРИЦЯ ПОПАРНИХ ПОРІВНЯНЬ A_4^3

Якому з альтернативних варіантів застави віддається перевага відносно критерію E_4^3 — відсутність зносу?					
E_4^3 (відсутність зносу)	s_1	s_2	s_3	s_4	U_4^3
s_1	1	1/2	3	5	0,321
s_2	2	1	3	5	0,454
s_3	1/3	1/3	1	5	0,167
s_4	1/5	1/5	1/5	1	0,058
$\lambda_{\max}^{3,3} = 4{,}188$; ВУС$_4^3 = 0{,}070$					

Таблиця 5.11

МАТРИЦЯ ПОПАРНИХ ПОРІВНЯНЬ A_5^3

Якому з альтернативних варіантів застави віддається перевага відносно критерію E_5^3 — наявність місця зберігання?					
E_5^3 (наявність місця зберігання)	s_1	s_2	s_3	s_4	U_5^3
s_1	1	2	1	6	0,367
s_2	1/2	1	1/3	3	0,188
s_3	1	3	1	5	0,388
s_4	1/6	1/5	1/5	1	0,057
$\lambda_{\max}^{3,5} = 4{,}096$; ВУС$_5^3 = 0{,}036$					

Будуємо матрицю

$$^{(2,2)}U^{3}=\left(U_4^3;\ U_5^3\right)=\begin{pmatrix}0{,}321 & 0{,}367\\ 0{,}454 & 0{,}188\\ 0{,}167 & 0{,}388\\ 0{,}058 & 0{,}057\end{pmatrix}.$$

Стосовно всіх елементів повної домінантної ієрархії DI_2^2 обчислюємо вектор вагових коефіцієнтів альтернативних варіантів застав:

$$^{(2,2)}U_{2,3}^{4}={}^{(2,2)}U^{3}\ U_2^2=\begin{pmatrix}0{,}329\\ 0{,}410\\ 0{,}204\\ 0{,}057\end{pmatrix}.$$

Аналогічні результати отримуємо для повної домінантної ієрархії DI_3^2.

Таблиця 5.12

МАТРИЦЯ ПОПАРНИХ ПОРІВНЯНЬ A_3^2

Який критерій дає більший вклад в юридичний чинник?			
E_2^2 (юридичний чинник)	E_6^3 (законодавче право)	E_7^3 (гарантії)	U_3^2
E_4^3 (законодавче право)	1	5	0,833
E_5^3 (гарантії)	1/5	1	0,167
$\lambda_{max}^{2,3}=2{,}0$; ВУС $_3^2=0{,}0$			

Таблиця 5.13

МАТРИЦЯ ПОПАРНИХ ПОРІВНЯНЬ A_6^3

Якому з альтернативних варіантів застави віддається перевага відносно критерію E_6^3 — законодавче право щодо вимог?					
E_6^3 (законодавче право щодо вимог)	s_1	s_2	s_3	s_4	U_6^3
s_1	1	2	3	5	0,479
s_2	1/2	1	1	3	0,227
s_3	1/3	1	1	4	0,220
s_4	1/5	1/3	1/4	1	0,074
$\lambda_{max}^{3,6}=4{,}075$; ВУС $_6^3=0{,}028$					

Таблиця 5.14

МАТРИЦЯ ПОПАРНИХ ПОРІВНЯНЬ A_7^3

Якому з альтернативних варіантів застави віддається перевага відносно критерію E_7^3 — гарантії щодо використання майна?					
E_7^3 (гарантії щодо використання майна)	s_1	s_2	s_3	s_4	U_7^3
s_1	1	2	3	5	0,479
s_2	1/2	1	1	3	0,227
s_3	1/3	1	1	4	0,220
s_4	1/5	1/3	1/4	1	0,074
$\lambda_{max}^{3,7} = 4{,}075$; ВУС $_7^3$ = 0,028					

Далі обчислюємо

$$^{(2,3)}U^3 = \left(U_6^3;\, U_7^3\right) = \begin{pmatrix} 0{,}479 & 0{,}479 \\ 0{,}227 & 0{,}227 \\ 0{,}220 & 0{,}220 \\ 0{,}074 & 0{,}074 \end{pmatrix}; \quad ^{(2,3)}U_{2,3}^4 = {}^{(2,3)}U^3\ U_3^2 = \begin{pmatrix} 0{,}479 \\ 0{,}227 \\ 0{,}220 \\ 0{,}074 \end{pmatrix}.$$

Будуємо матрицю

$$^{(1,1)}U^2 = \left({}^{(2,1)}U_{2,3}^4;\ {}^{(2,2)}U_{2,3}^4;\ {}^{(2,3)}U_{2,3}^4\right) = \begin{pmatrix} 0{,}501 & 0{,}329 & 0{,}479 \\ 0{,}275 & 0{,}410 & 0{,}227 \\ 0{,}126 & 0{,}204 & 0{,}220 \\ 0{,}098 & 0{,}057 & 0{,}074 \end{pmatrix}.$$

Якщо на рис. 5.4 фрагменти, що відповідають виділеним повним домінантним ієрархіям, позначити відповідно через DI_1^2, DI_2^2, DI_3^2, DI_4^2, DI_5^2 та DI_6^2, то отримуємо ієрархічну модель, структуру якої наведено на рис 5.5 (ієрархічна модель з першим рівнем узагальнення елементів).

У ієрархічній моделі, структуру якої наведено на рис. 5.5, можна виділити дві повні домінантні ієрархії з кореневими елементами E_1^1 та E_2^1 (відповідно повні домінантні ієрархії DI_1^1 та DI_2^1). Оскільки повні домінантні ієрархії характеризуються своїми кореневими елементами, то матриця попарних порівнянь елементів

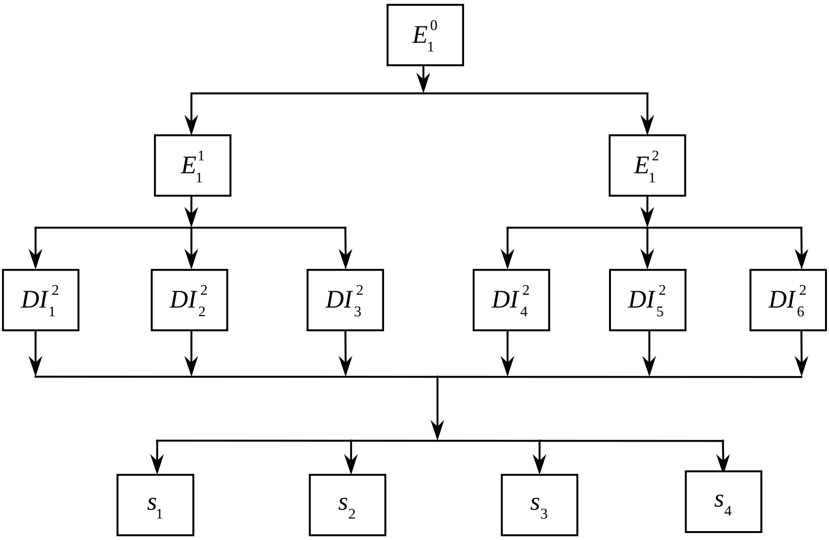


Рис. 5.5. Структура ієрархічної моделі з першим рівнем узагальнення елементів

DI_1^2, DI_2^2, DI_3^2 відносно елемента E_1^1 збігається з матрицею попарних порівнянь елементів E_1^2, E_1^2, E_3^2 з погляду «батьківського» елемента E_1^1. А тому для повної домінантної ієрархії D_1^1 маємо (табл. 5.15):

Таблиця 5.15

МАТРИЦЯ ПОПАРНИХ ПОРІВНЯНЬ A_1^1

Яка із повних домінантних ієрархій дає більший вклад щодо досягнення цілі E_1^1 — зиск від забезпечення кредиту?				
E_1^1 (зиск від забезпечення кредиту)	DI_1^2 $\left(E_1^2\right)$	DI_2^2 $\left(E_2^2\right)$	DI_3^2 $\left(E_3^2\right)$	U_1^1
DI_1^2 $\left(E_1^2\right)$	1	7	3	0,669
DI_2^2 $\left(E_2^2\right)$	1/7	1	1/3	0,098
DI_3^2 $\left(E_3^2\right)$	1/3	3	1	0,243
$\lambda_{\max}^{1,1} = 3{,}009$; ВУС$_1^1$ = 0,007				

Відносно елементів повної домінантної ієрархії DI_1^1 обчислюємо вектор вагових коефіцієнтів пріоритету альтернативних варіантів застави:

$$ {}^{(1,1)}U_{1,2,3}^{4} = {}^{(1,1)}U^{2}\ U_1^1 = \begin{pmatrix} 0,480 \\ 0,275 \\ 0,156 \\ 0,089 \end{pmatrix}. $$

Аналогічні обчислення здійснюємо і для фрагмента ієрархічної моделі, що відповідає витратам від забезпечення кредиту (на рис. 5.4 та 5.5 — права частина ієрархічної структури). В результаті цих обчислень визначаємо вектор вагових коефіцієнтів пріоритету альтернативних варіантів застави відносно елементів повної домінантної ієрархії DI_2^1:

$$ {}^{(1,2)}U_{1,2,3}^{4} = {}^{(1,2)}U^{2}\ U_2^1 = \begin{pmatrix} 0,349 \\ 0,412 \\ 0,113 \\ 0,116 \end{pmatrix}. $$

Будуємо матрицю

$$ U^{1} = {}^{(0,1)}U^{1} = \left({}^{(1,1)}U_{1,2,3}^{4};\ {}^{(1,2)}U_{1,2,3}^{4} \right) = \begin{pmatrix} 0,480 & 0,349 \\ 0,275 & 0,422 \\ 0,156 & 0,113 \\ 0,089 & 0,116 \end{pmatrix}. $$

Якщо на рис. 5.5 виділити фрагменти (повні домінантні ієрархії), що відповідають цілям «Зиск» і «Витрати», і позначити їх відповідно через DI_1^1 і DI_2^1, то отримаємо повну домінантну ієрархію (позначимо її через D_1^0), що відповідає глобальній цілі E_1^0 СПР (рис. 5.6).

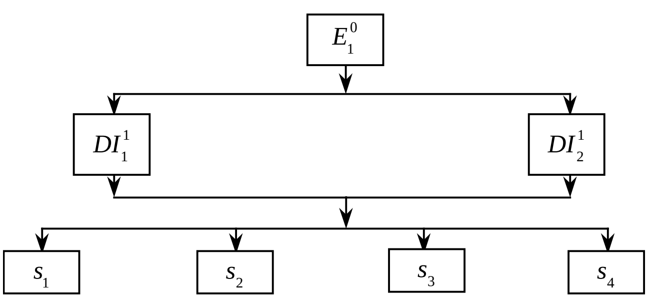


Рис. 5.6. Структура повної домінантної ієрархії D_1^0, що відповідає глобальній цілі СПР

Ураховуючи, що матриця попарних порівнянь елементів DI_1^1 та DI_2^1 відносно елемента E_1^0 збігається з матрицею попарних порівнянь елементів E_1^1 та E_2^1 з погляду «батьківського» елемента E_1^0, отримуємо (табл. 5.16):

Таблиця 5.16

МАТРИЦЯ ПОПАРНИХ ПОРІВНЯНЬ A_1^0

Яка із повних домінантних ієрархій дає більший вклад щодо досягнення цілі E_1^0 — забезпечення кредиту?			
E_1^0 (забезпечення кредиту)	DI_1^1 (E_1^1)	DI_2^1 (E_2^1)	U_1^0
DI_1^1 (E_1^1)	1	1/5	0,167
DI_2^1 (E_2^1)	5	1	0,883
$\lambda_{\max}^{0,1} = 2{,}0$; ВУС$_1^0$ $= 0$			

Вектор вагових коефіцієнтів пріоритету альтернативних варіантів застави відносно усіх елементів повної домінантної ієрархії D_1^0 є результуючим для всієї ієрархічної моделі (тобто є компромісним щодо усіх цілей і критеріїв, що входять в ієрархічну модель, структуру якої наведено на рис. 5.4). Він обчислюється за формулою

$$U_{0,1,2,3}^4 = U^1\ U_1^0 = \begin{pmatrix} 0{,}371 \\ 0{,}397 \\ 0{,}120 \\ 0{,}112 \end{pmatrix}.$$

У результаті проведеного аналізу робимо висновок, що найбільш надійним забезпеченням кредиту є дорогоцінні метали (s_2, рейтинг 0,397). Далі у порядку спадання йдуть: іноземна валюта (s_1, рейтинг 0,371), цінні папери (s_3, рейтинг 0,120) і нерухомість (s_4, рейтинг 0,112). Отже, дорогоцінні метали та іноземна валюта є приблизно рівнозначними варіантами застави щодо забезпечення кредиту. Такий же висновок (щодо рівнозначності) можна зробити відносно цінних паперів і нерухомості.

5.6.9. Ігровий підхід до методу аналізу ієрархій

Ігровий підхід до МАІ (скорочено: ІМАІ — ігровий метод аналізу ієрархій) є розвитком моделі, запропонованої Сааті в [94].

Для висвітлення суті ІМАІ повернемося до прикладу 5.7. Згідно з його умовою експерти оцінювали елементи ієрархічної моделі виходячи з певного інтуїтивно ними зафіксованого (прогнозованого) стану економічного середовища. Очевидно, що оцінювання експертів можна зробити ефективнішими, якщо виходити з позиції теоретико-ігрової моделі і ввести до розгляду множину станів економічного середовища $\Theta = (\theta_1;...;\ \theta_n)$. Це виправдано тим, що побудова матриці попарних порівнянь для кожного стану економічного середовища є значно простішою, а тому й точнішою процедурою, порівняно з використовуваною в МАІ.

Приклад 5.8. Побудувати модель множини станів економічного середовища для прикладу 5.7 виходячи з того, що у майбутньому (за період, на який надається кредит):

- ціни на дорогоцінні метали не зміняться (α);
- курс іноземної валюти може впасти на певну величину (β_1) або піднятися (β_2);
- вартість цінних паперів може зменшитися незначно (γ_1) або суттєво (γ_2);
- вартість нерухомості практично не змінюється (ξ).

Розв'язання. Можна виділити такі стани економічного середовища:

$$\theta_1 = \alpha\ \beta_1\ \lambda_1\ \xi;\quad \theta_2 = \alpha\ \beta_2\ \lambda_1\ \xi;$$

$$\theta_3 = \alpha\ \beta_1\ \lambda_2\ \xi;\quad \theta_4 = \alpha\ \beta_2\ \lambda_2\ \xi.$$

Очевидно, що у випадку, коли економічне середовище буде знаходитись у стані θ_2 (найбільш сприятливому для СПР), то за порівняння елементів-«нащадків» відносно «батьківського» елемента оцінки експерта можуть суттєво відрізнятися від оцінок, що їх він дасть тим же об'єктам у випадку θ_3 (найменш сприятливому для СПР стані).

Отже, для кожного стану економічного середовища можна побудувати відповідний вектор вагових коефіцієнтів пріоритету альтернативних рішень (стратегій). Якщо ж об'єднати ці вектори у матрицю, то останню можна використовувати в якості функціонала оцінювання рішень (стратегій) СПР, а МАІ — в якості інструмента для його побудови. Процес такої побудови можна подати у вигляді такого трикрокового алгоритму:

Крок 1. Виділяється множина станів економічного середовища $\Theta = (\theta_1;...;\ \theta_n)$.

Крок 2. Щодо кожного стану $\theta_i \in \Theta$ будується вектор вагових коефіцієнтів пріоритету альтернативних рішень (стратегій) СПР:

$$U(\theta_i) = U^L_{0,...,L-1}(\theta_i) = \left({}^k u^L_{0,...,L-1}(\theta_i):\ k = 1,...,m\right),\ i = 1,...,n.$$

Крок 3. З векторів-стовпчиків $U(\theta_i)$ будується матриця (функціонал оцінювання):

$$F = (U(\theta_1);...;\ U(\theta_n)) = \left(f_{ki} = {}^k U^L_{0,...,L-1}(\theta_i):\ k = 1,...,m;\ i = 1,...,n\right).$$

Формально реалізацію запропонованої конструкції ІМАІ можна здійснити шляхом уведення в ієрархічну модель ще одного (1-го) рівня ієрархії — станів економічного середовища (рис. 5.7).

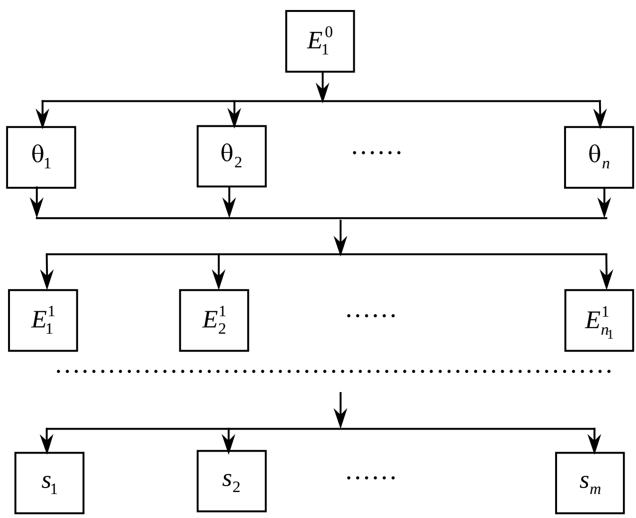


Рис. 5.7. Структура ігрової моделі аналізу ієрархії

Зазначимо, що у випадку, коли відомий розподіл імовірності станів економічного середовища $Q = (q_i = P(\Theta = \theta_i):\ i = 1,...,n)$, то з метою визначення рейтингів альтернативних рішень для згортання матриці F можна скористатись оператором «$\xrightarrow{G}$» (зваженим середньогеометричним):

$$F \xrightarrow{G} \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \vdots \\ \tilde{f}_m \end{pmatrix}; \quad \tilde{f}_k = \prod_{i=1}^{n} (f_{ki})^{q_i}, \quad k = 1,\dots,m.$$

За необхідності згортання матриці F можна реалізувати на основі оператора ZF, який використовувався для побудови ієрархічних моделей (розділ 4, пункт 4.7.9).

Якщо ж розподіл імовірності станів економічного середовища невідомий, то його оцінювання можна здійснити в полі наявної інформаційної ситуації за допомогою методів, запропонованих раніше (розділ 4). Крім того, можна скористатися методологією, притаманною МАІ, а саме, побудувати матрицю попарних порівнянь станів економічного середовища і на її основі обчислити вектор вагових коефіцієнтів пріоритету щодо цих станів. Отриманий вектор можна надалі використовувати в якості оцінки розподілу ймовірності станів.

ІМАІ можна реалізувати й іншим шляхом, коли кожне порівняння елементів-«нащадків» відносно «батьківського» елемента здійснюється послідовно для кожного стану економічного середовища θ_i $(i = 1,\dots, n)$. У результаті таких n процедур порівнянь між собою елементів-«нащадків» отримуємо n матриць попарних порівнянь. Отримані матриці розміщуються паралельно одна одній, утворюючи при цьому паралелепіпед (вісь абсцис — рядки матриць, вісь ординат — їх стовпчики, вісь аплікат — стани економічного середовища).

Тоді перетворення, аналогічні тим, що проводилися для реалізації МАІ, необхідно здійснити послідовно для кожної матриці паралелепіпеда. В результаті на кожному етапі синтезу будуть отримані матриці вагових коефіцієнтів пріоритету елементів певного рівня ієрархії. При цьому кожен рядок (вертикальної) матриці є паралельним осі абсцис і містить елементи вектора вагових коефіцієнтів пріоритету, що відповідає певному стану економічного середовища.

Результатом такого синтезу буде матриця вагових коефіцієнтів пріоритету рішень (стратегій) СПР. На основі аналізу цієї матриці можна визначити рейтинг рішень (стратегій) і, за необхідності, прийняти одне з них.

У [22, 30] для побудови матриць попарних порівнянь запропоновано використовувати апарат нечітких множин. Там же запропоновано до використання розпливчастий метод аналізу ієрархій (РМАІ), а також ігровий розпливчастий метод аналізу ієрархій (ІРМАІ). Підхід з позиції теорії нечітких множин для аналізу ієрархій використовується також у [5].

5.7. КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ТА ТЕМИ ДЛЯ ОБГОВОРЕННЯ

1. Яка інтерпретація цілі є переважаючою в глобальних економічних дослідженнях? Розкрити її сутність.
2. Причини виникнення багатоцільових задач у соціально-економічних дослідженнях.
3. У чому полягає сутність ризику щодо багатокритеріальності та множинності цілей?
4. Наведіть приклади багатоцільових задач прийняття рішень.
5. Наведіть узагальнену теоретико-ігрову модель багатоцільових багатокритеріальних рішень. Яка сутність елементів, що її складають?
6. Сутність внутрішніх і зовнішніх зв’язків, що існують між цілями.
7. Які існують концептуальні підходи щодо розв’язання багатоцільових багатокритеріальних задач в економіці?
8. Сутність критерію мінімальної відстані між інформаційними кубами.
9. Побудуйте розгорнуту модель прийняття двоцільового двокритеріального рішення в полі однієї інформаційної ситуації.
10. Яку і в якому вигляді необхідно отримати інформацію для реалізації методу аналізу ієрархій? Хто є автором цього методу?
11. У чому полягає сутність методу аналізу ієрархій (МАІ)?
12. Які процедури включає метод аналізу ієрархій?
13. На яких принципах будується метод аналізу ієрархій?
14. Який принцип відповідає першому етапу використання МАІ під час розв’язання багатокритеріальних задач?
15. Яку структуру має домінантна ієрархія? Яку особливість має повна домінантна ієрархія?
16. У чому полягає сутність принципу ієрархічної неперервності?
17. Чи містить ієрархічна модель елементи, відносно яких не є обов’язковою згода усіх експертів щодо їх включення в модель? Відносно яких елементів така згода є обов’язковою?
18. Який етап щодо МАІ є наступним після побудови ієрархії? Який метод використовується на цьому етапі?
19. Для яких елементів будуються матриці попарних порівнянь? Яка структура елементів цих матриць?
20. Яким рівням ієрархії можуть належати елементи-«батьки»? елементи-«нащадки»? Охарактеризуйте ці елементи.

21. Наведіть приклади декількох шкал, використовуваних під час попарного порівняння об’єктів.

22. Сутність принципу синтезування під час реалізації МАІ.

23. Які вам відомі методи побудови векторів вагових коефіцієнтів пріоритету?

24. Охарактеризуйте кожен із кроків алгоритму ієрархічного синтезу.

25. Що би ви вчинили на стадії побудови ієрархічної моделі та на стадії аналізу, коли не всі елементи певного рівня ієрархії доцільно порівнювати між собою?

26. Як можна оцінити узгодженість суджень експерта? Які показники використовуються для цього?

27. Як можна оцінити узгодженість ієрархічної моделі? Які показники використовуються для цього?

28. Як можна врахувати судження кількох експертів під час прийняття рішень? Як обчислюються коефіцієнти компетентності експертів?

29. Сутність ігрового методу аналізу ієрархії (ІМАІ).

30. Сутність ігрового розпливчастого методу аналізу ієрархій (ІРМАІ).

5.8. ТЕМИ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕНЬ І РЕФЕРАТІВ

1. Скласти алгоритм і програму щодо реалізації на ПК методу підтримки прийняття багатоцільових багатокритеріальних рішень на основі критерію мінімальної відстані між інформаційними кубами.

2. Скласти алгоритм і програму щодо реалізації на ПК методу підтримки прийняття багатоцільових багатокритеріальних рішень на основі ієрархічної моделі, що враховує як статистичну, так і вербальну інформацію.

3. Скласти алгоритм і програму для розрахунку на ПК максимального власного значення і відповідного йому власного вектора матриці попарних порівнянь.

4. Використання власних векторів матриці під час ранжування об’єктів.

5. Скласти алгоритм і програму для визначення індексу та відносної оцінки узгодженості суджень.

6. Розробити універсальний алгоритм і програму для розв’язання задачі синтезу пріоритету для ієрархій, елементи яких можуть мати різні зв’язки.

7. Розробити алгоритм і програму для оцінювання однорідності ієрархії, що має довільну структуру.

8. Розробити алгоритм і програму для розв’язання задачі синтезу пріоритету в ієрархії з урахуванням думок кількох експертів.

9. Розробити алгоритм і програму синтезу пріоритету в ієрархіях, в яких з різними критеріями пов’язані множини «альтернатив», що можуть відрізнятись як за складом, так і за кількістю.

10. Використання методу аналізу ієрархій для розв’язання задачі:

а) зниження ризику в антикризовому управлінні фірмою;

б) моделювання механізму регіонального і міського бюджетів;

в) перерозподілу фінансів та інших видів ресурсів;

г) реалізації великих регіональних програм;

д) підтримки прийняття рішень у зовнішньоекономічній сфері;

е) розроблення раціональної програми у соціальній та інвестиційній сферах;

є) прогнозування податкових надходжень;

ж) безпеки розвитку глобальної соціально-економічної системи.

5.9. ПРИКЛАДИ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ВИКОНАННЯ

1. Відомо, що

$$F_1 = F_1^- = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 12 & 8 \\ 10 & 8 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}; \quad F_2 = F_2^+ = \begin{pmatrix} 100 & 160 \\ 120 & 140 \\ 110 & 150 \\ 150 & 120 \end{pmatrix}; \quad u_1^F = \frac{1}{4}; \quad u_2^F = \frac{3}{4}.$$

Знайдіть компромісне рішення виходячи з позиції критеріїв Байєса та Вальда і компромісу між обома функціоналами оцінювання, якщо СПР віддає перевагу п’ятій інформаційній ситуації $\left(u_5^I = 0{,}7\right)$.

У розрахунках вважати, що маємо розподіл імовірності станів економічного середовища: $P = (0{,}6;\, 0{,}4)$.

Побудувати відповідну розгорнуту ієрархічну схему.

2. Скориставшись умовою прикладу 1, знайдіть компромісне рішення з позиції критерію мінімальної відстані між інформаційними кубами.

3. Молода сім’я (чоловік, дружина, трирічна дитина) вирішила придбати квартиру. В результаті дискусій (у колі батьків і друзів)

визначено п’ять критеріїв, яким, на їх погляд, повинна задовольняти придбана квартира:

а) розміри квартири: кількість кімнат, метраж, розмір кухні, наявність балконів тощо;

б) зручність щодо транспортного зв’язку: метро, тролейбус, автобус, трамвай;

в) місцезнаходження: околиця міста (новобудова), ближче до центру, центр, інтенсивність транспортного руху, сусідство промислового виробництва, великих торгових центрів тощо;

г) загальний стан квартири: необхідність ремонту, вік будинку (в якому знаходиться квартира);

д) фінансові умови: банківський кредит, умови продажу, вартість житла тощо.

Були визначені (щодо купівлі) три квартири:

А. Чотирикімнатна квартира сучасного планування в районі новобудов (околиця міста), інтенсивність транспортного руху невелика, в недалекому майбутньому буде проведений метрополітен, у даний момент функціонує автобусний зв’язок. Через те, що фінансування будівництва дому здійснюється шляхом використання банківського кредиту з не дуже високою відсотковою ставкою, фінансові умови можна вважати задовільними.

Б. Трикімнатна квартира у панельному будинку, побудованому 15 років тому, три балкони, досить велика кухня, всі кімнати несуміжні, потрібен невеликий ремонт, інтенсивність транспортного руху досить висока, метрополітен. Через те, що район є промисловим, вартість 1 кв. м житла є невисокою, а тому фінансові умови можна вважати хорошими.

В. Двокімнатна квартира великого метражу в цегляному будинку (побудований в середині 50-х років), будинок знаходиться в одному з центральних районів міста, зручний транспортний зв’язок, метрополітен, у районі відсутні промислові підприємства і великі торгові центри. Квартира потребує досить серйозного ремонту. Вартість 1 кв. м житла є досить високою, а тому фінансові умови можна вважати незадовільними.

Усі квартири знаходяться на п’ятому поверсі.

Скориставшись МАІ, необхідно вибрати (щодо купівлі) одну з трьох квартир.

4. Виходячи з умови завдання 3, вибрати щодо купівлі одну з зазначених квартир з допомогою ІМАІ. У розрахунках вва-

жати, що можуть мати місце три стани економічного середовища:

θ_1 — ціни на нерухомість протягом найближчих п'яти років практично не будуть змінюватися;

θ_2 — ціни на нерухомість будуть суттєво зростати;

θ_3 — ціни на нерухомість будуть суттєво зменшуватися.

Розподіл імовірності станів економічного середовища задається вектором $Q = (0{,}5;\ 0{,}3;\ 0{,}2)$.

5.10. ДОДАТОК ДО РОЗДІЛУ 5

5.10.1. Наближене обчислення головного власного вектора матриці

Власні вектори $\boldsymbol{W}$ квадратної матриці $\boldsymbol{A}$ (розмірністю $n \times n$) задовольняють рівняння

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{W} = \lambda\ \boldsymbol{W}, \tag{5.3}$$

де λ — власне значення (число) матриці $\boldsymbol{A}$.

Головний власний вектор $\boldsymbol{W}^{\max}$ матриці $\boldsymbol{A}$ — це власний вектор, що відповідає максимальному, за значенням, власному значенню $\lambda_{\max}$. Якщо матриця $\boldsymbol{A}$ утворена лише з додатніх елементів (усі елементи строго більші нуля), то головний власний вектор з точністю до константи (постійного множника) задовольняє рівняння:

$$\lim_{s \to \infty} \frac{(\boldsymbol{A})^s\ e}{\boldsymbol{e}^T\,(\boldsymbol{A})^s\ \boldsymbol{e}} = c\,\boldsymbol{W}^{\max},$$

де $\boldsymbol{e} = (1, \ldots, 1)$ — одиничний вектор; T — знак транспонування; c — константа; $s = 1,\ 2, \ldots$ — показник степеня; $(\boldsymbol{A})^s = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}..\boldsymbol{A}$ — добуток s матриць.

Якщо покласти

$$\frac{(\boldsymbol{A})^i\ \boldsymbol{e}}{\boldsymbol{e}^T\,(\boldsymbol{A})^i\ \boldsymbol{e}} = \boldsymbol{W}^i, \tag{5.4}$$

то з точністю до наперед заданого значення $\delta\,(\delta > 0)$

$$c\ \boldsymbol{W}^{\max} \approx \boldsymbol{W}^s = \left(\boldsymbol{W}_1^s; \ldots;\ \boldsymbol{W}_n^s\right)$$

за виконання умови

$$\left| \boldsymbol{e}^T \left(\boldsymbol{W}^s - \boldsymbol{W}^{s+1} \right) \right| \le \delta.$$

Якщо за наближених обчислень можна вважати достатньою точність $\delta = 0{,}01$, то δ обирається незалежно від порядку матриці $\boldsymbol{A}$.

Максимальне власне значення обчислюється за формулою

$$\lambda_{\max} = \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{W}^{\max}.$$

Якщо праву та ліву частини рівності (5.4) помножити на $\boldsymbol{e}^T$, то отримаємо:

$$\boldsymbol{e}^T\, \boldsymbol{W}^s = \frac{\boldsymbol{e}^T\,(\boldsymbol{A})^s\, \boldsymbol{e}}{\boldsymbol{e}^T\,(\boldsymbol{A})^s\, \boldsymbol{e}} = 1,$$

тобто

$$\boldsymbol{e}^T \boldsymbol{W}^s = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{W}_k^s = 1.$$

А тому вектор $\boldsymbol{W}^s$ можна використовувати в якості вектора вагових коефіцієнтів пріоритету щодо рядків матриці $\boldsymbol{A}$**.**

5.11. ПОЗНАЧЕННЯ, ВИКОРИСТОВУВАНІ В РОЗДІЛІ 5

$\boldsymbol{S} = (s_1; ...; s_m)$ — множина альтернативних рішень СПР (чистих стратегій першого гравця);

s_{k_0} — оптимальна чиста стратегія;

s_P — змішана стратегія СПР (першого гравця), що визначається вектором розподілу $\boldsymbol{P}$;

$\boldsymbol{\Theta} = (\theta_1; ...; \theta_n)$ — множина станів економічного середовища (чистих стратегій другого гравця);

$\boldsymbol{P} = (p_1; ...; p_m)$ — розподіл імовірності щодо використання СПР (першим гравцем) своїх чистих стратегій;

$\boldsymbol{Q} = (q_1; ...; q_n)$ — розподіл імовірності щодо станів економічного середовища;

$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{F}_1; ...; \boldsymbol{F}_N)$ — множина цільових функціоналів оцінювання;

$\boldsymbol{F}^l = (f_{ki}^l : k = 1,...,m;\ j = 1,...,n)$ — l-й функціонал оцінювання ($l = 1,..., N$);

f_{ki}^{l} — кількісна оцінка рішення (стратегії) s_k ($k=1,...,m$) з позиції l-ї цілі ($l=1,...,N$) за умови, що економічне середовище знаходиться у стані θ_i;

$\boldsymbol{U}^F=(u_1^F;...;u_N^F)$ — вектор вагових коефіцієнтів пріоритету функціоналів оцінювання;

$\boldsymbol{K}^l=(e_{ki}^{lt}: k=1,...,m;\ i=1,...,n;\ t=1,...,T)$ — куб інформації (тривимірна матриця, утворена на основі функціонала оцінювання $\boldsymbol{F}^l$ $(l=1,...,T)$ з даних, що відповідають множині стратегій СПР $\boldsymbol{S}$, множині станів економічного середовища $\boldsymbol{\Theta}$ і множині локальних критеріїв якості стратегій $\boldsymbol{e}$);

$\boldsymbol{KK}(s_k)$, $\boldsymbol{KK}(s_P)$ — куб інформації, відповідно стратегії s_k, змішаній стратегії s_P;

d_{Pk} — відстань між кубами інформацій $\boldsymbol{KK}(s_P)$ і $\boldsymbol{KK}(s_k)$;

$\boldsymbol{ZF}^l$ — оператор згортання функціонала оцінювання $\boldsymbol{F}^l\,(l=1,...,N)$ у полі кількох інформаційних ситуацій;

$\widetilde{\boldsymbol{FF}}^l$ — вектор-стовпчик, отриманий в результаті зваженого згортання функціонала оцінювання $\boldsymbol{F}^l$ ($l=1,...,N$);

$\boldsymbol{F\Sigma}$ — інтегральний функціонал оцінювання (матриця розмірів $m\times N$, утворена з векторів-стовпчиків $\widetilde{\boldsymbol{FF}}^l$, $l=1,...,N$);

$\widetilde{\boldsymbol{F\Sigma}}$ — вектор-стовпчик, отриманий в результаті зваженого згортання матриці $\boldsymbol{F\Sigma}$;

$\boldsymbol{ZNF}$ — оператор згортання N цільових функціоналів оцінювання $\boldsymbol{F}^l$ $(l=1,...,N)$ у полі кількох інформаційних ситуацій;

$\boldsymbol{ZB}, \boldsymbol{Z\sigma}, \boldsymbol{ZV}, \boldsymbol{ZS}^-$ — оператор згортання функціонала оцінювання, що базується відповідно на критерії Байєса, середньоквадратичного відхилення, Вальда, Севіджа;

$\boldsymbol{E}_j^i$ — елемент ієрархії, верхній індекс i якого — номер рівня ієрархії, нижній індекс j — порядковий номер елемента на відповідному рівні ієрархії ($i=0,1,...,L$; $j=1,...,n_{i+1}$);

($L+1$) — кількість рівнів ієрархії;

$\boldsymbol{A}_j^i$ — матриця попарних порівнянь елементів ($i+1$)-го рівня ієрархії з погляду «батьківського» елемента $\boldsymbol{E}_j^i$ ($i=0,1,...,L-1$; $j=1,...,n_i$);

n_i — кількість елементів ієрархії, що складають i-й рівень ієрархії ($i=0,...,L$);

$\nu_k^{i,j}$ — оцінка ваги (інтенсивності) елемента $\boldsymbol{E}_k^{i+1}$ ($k = 1,...,n_{i+1}$) з погляду його «батьківського» елемента $\boldsymbol{E}_j^i$ ($i = 0,1,..., L-1$; $j = 1,..., n_i$);

$\boldsymbol{W}_j^i$ — власний вектор матриці попарних порівнянь $\boldsymbol{A}_j^i$ ($i = 0,1,..., L-1$; $j = 1,..., n_i$);

$\boldsymbol{W}^{\max}$ — головний власний вектор матриці попарних порівнянь;

$\lambda_{\max}$, $\lambda_{\max}^{i,j}$ — максимальне власне число матриці попарних порівнянь;

$\boldsymbol{U}_j^i$ — вектор-стовпчик вагових коефіцієнтів пріоритету елементів ($i+1$)-го рівня ієрархії (рядків матриці $\boldsymbol{A}_j^i$) з погляду «батьківського» елемента $\boldsymbol{E}_j^i$ ($i = 0, 1,..., L-1$; $j = 1,..., n_i$);

$\boldsymbol{U}^i = (\boldsymbol{U}_1^i;...;\boldsymbol{U}_{n_i}^i) = (u_k^{i,j} : k = 1,..., n_{i+1};\ j = 1,..., n_i)$ — матриця вагових коефіцієнтів пріоритету елементів ($i+1$)-го рівня ієрархії з погляду «батьківських» елементів i-го рівня ієрархії ($i = 0,1,..., L$);

$\boldsymbol{U}_{0,1,...,L-1}^L = \boldsymbol{U}^{L-1}\boldsymbol{U}^{L-2} \ldots \boldsymbol{U}_1^0$ — вектор-стовпчик вагових коефіцієнтів пріоритету елементів L-го рівня ієрархії відносно «батьківських» елементів усіх рівнів ієрархії від 0-го до $(L-1)$-го включно (вектор вагових коефіцієнтів пріоритету елементів L-го рівня ієрархії відносно кореневого («батьківського») елемента $\boldsymbol{E}_1^0$);

${}^{(i,j)}\boldsymbol{U}_{0,1,...,L-1}^L = \boldsymbol{U}^{L-1}\boldsymbol{U}^{L-2} \ldots \boldsymbol{U}_j^i$ — вектор-стовпчик вагових коефіцієнтів пріоритету елементів L-го рівня ієрархії, якщо в якості кореневого («батьківського») виступає елемент $\boldsymbol{E}_j^i$ ($i = 0,1,..., L-1$; $j = 1,..., n_i$);

$\boldsymbol{S}_j^i = (s_1^{i,j};...;s_{n_{i+1}}^{i,j})$ — вектор-рядок, складений із сум елементів стовпчиків матриці попарних порівнянь;

ІУС_j^i — індекс узгодженості суджень експерта у розрізі матриці попарних порівнянь A_j^i ($i = 0,1,..., L-1$; $j = 1,..., n_i$);

$\text{ВУС}_j^i = \text{ІУС}_j^i / \text{М(ІУС)}$ — відносна узгодженість суджень експерта у розрізі матриці попарних порівнянь $\boldsymbol{A}_j^i$ ($i = 0,1,..., L-1$; $j = 1,..., n_i$);

М(ІУС) — нормативне значення (математичне сподівання) індексу узгодженості суджень;

$\text{ІУС}^i = (\text{ІУС}_1^i;\ldots;\text{ІУС}_{n_i}^i)$ — вектор-рядок індексів узгодженості суджень, що відповідають елементам i-го рівня ієрархії ($i = 0,1,\ldots, L-1$);

ІУІ — індекс узгодженості ієрархії;

М(ІУІ) — нормативне значення індексу узгодженості ієрархії;

ВУІ — відносна оцінка узгодженості ієрархії;

$u_t^{\text{експ}}$ — ваговий коефіцієнт пріоритету (компетентності) експерта ($t = 1,\ldots,T$);

${}^t\boldsymbol{U}_j^i = ({}^t u_1^{i,j};\ldots;{}^t u_{n_{i+1}}^{i,j})$ — вектор-стовпчик вагових коефіцієнтів пріоритету, отриманий на основі аналізу матриці ${}^t\boldsymbol{A}_j^i$;

${}^t\boldsymbol{A}_j^i$ — матриця попарних порівнянь елементів $(i+1)$-го рівня ієрархії з погляду «батьківського» елемента $\boldsymbol{E}_j^i$, отримана на основі суджень t-го експерта ($t = 1,\ldots,T$; $i = 1,\ldots, L-1$; $j = 1,\ldots,n_i$);

$\boldsymbol{DI}_j^i$ — повна домінантна ієрархія з кореневим елементом $\boldsymbol{E}_j^i$ ($i = 1,\ldots, L-1$; $j = 1,\ldots,n_i$).

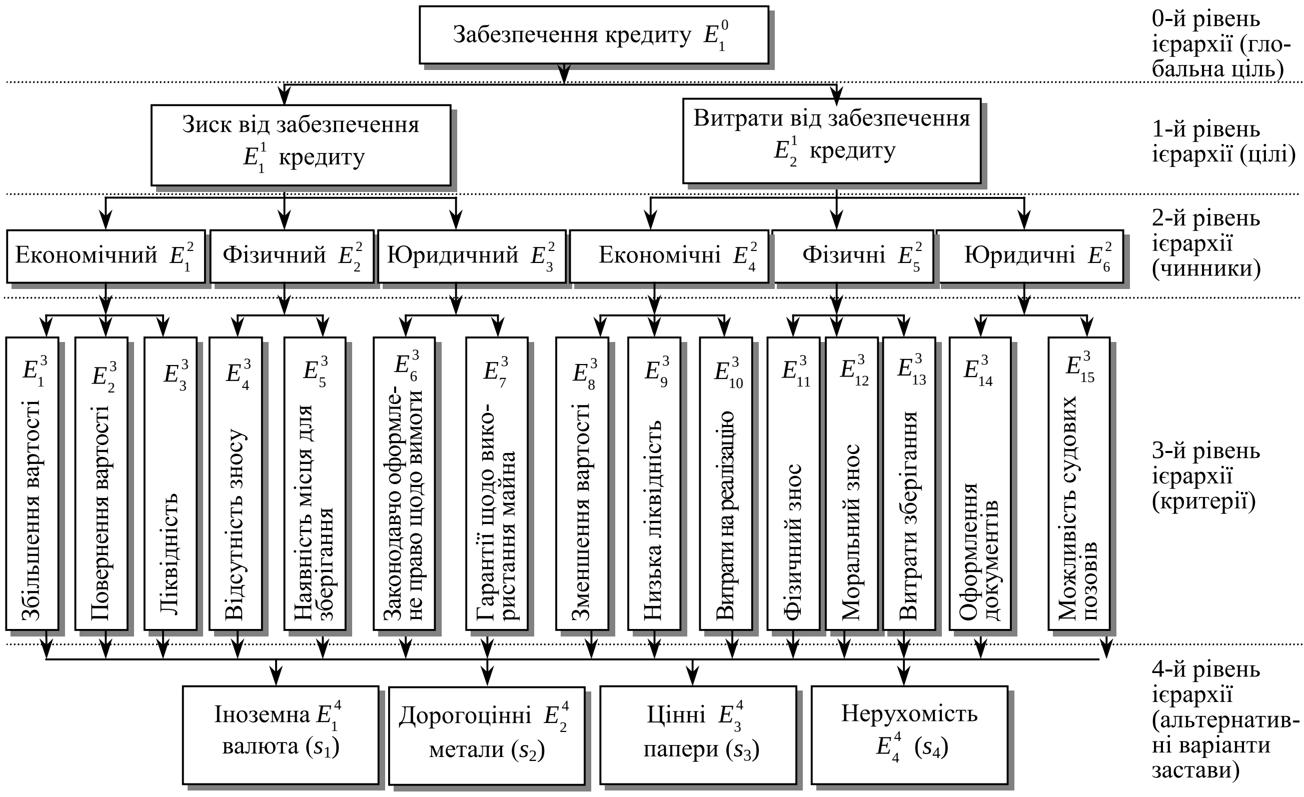


Рис. 5.4. Структура ієрархічної моделі визначення виду забезпечення кредиту

РОЗДІЛ 6

ТЕОРЕТИКО-ІГРОВИЙ ПІДХІД У ТЕОРІЇ ПОРТФЕЛЯ

Скорочення, використовувані у розділі:
УГО — умовна грошова одиниця;
ЦП — цінний папір;
МОКА — модель оцінки капітальних активів (англ. абревіатура — САРМ);
АРМ — арбітражна модель;
СТП — сучасна теорія портфеля (англ. абревіатура — МРТ);
ДКО — державні короткотермінові облігації.

6.1. ПОРТФЕЛЬНА ТЕОРІЯ: ЕТАПИ РОЗВИТКУ, ПІДХОДИ, ПРИПУЩЕННЯ

6.1.1. Етапи розвитку інвестиційної теорії

В історії розвитку інвестиційної теорії можна виділити декілька етапів. Початковий етап, що припадає на 20—30-ті роки XX ст., є періодом зародження теорії фінансів як науки. Цей період представлений, насамперед, фундаментальними працями з теорії процентної ставки американського економіста і статистика Ірвінга Фішера (1867—1947).

Принципи оптимізації структури портфеля, тобто комбінації активів, що складають багатство індивідуума чи фірми, були закладені англійським економістом Джоном Ричардом Хіксом (1904—1989). Він висунув припущення, що принцип розподілу багатства є адекватним намаганню максимізувати норми прибутків активів, тобто здійснити його в такій пропорції, за якої граничні прибутки від усіх активів рівні між собою.

Висунуті Дж. Р. Хіксом ідеї у подальшому були розвинуті американським економістом Гаррі Марковіцем (народився у 1927 р.), Вільямом Шарпом (народився у 1934 р.), Мертоном Говардом Міллером (народився у 1923 р.).

Сучасна портфельна теорія (скорочено МРТ, від англ. modern portfolio theory) була започаткована у 1952 р. революційною працею

Г. Марковіца [129]. Саме Марковіц першим побудував економіко-математичну модель задачі вибору оптимальної структури портфеля, включивши до неї чинник невизначеності та породженого ним ризику. Вченим було також запропоновано теоретико-ймовірнісну формалізацію понять «норма прибутку» та «ризик». З обчислювальної точки зору вибір ефективного портфеля належить до класу задач квадратичного програмування за наявності лінійних (для деяких задач — нелінійних) обмежень. На даний час разом із задачами лінійного програмування цей клас задач є одним з найбільш вивчених. Для них напрацьовано велику кількість достатньо ефективних алгоритмів. Більш того, задачі цього класу можна розв'язувати шляхом простого звертання до одного з численних пакетів прикладних програм розв'язання оптимізаційних задач.

Учнем Г. Марковіца — В. Шарпом у [140] було запропоновано так звану *однофакторну модель* ризику капіталів, у якій вперше з'явилися «альфа»- та «бета»-характеристики акцій. Сьогодні модель Марковіца використовується, в основному, на першому етапі формування портфеля активів для розподілу інвестованого капіталу за різними типами активів: акціями, облігаціями, нерухомістю, матеріальними цінностями тощо. Однофакторна модель Шарпа використовується на другому етапі, коли капітал, що інвестується у певний сегмент ринку активів, розподіляється між окремими активами, що складають вибраний сегмент, тобто між конкретними акціями, облігаціями тощо.

Вплив «портфельної теорії» Марковіца значно посилився після появи праць американського економіста Джеймса Тобіна (народився у 1918 р.) з аналогічних питань [142]. На відміну від підходу Марковіца, який лежав у руслі мікроекономічного аналізу, підхід Тобіна є, по суті, макроекономічним. Спершу модель Марковіца стосувалася, в основному, портфеля акцій, тобто ринкових активів. При цьому Марковіц акцентує увагу на поведінці окремого інвестора, формує оптимальний, з його точки зору, портфель на основі власної оцінки норми прибутку та ризику вибраних активів. Тобін же запропонував включити до аналізу безризикові активи, наприклад, державні облігації, основним же об'єктом його досліджень став розподіл сукупного капіталу в економіці між двома його формами: готівковою (грошовою) та неготівковою (у вигляді цінних паперів). Окрім того, Тобін проаналізував адекватність кількісних характеристик активів і портфелів, які є початковими даними щодо теорії Марковіца.

Із середини 60-х років починається наступний етап розвитку сучасної теорії інвестицій, пов'язаний з так званою *моделлю оці-*

нки капітальних активів (МОКА, англійська абревіатура — CAPM). Праці В. Шарпа [141], Дж. Лінтнера [128] та Дж. Моссіна [134] були присвячені, по суті, одному й тому ж питанню: «Якими будуть ціни на ринку цінних паперів, якщо всі інвестори володітимуть однією й тією ж інформацією, однаково оцінюватимуть норми прибутку та ризик окремих активів, а також якщо усі вони сформують оптимальні, згідно з теорією Марковіца, портфелі акцій виходячи з індивідуальної схильності до ризику?» Як зазначалося раніше (див. розділ 2), основним результатом МОКА є встановлення співвідношення між сподіваною нормою прибутку та ступенем ризику портфеля чи активу для рівноважного ринку. При цьому має враховуватися не весь ризик, пов'язаний з активом, а тільки систематичний (недиверсифіковуваний), який кількісно задається коефіцієнтом «бета», введеним Шарпом у його однофакторній моделі. Несистематичний (диверсифіковуваний) ризик зменшується шляхом вибору портфеля з раціональною (оптимальною) структурою.

Треба зазначити, що з середини 70-х років теорія МОКА неодноразово зазнавала критики. Приблизно у цей же час Стівом Россом [135] було запропоновано альтернативну модель оцінки капітальних активів, що отримала назву «*арбітражна модель*» (або APM — від англ. Arbitrage Pricing Model). Однак МОКА на даний час залишається, мабуть, самою значною та впливовою фінансовою теорією. Вибір стратегії довгострокового інвестування базується саме на цій теорії.

Про важливість проблеми оптимізації структури портфеля і для практики, і для економічної науки свідчить присвоєння практично усім першовідкривачам портфельної теорії премії Швецького державного банку пам'яті Альфреда Нобеля. Першим Нобелівською премією з економіки був відзначений у 1981 р. Джеймс Тобін — за «створення основи для розуміння того, як суб'єкти реально вчиняють в умовах, коли вони купують нерухомість, користуючись кредитом», з допомогою сформульованої ним теорії «формування портфеля проектів інвестицій».

У 1990 р. Нобелівську премію з економіки було присуджено Г. Марковіцу та В. Шарпу сумісно з М. Міллером.

Розвиток інвестиційної теорії, теорії фінансового менеджменту, цикл досліджень щодо так званої теорії ефективного ризику та пов'язаної з нею моделі «випадкових блукань» ринкових цін активів стимулювали використання динамічних теоретико-ймовірнісних моделей, що базуються на теорії випадкових процесів. У руслі цих ідей у 1973 р. Майроном Шоулсом і Фішером Блеком була запропонована модель опціонів [122], що отримала назву «*модель Блека—Шоулса*». Ця модель базується на можливості здійснення безризикової угоди з одночасним використанням акції та виписаного на неї опціона. Їх пропозиції дають змогу отримати ймовірнісну оцінку вартості опціона.

Праці Блека та Шоулса, Роберта Мертона [131] зразу ж набули широкого визнання і практичного використання. Одночасно з цими дослідженнями в 70-ті роки спостерігалося надзвичайно швидке зростання ринку опціонів. Так, за три роки після відкриття (1973 р.) Чиказької опціонної біржі кількість контрактів, які укладалися щоденно, зросла більш як у 100 разів.

Порівнюючи математичний апарат різних етапів розвитку сучасної теорії інвестицій, не можна не звернути увагу на такий факт: якщо у довоєнні роки використовувалися засоби фінансової математики, що спирались на елементарну алгебру та початки математичного аналізу, а портфельна теорія Марковіца—Тобіна—Шарпа використовувала лише елементарні теоретико-ймовірнісні та оптимізаційні методи, то роботи 70—80-х років стали необхідними інструментами поглиблених математичних засобів фінансового аналізу, зокрема дуже тонких і складних моделей та методів теорії випадкових процесів й оптимального управління.

6.1.2. Підходи до вибору портфеля цінних паперів

У теорії та практиці побудови й управління портфелем цінних паперів існують два підходи: традиційний та сучасний. У плані *традиційного підходу* напрацьовано низку певних правил і методів щодо раціональної поведінки інвестора на ринку цінних паперів. Наведемо короткі формулювання деяких з них.

1. Структура портфеля акцій: третина — великі компанії, третина — середні компанії, третина — невеликі компанії.
2. Номенклатура портфеля акцій: портфель мають складати акції не менш як 12 компаній.
3. Капітал необхідно розподіляти між різними сферами діяльності (джерелами прибутку).
4. «Правило п’яти пальців»: одна акція з п’яти приносить збитки, три — досягають цілей (відповідних їм сподіваних норм прибутку), ще одна — підвищений успіх.
5. «Золоте правило інвестування»: купувати треба дешево, а продавати — дорого.

У рамках традиційного підходу наявні фундаментальний та технічний аналіз. *Фундаментальний аналіз* в якості основи для інвестиційної стратегії використовує аналіз фінансового стану емітента цінного паперу* (ЦП), представленого у фінансових звітах корпорацій. Такий аналіз вимагає широкої диверсифікації паперів щодо різних галузей та орієнтує на придбання цінних паперів відомих, таких, що добре зарекомендували себе, компаній, які забезпечать у майбутньому найвищий прибуток, з урахуванням більш високої ліквідності цих паперів. *Технічний аналіз* базується переважно на аналізі щоденних біржових котирувань того чи іншого ЦП, намагаючись передбачити майбутню поведінку його ціни. При цьому рішення щодо купівлі чи продажу приймається згідно з отриманим прогнозом.

За традиційним підходом основна увага приділяється аналізу поведінки окремо взятого активу (акції, облігації тощо конкретного виду) та його вартості як основній та єдиній характеристиці активу. А тому можна стверджувати, що традиційний підхід не враховує (принаймні, у явному вигляді) чинник ризику. У той же час ризик відіграє важливу роль під час прийняття інвестиційних рішень. Придбання ЦП (передусім звичайних акцій) безумовно є фінансовою операцією, обтяженою суттєвим ризиком, оскільки їх норми прибутку зазнають коливань.

У рамках *сучасного підходу* теорія портфеля базується на використанні економіко-математичного моделювання, статистичних і математичних методів і вимагає відповідного забезпечення (насамперед математичного та комп’ютерного). Центральна проблема в ній полягає у виборі структури портфеля, тобто сукупності активів. При цьому, аналізуючи як окремі активи, так і їх портфель,ураховуються два найважливіші чинники: сподівана норма прибутку та ступінь ризику. У процесі аналізу здійснюється кількісне оцінювання рівня ризику. Такий підхід є багатовимірним, як з позиції сукупності активів, що утворюють портфель, так і з позиції множини характеристик, використовуваних у їх аналізі. Суттєвим моментом у сучасній теорії портфеля є врахування взаємних кореляційних зв’язків між нормами прибутку активів. Саме це врахування дає змогу здійснювати ефективну диверсифікацію портфеля, яка сприяє суттєвому зменшенню ризику портфеля порівняно з ризиками активів, що його утворюють.

Процес вибору портфеля з оптимальною структурою має базуватися на вирішенні двох проблем. Перша — це визначення

---

* Раніше сторони, що укладали угоду (контракт), письмово фіксували свої взаємні зобов’язання на спеціальних бланках — вони отримали назву «*цінні папери*». Останнім часом все поширенішою стає електронна форма ЦП.

множини ефективних портфелів (таких, що за фіксованого рівня ризику мають найбільшу сподівану норму прибутку, а за фіксованої сподіваної норми прибутку — мінімальний ступінь ризику). Друга проблема — це вибір серед ефективних портфелів такого, який враховував би об'єктивні вимоги інвестора та його суб'єктивні особливості (наприклад, ставлення до ризику).

6.1.3. Диверсифікація, її цілі

Одним з найпростіших і досить ефективних засобів сучасної теорії портфеля є метод диверсифікації (урізноманітнення).

Диверсифікація — це стратегія зниження ступеня ризику шляхом розподілу інвестицій чи інших ресурсів між декількома напрямами діяльності. Так, інвестор не повинен вкладати свої грошові засоби у ЦП одного виду, оскільки у такому разі він приречений або на низьку ефективність (прибутковість), або на високий рівень ризику. А тому необхідна диверсифікація вкладень — формування портфеля ЦП декількох видів (державні облігації, прості та привілейовані акції, облігації корпорацій, векселі, контракти, опціони, ф'ючерси, варранти, свопи тощо). Розумна диверсифікація, науковим фундаментом якої є теорія портфеля, — один з ефективних способів зниження ступеня ризику.

Вузькоспеціалізовані фірми вирізняються, з одного боку, чітким ритмом виробництва, порівняно високою рентабельністю, а з іншого — низькими адаптивністю, еластичністю та маневреністю у разі змін економічного середовища (коливань попиту та цін на сировину, кінцеву продукцію тощо). Це ще раз підтверджує, що, зокрема, на ринку цінних паперів інвестор не повинен вкладати гроші у ЦП тільки одного виду (однієї фірми).

Таким чином, досвідчений інвестор є власником ЦП декількох видів. Сукупність ЦП, що належать одному інвестору, складає його портфель ЦП. Під *структурою* портфеля ЦП розуміють співвідношення часток інвестицій в ЦП різних видів, що визначаються інвестором. Головна ціль формування портфеля — це досягнення оптимального співвідношення між ризиком і прибутком. У чому ж полягає суть інвестиційного ризику?

Інвестиційний ризик (його ступінь) визначається як відхилення фактичної прибутковості від сподіваного (середнього) її значення. Загальний ризик — це сума усіх ризиків, пов'язаних з реалізацією певних інвестицій. Та частина загального ризику, що може бути зменшена шляхом диверсифікації, називається *несистематичним* (власним, специфічним або диверсифіковуваним) ризиком (*unique risk*). *Систематичний* (ринковий, недиверсифіковуваний) ризик (*market risk*) виникає через зовнішні події, котрі впливають на ринок у цілому. Як зазначалося раніше, на систематичний ризик припадає від чверті до половини загального ризику щодо будь-яких інвестицій. Крім того, оскільки систематичний ризик одночасно зачіпає усі компанії, його неможливо позбутися (зменшити) шляхом диверсифікації.

Формування портфеля активів — це визначення конкретних активів для вкладення коштів, а також розподіл обсягу грошових засобів між різними активами у найбільш вигідній та безпечній пропорції. Такий розподіл інвестицій (формування портфеля активів) знижує (несистематичний) ризик, забезпечує більшу стійкість прибутків інвестора.

Аналізу та методам оптимізації структури (пошуку найбільш вигідного та безпечного плану розподілу та перерозподілу інвестицій) присвячена велика кількість досліджень, зокрема [22, 29, 32, 34, 37, 41, 55, 63, 78, 81, 96—105, 112, 121—123, 126—130, 132, 136, 140—143], об'єднаних спільною назвою «Теорія портфеля».

Основні *цілі інвестора* під час формування портфеля такі:

1) управління економічним ризиком, тобто зменшення рівня несистематичного ризику, а також, можливо, встановлення бажаної величини середнього систематичного ризику щодо портфеля;

2) досягнення бажаного рівня норми прибутку, тобто збільшення сподіваної норми прибутку всього портфеля;

3) зростання сумарної ціни портфеля;

4) ліквідність вкладень.

Зазначені цілі деякою мірою альтернативні. Портфель, який відповідає уявленню інвестора щодо оптимального співвідношення цих інвестиційних цілей, називається *збалансованим*. Пріоритетність тих чи інших цілей відповідає різним типам інвестиційного портфеля.

6.1.4. Припущення сучасної теорії портфеля

1. Сучасна теорія портфеля (СТП) припускає, що ринок є ефективним. Це означає, що всі учасники ринку мають доступ до інформації, всі одержують ту саму інформацію, мають вільний доступ і вихід з ринку. З іншого боку, фундаментальний аналіз

припускає, що ринок є неефективним і що більший прибуток можна одержати, купуючи недооцінені ЦП.

2. СТП припускає, що інвестори неохоче сприймають ризик. Ризик визначається несталістю норми прибутку або основного капіталу.

3. СТП припускає, що інвестори віддають перевагу вищій нормі прибутку, а не нижчій.

4. СТП припускає, що чим більший прибуток, тим більший ризик, і чим менший прибуток, тим менший ризик.

5. СТП припускає, що інвестори намагаються максимально збільшити доходи і до мінімуму зменшити ризик. Іншими словами, інвестори намагаються одержати найвищі доходи на одиницю ризику.

6. СТП припускає, що всі рішення приймаються на основі аналізу числових характеристик ЦП (наприклад, сподіваної норми прибутку, дисперсії норми прибутку, міри ліквідності тощо).

7. СТП вимагає, щоб було певне (невипадкове) співвідношення ЦП у портфелі (цю вимогу було розроблено Марковіцем).

8. СТП стверджує: щоб зменшити ризик, інвестор повинен додати до свого портфеля ЦП іншого виду. Тобто, ризик портфеля зменшується в разі збільшення кількості ЦП, що складають цей портфель.

9. СТП припускає, що завданням інвестора є формування ефективного набору ЦП, який забезпечить найвищий прибуток за найнижчого рівня ризику.

10. СТП припускає, що сподівана норма прибутку і величина ризику щодо ЦП оцінюються на основі інформації, зафіксованої впродовж певного проміжку часу, і ці характеристики залишаються незмінними у цьому проміжку.

11. СТП припускає, що будь-які ЦП можуть додаватися, вилучатися з портфеля на будь-яку суму УГО.

Зазначимо, що в основі СТП лежить гіпотеза про ефективність ринку.

6.2. ПОРТФЕЛЬ ЦІННИХ ПАПЕРІВ: ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ, СТРАТЕГІЇ

6.2.1. Норма прибутку та її обчислення

Найбільш відомими серед великої кількості видів ЦП є акції, облігації, векселі, депозитні сертифікати, ф’ючерси, опціони тощо. Боргові ЦП, такі як векселі, облігації, банківські вклади у вигляді депозитних сертифікатів засвідчують відношення позики між кредитором (особою, що передає у тимчасове користування грошові чи інші ресурси) та боржником (особою, що їх отримала). При цьому боржник повинен повернути ці ресурси через визначений проміжок часу, виплативши обумовлену суму (відсоток) за користування цими ресурсами.

Пайові цінні папери засвідчують право співволодіння статутним фондом, право участі, а також право на одержання частини прибутку емітента, закладу, що випустив ці папери, у вигляді дивіденду та участь у розподілі майна в разі його ліквідації. Найбільш розповсюдженим видом ЦП такого типу є акції (франц. action — цінний папір, лат. actio — розпорядження, дозвіл, претензія). Розрізняють чотири види акцій: іменні, на пред’явника, привілейовані та прості.

Крім основних видів (боргових і майнових), використовуються так звані *похідні ЦП*, а саме: ф’ючерси, опціони, варранти тощо. Останні фіксують права та зобов’язання учасників контракту на певний (обмежений) термін у торгових угодах з основними ЦП.

Прибуток інвестора щодо певного активу складається з двох частин: поточний прибуток і прибуток від зміни ціни, який називають також приростом капіталу. Природно, що приріст капіталу може бути як додатним, так і від’ємним (коли ціна активу не зростає, а падає).

Ефективність капіталовкладень характеризується відносною величиною, яка обчислюється як відношення загального прибутку до початкової вартості активу. Цю величину називають *нормою прибутку активу* (за даний проміжок часу). В якості синоніма норми прибутку можуть використовуватись також терміни: рентабельність, відсоткова ставка, ефективність тощо. Норма прибутку ЦП (особливо звичайних акцій) залежить від трьох чинників: ціни купівлі, дивідендів та ціни продажу. Перший чинник є детермінованим, оскільки ціна купівлі точно відома у момент укладання угоди. Економічний (фінансовий) ризик пов’язаний з невизначеністю, зумовленою неможливістю точного прогнозу вартості ЦП у майбутньому (ціни продажу) та величини поточного прибутку. Зауважимо, що боргові та пайові ЦП зазвичай передбачають отримання поточного прибутку або у вигляді відсотка, або у вигляді дивідендів. Однак якщо відсоток, що виплачується по облігаціях, фіксується контрактом, то у випадку звичайної акції дивіденд, що виплачується, залежить від величини прибутку, отриманого акціонерним товариством (корпорацією).

Уведемо позначення: T — кількість періодів (роки, місяці, тижні, дні тощо); t — номер поточного періоду часу $(t=1,...,T)$; r_t — норма прибутку активу за t-й період часу; c_t — ціна активу на кінець t-го періоду; c_{t-1} — ціна активу на початок t-го періоду (кінець $(t-1)$-го періоду); d_t — поточний прибуток активу (дивіденди, відсотки тощо), отриманий впродовж t-го періоду часу. Тоді величина норми прибутку за t-й період часу визначається за формулою

$$r_t = \frac{d_t + c_t - c_{t-1}}{c_{t-1}} \times 100\%, \qquad t=1,...,T. \tag{6.1}$$

Приклад 6.1. Інвестор придбав на початку звітного періоду 1000 акцій одного виду за ціною 64 УГО кожна. В кінці звітного періоду він отримав дивіденди по 5,5 УГО за кожну акцію. Обчислити норму прибутку цих акцій за звітний період і прибуток інвестора, якщо він у кінці звітного періоду продав усі акції по 67,5 УГО за кожну.

Розв'язання. Згідно з умовою маємо: $T=1$; $c_0=64$; $c_1=67{,}5$; $d_1=5{,}5$. Для кожної акції прибуток за рахунок приросту капіталу становить

$$c_1 - c_0 = 67{,}5 - 64 = 3{,}5 \text{ (УГО)},$$

а загальний прибуток —

$$d_1 + c_1 - c_0 = 5{,}5 + 3{,}5 = 9 \text{ (УГО)}.$$

Отже, згідно з формулою (6.1) норма прибутку в даному випадку дорівнює

$$r_1 = \frac{9}{64} \times 100 = 14{,}0625 \text{ (\%)}.$$

Загальний прибуток для 1000 акцій становить $9 \times 1000 = 9000$ (УГО). Аналогічні обчислення можна здійснювати зразу для усієї сукупності (1000) акцій. Так, купивши на початку звітного періоду 1000 акцій за ціною 64 УГО кожна, інвестор вклав капітал

$$C_0 = c_0 \times 1000 = 64 \times 1000 = 64000 \text{ (УГО)}.$$

Продавши всі акції в кінці звітного періоду по 67,5 УГО за кожну, він виручив суму

$$C_1 = c_1 \times 1000 = 67{,}5 \times 1000 = 67500 \text{ (УГО)};$$

його прибуток за рахунок приросту капіталу становить

$$C_1 - C_0 = 67\,500 - 64\,000 = 3500 \text{ (УГО)}.$$

Оскільки сукупний поточний прибуток становить

$$d_1 \times 1000 = 5{,}5 \times 1000 = 5500 \text{ (УГО)},$$

то згідно з формулою (6.1) отримуємо:

$$r_1 = \frac{5500 + 3500}{64000} \times 100 = 14{,}0625 \text{ (\%)}.$$

І нарешті, загальний прибуток становить

$$64\,000 \times \frac{r_1}{100} = 64\,000 \times \frac{14{,}0625}{100} = 9000 \text{ (УГО)}.$$

Відповідь: За звітний період норма прибутку акцій $r_1 = 14{,}0625\,\%$, а загальний прибуток інвестора — $(d_1 + c_1 - c_1) \times 1000 = 9000$ (УГО).

Обчислена у наведеному прикладі норма прибутку називається *реалізованою*, оскільки інвестор дійсно отримав дивіденди та реалізував (продав) усі акції на ринку, отримавши при цьому прибуток також і від зростання ціни. Але на практиці, говорячи про норму прибутку активу, не завжди мають на увазі купівлю активу та його подальшу реалізацію. Якщо активи, що належать інвестору, не реалізуються в кінці кожного поточного періоду, а лише оцінюються щодо їх ринкової вартості, то відповідні прибутки (збитки) та норми прибутку називаються «*книжними*» (*бухгалтерськими, «паперовими»*).

Нехай має місце ситуація, що визначається такими умовами:

1) поточний прибуток, який отримується від активу, не інвестується протягом *t* періодів $(t = 1, \dots, T)$ в інші або у той же актив і враховується у вигляді готівки на кінець періоду;

2) інвестор реалізовує (продає) актив у кінці *t*-го періоду $(t = 1, \dots, T)$.

У наведеній ситуації норма прибутку визначається формулою

$$r_t = \frac{d_t + c_t - c_0}{c_0} \times 100\%, \qquad t = 1, \dots, T. \tag{6.2}$$

Якщо з моменту придбання ЦП до кінця *t*-го періоду $d_t = 0$, то формула (6.2) набуває вигляду:

$$r_t = \frac{c_t - c_0}{c_0} \times 100\% = \left(\frac{c_t}{c_0} - 1 \right) \times 100\%, \quad t = 1,\ldots,T. \tag{6.3}$$

Грошовий потік активу, що фігурує у формулі (6.3), зводиться до єдиної ціни c_t на кінець вибраного періоду. Саме ця ситуація має місце у випадку короткотермінових державних облігацій (ДКО), які є безкупонними, тобто по них не виплачуються відсотки протягом усього терміну аж до їх погашення. Таким чином, будь-яка угода з ДКО пов'язана з двома цінами: вартістю купівлі та сумою, виручено́ю в момент продажу чи під час погашення, коли не враховувати витрати, пов'язані з комісійними витратами і, можливо, податками.

У наведених вище випадках робиться припущення щодо відсутності поточних надходжень від активу, або відсутності реінвестування отриманого поточного доходу. Це — найпростіша ситуація. На практиці інвестор може на отримані дивіденди купити акції тієї ж чи іншої компанії. Мають місце випадки, коли самі дивіденди виплачуються не у вигляді готівки, а додатковими акціями. Це привело до іншого підходу щодо визначення норми прибутку. Відповідна формула має вигляд

$$r_t = \frac{w_t - w_0}{w_0} \times 100\% = \left(\frac{w_t}{w_0} - 1 \right) \times 100\%, \tag{6.4}$$

де w_0 — початкова, а w_t — кінцева (на кінець t-го періоду) вартість портфеля, яка включає його готівкову частину.

Якщо $w_t = v_t + d_t \quad (t = 0,1,\ldots,T)$, де v_t — вартість неготівкової частини портфеля, а d_t — його готівкова частина, то формула (6.4) за умови, що весь наявний капітал інвестується (тобто $d_0 = 0$), набуває вигляду, аналогічного (6.2) щодо одного активу:

$$r_t = \frac{d_t + v_t - v_0}{v_0} \times 100\%.$$

Тут мається на увазі, що нерозподілений поточний прибуток або реінвестується і тим самим враховується у v_t, або зберігається у вигляді готівки і тоді враховується в d_t. Саме з цих припущень випливає еквівалентність наведених формул розрахунку норми прибутку.

Наведене визначення дає змогу встановити співвідношення між нормою прибутку портфеля зі структурою $X=(x_1;...;x_N)$ та нормами прибутків активів, що складають цей портфель на момент часу *t*:

$$r_{\Pi t}=\sum_{i=1}^{N}(x_i r_{it})=x_1 r_{1t}+...+x_N r_{Nt},$$

де: x_i — частка первинного капіталу, що інвестується в *i*-й актив; r_{it} — норма прибутку *i*-го активу; $r_{\Pi t}$ — норма прибутку портфеля (r_{it}, $i=1,...,N$ та $r_{\Pi t}$ відносяться до одного й того ж моменту часу *t*).

6.2.2. Числові характеристики активів та їх обчислення

Наведені нижче допущення (1—6) є постулатами портфельної теорії Марковіца:

1. Ринок складається зі скінченної кількості активів, норми прибутків яких, для заданого періоду (інвестиційного горизонту), вважаються випадковими величинами.
2. Інвестор спроможний (наприклад, на основі статистичних даних) отримати оцінку сподіваних (середніх) значень норм прибутків активів, рівнів їх ризику та попарних коваріацій.
3. Інвестор може сформулювати будь-який допустимий (згідно з даною моделлю) портфель. Норма прибутку портфеля теж випадкова величина, для котрої інвестор може визначити числові характеристики.
4. Вибрані портфелі порівнюють тільки на основі двох характеристик: сподіваної норми прибутку, яка визначається шляхом обчислення математичного сподівання норми прибутку, та ступеня ризику, який визначається шляхом обчислення дисперсії норми прибутку або середньоквадратичного відхилення.
5. Індивідуальні пріоритети інвестора задаються функцією корисності, яка представляє собою узагальнений (комбінований) критерій порівняння портфелів (2.3.4.7). Вона залежить від сподіваної норми прибутку і ризику портфеля, а також від схильності (несхильності) інвестора до ризику.
6. З двох портфелів з однаковою нормою прибутку інвестор обов'язково віддасть перевагу портфелю, обтяженому меншим ризиком, з двох портфелів з однаковим ризиком — тому, що має більшу сподівану норму прибутку.

Отже, актив, обтяжений ризиком, характеризується двома показниками: сподіваною нормою прибутку (математичним сподіванням норми прибутку) і ступенем (рівнем) ризику, що визначається як дисперсія (середньоквадратичне відхилення) норми прибутку від її сподіваного значення.

Припустимо (з метою спрощення), що інвестор володіє певним початковим капіталом, тобто вартістю w, яку можна використати для інвестування у поточному періоді. Йому необхідно розподілити цей капітал між N активами. Як уже зазначалося, портфель — це набір активів. Такий набір можна задати шляхом впорядкування N чисел, тобто шляхом задання вектора

$$Z = (z_1;...;z_N),$$

де z_i задає кількість одиниць i-го активу, включеного у портфель $(i = 1,..., N)$.

Теоретично цей вектор може бути довільним, але при цьому має виконуватись умова

$$w = \sum_{i=1}^{N} w_i = \sum_{i=1}^{N} (z_i v_i), \tag{6.5}$$

де v_i — початкова ціна одиниці активу i-го виду.

Опис портфеля з допомогою структурного вектора Z називають *абсолютним.* В інвестиційному аналізі частіше використовується *відносний* метод опису портфеля, коли портфель задається вектором питомої ваги кожного активу:

$$X = (x_1;...;x_N), \tag{6.6}$$

де

$$x_i = \frac{z_i v_i}{w} = \frac{w_i}{w}, \quad i = 1,..., N, \tag{6.7}$$

є часткою початкового капіталу, що інвестується в актив i-го виду. Величина

$$w_i = z_i \ v_i \tag{6.8}$$

складає початкову вартість частки портфеля, утвореної з активів i-го виду $(i = 1, \dots, N)$. З урахуванням співвідношень (6.5) і (6.7) отримуємо, що

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1. \tag{6.9}$$

Співвідношення (6.9) є основним обмеженням для компонентів вектора X, що задає структуру портфеля.

Приклад 6.2. Обчислити величину інвестованого капіталу w, початкову вартість w_i кожної частини портфеля, утвореної активом i-го виду $(i = 1,\ 2)$, частки x_i вартості кожного виду активів у портфелі інвестора $(i = 1, 2)$, якщо цей портфель утворений із 100 акцій першої фірми по 500 УГО і 200 акцій другої фірми по 300 УГО кожна.

Розв'язання. Згідно з умовою прикладу $N = 2,\ \ x_1 = 300,\ \ v_1 = 500,$ $v_2 = 300.$ З урахуванням (6.8) отримуємо, що

$$w_1 = z_1\ v_1 = 100 \times 500 = 50\,000\ \text{(УГО)};$$

$$w_2 = z_2\ v_2 = 200 \times 300 = 60\,000\ \text{(УГО)},$$

а тому згідно з (6.5) вартість усього портфеля

$$w = z_1\ v_1 + x_2\ v_2 = w_1 + w_2 = 110\,000\ \text{(УГО)}.$$

Частки інвестицій в активи обчислюємо згідно з (6.7):

$$x_1 = \frac{w_1}{w} = \frac{50\ 000}{110\ 000} = 0{,}455 \qquad \text{або} \qquad x_1 \times 100 = 45{,}5\ (\%);$$

$$x_2 = \frac{w_2}{w} = \frac{60\ 000}{110\ 000} = 0{,}545 \qquad \text{або} \qquad x_2 \times 100 = 54{,}5\ (\%).$$

Значення x_1 та x_2 можна трактувати таким чином: з кожної УГО, вкладеної інвестором у портфель, на акції першої фірми припадає 0,455 УГО, а на акції другої фірми — 0,545 УГО.

Відповідь: Інвестований капітал становить $w = 110\,000$ УГО; початкові вартості частин портфеля, утворених акціями першої та другої фірм, — $w_1 = 50\,000$ УГО, $w_2 = 60\,000$ УГО; структура портфеля — $X = (0{,}455;\ 0{,}545)$, тобто 45,5% інвестованого капіталу вкладено в акції першої фірми, а 54,5% — в акції другої фірми.

Серед усіх векторів X, що задають структуру допустимих портфелів, виділимо вектори, що задають структуру *однорідних портфелів* (складених лише з активів одного виду). Виділені вектори позначимо відповідно через

$$e_1 = (1;\ 0;\ 0;...;\ 0;\ 0); \quad e_2 = (0;\ 1;\ 0;...;\ 0;\ 0);....; \quad e_N = (0;\ 0;\ 0;...;\ 0;\ 1).$$

Говорять, що вектори $e_1, e_2, ..., e_N$ утворюють *канонічний базис* і, як це відомо з лінійної алгебри, будь-який вектор X можна представити єдиним способом у вигляді їх лінійної комбінації :

$$X = x_1 e_1 + ... + x_N e_N = \sum_{i=1}^{N} (x_i e_i). \tag{6.10}$$

Суть підходу Марковіца полягає в тому, що він запропонував розглядати норми прибутку активів і складених з них портфелів як випадкові величини. У моделі Марковіца це реалізовується таким чином: активу *і*-го виду ставиться у відповідність випадкова величина R_i $(i = 1,..., N)$, реалізації якої є нормами прибутку цього активу для вибраного інвестиційного горизонту (інвестиційного періоду). Значення норми прибутку активу *і*-го виду залежать від стану економічного середовища (ринку). Множина можливих станів ринку може складатися, в принципі, з будь-якої кількості елементів, зокрема й нескінченної (навіть бути континумом). Для спрощення викладок вважатимемо її скінченною.

Як і раніше, множину станів ринку (економічного середовища, позначатимемо через $\Theta = (\theta_1; \ldots;\ \theta_n)$, апріорний розподіл імовірності щодо настання цих станів — через $Q = (q_1; \ldots;\ q_n)$ (при цьому q_j — ймовірність *j*-го стану $(j = 1,..., n)$, n — кількість різних станів ринку). Нагадаємо, що елементи вектора Q мають задовольняти умови:

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1; \tag{6.11}$$

$$q_j \geq 0, \quad j = 1,..., n. \tag{6.12}$$

У цьому випадку норми прибутку $R_i = (q_{i1}; \ldots;\ r_{in})$ активу *і*-го виду є дискретною випадковою величиною, яка приймає свої значення r_{ij} з відповідними ймовірностями q_j $(i = 1,..., N;\ j = 1,..., n)$. Зазначимо, що серед n чисел r_{ij} за фіксованого першого індексу i (для вибраного активу *і*-го виду) далеко не всі відрізняються один від одного значенням. Але оскільки йдеться про активи, обтяжені ризиком, то хоча б дві реалізації дискретної випадкової величини є різними (за значенням).

Якщо норму прибутку активу *і*-го виду задано у вигляді випадкової величини, то можна обчислити (оцінити) її числові характеристики, а саме: математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення тощо.

Як уже зазначалося, в теорії Марковіца сподівана норма прибутку обчислюється як математичне сподівання відповідної випадкової величини. У дискретному випадку вона обчислюється за формулою

$$m_i = M(R_i) = \sum_{j=1}^{n} q_j r_{ij}, \quad i = 1,..., N. \tag{6.13}$$

Ступінь (рівень) ризику оцінюється, зокрема, як дисперсія випадкової величини R_i:

$$D(R_i) = \sum_{j=1}^{n} q_j \left(r_{ij} - m_i\right)^2 = \sum_{j=1}^{n} q_j r_{ij}^2 - m_i^2, \quad i = 1,..., N \tag{6.14}$$

або, що по суті є тим самим, як середньоквадратичне відхилення:

$$\sigma_i = \sqrt{D(R_i)}.$$

Портфель активів можна розглядати як своєрідний «складений» актив, а тому в якості його характеристик використовуються ті ж кількісні показники. При цьому приймається важлива угода про те, що інвестор свій вибір щодо інвестиційного рішення здійснює на основі аналізу сподіваної норми прибутку та ступеня ризику активів і їх портфеля. Якщо стратегія інвестора полягає в інвестуванні всього капіталу лише в актив одного виду, то цей актив повинен мати найбільшу сподівану норму прибутку і найменший ступінь ризику.

Як правило, актив, що має більшу сподівану норму прибутку, характеризується більшим рівнем ризику. В цьому випадку інвестор вибору одного активу протиставляє вибір портфеля з певної сукупності активів, намагаючись при цьому, по можливості, диверсифікувати (розподіляти) ризик з метою зменшення його рівня (редукції ризику). Ступінь можливості такої диверсифікації визначається характеристикою, що оцінює міру щільності лінійного взаємозв’язку між нормами прибутків активів, — з допомогою *коваріації* чи *коефіцієнта парної кореляції*. Для дискретних випадкових величин R_i та R_l коваріація обчислюється за формулою

$$\sigma_{il} = \operatorname{cov}(R;\ R_l) = \sum_{j=1}^{n} \left(q_j \left(r_{ij} - m_i\right)\left(r_{lj} - m_l\right)\right), \ i = 1,..., N; \quad l = 1,..., N,$$

або

$$\sigma_{il} = \mathrm{cov}(R_i;\ R_l) = \sum_{j=1}^{n} \left(q_j r_{ij} r_{lj}\right) - m_i m_l, \quad i = 1,\ldots,N; \quad l = 1,\ldots,N, \tag{6.15}$$

а коефіцієнт кореляції

$$\rho_{il} = \frac{\sigma_{il}}{\sigma_i \sigma_l}, \quad i = 1,\ldots,N; \quad l = 1,\ldots,N. \tag{6.16}$$

Ураховуючи, що

$$\rho_{ii} = 1, \ \ \sigma_{ii} = \sigma_i \sigma_i \rho_{ii} = \sigma_i^2; \ \ \rho_{il} = \rho_{li}, \ \ \sigma_{il} = \sigma_i \sigma_l \rho_{il} = \sigma_{li};$$

$$i = 1,\ldots,N; \ \ l = 1,\ldots,N,$$

коваріаційна матриця є симетричною відносно головної діагоналі і на цій діагоналі розміщено дисперсії (оцінки ризику) активів, що складають портфель. Як відомо, симетричні матриці мають таку властивість:

$$C^T = C, \tag{6.17}$$

де через «T» позначено операцію транспонування матриці.

Приклад 6.3. Побудувати коваріаційну матрицю активів двох видів, якщо задана така інформація щодо їх норм прибутку:

Номер стану економічного середовища (j)	1	2	3	4	5
Імовірність стану економічного середовища (q_j)	0,1	0,3	0,2	0,3	0,1
Норма прибутку (r_{1j}, %)	20	10	2	–2	–10
Норма прибутку (r_{2j}, %)	10	5	2	1	–5

Розв'язання. Згідно з умовою кількість активів $N = 2$, а кількість станів економічного середовища $n = 5$. Для обчислення сподіваних норм прибутку та ступеня ризику активів скористаємося наведеними таблицями:

						Σ
r_{1j}	20	10	2	–2	–10	—
q_j	0,1	0,3	0,2	0,3	0,1	1
$q_j\ r_{1j}$	2	3	0,4	–0,6	–1	3,8

$q_j\ r_{1j}^2$	40	30	0,8	1,2	10	82

						Σ
r_{2j}	10	5	2	1	–5	—
q_j	0,1	0,3	0,2	0,3	0,1	1
$q_j\ r_{2j}$	1	1,5	0,4	0,3	–0,5	2,7
$q_j\ r_{2j}^2$	10	7,5	0,8	0,3	2,5	21,1

З урахуванням формул (6.13) і (6.14), отримуємо:

$$m_1 = M(R_1) = \sum_{j=1}^{5} q_j r_{1j} = 3{,}8\ (\%); \qquad m_2 = M(R_2) = \sum_{j=1}^{5} q_j r_{2j} = 2{,}7\ (\%);$$

$$\sigma_1^2 = D(R_1) = \sum_{j=1}^{5} q_j r_{1j}^2 - m_1^2 = 67{,}56; \quad \sigma_2^2 = D(R_2) = \sum_{j=1}^{5} q_j r_{2j}^2 - m_2^2 = 13{,}81;$$

$$\sigma_1 = \sqrt{D(R_1)} = 8{,}219(\%); \qquad \sigma_2 = \sqrt{D(R_2)} = 3{,}716(\%).$$

Для обчислення коваріації σ_{12} складаємо таку таблицю:

						Σ
r_{1j}	20	10	2	–2	–10	—
r_{2j}	10	5	2	1	–5	—
q_j	0,1	0,3	0,2	0,3	0,1	1
$q_j\ r_{1j}\ r_{2j}$	20	15	0,8	–0,6	5	40,2

Згідно з формулою (6.15) обчислюємо:

$$\sigma_{12} = \operatorname{cov}(R_1;\ R_2) = \sum_{j=1}^{5} \left(q_j r_{1j} r_{2j}\right) - m_1 m_2 = 29{,}94.$$

Скориставшись формулою (6.15), отримаємо

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{29{,}94}{8{,}219 \times 3{,}716} = 0{,}98,$$

тобто можна стверджувати про наявність щільного (практично функціонального) лінійного прямого взаємозв’язку між нормами прибутку даних активів.

Ураховуючи, що $\sigma_{11} = \sigma_1^2 = 67{,}56$, $\sigma_{22} = \sigma_2^2 = 13{,}81$, $\sigma_{12} = \sigma_{21} = 29{,}94$, будуємо коваріаційну матрицю:

$$C = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 67{,}56 & 29{,}94 \\ 29{,}94 & 13{,}81 \end{pmatrix}.$$

Нехай на момент часу *t* вартість портфеля становить w_t. Тоді його норма прибутку на цей момент часу

$$r_{\Pi t} = \frac{w_t - w_0}{w_0} = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_{it} - \sum_{i=1}^{N} w_{i0}}{w_0} = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{w_{it} - w_{i0}}{w_{i0}} \cdot \frac{w_{i0}}{w_0}\right) = \sum_{i=1}^{N}(x_i r_{it}). \quad (6.18)$$

Якщо через R_Π позначити випадкову величину, що відображає норму прибутку портфеля, то отримаємо:

$$R_\Pi = \sum_{i=1}^{N}(x_i R_i) = x_1 R_1 + ... + x_n R_N, \quad (6.19)$$

тобто R_Π є лінійною комбінацією випадкових величин R_i, $i = 1,...,N$ (що відображають норми прибутків цінних паперів).

Виходячи із (6.19), отримуємо *числові характеристики портфеля*: сподівана норма прибутку

$$m_\Pi = M(R_\Pi) = M\left(\sum_{i=1}^{N}(x_i R_i)\right) = \sum_{i=1}^{N} x_i M(R_i) = \sum_{i=1}^{N} x_i m_i = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}\left(x_i q_j r_{ij}\right); \quad (6.20)$$

рівень його ризику

$$\sigma_\Pi^2 = D(R_\Pi) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}(x_i x_l \sigma_{il}) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}(x_i x_l \sigma_i \sigma_l \rho_{il}). \quad (6.21)$$

Якщо сукупність коваріацій для усіх пар активів, що складають портфель цінних паперів, задати у вигляді коваріаційної матриці

$$C = \mathrm{cov}(R_\Pi) = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1N} \\ \delta_{12} & \delta_{12} & \dots & \delta_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{N1} & \delta_{N2} & \dots & \delta_{NN} \end{pmatrix},$$

то формулу (6.21) можна записати так:

$$\sigma_\Pi^2 = D(R_\Pi) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}(x_i x_l \sigma_{il}) = XCX^T,$$

де X^T — транспонований вектор X (задає структуру портфеля).

6.2.3. Статистичні оцінки числових характеристик активів

Множина станів економічного середовища — ідеалізоване поняття. Самі стани є «неспостережуваними» величинами, тоді як значення (реалізації) норм прибутків активів, що відповідають цим станам, є величинами спостережуваними.

Крім того, виходять з допущення, що поведінка норми прибутку активу у майбутньому суттєво залежить від того, як вона формувалась у минулому. Це означає, що майбутню норму прибутку можна наближено визначити (спрогнозувати) на основі її значень (реалізацій випадкової величини) у минулому (в попередні періоди).

Іншими словами, характеристики активів і відповідного портфеля можна оцінити на основі статистичної інформації за минулі періоди (тобто на основі історичних даних). При цьому статистичну інформацію слід розглядати як часові (динамічні) ряди норм прибутків активів у відповідні періоди.

Як і раніше, через T позначатимемо кількість попередніх періодів, у які здійснювалася фіксація значень економічних показників (обсяг вибірки), r_{it} — значення норми прибутку активу i-го виду, що спостерігалась у t-й період $(i = 1,\ldots, N;\, t = 1,\ldots,T)$. Тоді в якості оцінки сподіваної норми прибутку m_i (математичного сподівання норми прибутку i-го активу) можна використати вибіркове середнє $\hat{m}_i$, а саме:

$$m_i \approx \hat{m}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_{it}, \quad i = 1,\ldots, N. \tag{6.22}$$

Дисперсія σ_i^2 норми прибутку активу i-го виду оцінюється виправленою вибірковою дисперсією (незміщеною статистичною оцінкою дисперсії) $\hat{\sigma}_i^2$:

$$\sigma_i^2 \approx \hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(r_{it} - \hat{m}_i)^2 = \frac{1}{T-1}\left(\sum_{t=1}^{T}\left(r_{it}^2\right) - T\,\hat{m}_i^2\right);\; i = 1,\ldots, N. \tag{6.23}$$

Тоді оцінка середньоквадратичного відхилення задається формулою

$$\sigma_i \approx \hat{\sigma}_i = \sqrt{\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(r_{it} - \hat{m}_i)^2}\;;\; i = 1,\ldots, N. \tag{6.24}$$

Оцінка коефіцієнта (парної) кореляції називається *вибірковим коефіцієнтом (парної) кореляції*. Вона задається формулою

$$\rho_{il} \approx \hat{\rho}_{il} = \frac{\hat{\sigma}_{il}}{\hat{\sigma}_i \, \hat{\sigma}_l}; \quad i = 1,...,N; \quad l = 1,...,N, \tag{6.25}$$

де виправлена вибіркова коваріація $\hat{\sigma}_{il}$ є статистичною оцінкою коваріації σ_{il}. Для оцінки σ_{il} можна скористатися формулою

$$\begin{aligned} \sigma_{il} \approx \hat{\sigma}_{il} &= \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T} ((r_{it} - \hat{m}_i)(r_{lt} - \hat{m}_l)) = \\ &= \frac{1}{T-1} \left(\sum_{t=1}^{T} (r_{it} r_{lt}) - T \; \hat{m}_i \, \hat{m}_l \right). \end{aligned} \tag{6.26}$$

Формулу (6.22) можна розглядати як частинний випадок формули (6.23) щодо обчислення сподіваної норми прибутку активу, коли можливі значення норми прибутку вважаються рівноймовірними, тобто що $q_1 = ... = q_T = \frac{1}{T}$. Аналогічну інтерпретацію можна дати формулам (6.23) — (6.26).

6.2.4. Види портфельних стратегій

Рівність (6.20) вказує на те, що сподівана норма прибутку портфеля є лінійною формою відносно компонентів вектора $X = (x_1;...;\, x_N)$, що задає структуру цього портфеля. Водночас ступінь ризику (дисперсія) є квадратичною формою відносно компонентів вектора X. Інвестор має два критерії оптимальності щодо портфеля активів (його структури): лінійний — сподівана норма прибутку портфеля і квадратичний — ступінь його ризику. Створюючи портфель, інвестор намагається досягнути максимального значення щодо першого критерію і мінімального — щодо другого.

Для строгого (математичного) формулювання задачі вибору портфеля з оптимальною структурою необхідно домовитися про те, які види портфелів уважаються допустимими для моделі, що вивчається. Розглянемо лише деякі найважливіші класи допустимих портфелів.

У моделі Блека допустимим є будь-який портфель, для якого компоненти вектора X, що задає його структуру, задовольняють умову $\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$, але при цьому можуть бути як додатними, так і від'ємними. Додатним компонентам вектора, що задає структуру портфеля, відповідають активи, відносно яких інвестор знаходиться у так званій *довгій позиції*. Довга позиція — це придбання активу з намірами подальшого його продажу (закриття позиції). При цьому здійснення такої біржової операції відбувається в період підвищення ціни даного активу. Від'ємним компонентам вектора X відповідають активи, відносно яких інвестор здійснює біржову операцію під назвою *короткий продаж*. У цьому випадку він позичає актив в іншого інвестора (кредитора) і тут же його продає. Надалі він купує цей актив на ринку за зниженою ціною і повертає його своєму кредитору. При цьому він зобов'язаний внести задаток (маржу), що виконує роль матеріального забезпечення короткого продажу, а також виплатити кредитору прибуток, який би той міг отримати від активу за проміжок часу, що відповідає тривалості цієї операції, і певний відсоток за кредит. Теоретично реалізована норма прибутку у найбільш сприятливій ситуації може сягати дуже великих (нескінченних) значень, але й ступінь ризику цієї операції може бути (теоретично) необмеженим, оскільки в разі підвищення ціни на актив інвестор зобов'язаний його придбати за цією ж (більш високою) ціною.

У моделі Марковіца допустимими є лише стандартні портфелі (без коротких позицій). До останніх належать портфелі, структури X яких мають елементи, що задовольняють дві умови: насамперед, $\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$, але при цьому виконується умова невід'ємності часток x_i $(x_i \geq 0;\ i = 1,\ldots, N)$. Допустимі структури портфелів цього класу утворюють множину

$$\Delta_X = \left\{ X = (x_1;\ldots;x_N) : \sum_{i=1}^{N} x_i = 1;\ x_i \geq 0,\ i = 1,\ldots, N \right\}.$$

У моделі Блека наявність коротких позицій дає змогу досягти будь-якої великої норми прибутку (природно, за рахунок збільшення ступеня ризику). Особливістю моделі Марковіца є обмеженість норми прибутку допустимих портфелів. Легко показати, що сподівана норма прибутку портфеля m_Π у моделі Марковіца задовольняє умову

$$\min_{i=1,\ldots,N} m_i \leq m_\Pi \leq \max_{i=1,\ldots,N} m_i . \tag{6.27}$$

Особливістю моделі Тобіна—Шарпа—Лінтнера (далі — модель Тобіна) є допущення щодо існування на ринку активу, ризиком якого можна знехтувати. Надалі цей актив називатимемо *безризиковим*.

Очевидно, що норма прибутку такого активу не залежить від стану ринку (економічного середовища) і завжди приймає одне й те ж значення: $r_{0t} = r_0 = \text{const}\ (t = 1,..., N)$. Такого роду економічний показник можна розглядати як вироджену дискретну випадкову величину R_0, що приймає єдине значення з імовірністю одиниця, тобто $P(R_0 = r_0) = 1$. Звідси випливає, що

$$m_0 = M(R_0) = r_0; \quad \sigma_0^2 = D(R_0) = 0; \quad \sigma_{0i} = \text{cov}(R_0; R_i) = 0; \quad i = 1,.., N,$$

а тому коваріаційна матриця портфеля, яка включає безризиковий актив, буде мати нульові рядок і стовпчик.

Уважатимемо надалі, що на ринку котирується лише один безризиковий актив. Решта активів — обтяжені ризиком, тобто такі, що мають ненульову дисперсію: $\sigma_i^2 = D(R_i) > 0 \quad (i = 1,..., N)$. У моделі Тобіна структура портфеля задається вектором

$$\tilde{X} = (x_0; X) = (x_0; x_1;...; x_N); \quad \sum_{i=0}^{N} x_i = 1; \quad x_i \geq 0, \quad i = 0,1,..., N.$$

За умови, що $x_0 \neq 1$, і враховуючи, що $1 - x_0 = \sum_{i=1}^{N} x_i$, вектор X можна представити у вигляді лінійної комбінації структур, що відповідають безризиковому та обтяженому ризиком портфелям:

$$\tilde{X} = x_0 e_0 + (1 - x_0)\tilde{X}^0,$$

де: $e_0 = (1;\ 0;...;\ 0)$ — структура однорідного портфеля, утвореного з безризикового активу; $\tilde{X}^0 = \left(0; \frac{x_1}{1 - x_0};...;\frac{x_N}{1 - x_0}\right)$ — структура портфеля, складеного з активів, обтяжених ризиком. Таке представлення структури портфеля має широке використання в теорії оцінки капітальних активів (МОКА).

У моделі Тобіна існує єдина можливість фінансових вкладень, коли гарантується отримання певного прибутку і обсяг цього прибутку визначається безризиковою відсотковою ставкою (нормою прибутку) r_0. У [112] досліджується модель з декількома (не рівними між собою) безризиковими відсотковими ставками. В моделі з безризиковими активами можна розглядати два типи портфелів — загальні, тобто з можливими короткими позиціями, та стандартні — без коротких позицій (коли їх структура містить лише невід’ємні компоненти).

У [22, 29, 32, 63, 81] моделювання структури *ефективного портфеля* (з оптимальним співвідношенням ризику та відповідної премії за цей ризик) зводиться до мінімізації величини модифікованого коефіцієнта варіації норми прибутку портфеля з пороговим значенням $Z_F = r_0$, а саме — до розв'язання екстремальної задачі:

$$CV_m(R_\Pi) = \operatorname{tg}\varphi(x_1;...;\ x_N) = \frac{\sigma_\Pi}{m_\Pi - r_0} \to \min_{X \in \Delta_X};$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1; \quad x_i \geq 0, \quad i = 1,..., N.$$

Нагадаємо, що ефективний портфель відіграє базову роль у моделі Тобіна та використовується для побудови лінії ринку капіталів [32, 34, 112] тощо.

Підхід до оцінки ступеня ризику, що базується на врахуванні лише несприятливих для інвестора явищ, призводить до екстремальної задачі

$$CSV_m(R_\Pi) = \operatorname{tg}(\varphi_1;...;\ \varphi_N) = \frac{SSV(R_\Pi)}{m_\Pi - r_0} = \frac{SSV(R_\Pi)}{m_\Pi - r_0} \to \min_{X \in \Delta_X};$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1; \quad x_i \geq 0, \quad i = 1,..., N,$$

де: $CSV_m(R_\Pi)$ — модифікований коефіцієнт семіваріації; $SSV(R_\Pi) = \sqrt{SV(R_\Pi)}$ — семіквадратичне відхилення; $CV(R_\Pi)$ — семіваріація випадкової величини R_Π відносно сподіваної норми прибутку m_Π портфеля. Якщо в якості центра групування значень норми прибутку портфеля вибирати інші показники, наприклад, моду випадкової величини R_Π, її зважене середньогеометричне тощо, то моделювання структури ефективного портфеля активів можна здійснити і на цій основі.

6.3. ВИБІР СТРУКТУРИ ПОРТФЕЛЯ З НАПЕРЕД ЗАДАНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Процес інвестування можна реалізувати великою кількістю способів, але в усіх випадках він розпочинається з формулювання цілей інвестування, оцінювання обсягу тимчасово вільних капітальних ресурсів і горизонту інвестування. Слід зауважити, що інвестиційний горизонт визначає проміжок часу, протягом якого інвестор може розбудовувати розумну стратегію та оцінювати її можливі результати. Суттєвим моментом при цьому є можливість достатньо точної оцінки таких кількісних показників проекту, як майбутня вартість, сподівана норма прибутку, ступінь ризику тощо. Такі оцінки можна отримати насамперед на основі статистичної інформації.

Наступний етап інвестиційного процесу називається інвестиційним аналізом. Суть його полягає у виборі інвестиційних активів, з якими інвестор збирається проводити біржові операції, тобто купувати їх і продавати. На цьому етапі інвестор повинен, зокрема, спрогнозувати майбутню вартість і норму прибутку кожного активу. Практика такого прогнозу щодо цінних паперів сформулювала два підходи, які отримали назву відповідно «фундаментальний аналіз» і «технічний аналіз», про які мова йшла раніше.

Як уже зазначалось, у 50-ті роки XX ст. виник новий, сучасний підхід до інвестиційного аналізу, в якому чільне місце посідає задача оцінки норми прибутку та ступеня ризику інвестиційного активу, а не просто передбачення обсягів його майбутніх дивідендів чи майбутньої вартості. Крім того, сучасний аналіз орієнтується на вивчення поведінки сукупності активів.

Після етапу аналізу настає черга розроблення стратегії щодо інвестування. Це означає, що інвестор повинен визначити, які саме активи він збирається придбати, коли він повинен продавати їх тощо. Ідея створення портфелів активів, як основи інвестиційної стратегії, не є надбанням сучасності. Вона використовувалась і раніше. Щодо сучасної фінансової теорії, то її досягнення полягають у напрацюванні нових принципів формування інвестиційного портфеля. Сучасний підхід ставить задачу побудови портфеля, тобто найкращого згідно з тим чи іншим, а то й декількома одночасно критеріями оптимальності. Саме у рамках сучасного портфельного підходу проблема формування інвестиційного портфеля отримує своє адекватне розв’язання.

Необхідно наголосити, що вибір оптимального портфеля має сенс саме відносно заданого інвестиційного горизонту. Надалі цю процедуру (а також попередні етапи) необхідно повторювати, оскільки з плином часу відбувається трансформація ринку, а тому цілі інвестора можуть зазнавати суттєвих змін. Це спричинює необхідність управляти портфелем активів, тобто послідовно повторювати триєдиний процес: визначення цілей — аналіз активів — вибір структури портфеля. На наступних проміжках часу завдяки трансформації ринку структура раніш сформованого портфеля може не бути оптимальною, а тому деякі активи мають вилучатися з нього, інші, зокрема й нові, — залучатися.

Таке трактування інвестиційного процесу є дещо спрощеним, воно носить досить оглядовий характер. Однак питання, яких воно торкається, або ж були розглянуті раніше, або ж отримають детальне висвітлення в подальших викладках, що базуються на суттєвому використанні математичного апарату.

6.3.1. Класична модель Марковіца

Придбання акцій — безсумнівно є ризикованою фінансовою операцією. Вклавши свої ресурси в акції лише одного підприємства, інвестор стає заручником коливань їх курсової вартості на ринку цінних паперів. Але якщо інвестор розподілив свій капітал між декількома активами, то ефективність сформованого портфеля залежатиме від їх сумісного курсу, коливання якого значно менші. При цьому найважливішу роль відіграє вибір конкретної структури портфеля активів і він має базуватися на чітких розрахунках.

Як зазначалось раніше, в класичній теорії портфеля приймається гіпотеза щодо випадковості норм прибутків активів, а саме — що величини R_i є дискретними випадковими величинами $(i = 1,..., N)$. Ця гіпотеза дозволяє використовувати в процесі побудови моделей методи теорії ймовірності та математичної статистики. Використовуючи введені позначення, класичну модель (концепцію) Марковіца задачі вибору портфеля з наперед заданими характеристиками можна подати в такому вигляді: серед елементів множини Δ_X знайти елемент $X^* = \left(x_1^*;...;\ x_N^*\right)$, де x_i^* — частка капіталу, інвестованого в актив i-го виду $(i = 1,..., N)$, щоб портфель зі структурою X^* мав найбільшу сподівану норму прибутку та найменший ступінь ризику.

Формально економіко-математичну модель побудови портфеля можна подати у вигляді такої двокритеріальної задачі вибору оптимального рішення:

$$m_{\Pi} = M\left(R_{\Pi}\right) = \sum_{i=1}^{N}\left(x_i m_i\right) \to \max_{X \in \Delta_X}; \tag{6.28}$$

$$\sigma_{\Pi}^2 = D\left(R_{\Pi}\right) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\left(x_i x_l \sigma_{il}\right) \to \min_{X \in \Delta_X}; \tag{6.29}$$

за обмежень

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1; \tag{6.30}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1,..., N. \tag{6.31}$$

Наявність двох критеріїв суттєво ускладнює процес вибору оптимального портфеля, оскільки покращання значення одного критерію може призвести до погіршання значення другого. Як вже зазначалось у розділі 4, існує низка способів розв’язання цієї (двокритеріальної) оптимізаційної задачі. Перейдемо до висвітлення проблеми формування допустимих портфелів, віднесених до ефективних.

Нагадаємо, що портфель зі сподіваною нормою прибутку m_{Π}^* та ступенем ризику σ_{Π}^* називається ефективним *(оптимальним* *за Паретто)*, а його структура $X^* = \left(x_1^*;...;x_N^*\right)$ — *вектором Паретто* (для цього портфеля), якщо $m_\Pi^* > m_\Pi$ для усіх портфелів, що мають структуру $X = \left(x_1;...;x_N\right)$, сподівану норму прибутку $m_\Pi^* > m_\Pi$ та ризик $\sigma_\Pi = \sigma_\Pi^*$.

Аналогічно портфель зі структурою X^* є *оптимальним за Паретто*, а його структура X^* — *вектором Паретто*, якщо за $m_\Pi = m_\Pi^*$ його ступінь ризику $\sigma_\Pi^* < \sigma_\Pi$.

Означення 6.1. Портфель зі структурою $X^* = \left(x_1^*;...;x_N^*\right)$ будемо називати ефективним *в концепції Марковіца*, якщо X^* є вектором Паретто задачі (6.28)—(6.31) і при цьому множина структур усіх ефективних портфелів збігається з множиною Паретто задачі (6.28)—(6.31).

Якщо через Δ_{X^*} позначити множину структур усіх ефективних портфелів, то очевидно, що $\Delta_{X^*} \subset \Delta_X$.

Означення 6.2. Портфель зі структурою $X^* = \left(x_1^*;...;x_N^*\right)$ будемо називати *ефективним в концепції Блека*, якщо X^* є вектором Паретто задачі (6.28)—(6.31).

Згідно з наведеними означеннями допустимий портфель називається *ефективним,* якщо не існує іншого допустимого портфеля з не меншою сподіваною нормою прибутку і меншим ступенем ризику або з більшою сподіваною нормою прибутку і не більшим ступенем ризику. Ефективність портфеля означає його *непокращуваність* (непокращуваність числових характеристик). Щодо ефективного портфеля, то будь-який інший (незбіжний з ним) портфель має або більший ступінь ризику, або меншу сподівану норму прибутку. Такій властивості портфеля, як ефективність, можна надати наочної геометричної інтерпретації (рис. 6.1), якщо у двовимірному евклідовому просторі критеріїв (далі — критеріальний простір) «$m — \sigma$» вздовж однієї координатної осі відкладати сподівану норму прибутку портфеля, а вздовж другої — його ризик [32, 34, 81, 112].

Якщо скористатися принципом виділення основного критерію, то задачу пошуку ефективного портфеля (6.28)—(6.31) можна розглядати як такі дві задачі на умовний екстремум:

$$\sigma_\Pi^2 = D\left(R_\Pi\right) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\left(x_i x_l \sigma_{il}\right) \to \min_{X \in \Delta_X}; \tag{6.32}$$

$$m_{\Pi} = M(R_{\Pi}) = \sum_{i=1}^{N}(x_i m_i) \geq m_{\Pi}^0; \tag{6.33}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1; \quad x_i \geq 0, \quad i = 1,\ldots,N, \tag{6.34}$$

або

$$m_{\Pi} = M(R_{\Pi}) = \sum_{i=1}^{N}(x_i m_i) \to \max_{X \in \Delta_X}; \tag{6.35}$$

$$\sigma_{\Pi}^2 = D(R_{\Pi}) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}(x_i x_l \sigma_{il}) \leq (\sigma_{\Pi}^0)^2; \tag{6.36}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1; \quad x_i \geq 0, \quad i = 1,\ldots,N. \tag{6.37}$$

Згідно з нерівністю (6.27) задача (6.32)—(6.34) має рішення за всіх заданих рівнів сподіваної норми прибутку портфеля m_{Π}^0 $(m_{\Pi}^0 = \text{const})$, що задовольняють умову

$$\min_{i=1,\ldots,N} m_i \leq m_{\Pi}^0 \leq \max_{i=1,\ldots,N} m_i.$$

У свою чергу, задача (6.35)—(6.37) має рішення за всіх заданих ступенів ризику портфеля $(\sigma_{\Pi}^0)^2$ $(\sigma_{\Pi}^0 = \text{const})$, що задовольняють умову

$$\min_{X \in \Delta_X} \sigma_{\Pi}^2 \leq (\sigma_{\Pi}^0)^2 \leq \max_{i=1,\ldots,N} \sigma_i^2 .$$

Зазначимо, що у випадку моделі Блека, коли відсутнє обмеження щодо знаку компонентів вектора X, відповідна задача на умовний екстремум має рішення для будь-якого наперед заданого значення константи m_{Π}^0. При цьому чисто технічно реалізація алгоритма розв’язання задачі є значно простішою, ніж за розв’язання її з вимогою невід’ємності компонентів X.

Розглянемо *задачу мінімізації ризику портфеля* на множині всіх допустимих портфелів (так звану *задачу збереження капіталу* [32]). Формально ця однокритеріальна задача задається співвідношеннями:

$$\sigma_{\Pi}^* = D(R_{\Pi}) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}(x_i x_l \sigma_{il}) \to \min_{X \in \Delta_X}; \tag{6.38}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1; \tag{6.39}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1,\ldots,N. \tag{6.40}$$

Якщо рішення задачі (6.38)—(6.40) позначити через $X^* = = \left(x_1^*;...;\ x_N^*\right)$, то, очевидно, портфель з такою структурою досягатиме мінімального ступеня ризику і при цьому

$$\left(\sigma_\Pi^*\right)^2 = D\left(R_\Pi^*\right) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\left(x_i^* x_l^* \sigma_{il}\right); \tag{6.41}$$

$$\min_{i=1,...,N} m_i \le m_\Pi^* \le \max_{i=1,...,N} m_i;$$

$$m_\Pi^* = M\left(R_\Pi^*\right) = \sum_{i=1}^{N}\left(x_i^* m_i\right); \tag{6.42}$$

$$R_\Pi^* = \sum_{i=1}^{N}\left(x_i^* r_i\right).$$

Портфель з мінімальним ризиком завжди існує в моделі Марковіца і в моделі Блека. Але в моделі Блека він, за досягнення мінімального ступеня ризику, може мати від'ємну сподівану норму прибутку. Якщо всі компоненти рішення задачі (6.38)—(6.39) є невід'ємними числами, то портфелі з найменшим ступенем ризику в обох моделях збігаються (мають однакову структуру).

6.3.2. Концептуальні підходи до побудови множини портфелів

Сформулюємо загальне правило, якого повинен дотримуватись інвестор для розподілу своїх засобів (капіталу) між декількома активами:

Необхідно прагнути розподілити вкладення між різними видами активів, а власне такими, що показали в минулому (за попередні періоди часу), по-перше, різну щільність зв'язку (кореляцію) із загальноринковими цінами (індексами) і, по-друге, незбіжну між собою фазу коливань норм прибутку (цін) усередині портфеля.

Управління портфелем — це планування, аналіз і регулювання структури портфеля, діяльність з його формування та підтримки з метою досягнення поставлених цілей за умови збереження необхідного ступеня його ризику та мінімізації витрат, пов'язаних з цим. (Нами в попередньому матеріалі було коротко охарактеризовано етапи інвестиційного процесу. Конкретний перелік операцій, які охоплює поняття «управління портфелем», наведено в [34, 55, 106].)

Розглянемо послідовність дій інвестора під час вибору оптимального, в певному сенсі, портфеля. Нагадаємо, що структура портфеля задається вектором $X = (x_1; ...; x_N)$, де x_i — відносна вага активу в портфелі або частка від усього початкового капіталу, інвестованого в актив i-го виду. Підхід Марковіца щодо прийняття інвестиційних рішень базується на аналізі сподіваних (середніх) значень і дисперсій (варіацій) випадкових величин — норм прибутку активів та їх портфелів. Саме ці числові характеристики і використовуються в якості критеріїв оптимальності під час вибору портфелів з наперед заданими властивостями.

У конкретних задачах можуть задаватися фінансові умови, що впливають на формування структури портфеля. Наприклад, виключення коротких позицій (класичні портфелі, структури яких мають лише невід'ємні компоненти), обмеженість зверху чи знизу обсягу окремої позиції тощо.

Розв'язання задачі вибору портфеля зі структурою, що відповідає заданим властивостям, можна починати з побудови множини ефективних (непокращуваних) портфелів. Якщо кожному портфелю поставити у відповідність точку, координатами якої є його числові характеристики (критерії), то математичною моделлю сукупності допустимих портфелів є (критеріальна) множина точок (на площині, в просторі), а моделлю сукупності ефективних портфелів — частина границі цієї множини. Так, у моделі Марковіца сукупність допустимих портфелів задається множиною точок у двовимірному просторі (на площині)

$$\Pi = \{\Pi_X(m_\Pi; \sigma_\Pi) : X = (x_1; ...; x_N) \in \Delta_X\},$$

де: $\Pi_X(m_\Pi; \sigma_\Pi)$ — точка, що відповідає портфелю зі структурою X; m_Π — його сподівана норма прибутку; σ_Π — ступінь ризику (середньоквадратичне відхилення).

Сутність підходу до побудови математичної моделі множини ефективних портфелів полягає у тому, що фіксуються значення всіх кількісних показників (критеріїв) портфеля, крім одного, за незафіксованим показником відшукується оптимальне значення. Так, зафіксувавши в моделі (6.32)—(6.34) рівень сподіваної норми прибутку портфеля $m_\Pi = m_\Pi^0 = \text{const}$ і розв'язавши відповідну задачу мінімізації ризику портфеля, знаходимо величину σ_Π^* (тобто серед усіх портфелів, сподівана норма прибутку яких є фіксованою і становить $m_\Pi^0 = \text{const}$, знаходимо портфель, ступінь ризику якого досягає мінімального рівня $\sigma_\Pi^*(m_\Pi^0)$). Портфелі, що мають числові характеристики $m_П^0$ та $\sigma_П^*\left(m_П^0\right)$, належать множині ефективних портфелів. Марковіц показав, що у просторі «m — σ» множині ефективних портфелів відповідають точки, які належать неперервній, угнутій (опуклій вниз, рис. 6.1) кривій, складеній зі скінченної кількості кусків гіпербол і (можливо) прямолінійних відрізків.

На рис. 6.1 наведено геометричні образи: множина допустимих портфелів (множина П), якій відповідає заштрихована частина наведеної фігури; «мінімальна границя» — дуга $П_1П^*П_N$; множина ефективних портфелів — дуга $П^*П_2$. На рисунку: точці $П_1$ відповідає обтяжений ризиком актив з числовими характеристиками m_1 та σ_1, при цьому його сподівана норма прибутку (m_1) є найменшою серед активів, що складають портфель; точці $П_N$ відповідає обтяжений ризиком актив з числовими характеристиками m_N та σ_N, при цьому його сподівана норма прибутку (m_N) є найбільшою серед активів, що складають портфель.

Детальніше процес побудови моделі множини допустимих портфелів досліджується в [32, 34, 112].

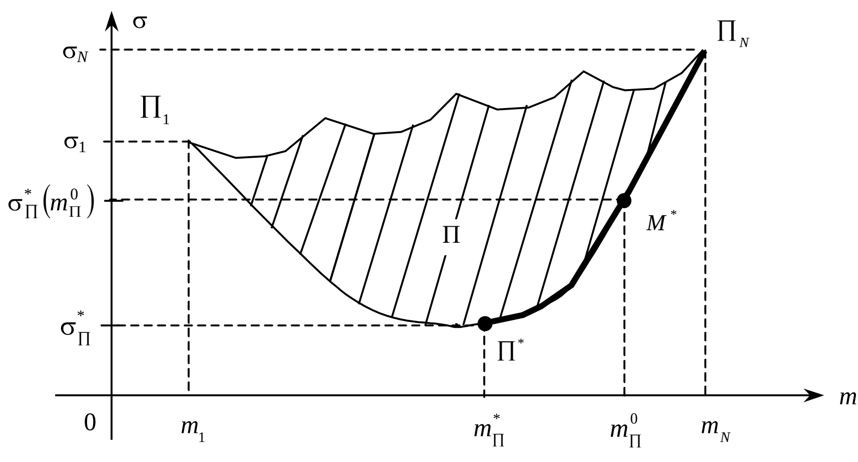


Рис. 6.1. Множина допустимих (заштрихована площа)
і множина ефективних (жирна лінія) портфелів

Оскільки крива, що відповідає «мінімальній границі» $\left(\cup П_1П^*П_N\right)$ є опуклою вниз, то їй належить точка $П_{X^*}\left(m_П^*;\ \sigma_П^*\right) \in П$, що має мінімальну за значенням ординату. Тобто серед множини допустимих портфелів є портфель з найменшим ступенем ризику (йому на рис. 6.1 відповідає точка Π^*). Якщо структуру цього портфеля позначити через $X^* = \left(x_1^*;...;\ x_N^*\right)$, то $\left(\sigma_\Pi^*\right)^2$ та m_Π^* можна обчислити за допомогою формул (6.41) та (6.42) відповідно.

Зазначимо, що точкам Π_1, Π_N та M^*, наведеним на рис. 6.1, відповідають такі елементи множини П: точці Π_1 — елемент $\Pi_{X^1}(m_1;\ \sigma_1)$, де $X^1 = (1;\ 0;\ldots;\ 0)$ (структура однорідного портфеля, складеного з активів першого виду); точці Π_N — елемент $\Pi_{X^N}(m_N;\ \sigma_N)$, де $X^N = (0;\ldots;\ 0;\ 1)$ (структура однорідного портфеля, складеного з активів N-го виду; точці M^* — елемент $\Pi_{X^*\left(m_\Pi^0\right)}\left(m_\Pi^0;\ \sigma^*\left(m_\Pi^0\right)\right)$, де $X^*\left(m_\Pi^0\right) = \left(x_1^*\left(m_\Pi^0\right);\ldots;\ x_N^*\left(m_\Pi^0\right)\right)$.

Хоча побудова множини ефективних портфелів значно звужує поле пошуку оптимального (згідно з даними критеріями) портфеля, вона не дає змоги здійснити його однозначний вибір. У сучасній теорії вибору висувається припущення, що інвестор може точно сформулювати свої пріоритети. Математично це адекватно побудові (вибору) функції корисності інвестора $u = u(m_\Pi;\ \sigma_\Pi)$, яка в даному випадку є функцією таких кількісних показників портфеля, як m_Π та σ_Π. Оптимальним вважатиметься той допустимий портфель, котрий дає змогу досягти максимуму функції корисності, тобто

$$\Pi_{X_u^*}\left(m_\Pi^*;\ \sigma_\Pi^*\right) \ :\ u\left(m_\Pi^*;\ \sigma_\Pi^*\right) = \max_{\Pi_X \in \Pi} u(m_\Pi;\sigma_\Pi).$$

Теорія Марковіца узгоджується з функціями корисності вигляду

$$u\left(m_\Pi^*;\ \sigma_\Pi;\ \lambda\right) = (1-\lambda)m_\Pi - \lambda\sigma_\Pi^2, \tag{6.43}$$

що включають, окрім об’єктивних чинників m_Π та σ_Π, ще й суб’єктивний — λ, який інтерпретується як *коефіцієнт несхильності* до ризику інвестора [32] і приймає значення $\lambda \in [0;\ 1]$ (чим меншого значення параметру λ надає інвестор, тим на більший ризик він готовий піти з метою збільшення сподіваної норми прибутку портфеля, і навпаки, чим більше λ, тим менше він схильний до ризику). Аналогом функції корисності (6.43) є функція

$$u(m_\Pi;\ \sigma_\Pi;\ K) = m_\Pi - \frac{K}{2}\sigma_\Pi^2, \tag{6.44}$$

де $\frac{K}{2}=\frac{\lambda}{1-\lambda}$, $\lambda \in [0;\ 1)$, тобто $K \in [0;\ +\infty)$. У функції (6.44) суб'єктивним показником є чинник *K*, він задається інвестором та інтерпретується як коефіцієнт несхильності до ризику.

Функція корисності (6.44) у розгорнутому вигляді записується як

$$u(X;\ K)=\sum_{i=1}^{N} x_i m_i - \frac{K}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}(x_i x_l \sigma_{il}). \tag{6.45}$$

Якщо у портфель входить безризиковий актив (модель Тобіна), то функція корисності (6.45) включає ще один доданок, який враховує норму прибутку цього активу, і тоді

$$u\left(\tilde{X}, k\right)= x_0 r_0 + \sum_{i=1}^{N}(x_i m_i) - \frac{K}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}(x_i x_l \sigma_{il}). \tag{6.46}$$

Зазначимо, що дослідження портфеля, складеного з двох активів, обтяжених ризиком, здійснювалися в багатьох наукових працях, зокрема у [32, 34, 55, 112]. Ступінь ризику такого портфеля обчислюється згідно з (6.21), розгорнутим варіантом якого є формула

$$D(R_{\Pi}) = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + 2x_1 x_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}.$$

У [32] зазначається, що для портфеля, складеного з двох активів, диверсифікація дає ефективний результат щодо зменшення ступеня ризику лише в тому випадку, коли коефіцієнт кореляції норм прибутків цих активів задовольняє умові:

$$\rho_{12} \in [-1;\ \rho'), \qquad \rho' = \min\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2};\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right). \tag{6.47}$$

За виконання умови (6.47) структура портфеля, який серед допустимих портфелів має найменшу ступінь ризику, задається вектором $X^* = \left(x_1^*;\ x_2^*\right)$, де

$$x_1^* = \frac{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}-\rho_{12}}{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}+\frac{\sigma_2}{\sigma_1}-2\rho_{12}}; \quad x_2^* = \frac{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}-\rho_{12}}{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}+\frac{\sigma_2}{\sigma_1}-2\rho_{12}}.$$

Підсумовуючи, зазначимо, що в останні десятиліття використання теорії портфеля значно розширилося. Все більший загал інвестиційних менеджерів, адміністраторів інвестиційних фондів використовують її методи на практиці. І хоча у сучасної теорії портфеля є противники, вплив її постійно зростає не тільки в науковій сфері, але й на практиці.

6.4. ТЕОРЕТИКО-ІГРОВА КОНЦЕПЦІЯ ВИБОРУ ПОРТФЕЛЯ

У класичній теорії портфеля приймається гіпотеза щодо стаціонарності (тобто незмінності з плином часу) таких характеристик активів, як сподівана норма прибутку, дисперсія тощо. Але, як показують дослідження, це допущення часто порушується, тобто характеристики активів є функціями часу і при цьому залежність одних від часу є суттєвою, інших — проявляється у дещо меншій мірі.

Крім того, прийняття гіпотези щодо стаціонарності норм прибутків активів не дає змоги скористатись усією наявною інформацією, особливо у випадку великої кількості нестаціонарних станів ринку. У багатьох випадках отримані на основі достовірної інформації оцінки числових показників, обраних для інвестування активів (сподівані норми прибутку, дисперсії, коваріації норм прибутку тощо), неадекватно характеризують відповідні випадкові величини та їх сукупність.

У подальших викладках пропонуються деякі модифікації моделі Марковіца для різних інформаційних ситуацій. Для кожної з них визначається сутність такого поняття, як ефективні портфелі, розглядаються різні підходи до постановки задачі про вибір портфеля з наперед заданими характеристиками та обґрунтовується можливість використання теоретико-ігрової концепції для розв’язання цієї задачі. Суттєвою перевагою теоретико-ігрових методів пошуку ефективного портфеля є їх конструктивність щодо реалізації. Зазначимо, що базою для реалізації теоретико-ігрових моделей є методи математичного програмування. Відповідні пакети прикладних програм входять у математичне забезпечення сучасної комп’ютерної техніки.

Одним з основних і найбільш придатних для використання підходів до оцінювання параметрів імовірнісної моделі ринку і числових характеристик активів є використання ретроспективних даних. Але при цьому треба пам’ятати, що отримані оцінки не є абсолютно надійними, що вони не є точним прогнозом майбутніх значень відповідних показників. Аналогічно не можна вважати, що оцінки, отримані на основі інших підходів (методів), є адекватним відображенням дійсності, тобто що є істинними значення ймовірностей сценаріїв, можливі значення норм прибутків активів для відповідних станів ринку, всіх числових характеристик активів і портфелів, обчислюваних на їх основі.

Запропоновані модифікації моделі Марковіца дають змогу враховувати фінансові умови, що можуть задаватися в конкретних задачах, і тим самим обмежувати вибір типу портфеля. Практика створення портфелів висунула низку таких додаткових умов. До них, окрім зазначених раніше умов щодо виключення коротких позицій, обмеження зверху чи знизу обсягу окремої позиції, можна віднести й обмежену подільність (подрібнення) активів тощо.

6.4.1. Теоретико-ігрова модель вибору структури портфеля при заданому розподілі ймовірності

Як і раніше, вважатимемо, що: N — кількість різних видів активів, обтяжених ризиком; n — кількість станів економічного середовища; q_j — ймовірність настання j-го стану $(j = 1,...,n)$; r_{ij} — норма прибутку активу i-го виду за наявності j-го стану економічного середовища $(i = 1,..,N; \quad j = 1,...,n)$; матриця норм прибутків

$$R = \left(r_{ij}: \quad i = 1,..,N; \quad j = 1,...,n\right) = \begin{pmatrix} r_{11} & \dots & r_{1j} & \dots & r_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{i1} & \dots & r_{ij} & \dots & r_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{N1} & \dots & r_{Nj} & \dots & r_{Nn} \end{pmatrix},$$

елементами якої є можливі значення норм прибутку активів. Якщо через R_i позначити i-й рядок матриці R, то згідно з уведеними раніше позначеннями R_i — це дискретна випадкова величина, що описує норму прибутку i-го активу. У свою чергу, стовпчики матриці R характеризують стани економічного середовища (ринку), а саме, j-й стовпчик утворюється зі значень норм прибутку всіх активів, що відповідають стану $\theta_j \in \Theta \quad (j = 1,...,n)$. А тому ймовірність настання j-го можливого значення дискретної випадкової величини R_i збігається з імовірністю стану θ_j, тобто

$$P(R_i = r_{ij}) = P(\Theta = \theta_j) = q_j, \ \ j = 1,...,n.$$

Згідно з класифікацією перша інформаційна ситуація I_1 характеризується відомим розподілом щодо станів економічного середовища. А тому в полі I_1 стає можливим обчислення для i-го активу сподіваної норми прибутку m_i та дисперсії σ_i^2 $(i = 1,...,N)$, а також коваріації $\sigma_{il} = \text{cov}(R_i; R_l)$ для кожної пари випадкових величин R_i та R_l $(i = 1,...,N;\ l = 1,...,N;\ i \neq l)$ з використанням при цьому формул (6.13), (6.14) та (6.15) відповідно.

Визначивши ці числові характеристики активів, згідно з формулами (6.20) та (6.21) можна визначити, відповідно, сподівану норму прибутку та дисперсію (ступінь ризику) портфеля, що має структуру $X = (x_1;...;x_N)$. Компонента x_i вектора X є часткою початкового капіталу, що інвестується в актив i-го виду $(i = 1,...,N)$. Ці компоненти мають задовольняти основне обмеження (6.30) та вимогу щодо невід'ємності (6.31). Згідно з моделлю Марковіца ціль інвестора полягає у визначенні таких значень часток x_i, які б задавали для задачі (6.28)—(6.31) вектор $X = (x_1;...;x_N)$, оптимальний за Паретто. Цей вектор заведено називати *структурою ефективного портфеля.*

Серед усіх ефективних портфелів виділимо портфель із структурою $X^* = (x_1^*;...;x_N^*)$, який має мінімальний ступінь ризику і є розв'язком задачі (6.38)—(6.40). Визначивши структуру портфеля з мінімальним ступенем ризику, обчислимо його дисперсію $(\sigma_\Pi^*)^2$ та його сподівану норму прибутку згідно з формулами (6.41) та (6.42) відповідно.

Проаналізуємо випадки, коли розв'язок задачі теорії гри і структура X^* портфеля збігаються. Як зазначалося раніше, норма прибутку портфеля зі структурою $X = (x_1;...;x_N)$ є випадкової величиною $R_\Pi = \sum_{i=1}^{N}(x_i R_i)$. Тоді випадкова величина $R_\Pi^* = \sum_{i=1}^{N} x_i^* R_i$ є нормою прибутку портфеля з мінімальним ступенем ризику. Очевидно, що $M(R_\Pi^*) = m_\Pi^*$, $D(R_\Pi^*) = (\sigma_\Pi^*)^2$.

Розглянемо задачу створення портфеля активів як парну гру з нульовою сумою, що визначається матрицею $R = (r_{ij} :\ i = 1,..,N;\ j = 1,...,n)$, і нехай ця гра не має сідлової точки. Позначимо оптимальну змішану стратегію першого гравця через Π_{P^*} (їй відповідає розподіл $P^* = \left(p_1^*;...;p_N^*\right)$), оптимальну змішану стратегію другого гравця через θ_{Q^*} (їй відповідає розподіл $Q^* = \left(q_1^*;...;q_n^*\right)$), через V^* — ціну гри. Виявляється, що у випадку, коли усі компоненти вектора Q^* строго більші нуля ($q_j^* > 0$, $j = 1,...,n$), вектор P^*, що визначає оптимальну змішану стратегію першого гравця, збігається з вектором X^*, тобто виконується рівність $P^* = X^*$ (або ж $p_i^* = x_i^*$, $i = 1,...,N$) і при цьому $\left(\sigma_\Pi^*\right)^2 = D\left(R_\Pi^*\right) = 0$, де $R_\Pi^* = \sum_{i=1}^{N}\left(p_i^* R_i\right)$ (теорема 6.1 з додатка 6.7.1 до розділу 6).

Зауважимо, що у розрізі зазначених умов з урахуванням того, що $\sigma_\Pi^* = 0$, існує можливість створення портфеля Π_{P^*} (який і є оптимальною змішаною стратегією першого гравця) з нульовим ступенем ризику, тобто існує можливість уникнення ризику портфеля.

Розглянемо тепер задачу створення портфеля активів як парну гру з нульовою сумою, що задається матрицею $C = \left(\sigma_{il}:\ i = 1,..,N;\ l = 1,..,N\right)$, де $\sigma_{il} = \mathrm{cov}(R_i; R_l)$, і нехай ця гра не має сідлової точки, а розподіли, що визначають оптимальні змішані стратегії Π_{p^*} та Π_{Q^*} відповідно першого та другого гравців задаються векторами $P^* = \left(p_1^*;...;p_N^*\right)$, $Q^* = \left(q_1^*;...;q_N^*\right)$, V^* — ціна гри. Виявляється, що за умови, коли усі компоненти векторів P^* та Q^* строго більші нуля ($p_i^* > 0,\ i = 1,...,N,\ q_l^* > 0,\ l = 1,...,N$), вектори P^*, Q^* та X^* збігаються, тобто $P^* = Q^* = X^*$ (або ж $p_i^* = q_i^* = x_i^*$, $i = 1,...,N$) і при цьому портфель зі структурою X^* має мінімальний ступінь ризику, рівний за величиною ціні гри: $\left(\sigma_\Pi^*\right)^2 = V^*$ (теорема 6.2 з додатка 6.7.1 до розділу 6).

6.4.2. Теоретико-ігрова модель вибору структури портфеля за невідомого розподілу ймовірності

Як уже зазначалося, у разі побудови класифікатора інформаційних ситуацій (пункт 1.3) у полі I_4 розподіл імовірності станів економічного середовища невідомий, тобто компоненти вектора $Q = (q_1;...;q_n)$ є невідомими, але при цьому задовольняють умови

(6.11), (6.12). У полі третьої інформаційної ситуації (I_3), окрім (6.11), (6.12), невідомі значення компонент вектора Q задовольняють ще й певну систему обмежень (пункт 3.2.3). У випадку I_2, окрім (6.11), (6.12), треба враховувати, що невідомі значення компонентів вектора Q є функціями від певної сукупності параметрів, тобто $q_j = q_j(\omega)$, $\omega \in \Omega$, $j = 1,...,n$, де Ω — множина допустимих значень вектора параметрів $\omega = (\omega_1;...;\omega_L)$. А тому, визначивши значення норм прибутків r_{ij}, $i = 1,...,N$, $j = 1,...,n$, співвідношення (6.13), (6.14) та (6.15) можна розглядати як залежності відповідно сподіваних норм прибутку m_i, дисперсій σ_i^2 та коваріацій σ_{il} $(i = 1,...,N;\ l = 1,...,N)$ від змінних $q_1,...,q_n$ (імовірностей станів економічного середовища). Враховуючи, що $q_j \in [0;1]$, $j = 1,...,n$, доходимо висновку, що можливі значення кількісних показників m_i, σ_i та σ_{il} належать певним скінченним проміжкам. Так, наприклад, сподівані норми прибутку (6.13) належать відрізкам, що визначаються нерівностями

$$\min_{j=1,...,n} r_{ij} \le m_i \le \max_{j=1,...,n} r_{ij}, \quad i = 1,...,N,$$

середньоквадратичні відхилення (6.14) — відрізкам

$$\min_{Q\in\Delta_Q} \sigma_i \le \sigma_i \le \max_{Q\in\Delta_Q} \sigma_i, \quad i = 1,...,N,$$

де $\Delta_Q = \left\{ Q = (q_1;...;q_n):\ \sum_{j=1}^{n} q_j = 1; \quad q_j \ge 0, \quad j = 1,...,N \right\}$.

З урахуванням наведених вище міркувань такі кількісні показники портфеля активів зі структурою $X = (x_1;...;x_N)$, як його сподівана норма прибутку m_Π та ступінь ризику (дисперсія) σ_Π^2, задані згідно з (6.20) та (6.21) відповідно, можна розглядати як функції, що залежать від $n + m$ змінних, які для зручності об'єднаємо у вектор $(Q; X) = (q_1;...;q_n; x_1;...;x_N)$. Принагідно нагадуємо, що компоненти вектора $(Q; X)$ задовольняють умови (6.11), (6.12) та (6.30), (6.31).

Розглядаючи в якості ще одного критерію принцип максимальної невизначеності Гіббса—Джейнса, в полі четвертої інформаційної ситуації (I_4) модель задачі вибору структури портфеля може задаватись у вигляді такої оптимізаційної задачі:

$$m_{\Pi} = M(R_{\Pi}) = \sum_{i=1}^{N}(x_i m_i) \to \max_{X \in \Delta_X}; \qquad (6.48)$$

$$\sigma_{\Pi}^2 = D(R_{\Pi}) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}(x_i x_l \sigma_{il}) \to \min_{X \in \Delta_X}; \qquad (6.49)$$

$$H(Q) = -\sum_{j=1}^{n}\left(q_j \ln q_j\right) \to \max_{Q \in \Delta_Q} \qquad (6.50)$$

за виконання обмежень

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1; \qquad (6.51)$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1; \qquad (6.52)$$

$$x_i \geq 0, \; i = 1,..., N; \quad q_j \geq 0, \; j = 1,..., n, \qquad (6.53)$$

де m_i, σ_i, σ_{il}, у свою чергу, є функціями величин $q_1,..., q_N$.

Як зазначалось раніше (у розділі 4) під час розв’язання багатокритеріальних задач (задача (6.48)—(6.53) є трикритеріальною) слід відмовитись від пошуку рішення, яке було б найкращим одночасно згідно з усіма критеріями, оскільки воно просто може й не існувати. А це означає, що пошук прийнятного (компромісного) рішення слід здійснювати серед ефективних портфелів, для яких будь-яке інше рішення, що є кращим згідно з одним критерієм, обов’язково буде гіршим з позиції інших (принаймні, хоча б одного з них).

Уведемо поняття ефективного портфеля, що є характерним для I_4.

Означення 6.3. Портфель зі структурою $X^* = \left(x_1^*;...;\; x_N^*\right)$ називатимемо ефективним згідно з концепцією Марковіца для інформаційної ситуації I_4, якщо існує хоча б один вектор Паретто задачі (6.48)—(6.53) виду

$$\left(Q^*; X^*\right) = \left(q_1^*;...; q_n^*; x_1^*;...; x_N^*\right).$$

Згідно з означенням 6.1 множина Паретто будується при фіксованому розподілі $Q = (q_1;...; q_n)$. Скориставшись цією методикою і зафіксувавши певне значення вектора $Q \in \Delta_Q$ (тим самим зафіксувавши певний рівень критерію (6.50)), розв’яжемо відповідну двокритеріальну задачу, тобто отримаємо множину векторів Паретто

$$X^*(Q) = \left(x_1^*(Q);...;x_N^*(Q)\right). \tag{6.54}$$

Множина критеріальних оцінок $\left\{m_\Pi\left(Q; X^*(Q)\right);\ \sigma_\Pi\left(Q; X^*(Q)\right);\ H(Q)\right\}$ у тривимірному критеріальному просторі утворюватиме плоску криву, що знаходиться у площині $Z = H(Q)$ (тут значення m_Π відкладаються по осі абсцис (Ox), значення σ_Π — по осі ординат (Oy), значення $H(Q)$ — по осі аплікат (Oz)).

У свою чергу, для усіх $Q \in \Delta_Q$ відповідні критеріальні оцінки у тривимірному просторі утворюватимуть певну поверхню. Очевидно, що саме цій поверхні й належатиме критеріальна оцінка $\left(m_\Pi^*; \sigma_\Pi^*; H\left(Q^*\right)\right)$, що відповідає вектору Паретто задачі (6.48)—(6.53).

Отже, як бачимо, процес побудови множини ефективних портфелів пов'язаний із суттєвими труднощами, а тому безпосереднє використання означення 6.3 не завжди може бути конструктивним. Спрощення у цьому плані можна досягнути шляхом уведення до розгляду портфелів, що визначаються на основі наведеної нижче дефініції.

Означення 6.4. Портфель зі структурою $X^* = \left(x_1^*;...;x_N^*\right)$ називатимемо ефективним згідно з концепцією Марковіца для будь-якого розподілу ймовірності $Q = (q_1;...;q_n)$, якщо усі допустимі вектори вигляду $\left(Q; X^*\right) = \left(q_1;...;q_n; x_1^*;...;x_N^*\right)$ є оптимальними за Паретто для задачі (6.48)—(6.53).

Вимоги, наведені в означенні 6.4, є досить жорсткими, але можна вказати випадок, коли існує портфель, що є ефективним згідно з концепцією Марковіца для будь-якого розподілу ймовірності, а визначення його структури зводиться до парної гри з нульовою сумою.

Розглянемо задачу створення портфеля активів як парну гру з нульовою сумою, що визначається матрицею $R = \left(r_{ij}:\ i = 1,..., N;\ j = 1,..., n\right)$, і нехай ця гра не має сідлової точки. Позначимо через $P^* = \left(p_1^*,..., p_N^*\right)$ та $Q^* = \left(q_1^*;...;q_n^*\right)$ вектори, що відповідають оптимальним змішаним стратегіям гравців, V^* — ціна гри. Виявляється, що у випадку, коли мають місце строгі оцінки $q_j^* > 0$, $j = 1,..., n$, портфель зі структурою $X^* = P^*$ (тобто $x_i^* = p_i^*$, $i = 1,..., N$) є ефективним згідно з концепцією Марковіца для будь-якого розподілу ймовірності $Q \in \Delta_Q$ (теорема 6.3 з додатка 6.7.1 розділу 6).

Зауваження. Звертаємо увагу на те, що строгі нерівності $q_j > 0$, $j = 1,...,n$, можуть виконуватись лише в тому випадку, коли кількість активів є не меншою за кількість станів економічного середовища, тобто коли $N \geq n$.

Приклад. 6.4. Наявні активи п'яти видів, можливі значення норм прибутків яких залежать від стану ринку (економічного середовища). Визначити структуру ефективного портфеля згідно з концепцією Марковіца, якщо ринок може перебувати лише у двох станах, імовірності настання яких невідомі, і при цьому матриця норм прибутків активів

$$R = (r_{ij} : i = 1,...,5; \;\; j = 1,2) = \begin{pmatrix} 20 & 11 \\ 25 & 18 \\ 11 & 30 \\ 20 & 24 \\ 15 & 20 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Згідно з умовою $N = 5$, $n = 2$, тобто $N > n$. Перевіримо наявність сідлового елемента в матриці *R*, що визначає парну гру з нульовою сумою. Для цього визначаємо чисті ціни гри:

$$\alpha = \max_{i=1,...,5} \alpha_i = \max_{i=1,...,5} \min_{j=1,2} r_{ij} = \max\{11; 18; 11; 20; 15\} = 20;$$

$$\beta = \min_{j=1,2} \beta_j = \min_{j=1,2} \max_{i=1,...,5} r_{ij} = \min\{25; 30\} = 25.$$

Оскільки $\beta = 25 > 20 = \alpha$, то сідлова точка у цій грі відсутня. Графоаналітичним методом встановлюємо, що активними є друга та четверта стратегії першого гравця. Це означає, що $p_1^* = p_3^* = p_5^* = 0$, а ймовірності p_2^* та p_4^* визначаємо як розв'язок парної гри з нульовою сумою, що визначається матрицею *H*, яку отримуємо з матриці *R* шляхом викреслювання першого, третього та п'ятого рядків:

$$H = (h_{ij} : \;\; i = 1,2; \;\; j = 1,2) = \begin{pmatrix} 25 & 18 \\ 20 & 24 \end{pmatrix}.$$

Визначаємо розв'язок гри:

$$p_2^* = \frac{h_{22} - h_{21}}{h_{11} - h_{12} - h_{21} + h_{22}} = \frac{24 - 20}{25 - 18 - 20 + 24} = \frac{4}{11};$$

$$p_4^* = 1 - p_2^* = 1 - \frac{4}{11} = \frac{7}{11};$$

$$q_1^* = \frac{h_{22} - h_{12}}{h_{11} - h_{12} - h_{21} + h_{22}} = \frac{24 - 18}{25 - 18 - 20 + 24} = \frac{6}{11} > 0;$$

$$q_2^* = 1 - q_1^* = 1 - \frac{6}{11} = \frac{5}{11} > 0;$$

$$V^* = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}}{h_{11} - h_{12} - h_{21} + h_{22}} = \frac{25 \cdot 24 - 18 \cdot 20}{25 - 18 - 20 + 24} = \frac{240}{11}.$$

Отримуємо, що $P^* = \left(0; \frac{4}{11}; 0; \frac{7}{11}; 0\right)$, $Q^* = \left(\frac{6}{11}; \frac{5}{11}\right)$ — розподіли, які відповідають оптимальним змішаним стратегіям першого та другого гравця відповідно. Всі компоненти вектора Q^*, що задає оптимальну змішану стратегію другого гравця, є додатними, а тому, згідно з теоремою 6.3 портфель зі структурою $X^* = P^* = \left(0; \frac{4}{11}; 0; \frac{7}{11}; 0\right)$ є ефективним портфелем згідно з концепцією Марковіца для будь-якого розподілу ймовірності щодо станів економічного середовища. Переконаємося в тому, що цей портфель є безризиковим.

Нехай інвестор розподілив свій (тимчасово вільний) початковий капітал між активами другого та четвертого видів у пропорціях: $x_2^* = 4/11$ та $x_4^* = 7/11$. Тоді у випадку набування ринком першого стану норма прибутку становитиме

$$r_{\Pi 1} = \sum_{i=1}^{2}\left(p_i^* r_{i1}\right) = \frac{4}{11} \times 25 + \frac{7}{11} \times 20 = \frac{240}{11} = V^*,$$

а у випадку набування другого стану — норма прибутку

$$r_{\Pi 2} = \sum_{i=1}^{2}\left(p_i^* r_{i2}\right) = \frac{4}{11} \times 18 + \frac{7}{11} \times 24 = \frac{240}{11} = V^*.$$

Отже, значення норми прибутку даного портфеля не залежить від стану ринку і є постійною величиною, що становить $V^* = \frac{240}{11}$.

Відповідь. Портфель зі структурою $X^* = \left(0; \frac{4}{11}; 0; \frac{7}{11}; 0\right)$ є ефективним згідно з концепцією Марковіца для будь-якого розподілу ймовірності станів ринку, його норма прибутку є постійною величиною: $R_{\Pi}^* = V^* e = \left(\frac{240}{11}; \frac{240}{11}\right)$, його сподівана норма прибутку $m_{\Pi}^* = V^* = \frac{240}{11}$, а ступінь ризику $\sigma_{\Pi}^* = \sqrt{D\left(R_{\Pi}^*\right)} = 0$.

Пошук портфеля, що є ефективним згідно з концепцією Марковіца в полі інформаційної ситуації I_4, доцільно починати з оцінки апріорних імовірностей q_j станів економічного середовища $(j = 1,...,n)$. Ентропія Шеннона, як це зазначалось у розділі 3 (пункт 3.2.1), досягає свого максимального значення за $\hat{q}_1^* = ... = \hat{q}_n^* = \frac{1}{n}$, тобто

$$\max_{Q \in \Delta_Q} H(Q) = H\left(\hat{Q}\right) = \ln n. \qquad (6.55)$$

Використовуючи знайдену точкову оцінку розподілу ймовірності станів економічного середовища $\hat{Q}$ в полі I_4, отримуємо точкові оцінки сподіваних норм прибутків активів

$$m_i \approx \hat{m}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}, \quad i = 1,..., N, \qquad (6.56)$$

їх дисперсій

$$\sigma_i^2 \approx \hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(r_{ij} - \hat{m}_i\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}^2 - \hat{m}_i^2, \quad i = 1,..., N, \qquad (6.57)$$

а також коваріацій між нормами прибутків активів

$$\operatorname{cov}(R_i, R_l) = \sigma_{il} \approx \hat{\sigma}_{il} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(r_{ij} r_{lj}\right) - \hat{m}_i \hat{m}_l, \quad i = 1,.., N;\ l = 1,.., N. \qquad (6.58)$$

Очевидно, що оцінки коваріацій $\hat{\sigma}_{il}$ мають властивості, аналогічні коваріаціям σ_{il}, а саме:

$$\hat{\sigma}_{ii} = \hat{\sigma}_i^2; \qquad \hat{\sigma}_{il} = \hat{\sigma}_{li}; \qquad i = 1,..., N; \qquad l = 1,..., N.$$

Використовуючи оцінки (6.56)—(6.58) для пошуку ефективного портфеля у полі I_4, приходимо до такої двокритеріальної оптимізаційної задачі:

$$m_{\Pi} \approx \hat{m}_{\Pi} = \sum_{i=1}^{N} (x_i \hat{m}_i) \to \max_{X \in \Delta_X}; \tag{6.59}$$

$$\sigma_{\Pi}^2 \approx \hat{\sigma}_{\Pi}^2 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} (x_i x_l \hat{\sigma}_{il}) \to \min_{X \in \Delta_X}; \tag{6.60}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1; \quad x_i \geq 0, \quad i = 1,...,N. \tag{6.61}$$

де $R_{\Pi} = \sum_{i=1}^{N} x_i R_i = \sum_{i=1}^{N} (x_i r_{i1}); \ldots; \sum_{i=1}^{N} (x_i r_{iN});\ \hat{m}_{\Pi} = \sum_{i=1}^{N} (x_i \hat{m}_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} (x_i r_{ij})$.

Розглянемо задачу створення портфеля активів у полі I_4 як парну гру з нульовою сумою, що не має сідлової точки, і нехай вектор $X^* = \left(x_1^*;...;x_N^*\right)$ задає структуру ефективного портфеля в моделі Марковіца (6.59)—(6.61). Виявляється, що вектор $\left(\hat{Q}; X^*\right) = \left(\frac{1}{n};...;\frac{1}{n};\ x_1^*;...;x_N^*\right)$, де $\hat{Q} = \left(\frac{1}{n};...;\frac{1}{n}\right)$, є оптимальним за Паретто для задачі (6.48)—(6.53) (теорема 6.4 з додатка 6.7.1 до розділу 6).

Використаємо зазначені результати для знаходження структури ефективного портфеля.

Приклад 6.5. Наявні активи двох видів, можливі значення норм прибутків яких залежать від станів ринку. Визначити структуру ефективного портфеля згідно з концепцією Марковіца для четвертої інформаційної ситуації (I_4), якщо ринок може набувати шести станів, імовірності настання яких невідомі. Норми прибутків цих двох активів, відповідно до станів ринку, задаються матрицею:

$$R = \left(r_{ij}:\ i = 1,2;\ \ j = 1,...,6\right) = \begin{pmatrix} 12 & 18 & 24 & 30 & 24 & 21 \\ 24 & 36 & 24 & 18 & 21 & 18 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Згідно з умовою $N = 2$, $n = 6$, а тому $\hat{q}_j = \frac{1}{6}$, $j = 1,...,6$, тобто точковою оцінкою розподілу ймовірності щодо станів ринку є вектор $\hat{Q} = \left(\frac{1}{6};\ \frac{1}{6};\ \frac{1}{6};\ \frac{1}{6};\ \frac{1}{6};\ \frac{1}{6}\right)$.

Знаходимо оцінки сподіваних значень, дисперсій, коваріації і коефіцієнта кореляції для цих активів:

$$m_1 \approx \hat{m}_1 = \frac{1}{6}(12 + 18 + 24 + 30 + 24 + 21) = 21{,}5;$$

$$m_2 \approx \hat{m}_2 = \frac{1}{6}(24 + 36 + 24 + 18 + 21 + 18) = 23{,}5;$$

$$\sigma_1^2 \approx \hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{6}\left(12^2 + 18^2 + 24^2 + 30^2 + 24^2 + 21^2\right) - (21{,}5)^2 = 31{,}25;$$

$$\sigma_2^2 \approx \hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{6}\left(24^2 + 36^2 + 24^2 + 18^2 + 21^2 + 18^2\right) - (23{,}5)^2 = 37{,}25;$$

$$\sigma_{12} \approx \hat{\sigma}_{12} = \frac{1}{6}(12 \times 24 + 18 \times 36 + 24 \times 24 + 30 \times 18 + 24 \times 21 + 21 \times 18) -$$

$$- 21{,}5 \times 23{,}5 = -16{,}25;$$

$$\rho_{12} \approx \hat{\rho}_{12} = \frac{\hat{\sigma}_{12}}{\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2} = \frac{-16{,}25}{\sqrt{31{,}25} \times \sqrt{37{,}25}} = -0{,}4763.$$

З урахуванням того, що $\hat{m}_2 > \hat{m}_1$, $\hat{\sigma}_2 > \hat{\sigma}_1$, покладемо $x_2 = x$, $x_1 = 1 - x$, і згідно з (6.59)—(6.61) отримаємо двокритеріальну оптимізаційну задачу:

$$m_{\Pi} = 21{,}5(1 - x) + 23{,}5x \to \max_{x \in [0;1]};$$

$$\hat{\sigma}_{\Pi}^2 = 31{,}25(1 - x)^2 + 37{,}25x^2 - 2 \times 16{,}25(1 - x)x \to \min_{x \in [0;1]}.$$

Для визначення структури портфеля, що має мінімальний ступінь ризику, необхідно знайти $x^* \in [0;\, 1]$, яке доставляє мінімум функції $\hat{\sigma}_{\Pi}^2 = \hat{\sigma}_{\Pi}^2(x)$ (рис. 6.2). Згідно з необхідною умовою екстремуму, в точці мінімуму $\frac{d}{dx}\left(\hat{\sigma}_{\Pi}^2(x)\right) = 0.$ Взявши відповідну похідну, отримуємо лінійне рівняння

$$2 \times 31{,}25(1 - x) \times (-1) + 2 \times 37{,}25 \times x - 2 \times 16{,}25\ (1 - 2x) = 0.$$

Розв'язком цього рівняння є величина $x^* = 95/202$. Очевидно, що всі портфелі зі структурою $X = (1 - x;\, x)$, де $x \in \left[x^*; 1\right] = [95/202;\, 1]$ є ефективними (їм відповідають точки $M\left(x; \hat{\sigma}_{\Pi}^2(x)\right)$, що належать дузі O^*A_2 на рис. 6.2).

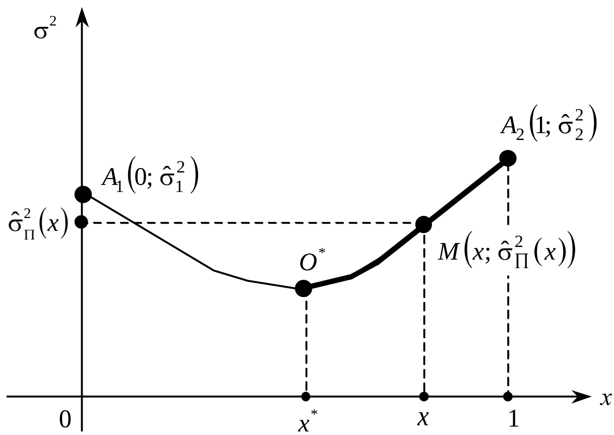


Рис. 6.2. Множина ефективних портфелів $\left(\cup O^* A_2\right)$ для прикладу 6.5

Згідно з теоремою 6.4 вектор $\left(\hat{Q}; X\right) = \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{1}{6}; 1 - x;\ x\right)$, де $x \in [x^*;\ 1]$, є оптимальним за Паретто для задачі (6.48)—(6.53).

Відповідь: Ефективні портфелі в моделі Марковіца для четвертої інформаційної ситуації (I_4) мають структуру $X = (1 - x;\ x)$, де $x \in [x^*;\ 1]$, $x^* = 95/202$.

У полі третьої інформаційної ситуації (I_3) у випадку, коли для станів економічного середовища побудований ряд пріоритету $RI^{\Theta} = (\theta_{i_1};\ \theta_{i_2};...;\ \theta_{i_n})$ і мають місце обмеження

$$q_{i_1} > q_{i_2} > ... > q_{i_n}, \tag{6.62}$$

або

$$\begin{cases} q_{i_1} \geq q_{i_2} + ... + q_{i_n}; \\ q_{i_2} \geq q_{i_3} + ... + q_{i_n}; \\ .... \\ q_{i_{n-1}} \geq q_{i_n}, \end{cases} \tag{6.63}$$

або

$$\alpha_j \leq q_j \leq \beta_j,\ \ j = 1,...,n, \tag{6.64}$$

для розрахунку точкової оцінки вектора розподілу Q можуть використовуватися відповідні формули Фішберна (пункт 3.2.3). Точкову оцінку вектора Q можна отримати також шляхом відшукання максимуму функції (6.50) за обмежень (6.52), (6.53), до яких додаються обмеження (6.62), чи (6.63) або (6.64).

У полі I_2 оцінка вектора Q визначається згідно з критерієм

$$H(\widehat{Q}) = \max_{\omega\in\Omega} H(Q)$$

за виконання умов (6.52), (6.53), тобто здійснюється максимізація критерію (6.50) по сукупності параметрів $\omega = (\omega_1;...;\ \omega_L)$, якими характеризується заданий відомий закон розподілу ймовірності станів економічного середовища.

Трикритеріальну оптимізаційну задачу (6.48)—(6.53) можна звести до однокритеріальної, якщо під час виконання обмежень (6.51)—(6.53) ввести до розгляду критерій

$$\Phi(Q; X) = u_1 m_\Pi^H(Q; X) + u_2 \sigma_\Pi^H(Q; H) + u_3 H^H(Q) \to \max_{Q\in\Delta_Q;\, X\in\Delta_X},$$

де: $m_\Pi^H(Q; X)$, $\sigma_\Pi^H(Q; X)$, $H^H(Q)$ — нормалізовані критерії (6.48), (6.49) та (6.50) відповідно; u_1, u_2, u_3 — вагові коефіцієнти пріоритету цих критеріїв, що задовольняють умови

$$u_1 + u_2 + u_3 = 1;\ \ u_i \geq 0,\ \ i = 1, 2, 3.$$

6.4.3. Теоретико-ігрова модель вибору структури портфеля у випадку протидії економічного середовища

П'ята інформаційна ситуація (I_5) характеризується антагоністичними інтересами економічного середовища щодо суб'єкта керування (інвестора) в процесі прийняття ним своїх рішень. Цей «антагонізм» досягається шляхом вибору економічним середовищем таких своїх станів, які зводять до мінімуму ефективність діяльності інвестора. А тому основною стратегією для суб'єкта керування (інвестора) є забезпечення собі гарантованих рівнів економічних показників. Аналіз процесу прийняття рішень тут аналогічний основним правилам та елементам теорії антагоністичних ігор. З урахуванням цього математична модель вибору структури портфеля під час виконання обмежень (6.51)—(6.53) має вигляд:

$$m_{\Pi} = \sum_{i=1}^{N}(x_i m_i) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}\left(x_i q_i r_{ij}\right) \to \max_{X\in\Delta_X}; \qquad (6.65)$$

$$m_{\Pi} = \sum_{i=1}^{N}(x_i m_i) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}\left(x_i q_i r_{ij}\right) \to \min_{Q\in\Delta_Q}; \qquad (6.66)$$

$$\sigma_{\Pi}^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{n}(x_i x_l \sigma_{il}) \to \min_{X\in\Delta_X}, \qquad (6.67)$$

де величини m_i, σ_i, σ_{il} є функціями змінних $q_1,..., q_n$ і визначаються співвідношеннями (6.13), (6.14) та (6.15) відповідно.

Особливістю задачі вибору структури портфеля з критеріями (6.65)—(6.67), за виконання умов (6.51)—(6.53), є те, що вона може мати єдиний «найкращий» розв'язок відносно усіх критеріїв. А тому і виникає питання щодо умов існування цього (єдиного) розв'язку.

Розглянемо задачу створення портфеля активів у полі I_5 як парну гру з нульовою сумою, що визначається платіжною матрицею $R = \left(r_{ij} : i = 1,..., N;\ j = 1,..., n\right)$, і нехай ця гра не має сідлової точки. Виявляється, що у випадку, коли ця гра має єдиний розв'язок, множина G^* усіх ефективних векторів задачі (6.65)—(6.67), за умов (6.51)—(6.53), має єдиний елемент

$$\left(P^*;\ Q^*\right) = \left(p_1^*;...;\ p_N^*;\ q_1^*;...;\ q_n^*\right),$$

де $P^* = \left(p_1^*;...;\ p_N^*\right)$, $Q^* = \left(q_1^*;...;\ q_n^*\right)$ — розподіли, що відповідають оптимальним змішаним стратегіям гравців (теорема 6.5 з додатка 6.7.1 до розділу 6).

Означення 6.5. Нехай у парній грі з нульовою сумою, що визначається матрицею $R = \left(r_{ij} : i = 1,..., N;\ j = 1,.., n\right)$, відсутня сідлова точка. Тоді, якщо ця гра має єдиний розв'язок, оптимальну змішану стратегію першого гравця, якій відповідає вектор $P^* = \left(p_1^*;...;\ p_N^*\right)$, називатимемо ефективним портфелем згідно з концепцією Марковіца для п'ятої інформаційної ситуації (I_5). Вектор, який визначає оптимальну змішану стратегію другого гравця, називатимемо найбільш характерним розподілом імовірності щодо станів економічного середовища для I_5.

Вибираючи в якості точкових оцінок апріорних імовірностей настання станів економічного середовища відповідні компоненти q_j^* вектора Q^*, що відповідає оптимальній змішаній стратегії другого гравця, отримуємо оцінки:

$$m_i^* = M(R_i) = \sum_{j=1}^{n} q_j^* r_{ij}, \quad i = 1,\ldots,N; \tag{6.68}$$

$$\left(\sigma_i^*\right)^2 = \sum_{j=1}^{n}\left(q_j^* r_{ij}^2\right) - \left(m_i^*\right)^2, \quad i = 1,\ldots,N; \tag{6.69}$$

$$\sigma_{il}^* = \operatorname{cov}(R_i, R_l) = \sum_{j=1}^{n}\left(q_j^* r_{ij}\, r_{lj}\right) - m_i^* m_l^*, \quad i = 1,\ldots,N;\ l = 1,\ldots,N. \tag{6.70}$$

Якщо $P = (p_1;\ldots;p_N) \in \Delta_X$ — структура допустимого портфеля, то отримуємо, що

$$m_\Pi\left(P;Q^*\right) = M(R_\Pi) = M\left(\sum_{i=1}^{N}(p_i R_i)\right) = \sum_{i=1}^{N}(p_i M(R_i)) = \sum_{i=1}^{N}\left(p_i m_i^*\right); \tag{6.71}$$

$$\sigma_\Pi^2\left(P;Q^*\right) = D(R_\Pi) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\left(p_i\, p_l\, \sigma_{il}^*\right). \tag{6.72}$$

Якщо утворити портфель зі структурою $P^* = \left(p_1^*;\ldots;\ p_N^*\right)$, то згідно з (6.71)—(6.72) отримуємо:

$$m_\Pi^* = m_\Pi\left(P^*;Q^*\right) = M\left(R_\Pi^*\right) = \sum_{i=1}^{N}\left(p_i^* m_i^*\right) = V^*;$$

$$\left(\sigma_\Pi^*\right)^2 = D\left(R_\Pi^*\right) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\left(p_i^*\, p_l^*\, \sigma_{il}^*\right),$$

де: $V^* = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}\left(p_i^* q_l^* r_{ij}\right)$ — ціна гри; $R_\Pi^* = \sum_{i=1}^{N}\left(p_i^* R_i\right)$ — дискретна випадкова величина, що характеризує норму прибутку ефективного портфеля згідно з концепцією Марковіца для ситуації I_5.

Нехай у парній грі з нульовою сумою, що визначається платіжною матрицею $R = \left(r_{ij}:\ \ i = 1,\ldots,N;\ j = 1,\ldots,n\right)$, відсутня сідлова точка, і вона має кілька розв'язків. Тоді множина пар оптимальних змішаних стратегій гравців є нескінченною і при цьому для будь-якого елемента $\left(P^*;Q^*\right)$ цієї множини ціна гри залишається незмінною, тобто

$$V^* = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}\left(p_i^* q_j^* r_{ij}\right) = \text{const}.$$

Означення 6.6. Нехай у парній грі з нульовою сумою, що визначається матрицею $R = \left(r_{ij}:\ \ i = 1,\ldots,N;\ j = 1,\ldots,n\right)$, відсутня сідлова точка. Тоді у випадку, коли ця гра має кілька розв'язків, у якості ефективного портфеля згідно з концепцією Марковіца для ситуації

I_5 можна використати будь-яку оптимальну змішану стратегію першого гравця (для вказаної гри) з вектором $P^* = \left(p_1^*;...;p_N^*\right)$.

Зазначимо, що коли множина ефективних портфелів у моделі Марковіца у полі I_5 має кілька елементів, тобто множина G^* складається більш як з одного вектора, вибір портфеля, який би найбільшою мірою задовольнив інвестора, здійснюється згідно з критерієм (6.72). А саме, вибирається той портфель, структура якого $P^* = \left(p_1^*;...;p_N^*\right)$ мінімізує дисперсію $\sigma_\Pi^2\left(P\ ;Q^*\right)$ (для фіксованового розподілу станів економічного середовища Q^*).

Розглянемо задачу створення портфеля активів у полі I_5 як парну гру з нульовою сумою, що визначається платіжною матрицею $R = \left(r_{ij}:\ i = 1,...,N;\ j = 1,...,n\right)$, і нехай ця гра не має сідлової точки. Виявляється, що у випадку, коли усі компоненти вектора $Q^* = \left(q_1^*,...,q_n^*\right)$ є строго більшими від нуля ($q_j > 0$, $j = 1,...,n$), портфель, який визначається вектором $X^* = P^* = \left(p_1^*;...;p_N^*\right)$, є ефективним згідно з концепцією Марковіца для інформаційної ситуації I_5 (теорема 6.6 з додатка 6.7.1 до розділу 6).

Приклад 6.6. Наявні активи двох видів, для яких значення норм прибутків, що відповідають станам ринку, відомі й задані у вигляді матриці $R = \left(r_{ij}:\ i = 1, 2;\ j = 1,...,6\right)$, наведеної у прикладі 6.5.

Знайти ефективний портфель згідно з моделлю Марковіца в полі п'ятої інформаційної ситуації (I_5) та найбільш характерний розподіл імовірності щодо станів ринку, що відповідає I_5.

Розв'язання. Маємо платіжну матрицю

$$R = \begin{pmatrix} 12 & 18 & 24 & 30 & 24 & 21 \\ 24 & 36 & 24 & 18 & 21 & 18 \end{pmatrix}.$$

Визначаємо чисті ціни гри:

$$\alpha = \max_{i=1,2} \alpha_i = \max_{i=1,\,2}\ \min_{j=1,...,6} r_{ij} = \max\{12; 18\} = 18;$$

$$\beta = \min_{j=1,...,6} \beta_i = \min_{j=1,...,6}\ \max_{i=1,\,2} r_{ij} = \min\{24; 36; 24; 30; 24; 21\} = 21.$$

Оскільки $\beta = 21 > 18 = \alpha$, то сідлова точка для цієї гри відсутня. Використовуючи графоаналітичний метод, встановлюємо, що розв'язок єдиний, а активними стратегіями другого гравця є його перша та шоста чисті стратегії, тобто $q_2^* = q_3^* = q_4^* = q_5^* = 0$. Для визначення решти компонентів вектора Q^*, а також компонентів вектора P^*, розв'яжемо парну гру з нульовою сумою, що визначається матрицею

$$H = \left(h_{ij}: \quad i = 1, 2; \; j = 1, 2\right) = \begin{pmatrix} 12 & 21 \\ 24 & 18 \end{pmatrix},$$

звідки отримуємо, що

$$p_1^* = \frac{h_{22} - h_{21}}{h_{11} - h_{12} - h_{21} + h_{22}} = \frac{18 - 24}{12 - 21 - 24 + 18} = \frac{2}{5};$$

$$p_2^* = 1 - p_1^* = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5};$$

$$q_1^* = \frac{h_{22} - h_{12}}{h_{11} - h_{12} - h_{21} + h_{22}} = \frac{18 - 21}{12 - 21 - 24 + 18} = \frac{1}{5};$$

$$q_2^* = 1 - q_1^* = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

і при цьому ціна гри

$$V^* = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}}{h_{11} - h_{12} - h_{21} + h_{22}} = \frac{12 \times 18 - 21 \times 24}{12 - 21 - 24 + 18} = 19{,}2\,.$$

З урахуванням того, що множина G^* усіх ефективних векторів задачі (6.65)—(6.67), за виконання обмежень (6.51)—(6.53), для даного прикладу складається тільки з одного вектора $\left(P^*;\, Q^*\right) = \left(\frac{2}{5};\, \frac{3}{5};\, \frac{1}{5};\, 0;\, 0;\, 0;\, 0;\, \frac{4}{5}\right)$, то згідно з теоремою 6.5 додатка до розділу 6, п. 6.7.1, та з означенням 6.5 портфель зі структурою $P^* = \left(\frac{2}{5};\, \frac{3}{5}\right)$ є ефективним згідно з моделлю Марковіца у полі п'ятої інформаційної ситуації (I_5), а вектор $Q^* = \left(\frac{1}{5};\, 0;\, 0;\, 0;\, 0;\, \frac{4}{5}\right)$ задає найбільш характерний розподіл імовірності щодо станів економічного середовища для цієї інформаційної ситуації.

Навіть у випадку п'ятої інформаційної ситуації не можна стверджувати, що вектор Q^* є істинним розподілом імовірності. Цього тим більше не можна стверджувати, коли має місце шоста інформаційна ситуація, яка характеризується неповним антагонізмом СПР та економічного середовища. Але у будь-якому випадку реалізація другого, третього, четвертого чи п'ятого стану ринку приведе до збільшення норми прибутку $R^*_П$ портфеля зі структурою $P^* = \left(\frac{2}{5};\ \frac{3}{5}\right)$ відносно її значень для першого та шостого станів ринку, для яких $r_{П1} = r_{П6} = V^* = 19{,}2$.

Відповідь: $P^* = \left(\frac{2}{5};\ \frac{3}{5}\right)$ — ефективний портфель для моделі Марковіца у випадку ситуації I_5; $Q^* = \left(\frac{1}{5};\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ \frac{4}{5}\right)$ — найбільш характерний розподіл імовірності станів ринку для ситуації I_5.

6.5. КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ТА ТЕМИ ДЛЯ ОБГОВОРЕННЯ

1. У чому полягає сутність диверсифікації? З якою метою, де і за яких умов її доцільно використовувати?
2. Що розуміють під поняттям «портфель»? Які підходи до управління ним використовуються в теорії і на практиці?
3. Яких правил щодо раціональної поведінки дотримується інвестор на ринку цінних паперів?
4. У чому полягає сутність фундаментального та технічного аналізів цінних паперів?
5. У чому проявляються недоліки традиційного підходу до управління портфелем цінних паперів?
6. У чому полягає сутність сучасного підходу до управління портфелем? Його особливості.

7. Сформулюйте основні цілі, переслідувані інвестором під час формування портфеля активів.

8. Дайте визначення термінам «загальний прибуток від активу» та «норма прибутку активу». З яких складових утворюється загальний прибуток від активу? Як обчислити норму прибутку активу за звітний період? Якими способами можна обчислити норму прибутку?

9. Сформулюйте основні припущення, на яких базується сучасна теорія портфеля.

10. Що розуміють під поняттям «структура портфеля»? Яким умовам мають задовольняти компоненти вектора, що задає структуру портфеля? Як визначається частка початкового капіталу, що інвестується в актив певного виду?

11. Які кількісні показники використовуються в якості характеристик норми прибутку активу та ступеня його ризику? Наведіть формули для обчислення цих показників, а також їх статистичних оцінок. Як обчислюються показники, що визначають щільність взаємозв'язку норм прибутків активів двох видів?

12. Наведіть формули для обчислення кількісних показників, що характеризують норму прибутку портфеля активів.

13. У чому полягає відмінність моделей Блека та Марковіца? Яку особливість має модель Тобіна—Шарпа—Лінтнера?

14. Які основні етапи складають аналіз процесу інвестування? Охарактеризуйте їх.

15. Що являє собою економіко-математична модель задачі вибору структури портфеля? Які портфелі називаються ефективними?

16. З яких складових утворюється оцінка портфеля? Яка геометрична інтерпретація цієї оцінки? Що розуміють під критеріальною множиною, ефективною границею і кривою Паретто?

17. На прикладі портфеля з двох активів показати, як величина коефіцієнта кореляції впливає на формування допустимої множини портфелів такого типу. Дайте відповідні пояснення.

18. Як обчислити структуру портфеля з двох активів, якщо величину його допустимого ступеня ризику задано? Наведіть приклади.

19. Створюється портфель з двох активів з метою збереження капіталу (з мінімальним ступенем ризику). В якому випадку доцільно формувати портфель, що включає лише один з цих активів? Яку назву мають портфелі такого типу? Дайте геометричне тлумачення цієї ситуації.

20. Дослідіть ситуацію, коли портфель з двох активів, що формується з метою збереження капіталу, матиме рівні частки цих активів $(x_1 = x_2)$.

21. Після відповідних обчислень виявилося, що для портфеля з двох активів $\sigma_{П} = x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2$. За якої умови це могло статися?

22. Після відповідних обчислень виявилося, що для портфеля з двох активів $\sigma_{П} = | x_1\sigma_1 - x_2\sigma_2 |$. За якої умови це могло статися?

23. У якому випадку можна сформувати безризиковий портфель, складений з активів двох видів, обтяжених ризиком? Чи може однорід-

ний портфель бути безризиковим? Сформулюйте загальне правило, якого дотримується інвестор під час формування портфеля.

24. Якою геометричною фігурою можна зобразити границю критеріальної множини? З елементів яких ліній можна побудувати цю границю?

25. У яких випадках за заданого розподілу ймовірностей станів економічного середовища розв'язок парної гри з нульовою сумою дає змогу визначити структуру портфеля з найменшим ступенем ризику?

26. У яких межах можуть змінюватися сподівані норми прибутку активів і портфелів, складених з цих активів, якщо відомі можливі значення норм прибутків цих активів для усіх станів ринку, але невідомі ймовірності цих станів?

27. Які зміни відбуваються в моделі задачі вибору портфеля з оптимальною структурою, якщо має місце:

а) друга інформаційна ситуація (I_2);

б) третя інформаційна ситуація (I_3);

в) четверта інформаційна ситуація (I_4);

г) п'ята інформаційна ситуація (I_5)?

28. За виконання яких умов розв'язання парної гри з нульовою сумою дає змогу знайти ефективний вектор у моделі Марковіца для будь-якого розподілу ймовірності станів економічного середовища?

29. За виконання яких умов існує єдиний ефективний портфель у моделі Марковіца для п'ятої інформаційної ситуації?

30. Чи можна сформувати безризиковий портфель з активів, обтяжених ризиком (тобто $\sigma_i > 0,\ \ i = 1,..., N$), якщо для будь-якої пари активів коефіцієнт кореляції $\rho_{il} \in (-1;\ +1)\ \ (i = 1, \ldots, N;\ l = 1,..., N)$ і кількість різних видів активів менша кількості станів економічного середовища (тобто $N < n$)?

6.6. ПРИКЛАДИ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Для звичайної акції наявна така статистична інформація:

t	0	1	2	3	4	5
c_t	45	50	65	55	62	62
d_t	0	5,0	4,0	4,5	3,0	3,5

де: t — номер періоду $(t = 0,\ 1,...,\ 5)$; c_t — ціна однієї акції на кінець t-го періоду; d_t — дивіденди, виплачувані на одну акцію протягом t-го періоду.

Обчислити: а) спостережувані значення норми прибутку (у відсотках) цієї акції; б) вибіркову середню оцінку сподіваної норми прибутку акції; в) ступінь ризику цієї акції у вигляді оцінок дисперсії та середньоквадратичного відхилення її норм прибутку. Усі обчислення здійснювати з точністю до 0,001.

2. Для звичайних акцій двох різних фірм наявна така інформація:

t	0	1	2	3	4	5
c_{1t}	54	60	60	75	68	70
d_{1t}	0	5,0	4,5	3,0	4,0	3,5
c_{2t}	55	60	75	65	72	64
d_{2t}	0	6,0	5,0	5,5	4,0	5,5

де: t — номер періоду $(t = 0, 1,..., 5)$; c_{it} — ціна однієї акції i-ї фірми $(i = 1, 2)$ на кінець t-го періоду; d_{it} — дивіденди, виплачувані на одну акцію i-ї фірми $(i = 1, 2)$ протягом t-го періоду.

Обчислити: а) спостережувані значення норм прибутку (у відсотках) цих акцій; б) вибіркові середні оцінки сподіваних норм прибутку акцій; в) ступінь ризику цих акцій у вигляді оцінок дисперсій та середньоквадратичних відхилень їх норм прибутку; г) оцінки коваріації та коефіцієнта кореляції норм прибутку цих акцій; д) оцінки сподіваної норми прибутку та ступінь ризику портфеля з цих акцій, що має структуру $X = (0,6; 0,4)$. Усі обчислення здійснювати з точністю до 0,001.

3. Виходячи з умови задачі 2 обчислити: а) ступінь ризику акцій як оцінку дисперсій їх норм прибутку; б) оцінку коваріації. На основі отриманих оцінок визначити структуру такого портфеля з цих акцій, що має мінімальний ступінь ризику. На площині «m — σ» побудувати критеріальну множину, що відповідає множині допустимих портфелів, виділити ефективну границю. Усі обчислення здійснювати з точністю до 0,001.

4. Наявні активи двох видів, для яких відомі сподівані норми прибутків $m_1 = 8\%$ та $m_2 = 12\%$ і ступені їх ризику (дисперсії) $\sigma_1^2 = 9$; $\sigma_2^2 = 16$. На одному рисунку у системі координат «m — σ» зобразити критеріальні множини, що відповідають множинам

допустимих портфелів у випадку, коли: а) $\rho_{12}=-1$; б) $\rho_{12}=-0{,}5$; в) $\rho_{12}=0$; г) $\rho_{12}=+0{,}5$; д) $\rho_{12}=+1$.

Для кожного із заданих значень коефіцієнта кореляції ρ_{12}, використовуючи критерій оптимальності

$$F(X;U)=(1-u)m_{\Pi}^{2}-u\sigma_{\Pi}^{2}\to\max_{X\in\Delta_X},$$

де: $X=(x_1;\ x_2)$ — структура портфеля; $U=(u_1;\ u_2)=(1-u;\ u)$ — вектор вагових коефіцієнтів пріоритету кількісних оцінок портфеля, визначити оптимальну структуру портфеля для двох фіксованих значень параметра u: а) $u'=0{,}3$; б) $u''=0{,}7$. Для відповідних оптимальних структур портфеля X' та X'' розрахувати кількісні характеристики портфелів m'_{Π}, σ'_{Π} та m''_{Π}, σ''_{Π}, а відповідні точки $M'(m'_{\Pi};\sigma'_{\Pi})$ та $M''(m''_{\Pi};\sigma''_{\Pi})$ нанести на рисунок.

Усі обчислення здійснювати з точністю до 0,001.

5. Значення норм прибутків активів п'яти видів залежать від стану ринку. Знайти структуру ефективного портфеля згідно з концепцією Марковіца для будь-якого розподілу ймовірності станів економічного середовища, якщо ринок може знаходитися лише у двох станах, імовірності настання яких невідомі, і при цьому

$$R=\left(r_{ij}:\quad i=1,\dots,\ 5;\ \ j=1,\ 2\right)=\begin{pmatrix}-10 & 26\\ 13 & 22\\ 26 & -10\\ 14 & 14\\ 12 & 20\end{pmatrix},$$

де r_{ij} — значення норми прибутку (у відсотках) активу i-го виду, якщо ринок знаходиться в j-му стані.

Вказівка. Визначити активні стратегії першого гравця та побудувати відповідну матрицю платежів $H=\left(h_{ij}:\ i=1,\ 2;\ j=1,\ 2\right)$.

6. Можливі значення норм прибутків активів двох видів для відповідних семи станів ринку відомі і задаються як елементи матриці

$$R=\left(r_{ij}:\ i=1,\ 2;\ \ j=1,\dots,\ 7\right)=\begin{pmatrix}-4 & 1 & 3 & 6 & 9 & 6 & 5\\ 9 & 0 & 8 & 5 & 0 & -3 & 9\end{pmatrix}.$$

Знайти структуру ефективного портфеля згідно з концепцією Марковіца в полі п'ятої інформаційної ситуації (I_5) і найбільш характерний розподіл імовірності щодо станів ринку для цієї інформаційної ситуації.

6.7. ДОДАТОК ДО РОЗДІЛУ 6

6.7.1. Доведення теорем

Теорема 6.1. Нехай у парній грі з нульовою сумою, що визначається матрицею $R = \left(r_{ij} : i = 1,.., N;\ j = 1,..., n\right)$, відсутня сідлова точка. Нехай також оптимальній змішаній стратегії першого гравця $\prod_{P^*}$ відповідає розподіл $P^* = \left(p_1^*;...; p_N^*\right)$, оптимальній змішаній стратегії другого гравця θ_{Q^*} відповідає розподіл $Q^* = \left(q_1^*;...; q_n^*\right)$, V^* — ціна гри. Тоді у випадку, коли усі $q_j^* > 0$, $j = 1,..., n$, для вектора P^*, що визначає оптимальну змішану стратегію першого гравця, виконується рівність $P^* = X^*$ (тобто $p_i^* = x_i^*$, $i = 1,..., N$) і при цьому $\left(\sigma_\Pi^*\right)^2 = D\left(R_\Pi^*\right) = 0$, де $R_\Pi^* = \sum\limits_{i=1}^{N}\left(p_i^* R_i\right)$.

Доведення. Вимоги даної теореми збігаються з вимогами теорем 3.1 та 3.2, згідно з якими у випадку строгих оцінок $q_j^* > 0$, $j = 1,.., n$, норма прибутку $R_\Pi^* = \sum\limits_{i=1}^{N}\left(p_i^* R_i\right) = V^* e = \text{const}$, де $\text{const} = \left(V^*;...;V^*\right)$, і тоді

$$\left(\sigma_\Pi^*\right)^2 = D\left(R_\Pi^*\right) = D\left(V^* e\right) = D(\text{const}) = 0.$$

З іншого боку, для будь-якого портфеля зі структурою $X = (x_1;...; x_N)$ його дисперсія $\sigma_\Pi^2 = D(R_\Pi) \geq 0$, тобто

$$\min_{X \in \Delta_X} D(R_\Pi) = 0 = D\left(R_\Pi^*\right) = \left(\sigma_\Pi^*\right)^2.$$

Отже, портфель із структурою $P^* = X^*$ має найменший ступінь ризику, що й треба було довести.

Теорема 6.2. Нехай у парній грі з нульовою сумою, що задається матрицею $C = (\sigma_{il} :\ i = 1,.., N;\ l = 1,.., N)$, де $\sigma_{il} = \text{cov}(R_i; R_l)$, відсутня сідлова точка, а $P^* = \left(p_1^*;...; p_N^*\right)$, $Q^* = \left(q_1^*;...; q_N^*\right)$ — розподіли, що відповідають оптимальним змішаним стратегіям $\prod_{p^*}$ та $\prod_{Q^*}$ відповідно першого та другого гравців, V^* — ціна гри. Тоді у випадку, коли $p_i^* > 0$, $i = 1,..., N$, $q_l^* > 0$, $l = 1,..., N$, вектори P^*,

Q^* та X^* збігаються, тобто $P^* = Q^* = X^*$ (або ж $p_i^* = q_i^* = x_i^*$, $i = 1,..., N$), і при цьому портфель зі структурою X^* має мінімальний ступінь ризику, рівний за величиною ціні гри: $\left(\sigma_{\Pi}^*\right)^2 = V^*$.

Доведення. Вимоги наведеної теореми збігаються з вимогами теореми 3.2. А тому згідно з отриманим у теоремі 3.2 результатом доходимо висновку щодо правильності твердження теореми 6.2.

Теорема 6.3. Нехай у парній грі з нульовою сумою, що визначається матрицею $R = \left(r_{ij}:\ i = 1,..., N;\quad j = 1,..., n\right)$, відсутня сідлова точка, вектори $P^* = \left(p_1^*,..., p_N^*\right)$ та $Q^* = \left(q_1^*;...; q_n^*\right)$ відповідають оптимальним змішаним стратегіям гравців, V^* — ціна гри. Тоді, якщо мають місце строгі оцінки $q_j^* > 0$, $j = 1,..., n,$ портфель зі структурою $X^* = P^*$ (тобто $x_i^* = p_i^*$, $i = 1,..., N$) є ефективним згідно з концепцією Марковіца для будь-якого розподілу ймовірності $Q \in \Delta_Q$.

Доведення. Розглянемо дискретну випадкову величину $R_{P^*} = \sum_{i=1}^{N}\left(p_i^* R_i\right)$, що відображає норму прибутку портфеля зі структурою $X^* = P^* = \left(p_1^*;...; p_N^*\right)$. Згідно з теоремами 3.1 та 3.2 отримуємо, що $R_{P^*} = V^* e = \text{const}$, $M\left(R_{P^*}\right) = M\left(V^* e\right)$, $D\left(R_{P^*}\right) = D\left(V^* e\right) = 0$, тобто портфель зі структурою $X^* = P^*$ має нульовий ступінь ризику (є безризиковим) незалежно від структури вектора $Q \in \Delta_Q$ (від розподілу ймовірності щодо станів економічного середовища). Зменшення значення дисперсії є неможливим, оскільки $D\left(R_{P^*}\right) = 0$, а тому не існує вектор $(Q;\ X)$, що домінує над вектором $\left(Q; P^*\right)$. Це означає, що всі допустимі вектори вигляду $\left(Q; P^*\right)$ є оптимальними за Паретто для задачі (6.48)—(6.53). Отже, згідно з означенням 6.4 вектор $X^* = P^*$ є структурою ефективного портфеля в моделі Марковіца для будь-якого розподілу ймовірності, що й треба було довести.

Теорема 6.4. Нехай вектор $X^* = \left(x_1^*;...; x_N^*\right)$ задає структуру ефективного портфеля в моделі Марковіца (6.59)—(6.61). Тоді вектор $\left(\hat{Q}; X^*\right) = \left(\frac{1}{n};...;\frac{1}{n}; x_1^*;...; x_N^*\right)$ є оптимальним за Паретто для задачі (6.48)—(6.53).

Доведення. Розглянемо вектор $(\hat{Q}; X^*)$, де $\hat{Q} = \left(\frac{1}{n};...;\frac{1}{n}\right)$, а $X^* = (x_1^*;...;x_N^*)$ — структура ефективного портфеля задачі (6.59)—(6.61). Вектор $(\hat{Q}; X)$, де $X \neq X^*$, не може домінувати над вектором $(\hat{Q}; X^*)$, оскільки останній є вектором Паретто задачі (6.59)—(6.61), у якій розподіл імовірності станів економічного середовища збігається з вектором $\hat{Q}$. Вектор $(Q; X^*)$, де $Q \neq \hat{Q}$, не може домінувати над вектором $(\hat{Q}; X^*)$, оскільки $H(Q) < H(\hat{Q})$ для усіх $Q \neq \hat{Q} = \left(\frac{1}{n};....;\frac{1}{n}\right)$. З тієї ж причини вектор $(Q; X)$, де $Q \neq \hat{Q}$, не може домінувати над вектором $(\hat{Q}; X^*)$. Виходячи з наведених міркувань доходимо висновку щодо справедливості твердження теореми.

Теорема 6.5. Нехай у парній грі з нульовою сумою, що визначається платіжною матрицею $R = (r_{ij} : i = 1,..., N;\ j = 1,..., n)$, відсутня сідлова точка. Тоді, якщо ця гра має єдиний розв'язок, множина G^* усіх ефективних векторів задачі (6.65)—(6.67), за умов (6.51)—(6.53), має єдиний елемент

$$(P^*; Q^*) = (p_1^*;...; p_N^*; q_1^*;...; q_n^*),$$

де $P^* = (p_1^*;...; p_N^*)$, $Q^* = (q_1^*;...; q_n^*)$ — розподіли, що відповідають оптимальним змішаним стратегіям гравців.

Доведення. Розглянемо портфель зі структурою $P = (p_1;...; p_N)$. Тоді платіжна функція гри

$$V = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}(p_i q_j r_{ij}) = \sum_{i=1}^{N}(p_i m_i) = M(R_\Pi) = m_\Pi,$$

де: $R_\Pi = \sum_{i=1}^{N}(p_i R_i)$ — дискретна випадкова величина, що характеризує норму прибутку портфеля зі структурою $P = (p_1;...; p_N)$; m_Π — сподівана норма прибутку цього портфеля.

Очевидно, що вектор, який задовольняє сукупності критеріїв (6.65), (6.66), є також сідловою точкою платіжної функції V. Але сідловою точкою функції V є вектор $(P^*; Q^*)$, де P^* та Q^* — оптимальні змішані стратегії гравців у парній грі з нульовою сумою, що визначається платіжною матрицею R. Згідно з умовою теореми ця гра має єдиний розв'язок, а це означає, що множина G^* усіх ефективних векторів задачі (6.65)—(6.67) за умов (6.51)—(6.53) складається з єдиного елемента $(P^*;Q^*)$, що й треба було довести.

Теорема 6.6. Нехай у парній грі з нульовою сумою, що визначається платіжною матрицею $R=(r_{ij}:\ i=1,...,N;\ j=1,...,n)$, відсутня сідлова точка. Тоді, якщо усі компоненти вектора $Q^*=(q_1^*;...;q_n^*)$, що відповідає оптимальній змішаній стратегії другого гравця, є строго більшими від нуля $(q_j>0,\ \ j=1,...,n)$, оптимальна змішана стратегія першого гравця, що визначається вектором $P^*=(p_1^*;...;p_N^*)$, є ефективним портфелем згідно з концепцією Марковіца для інформаційної ситуації I_5.

Доведення. Якщо гра, про яку йдеться в умові теореми, має єдиний розв'язок, то оптимальна змішана стратегія першого гравця, якій відповідає вектор P^*, дійсно є ефективним портфелем згідно з концепцією Марковіца у полі інформаційної ситуації I_5. Справедливість цього твердження випливає безпосередньо з теореми 6.5 та означення 6.5.

Нехай дана гра має кілька розв'язків (більше одного). У межах цього припущення розглянемо пару відповідних (одна одній) оптимальних змішаних стратегій гравців з векторами $P^*=(p_1^*;...;p_N^*)$ — для першого та $Q^*=(q_1^*;...;q_n^*)$ — для другого. Нехай при цьому мають місце строгі оцінки: $q_j^*>0,\ \ j=1,...,n.$ Складемо портфель зі структурою $X=P^*\in\Delta_X$. Тоді згідно з теоремами 3.1 та 3.2 для норми прибутку цього портфеля R_Π маємо:

$$R_\Pi^*=\sum_{i=1}^{N}\left(p_i^*R_i\right)=V^*e;\ \ M\left(R_\Pi^*\right)=V^*;\ \ D\left(R_\Pi^*\right)=0=\min_{P\in\Delta X}D(R_\Pi),$$

де: $e=(1;...;1)$; V^* — ціна гри. Отже, структура даного портфеля P^* забезпечує мінімум дисперсії $\sigma_\Pi^2(P;Q^*)$, що задається згідно з (6.72). Теорему доведено.

6.8. ПОЗНАЧЕННЯ, ВИКОРИСТОВУВАНІ У РОЗДІЛІ 6

c_t, d_t, r_t — ціна, дивіденди, норма прибутку активу за t-й період часу ($t = 1,...,T$);

$r_{\Pi t}$ — норма прибутку портфеля активів на момент часу t ($t = 1,...,T$);

$X = (x_1;...;x_N)$ — структура портфеля активів;

x_i — частка капіталу, інвестованого в обтяжений ризиком актив i-го виду ($i = 1,..., N$);

$X^* = (x_1^*;...;x_N^*)$ — структура оптимального портфеля;

$X^*(Q) = (x_1^*(Q);...;x_N^*(Q))$ — структура оптимального портфеля активів за фіксованої змішаної стратегії другого гравця, що визначається розподілом (вектором) Q;

$\widetilde{X} = (x_0; X) = (x_0; x_1;...;x_N)$ — структура портфеля, складеного з безризикових та обтяжених ризиком активів;

x_0 — частка капіталу, вкладеного у безризикові активи;

$\Theta = (\theta_1;...;\theta_n)$ — множина станів економічного середовища (чистих стратегій другого гравця);

$Q = (q_1;...;q_n)$ — апріорний розподіл імовірності щодо настання станів ринку (економічного середовища);

$P = (p_1;...;p_N)$ — розподіл імовірності щодо використання СПР (першим гравцем) своїх чистих стратегій;

P^*, Q^* — розподіл імовірності, що визначає оптимальну змішану стратегію відповідно першого, другого гравця;

$R_0 = r_0$ — норма прибутку безризикового активу (детермінована величина);

$R_i = (r_{i1};...;r_{in})$ — норма прибутку активу i-го виду (випадкова величина, яка набуває свого значення r_{ij} з імовірністю q_j, $i = 1,..., N$; $j = 1,..., n$);

$R = (r_{ij} : i = 1,..., N;\ j = 1,..., n)$ — матриця норм прибутку активів, що складають портфель (функціонал оцінювання);

$m_0 = M(R_0) = r_0$ — сподівана норма прибутку безризикового активу;

$m_i = M(R_i) = \sum_{j=1}^{n} q_j r_{ij}$ — сподівана норма прибутку (математичне сподівання) обтяженого ризиком активу i-го виду ($i = 1,..., N$);

$D(R_i) = \sum_{j=1}^{n} q_j (r_{ij} - m_i)^2$ — ступінь ризику (дисперсія) обтяженого ризиком активу i-го виду ($i = 1,..., N$);

$\sigma_i = \sqrt{D(R_i)}$ — середньоквадратичне відхилення норми прибутку активу i-го виду від його сподіваної норми прибутку ($i = 1,..., N$);

$\sigma_{il} = \mathrm{cov}(R_i; R_l) = \sigma_i \sigma_l \rho_{il}$ — коваріація між нормами прибутків активів i-го та l-го видів ($i = 1,..., N$; $l = 1,..., N$);

$\rho_{il} = \rho(R_i; R_l)$ — коефіцієнт кореляції між нормами прибутків активів i-го та l-го видів ($i = 1,..., N$; $l = 1,..., N$);

$\hat{m}_i, \hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_{il}, \hat{\rho}_{il}$ — статистичні оцінки числових характеристик активів;

$R_{\Pi} = \sum_{i=1}^{N} x_i R_i$ — норма прибутку (випадкова величина) портфеля активів зі структурою X ;

$R_{\Pi}^* = \sum_{i=1}^{N} x_i^* R_i$ — норма прибутку (випадкова величина) портфеля активів з оптимальною структурою X^*;

$m_{\Pi} = M(R_{\Pi}) = \sum_{i=1}^{N} x_i m_i$ — сподівана норма прибутку портфеля активів;

$m_{\Pi}^* = M(R_{\Pi}^*) = \sum_{i=1}^{N} x_i^* R_i$ — сподівана норма прибутку портфеля активів, якої він досягає за оптимальної структури X^*;

m_{Π}^0 — фіксоване значення сподіваної норми прибутку портфеля активів;

$\sigma_{\Pi}^2 = D(R_{\Pi}) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} x_i x_l \sigma_{il} = XCX^T$ — величина ризику (дисперсія норми прибутку) портфеля, складеного з N активів;

$\sigma_{\Pi} = \sqrt{D(R_{\Pi})}$ — середньоквадратичне відхилення норми прибутку портфеля активів від його сподіваної норми прибутку;

$\hat{m}_{\Pi}, \hat{\sigma}_{\Pi}$ — статистичні оцінки числових характеристик портфеля активів;

σ_{Π}^0 — фіксоване значення середньоквадратичного відхилення портфеля активів;

$\sigma_{\Pi}^*(m_{\Pi}^0)$ — мінімальне значення середньоквадратичного відхилення (ризику) за фіксованого значення m_{Π}^0 сподіваної норми прибутку цього портфеля;

$(\sigma_\Pi^*)^2$ — мінімальне значення рівня ризику портфеля активів;

V, V^* — ціна гри;

$C = \mathrm{cov}(R_\Pi) = (\sigma_{ij} : i = 1,..., N; \ \ j = 1,..., N)$ — коваріаційна матриця між нормами прибутку активів, що складають портфель (функціонал оцінювання);

$\Delta_P = \{P = (p_1;...; p_N): \sum_{i=1}^{N} p_i = 1; \ p_i \geq 0, \ i = 1,..., N\}$ — множина допустимих розподілів імовірності (векторів), що визначають змішані стратегії першого гравця;

$\Delta_Q = \{Q = (q_1;...; q_n): \sum_{j=1}^{n} q_j = 1; \ q_j \geq 0, \ j = 1,..., n\}$ — множина допустимих розподілів імовірності (векторів), що визначають змішані стратегії другого гравця;

$\Delta_X = \{X = (x_1;...; x_N): \sum_{i=1}^{N} x_i = 1; \ x_i \geq 0, \ i = 1,..., N\}$ — множина допустимих структур портфелів активів;

$SV(R_\Pi), SSV(R_\Pi)$ — відповідно семіваріація, семіквадратичне відхилення щодо норми прибутку портфеля активів;

$CV_m(R_\Pi), CSV_m(R_\Pi)$ — модифікований коефіцієнт відповідно варіації, семіваріації щодо норми прибутку портфеля активів;

$M(m_\Pi; \sigma_\Pi)$ — позначення точки у системі координат «m — σ» (m — вісь абсцис, σ — вісь ординат);

$\Pi_X(m_\Pi; \sigma_\Pi)$ — позначення точки у системі координат «m — σ», що відповідає портфелю зі структурою X;

$\Pi = \{\Pi_X(m_\Pi; \sigma_\Pi): \ X = (x_1;...; x_N) \in \Delta X\}$ — множина допустимих портфелів активів;

$u(m_\Pi; \sigma_\Pi)$ — функція корисності;

$H(Q)$ — ентропія Шеннона (міра невизначеності);

$X^*(Q) = (x_1^*(Q);...; x_N^*(Q))$ — структура оптимального портфеля активів за фіксованої змішаної стратегії другого гравця, що визначається розподілом (вектором) Q;

$e = (1;...;1)$ — вектор з одиничними компонентами розмірності N.

РОЗДІЛ 7

ІГРОВИЙ ПІДХІД ДО УПРАВЛІННЯ ВАЛЮТНИМ РИЗИКОМ

Скорочення, використовуване в розділі:
СПР — суб'єкт прийняття рішень.

7.1. ВАЛЮТНИЙ РИЗИК

Детальний аналіз валютного ризику наведено, зокрема, у [9, 36, 38, 89, 106].

Валютний курс — це ціна однієї валюти, виражена в іншій (іноземній) валюті.

Питання про обсяг цієї ціни донедавна вирішувалось досить просто — в основі курсу лежав «золотий паритет», тобто врівноважувальне співвідношення між валютами за їх золотим умістом. Відхилення курсу від «золотого паритету» було відносно невеликим і обмежувалося так званими *золотими точками* (за часів класичного золотого стандарту) або спеціально встановленими межами коливань (як це передбачала Бреттон-Вудська валютна угода). Кардинальні зміни відбулися після прийняття Міжнародним валютним фондом у січні 1976 р. рішення про відміну фіксованого золотого вмісту і застосування «плаваючих» (тобто таких, що змінюються залежно від ринкової кон'юнктури) валютних курсів [9].

Багато країн установлюють курс національної грошової одиниці відразу щодо декількох валют, які мають свою чітко визначену частку в так званому *валютному кошику*. Цей метод має на меті нейтралізацію впливу випадкових чинників, зменшення залежності від будь-якої однієї валюти, а також забезпечення більшої стабільності курсу (за рахунок взаємного погашення різноспрямованих коливань курсів валют, що входять до «кошика»). За подібними «кошиками» визначається, наприклад, курс фінської марки, шведської крони, австрійського шилінга, китайського юаня та деяких інших валют.

Причиною валютного ризику є коротко- та довготермінові коливання обмінних курсів валют, що визначаються обсягом попиту та пропозиції. Попит на купівлю чи продаж валюти знаходиться під впливом коротко- та довготермінових чинників. Довготермінові тенденції щодо зміни курсів валют залежать від стану економіки країни, короткотермінові — від ринкових умов й інших короткотермінових чинників попиту-пропозиції.

Валютний ризик — це передусім загроза втрат, пов'язаних зі зміною курсів іноземних валют під час здійснення угод з їх купівлі-продажу.

Валютний ризик, як про це йдеться в [9], пов'язаний з інтернаціоналізацією ринку банківських операцій, створенням транснаціональних (спільних) підприємств і банківських установ й диверсифікацією їх діяльності. Він може бути пов'язаний з неможливістю боржника (гаранта) сплатити за своїми зобов'язаннями. Зі свого боку, *валютні ризики* поділяються на *«конверсійні» (наявні)*, які є ризиками збитків по конкретних операціях в іноземній валюті, та *«трансляційні» (бухгалтерські)*, що виникають в разі переоцінювання активів і пасивів зарубіжних філій та дочірніх фірм у національну валюту. В процесі складання тактичних планів і програм діяльності виробники часто аналізують ризики за кожною конкретною товарною чи іншою операцією; при цьому стан сумарного балансу не має вирішального значення для кінцевих результатів.

Для зниження рівня ризиків використовують так званий *метод метчинг*, згідно з яким сума надходжень валюти віднімається від величини її відтоку і таким чином визначається реальний розмір ризику в статиці та динаміці. Крім того, на практиці застосовується *метод «неттинг»* — максимальне скорочення кількості валютних угод укрупненням їх та узгодженням дій усіх підрозділів самого виробника. Ці методи з успіхом використовуються транснаціональними банками.

Інтерес становить практика 10 банків Лондона, які в 1986 р. створили фірму «Форекснет», що здійснює оперативний взаємний залік і (або) скорочення кількості конверсійних операцій з метою зниження рівня валютних ризиків та операційних витрат. При цьому централізація захисту від валютних ризиків повністю не знімає відповідальності за збитки ні з філій, ні з материнської компанії.

«Трансляційний» валютний ризик найчастіше виникає внаслідок перерахунку балансу та інших форм статистичної звітності в національну валюту. Тут розрізняють *дві основні ситуації виникнення ризику* — *просту трансляцію*, за якої перерахунок виконується за поточним валютним курсом, тобто на дату перерахунку,

та історичну, коли перерахунок проводиться за курсом на дату здійснення угод. Основні *способи аналізу валютного ризику* такі:

- усі поточні операції оцінюються за поточним валютним курсом, а довгострокові — за історичним;
- фінансові операції перераховуються за поточним, а товарні — за історичним курсом;
- усі операції враховуються або за поточним, або за історичним курсом.

Сама поява валютного ризику залежить від стану «валютної позиції», тобто співвідношення вимог та обов'язків з продажу (купівлі) іноземної валюти. У разі кількісного збігу (за конкретною валютою та терміном угод купівлі-продажу) позиція вважається «закритою» і ризику (окрім ризику невикористаних можливостей) не виникає (оскільки можлива сума збитків, скажімо, в разі продажу перекриватиметься точно такою ж сумою прибутку в разі купівлі валюти, курс якої був змінений). *Ризик виникає за «відкритої» позиції*, коли суми вимог і зобов'язань не збігаються. Тоді банку доведеться в майбутньому купувати цю валюту за новим курсом, а віддавати — за старим (якщо сума його зобов'язань більша від суми вимог — *«коротка позиція»*) або приймати за старим курсом, тоді як продати її можна буде лише за новим (якщо більша сума вимог до контрагентів — *«довга позиція»*). *Збитки виникнуть* у тому разі, коли зміна курсу призведе до того, що віддавати валюту за раніше укладеною угодою доведеться за курсом, нижчим від існуючого на момент розрахунку, або, навпаки, приймати раніше куплену валюту треба буде за курсом, що перевищує існуючий. Отже, ступінь ризику безпосередньо відбивається на результатах майбутніх валютних операцій.

Якщо куплена валюта надаватиметься в розпорядження покупця у день укладання угоди або в наступний день, то такі *угоди* належать до *типу «овернайт» (overnight).* Угоди, що передбачають постачання валюти протягом двох днів після їх здійснення, називають *угодами «спот»* (spot). Ці два типи угод й об'єднуються поняттям *«касові» операції*. За такий короткий період валютний курс, як правило, не встигає зазнати якої-небудь значної зміни, і ризик практично зводиться до мінімуму. Інша справа, коли здійснюються *довгострокові («форвардні») угоди*, що передбачають обмін валют у раніше встановлені строки (як правило, від одного тижня до п'яти років), але за курсом, зафіксованим на момент укладення угоди.

До довгострокових належать також *угоди типу «своп» (SWAP),* що являють собою комбінацію операцій «спот» і «форвард».

«Форвардний» курс, природно, різниться від того курсу, який застосовується в угодах «спот». У міжнародній практиці для котирування валют за форвардними угодами, як правило, використовують не сам «форвардний» курс, а лише різницю відносно курсу «спот» (знижку або премію). Для визначення форвардного курсу цю різницю необхідно відповідно відняти або додати до курсу «спот».

Певна річ, наші комерційні банки можуть запропонувати клієнтам свої курси за угодами «форвард», але в такому разі їм насамперед доведеться вирішувати проблему прогнозування динаміки валютних курсів.

Прогнозування динаміки валютних курсів дуже ускладнилось у зв'язку із поширенням системи «плаваючих» курсів.

Природно, що більш-менш вірогідно передбачити величину зміни валютних курсів можна і, як правило, необхідно в тому разі, коли йдеться про досить невеликий період часу — від одного до кількох днів або тижнів. В останніх випадках задовільним вважається вдале передбачення всього напряму (тренду) в зміні курсу валюти — його зниження або підвищення, чого вже достатньо для проведення прибуткових операцій зі страхування валютного ризику. Вважають, що найбільш вдалими є передбачення динаміки валютних курсів на термін у півроку (180 днів), що використовуються для встановлення в курсі за угодами «двох підходів» — фундаментального та технічного.

Фундаментальний підхід виходить з того, що основними чинниками формування курсів на валютному ринку є відсоткові ставки за депозитно-кредитними операціями, темпи інфляції та стан платіжного балансу за поточними операціями. Отже, знання про зміни, що відбулися, або очікувані зміни цих чинників, з одного боку, та знання про ступінь впливу цих чинників на величину валютного курсу (тобто про величину коефіцієнтів кореляції) — з іншого, вважаються достатніми для прогнозування шляхом побудови адекватних економічних моделей. Використовувані моделі можуть бути досить складними, коли врахувати, що сама кількість чинників впливу насправді не обмежується трьома щойно згаданими.

Практики схильні застосовувати так званий *технічний підхід*. Він базується на впевненості, шо графіки, які ілюструють динаміку валютних курсів, самі по собі можуть дати ключ до пояснення можливих напрямів зміни курсів у майбутньому. Сутність основного методу цього напряму, *методу «чартів»* (від англ. chart — графік), полягає у проведенні графічного аналізу динаміки курсів для виявлення подібних моментів у їх русі з метою прогнозування. При цьому виходять із припущення, що одного разу помічена послідовність у коливаннях валютного курсу виявлятиметься й надалі (при цьому, чим менше ви знатимете про реально існуючі економічні залежності, тим краще).

У ході аналізу «чартів» виокремлюють певні фігури, злами графіків певної конфігурації: «прапор» або «вимпел», «трикутник», «провал», «дуга», «голова—плечі» тощо. Помітивши, що точки, які фіксують стан поточного курсу, починають вишиковуватися на графіку в певну фігуру («чарт»), валютний дилер може достатньо впевнено визначити ті моменти, коли дану валюту необхідно купувати, а коли настає час її позбутися.

Зауважимо, що на завершальній стадії прогнозування проводиться експертне оцінювання, яке ґрунтується на якісному аналізі всієї сукупності фактів, що впливають на курси (фінансові, загальноекономічні, політичні та психологічні). Експертна оцінка, як один з методів прогнозування, покликана враховувати можливість зміни курсів.

Результати прогнозування, здобуті за будь-яким методом, служать для прийняття рішення про те, як уникнути можливих збитків або отримати додатковий потенційний прибуток.

7.2. ВИДИ ВАЛЮТНОГО РИЗИКУ

Основні види валютного ризику: операційний, трансляційний, економічний.

Джерелом *операційного ризику* є невизначеність, пов’язана з випадковими зменшеннями чистого припливу грошових засобів, зниженнями прибутків і чистого доходу на одну акцію, зменшеннями частки ринку збуту. Цей вид валютного ризику пов’язаний, в основному, з торговельними операціями, а також з угодами щодо фінансового інвестування і дивідендними (відсотковими) сплатами. Операційним ризиком обтяжений як оборот грошових засобів, так і рівень прибутку.

Джерелом *трансляційного ризику* є невизначеність, пов’язана з випадковим зменшенням у звітності вартості пасивів в іноземній валюті, що призводить до зниження чистої вартості компанії (підприємства), зменшенням у звітності прибутків і показника чистого (нетто) доходу на кожну акцію компанії (підприємства). Цей ризик пов’язаний з інвестиціями за кордон й іноземними кредитами. Він впливає на величину показників статей балансу і звіту щодо прибутків і збитків у разі їх перерахунків у національну валюту, а також змінює показники консолідованого балансу групи компаній.

Джерелом *економічного ризику* є невизначеність, пов'язана з випадковим зниженням конкурентоспроможності, зниженням довготермінової рентабельності. Цей ризик стосується майбутніх контрактних угод. Він має довготерміновий характер, пов'язаний з перспективним розвитком компанії (фірми). Вважається, що його не важко спрогнозувати.

Якщо компанії (фірми) регулярно купують чи продають товари за кордон, вони постійно обтяжені ризиком скорочення виручки чи зростання витрат, пов'язаних з несприятливими змінами курсів валют.

У міжнародній торгівлі економічний ризик існує завжди, і компанії (фірми) повинні прагнути до його максимально можливого скорочення.

Існують *два головних наслідки* економічного ризику для компанії у випадку несприятливої зміни обмінного курсу валют:

- зменшення прибутку від майбутньої операції. Такий економічний ризик називається *прямим;*
- втрата певної частки цінової конкурентоспроможності порівняно з іноземними товаровиробниками. Такий економічний ризик називається *опосередненим*.

Джерелом *прямого економічного ризику* є невизначеність, пов'язана з операціями, які проводитимуться в майбутньому. Після укладення угоди прямий економічний ризик трансформується в операційний. Прикладом виникнення загрози понесення збитків може бути пропозиція укладення контракту, який здійснюється в іноземній валюті, чи подання прайс-листка в іноземній валюті. Будь-яка компанія, що купує чи продає товар за кордоном, обтяжена економічним ризиком.

Джерелом *опосередненого економічного ризику* є невизначеність, пов'язана з погіршанням конкурентоспроможності певної компанії порівняно з іноземними (а може навіть і внутрішніми) конкурентами, яка виникає внаслідок зсувів курсів валют відносно високих витрат чи низьких цін і призводить до збитків.

Наведемо кілька прикладів, пов'язаних із валютним ризиком [89].

Приклад 7.1. (Реалізація товару за кордон за іноземну валюту.) Компанія продала за кордон обладнання на суму 280 тис. дол. На момент відвантаження обмінний курс долар/фунт стерлінгів був 1,75 долара за 1 фунт стерлінгів. Операція була сплачена через три місяці, коли курс становив 2 дол. за 1 фунт стерлінгів.

Аналіз. У зв'язку зі спадом курсу долара фінансове становище компанії обтяжене операційним ризиком. Реальний приплив грошових засобів і дійсний прибуток стали нижчими за очікувані. Для визначення обсягу недоотриманих засобів скористаємося розрахунками:

обсяг реалізації на момент відвантаження

$$160\,000 = 280\,000 : 1{,}75;$$

фактично отримано

$$140\,000 = 280\,000 : 2;$$

недоотримано засобів (у фунтах стерлінгів):

$$20\,000 = 160\,000 - 140\,000.$$

Приклад 7.2. (Продаж валюти за кордон.) Компанія продає товари в декілька країн. Собівартість кожного виробу становить 8 фунтів стерлінгів, а ціна, яку вона править, — 10 фунтів стерлінгів. З часом курс обміну фунта стерлінгів щодо інших основних валют зростає і найближчим часом очікують його зміцнення.

Аналіз. Компанія обтяжена опосередненим економічним ризиком. У зв'язку зі зміцненням фунта стерлінгів може відбутися зменшення попиту і прибутків. Якщо курс фунта стерлінгів відносно німецької марки зросте від 2,95 до 3,10 за 1 фунт стерлінгів, то німецький споживач вимушений буде платити за продукцію фірми не 29,5, а 31 марку. Дуже ймовірно, що попит знизиться й експорт компанії скоротиться, якщо на зменшення попиту компанія не відреагує зниженням ціни, припустимо до 9,50 фунта стерлінгів, і отриманням меншого прибутку за один виріб.

Приклад 7.3. (Купівля товару за кордоном за іноземну валюту.) Компанія закупила в Японії партію ксероксів вартістю 25,2 млн єн. На момент доставки обмінний курс був 300 єн за 1 фунт стерлінгів, а на момент оплати — 280 єн.

Аналіз. Операційний ризик компанії в період між купівлею і доставкою ксероксів полягає у зростанні вартості єни, внаслідок цього компанія вимушена платити більше, ніж очікувалося спочатку. Для визначення обсягу переплати скористаємося розрахунками:

вартість угоди на момент купівлі

$$84\,000 = 25\,200\,000 : 300;$$

сплачені засоби

$$90\,000 = 25\,200\,000 : 280;$$

сума переплати (у фунтах стерлінгів)

$$6000 = 90\,000 – 840\,000.$$

Крім того, протягом терміну експлуатації фотокопіювальних машин прибутки компанії будуть також меншими, бо збільшаться амортизаційні відрахування, котрі проводяться виходячи з 90 тис. фунтів стерлінгів, а не з 84 тис. фунтів стерлінгів.

7.3. УПРАВЛІННЯ ВАЛЮТНИМИ РИЗИКАМИ

Кожний суб’єкт керування обирає конкретний спосіб управління валютними ризиками залежно від специфіки своєї діяльності, обраної маркетингової стратегії. Більшість з них проводить *селективне управління валютним ризиком*, тобто страхування лише неприйнятних ризиків і врахування конкретних ситуацій. Переважно використовують так звані *внутрішні та зовнішні методи управління рівнем валютних ризиків. До внутрішніх* належать такі методи, як прискорення та (або) уповільнення платежів не лише для іноземних партнерів, а й у межах країни; вибір валюти для кожної конкретної товарної чи фінансової операції.

Зовнішні методи управління валютними ризиками здебільшого є банківськими, оскільки ґрунтуються на різноманітних інструментах банківської діяльності. З метою зменшення валютних ризиків банківськими методами найчастіше використовують такі валютні операції, як форвардні, ф’ючерсні, опційні, хеджування (страхування валютних ризиків) тощо. На наш погляд, певний інтерес становить *форфетування (ризик форфетування)*. Під час цієї операції форфетер бере на себе всі ризики експортера без права регресу.

Водночас форфетування є формою трансформації комерційного кредиту в банківський. Це дає свої переваги, бо крім можливого зниженння рівня ризику:

- спрощуються балансові взаємовідносини можливих зобов’язань, тобто знижується частина дебіторської заборгованості;

• поліпшується (хоча б тимчасово) стан ліквідності, що підвищує ймовірність подальшого зміцнення фінансової стійкості завдяки одержанню продавцем готівки;

• зменшуються втрати, пов'язані лише з частковим державним або приватним страхуванням або можливим утрудненням із ліквідністю, яке майже завжди виникає в період пред'явлення застрахованих раніше операцій;

• знижується або навіть зникає зовсім ризик, пов'язаний з коливаннями відсоткових ставок, курсовим коливанням валют та зі зміною фінансової стійкості боржника;

• відсутні ризики та витрати, пов'язані з діяльністю кредитних органів і визискуванням грошей за векселями та іншими платіжними документами. Проте форфетування не можна використовувати завжди і скрізь. Це лише один із способів зниження рівня ризику.

Методи страхування валютних ризиків — це фінансові операції, що дають змогу або майже повністю, або частково ухилитися від ризику збитків, які виникли в зв'язку з очікуваною зміною валютного курсу, або одержати спекулятивний прибуток, що ґрунтується на сприятливій зміні. До таких методів страхування, хеджування (від англ. hedge — огороджувати) можна віднести:

1) структурне балансування (активів і пасивів, кредиторської та дебіторської заборгованості);
2) зміну терміну платежу;
3) форвардні угоди;
4) операції типу «своп»;
5) опційні угоди;
6) фінансові ф'ючерси;
7) кредитування та інвестування в іноземній валюті;
8) реструктуризацію валютної заборгованості;
9) паралельні кредити;
10) лізинг;
11) дисконтування вимог в іноземній валюті;
12) «валютні кошики»;
13) здійснення філіалами платежів у «зростаючій» валюті;
14) самострахування.

Треба мати на увазі, що методи 2—6 та 11 застосовуються для короткострокового хеджування, тоді як методи 7—10, 13 і 14 — для довгострокового страхування ризиків. Методи 1 та 12 можуть успішно використовуватися в усіх випадках. Зауважимо, що методи 9 і 13, в принципі, доступні лише тим компаніям чи банкам, які мають зарубіжні філії. Треба сказати, що застосування деяких із цих методів («своп», «опціон», «ф'ючерс» тощо) ще не досить активно використовується в умовах України через недосконале законодавство та нерозвиненість ринкових структур. У зв'язку з цим ми розглянемо лише деякі з них — ті, що зустрічаються у нашій комерційній практиці.

Сутність основних *методів хеджування* зводиться до того, щоб здійснювати валютно-обмінні операції перед несприятливою зміною курсу, або компенсувати збитки від подібної зміни за рахунок паралельних угод з валютою, курс якої змінюється в протилежному напрямі. Хоча можливі й дещо інші варіанти.

Структурне балансування полягає у бажанні підтримувати таку структуру активів і пасивів, яка дасть змогу перекрити збитки від зміни валютного курсу прибутком, одержаним від цієї самої зміни за іншими позиціями балансу. Інакше кажучи, подібна практика зводиться до намагання дістати максимально можливу кількість «закритих» позицій, мінімізувавши таким чином валютні ризики. Але оскільки мати «закритими» всі позиції не завжди можливо та розумно, то слід бути готовими до негайних акцій зі структурного балансування. Наприклад, якщо підприємство чи банк очікує, що відбудуться, з великою ймовірністю, значні зміни валютних курсів в результаті девальвації грошової одиниці, то йому потрібно негайно конвертувати вільну готівку у валюту платежу. А якщо ж говорити про співвідношення між різними іноземними валютами, то в такій ситуації, окрім конверсії «падної» валюти в надійнішу, можна здійснити, скажімо, заміну цінних паперів, деномінованих у «хворій» валюті, на надійніші фондові цінності.

Одним із найпростіших і водночас досить поширених способів балансування є приведення у відповідність валютних потоків, що відбивають доходи та витрати. Щоразу, укладаючи угоду, яка передбачає одержання або, навпаки, виплату іноземної валюти, підприємство чи банк повинні намагатися зупинити свій вибір на тій валюті, яка допоможе закрити (повністю або частково) наявні «відкриті» валютні позиції.

Зміну терміну платежу звичайно називають тактикою «Лідз енд легз» (leads and legs — попередження та відставання). Вона полягає у маніпулюванні термінами здійснення розрахунків, що застосовується тоді, коли очікуються різкі зміни курсів валюти ціни або валюти платежу. До числа найуживаніших форм такої тактики належать: дострокова оплата товарів та послуг (у разі сподіваної апреації, тобто підвищення курсу валюти платежу) або, навпаки, затримка платежу (якщо передбачається депреація, тобто падіння курсу); прискорення або сповільнення репатріації прибутків, погашення основної суми кредитів і виплати відсотків та дивідендів; регулювання одержувачем інвалютних коштів, термінів конверсії виручки в національну валюту тощо.

Форвардні угоди є, напевне, найчастіше застосовуваним методом хеджування (у зв'язку з чим іноді під хеджуванням розуміють самі лише форвардні операції зі страхування валютних ризиків), що має на меті уникнення ризиків, пов'язаних з операціями купівлі-продажу іноземної валюти і передбачає її поставляння в строки понад два дні. Найчастіше строками для такого типу угод є один — три або шість місяців (хоча, як уже зазначалося, терміни таких угод можуть сягати кількох років). Сутність форвардної угоди, з погляду можливості страхування, полягає в тому, що імпортер, який побоюється підвищення курсу валюти платежу, має право заздалегідь звернутися до банку та купити цю валюту з терміном поставляння, наближеним до терміну платежу.

Окрім простої форвардної угоди (так званого «аутрайт» — outright) до цього різновиду можна віднести й складнішу угоду — «своп».

Операції типу «своп» полягають у купівлі іноземної валюти на умовах «спот» з наступною оберненою операцією на умовах «форвард». У результаті таких угод банки купують валюту, необхідну для міжнародних розрахунків, і диверсифікують свої валютні резерви, зберігаючи валютні позиції «закритими». Можливі й інші комбінації.

Опціон є видом контракту, згідно з яким покупець має право протягом певного терміну або купити за фіксованою ціною обумовлену суму іноземної валюти (опціон типу «*кол*» — call), або продати її (опціон «*пут*» — put). Власник опціону приймає рішення про те, скористатися чи ні наданим йому правом, залежно від динаміки валютних курсів. У всіх випадках ризик, якому піддається власник опціону, попередньо обмежений ціною опціону, а виграш теоретично необмежений і на практиці буває досить значним. Хеджування методом опційних угод відрізняється від операції «форвард» тим, що за підприємством або банком зберігається право вибору, яке підвищує ефективність операції.

«Валютний кошик» є набором валют, взятим у певних пропорціях. У такий «кошик», якщо методом його використання є хеджування, добираються валюти, курси яких звичайно «плавають» у протилежних напрямках, взаємно врівноважуючи наслідки свого «плавання» і роблячи сукупну вартість усього «кошика» стабільнішою. Прикладом можуть бути традиційні «валюти-суперни-

ці»: долар, фунт стерлінгів, німецька марка та єна. Хоча можливі й інші набори, скажімо, екю, що складається з валют країн ЄЕС, чия стабільність забезпечується наявністю певних обов'язків цих країн щодо підтримки меж коливань курсів своїх валют.

Хеджування полягає у введенні до торгової та кредитної угоди «мультивалютної обумови», згідно з якою сума грошового зобов'язання перераховується залежно від зміни курсового співвідношення між валютою платежу та певним набором інших валют. Завдяки цьому знижується ймовірність різкої зміни суми платежу, причому з погляду валютного ризику обидва контрагенти перебувають у рівних умовах.

Зв'язок банку з хеджуванням виявляється подвійним чином, оскільки, з одного боку, банк, як і будь-яка інша комерційна компанія, може застосовувати описані щойно методи страхування валютних ризиків у повсякденній практиці своєї фінансової діяльності, пов'язаної з управлінням власними валютними ресурсами, а з іншого — хеджування здебільшого є тією послугою, яку банки пропонують клієнтам. Насамперед, може йтися про консультування клієнтів з питань страхових ризиків, тобто про відповідальний, складний і багатоетапний процес. Як звичайно підкреслюють експерти, важко показати своїм клієнтам, що не існує жодного простого «золотого правила» або магічної формули і що валютні операції потребують систематичного аналізу кожного кроку і цілого процесу прийняття рішень. Власне тому і є доцільним використання адекватного інструментарію ризикології та побудова математичних моделей.

Поетапно відповідна робота може будуватись таким чином:

- визначити всі типи валютних ризиків, на які може наражатися компанія (або банк);
- оцінити можливі обсяги збитків (з урахуванням прогнозів динаміки валютних курсів) для прийняття рішення про доцільність витрат на хеджування;
- розглянути можливість ухилення від валютного ризику в найпростіші способи типу «лідз енд легз» або укладанням зустрічного контракту на продаж (купівлю) деяких товарів за ту саму валюту;
- якщо все ж таки існує потреба в складніших формах хеджування, визначити, чи доцільно забезпечувати страхування всіх 100% можливого ризику, чи можна обмежитися якоюсь їх частиною;
- вибрати найприйнятніше в даному разі хеджування та визначити дату або певні події на валютному ринку, з моменту настання яких операція хеджування має бути здійснена.

Але від звичайних консультантів банки відрізняються тим, що вони не лише дають поради зі страхування валютних ризиків, а й безпосередньо виконують потрібні операції. Це стосується насамперед валютних операцій типу «форвард», «своп», опціонів і фінансових ф'ючерсів. У зв'язку з цим банкам доводиться часто брати на себе ризик зміни валютного курсу в несприятливому напрямку. Природно, що, як і будь-яка комерційна компанія, банк прагне уникнути надлишкових і надміру небезпечних ризиків, тобто виконує такі операції лише з надією одержати прибуток за умови допустимого ступеня ризику.

7.4. ФОРМУВАННЯ «ВАЛЮТНОГО КОШИКА»

У подальшому викладенні матеріалу використовуватимуться позначення, введені у пункті 1.5.7: R_k — норма прибутку валюти k-го виду ($k=1,\ldots,m$); m — кількість різних валют, що складають кошик; $X=(x_1;\ldots;x_m)$ — структура «валютного кошика»; x_k — частка капіталу, інвестованого у валюту k-го виду; R_Π — норма прибутку «валютного кошика», тобто

$$R_\Pi = \sum_{k=1}^{m}\left(x_k R_k\right).$$

Як і у пункті 1.5.7, вважатимемо, що множина станів ринку іноземних валют (станів економічного середовища) дискретна зі скінченною кількістю елементів. Нехай n — кількість станів економічного середовища; r_{kj} — значення, що приймає норма прибутку валюти k-го виду ($k=1,\ldots,m$) в умовах j-го стану економічного середовища ($j=1,\ldots,n$), при цьому значення r_{kj} відомі. Тоді ситуацію прийняття рішення щодо створення «валютного кошика» можна охарактеризувати функціоналом оцінювання $R^+=(r_{kj}^+:\quad k=1,...,m;\quad j=1,...,n)$.

Аналогічно теорії Марковіца: сподівана норма прибутку валюти k-го виду — це математичне сподівання відповідної дискретної випадкової величини R_k

$$m_k = \mathrm{M}(R_k) = \sum_{j=1}^{n}\left(q_j r_{kj}\right),\quad k=1,\ldots,m;$$

ступінь ризику — дисперсія норми прибутку R_k

$$\sigma_k^2 = D(R_k) = \sum_{j=1}^{n}\left(q_j r_{kj}^2\right) - m_k^2, \quad k = 1, \ldots, m,$$

де $Q = (q_1; \ldots; q_n)$ — імовірності настання можливих сценаріїв.

Характеристиками «валютного кошика» зі структурою $X = (x_1; \ldots; x_m)$ є його сподівана норма прибутку

$$m_\Pi = \mathbf{M}(R_\Pi) = \sum_{k=1}^{m}(x_k m_k)$$

та ступінь ризику — дисперсія норми прибутку R_Π

$$\sigma_\Pi^2 = D(R_\Pi) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}(x_k x_l \sigma_{kl}),$$

де $\sigma_{kl} = \mathrm{cov}(R_k; R_l) = \sum_{j=1}^{n}\left(q_j r_{kj} r_{lj}\right) - m_k m_l$.

Математична модель задачі обрання оптимальної (раціональної) структури $X = (x_1; \ldots; x_m)$ «валютного кошика» має вигляд моделі задачі вибору оптимальної структури портфеля у полі відповідної інформаційної ситуації.

Як про це йшлося у розділі 5, існує низка добре відпрацьованих методів розв'язування цих задач. Якщо матриця $R = (r_{kj} : \ k = 1, \ldots, m; \ j = 1, \ldots, n)$ не має сідлового елемента, то задачу вибору оптимальної структури «валютного кошика» можна звести до відшукання оптимальної раціональної змішаної стратегії відповідної гри двох осіб з нульовою сумою.

Розглянемо гру двох осіб, що задається платіжною матрицею $R = R^+$. Якщо нижня ціна гри

$$\alpha^+ = \max_{k=1,\ldots,m} \alpha_k^+ = \max_{k=1,\ldots,m} \min_{j=1,\ldots,n} r_{kj}$$

не дорівнює верхній ціні гри

$$\beta^- = \min_{j=1,\ldots,n} \beta_j^- = \min_{j=1,\ldots,n} \max_{k=1,\ldots,m} r_{kj},$$

то, як це зазначалось у розділі 3, оптимальним розв'язком гри є сукупність змішаних стратегій гравців, що визначаються векторами $P^* = (p_1^*; \ldots; p_m^*)$ та $Q^* = (q_1^*; \ldots; q_n^*)$ відповідно, а ціна гри

$$V^* = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(p_k^* q_j^* r_{kj})$$

(у цій грі як перший гравець виступає СПР, банк, його клієнт та ін., як другий — валютний ринок).

Згідно з теоремою 3.1, якщо мають місце строгі нерівності $q_j^* > 0$ одночасно для усіх $j = 1, \ldots, n$, то

$$R_{P^*} = \sum_{k=1}^{m} \left(p_k^* R_k\right) = V^* e = \text{const}.$$

Це означає, що «валютний кошик» зі структурою $P^* = (p_1^*; \ldots; p_m^*)$ є безризиковим, оскільки для будь-якого розподілу ймовірності щодо станів валютного ринку його дисперсія дорівнює нулю: $\sigma_{P^*}^2 = D(R_{P^*}) = 0.$ Таким чином, за цих умов ігровий підхід на базі платіжної матриці $\boldsymbol{R} = (r_{kj}: \ k = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, n)$ дозволяє знайти безризиковий «валютний кошик», причому в полі будь-якої інформаційної ситуації. Більш того, у ситуації I_5, коли економічне середовище активно протидіє досягненню найбільшої ефективності рішень, формування суб'єктом ризику «валютного кошика» можливе лише на базі теоретико-ігрових методів.

Зазначимо, що у полі першої інформаційної ситуації (I_1) формування «валютного кошика» з мінімальною дисперсією може ґрунтуватись також на розв'язанні парної гри з нульовою сумою, коли в якості платіжної матриці використовується коваріаційна матриця $C = (\sigma_{kj}: \quad k = 1,..., m; \quad j = 1,..., m)$ (за виконання умов теореми 3.2).

7.5. ВИЗНАЧЕННЯ ОБСЯГУ АВАНСОВОЇ ВИПЛАТИ

Розглянемо ситуацію, наведену у прикладі 5 з пункту 1.7. СПР має дві *чисті стратегії*: перша стратегія $(k = 1)$ — відмовитися повністю від авансового платежу, друга стратегія $(k = 2)$ — стовідсоткова передплата. Валютний ринок може перебувати в одному з двох станів: перший стан $(j = 1)$ — національна валюта експортера щодо долара США знизиться на 10%, другий стан $(j = 2)$ — національна валюта експортера щодо долара США підніметься на 5%.

Знайдемо елементи матриці платежів (у млн нац. грош. од.):

$$f_{11} = 100 \times 2{,}2 = 220; \quad f_{12} = 100 \times 1{,}9 = 190;$$
$$f_{21} = 100 \times 2 = 200; \quad f_{22} = 100 \times 2 = 200.$$

Для спрощення викладу не будемо враховувати час, тобто не будемо визначати справжню ціну (майбутню вартість) грошових коштів f_{21} та f_{22}.

Таким чином, прийняття рішень характеризується матрицею:

$$F^+ = (f_{kj}^+ : k = 1,\ 2;\ \ j = 1,\ 2) = \begin{pmatrix} 220 & 190 \\ 200 & 200 \end{pmatrix}.$$

Визначимо найменший елемент у кожному рядку та найбільший елемент у кожному стовпчику матриці $\boldsymbol{F}$:

$$\alpha_1^+ = \min_{j=1,\ 2} f_{1j} = \min\{220;\ 190\} = 190;\quad \alpha_2^+ = \min_{j=1,\ 2} f_{2j} = \min\{200;\ 200\} = 200;$$
$$\beta_1^- = \max_{k=1,\ 2} f_{k1} = \max\{220;\ 200\} = 220;\quad \beta_2^- = \max_{k=1,\ 2} f_{k2} = \max\{190;\ 200\} = 200.$$

Знайдемо нижню і верхню ціну гри:

$$\alpha^+ = \max_{k=1,\ 2} \alpha_k^+ = \max\{190;\ 200\} = 200;\ \ \beta^- = \min_{j=1,\ 2} \beta_j = \min\{220;\ 200\} = 200.$$

Оскільки $\alpha^+ = \beta^- = f_{22} = 200,$ то ця гра має сідлову точку і друга стратегія СПР є оптимальною згідно з критерієм Вальда. А тому стовідсоткова передплата буде єдиною абсолютно безризиковою, якщо рішення приймаються в умовах невизначеності.

Користуючись формулою

$$z_{kj} = \beta_j - f_{kj}\ \ (k = 1, \ldots, m;\ \ j = 1, \ldots, n),$$

будуємо матрицю невикористаних можливостей:

$$Z^- = (z_{kj}^- :\ k = 1,\ 2;\ \ j = 1,\ 2) = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 20 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо тепер розв'язок гри двох осіб з нульовою сумою, яка задається платіжною матрицею

$$\boldsymbol{H}^+ = \boldsymbol{Z}^T = (h_{kj} : k = 1,\ 2;\ \ j = 1,\ 2) = \begin{pmatrix} 0 & 20 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо існування сідлової точки платіжної матриці H^+ :

$$\alpha_1^+ = \min\{0;\ 20\} = 0;\ \ \alpha_2^+ = \min\{10;\ 0\} = 0;$$
$$\alpha^+ = \max\{\alpha_1^+;\ \alpha_2^+\} = \max\{0;\ 0\} = 0;$$
$$\beta_1^- = \max\{0;\ 10\} = 10;\quad \beta_2^- = \max\{20;\ 0\} = 20;$$
$$\beta^- = \min\{\beta_1^-;\ \beta_2^-\} = \min\{10;\ 20\} = 10.$$

Оскільки $\alpha^+ = 0 < 10 = \beta^-,$ то сідлова точка цієї гри відсутня.

Імовірності, з якими застосовує свої чисті стратегії перший гравець (після транспонування матриці Z^{-} ним став валютний ринок), обчислюються за формулами

$$q_1^* = \frac{h_{22} - h_{21}}{h_{11} - h_{12} - h_{21} + h_{22}} = \frac{0 - 10}{0 - 20 - 10 + 0} = \frac{1}{3}; \quad q_2^* = 1 - q_1^* = \frac{2}{3}.$$

Другий гравець (ним тепер є СПР) застосовує свої чисті стратегії з імовірностями

$$p_1^* = \frac{h_{22} - h_{12}}{h_{11} - h_{12} - h_{21} + h_{22}} = \frac{0 - 20}{0 - 20 - 10 + 0} = \frac{2}{3}, \quad p_2^* = 1 - p_1^* = \frac{1}{3}.$$

Ціна гри

$$V^* = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}}{h_{11} - h_{12} - h_{21} + h_{22}} = \frac{0 \times 0 - 20 \times 10}{0 - 20 - 10 + 0} = \frac{20}{3}.$$

Отже, розв'язком даної гри буде пара оптимальних змішаних стратегій θ_{Q^*} та s_{P^*}, що визначаються векторами $Q^* = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ та $P^* = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$, а сподіваний виграш першого гравця вимірюватиметься ціною гри $V^* = \frac{20}{3}$.

Дамо пояснення щодо розв'язку цієї гри. Оптимальна змішана стратегія $Q^* = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ першого гравця є найменш прийнятним розподілом імовірностей станів валютного ринку (сценаріїв). Оптимальна змішана стратегія $P^* = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$ другого гравця є оптимальною змішаною стратегією СПР, згідно з якою обсяг авансової виплати дорівнює (млн нац. грош. од.):

$$f^* = 0 \times p_1^* + 200 \times p_2^* = 0 \times \frac{2}{3} + 200 \times \frac{1}{3} = \frac{200}{3} \approx 66{,}667.$$

Якщо СПР застосує свою змішану стратегію $P^* = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$, то експортер після виконання усіх своїх зобов'язань (млн нац. грош. од.) у випадку, коли курс національної валюти знизиться на 10%, отримає

$$f_1^* = 100 \times 2{,}2 \times p_1^* + 100 \times 2 \times p_2^* = 220 \times \frac{2}{3} + 200 \times \frac{1}{3} = \frac{640}{3} \approx 213{,}333;$$

якщо ж курс національної валюти підніметься на 5%, то експортер отримає

$$f_2^* = 100 \times 1{,}9 \times p_1^* + 100 \times 2 \times p_2^* = 190 \times \frac{2}{3} + 200 \times \frac{1}{3} = \frac{580}{3} \approx 193{,}333.$$

Наголосимо, що останнє рішення, тобто вибір обсягу авансової виплати, залежить від ставлення СПР до ризику, але ця виплата повинна бути не меншою, ніж $f^* = \frac{200}{3} \approx 66{,}667$ (млн нац. грош. од.).

7.6. КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ТА ТЕМИ ДЛЯ ОБГОВОРЕННЯ

1. Що таке валютний курс? Поясніть основні причини виникнення валютного ризику.
2. Дайте визначення валютного ризику. Поясніть його сутність.
3. Назвіть способи управління валютним ризиком.
4. У чому полягає сутність хеджування?
5. У яких випадках доцільно й можливо застосовувати страхування валютного ризику?
6. Дайте визначення поняттю «валютний кошик». Наведіть приклади використання його для зниження ступеня валютного ризику.
7. Структура «валютного кошика»: сутність, властивості.
8. Норма прибутку валюти, «валютного кошика»: її сутність, обчислення.
9. Як оцінюється ступінь ризику валюти, «валютного кошика»? Які дані необхідно мати для його обчислення?

7.7. ТЕМИ РЕФЕРАТІВ

1. Класифікація валютних ризиків, їх кількісний та якісний аналіз.
2. Ризик у зовнішньоекономічній діяльності.
3. Математичне моделювання оптимальної структури «валютного кошика».
4. Валютний ризик: методи управління та економіко-математичні моделі.
5. Теоретико-ігрові моделі формування «валютного кошика».
6. Використання теоретико-ігрової моделі у зовнішньоекономічній діяльності.

7.8. ПРИКЛАДИ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Ціни валют двох видів за одну одиницю у національних грошових одиницях, які спостерігалися за минулі шість періодів, наведено в таблиці:

j	0	1	2	3	4	5
c_{1j}	2,4	3,0	3,0	4,5	3,8	4,0
c_{2j}	2,5	3,0	4,5	3,5	4,2	3,4

де: j — номер періоду; c_{kj} — ціна однієї грошової одиниці k-ї країни у кінці j-го періоду $(k=1,\ 2;\ \ j=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$.

Необхідно:

а) обчислити значення норм прибутку r_{kj} $(k=1,\ 2)$ у періоди $j=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$;

б) оцінити сподівані норми прибутку цих валют;

в) оцінити дисперсії норм прибутку цих валют і відповідні середньоквадратичні відхилення;

г) оцінити коваріацію норм прибутку цих валют;

д) записати у вигляді функціональних залежностей від аргумента x сподівану норму прибутку та ступінь ризику «валютного кошика», якщо його структура задається (вектором $X=(x;\ 1-x)$);

е) визначити структуру $X^*=(x_1^*;\ x_2^*)$ «валютного кошика», що має мінімальний ступінь ризику;

ж) обчислити характеристики «валютного кошика», що має мінімальний ступінь ризику.

2. Для валют двох видів відома матриця їх норм прибутку:

$$\boldsymbol{R}=(r_{kj}\ :\ k=1,\ 2;\ \ j=1,\ldots,\ 6)=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -6 & 4 & 7 \\ 7 & -2 & 6 & 7 & 3 & -4 \end{pmatrix},$$

де r_{kj} — значення норми прибутку валюти k-го виду $(k=1,\ 2)$ в умовах j-го стану валютного ринку $(j=1,\ldots,\ 6)$.

Необхідно визначити структуру «валютного кошика», обчислити значення норми прибутку «валютного кошика» для кожного стану валютного ринку і проаналізувати отримані результати.

Вказівка. Врахувати, що активними стратегіями другого гравця є його друга та четверта чисті стратегії.

3. Укладаючи зовнішньоторговельний контракт, обидві сторони дійшли згоди, що оплата здійснюватиметься частинами: аванс — у момент укладання контракту, оплата залишку — відразу ж після завершення усіх поставок. Крім того, розрахунки здійснюються в національний валюті експортера, але вартість товару поставки кожного разу оцінюється в доларах США.

Визначити (у відсотках) мінімально можливий, з погляду експортера, розмір авансової виплати, якщо на момент виконання контракту в повному обсязі може відбуватись одна з двох змін курсу національної валюти експортера щодо долара США: знизиться на 15% або підніметься на 5%.

Дати інтерпретацію оптимальним стратегіям гравців у грі двох осіб, яка задана платіжною матрицею:

а) $\boldsymbol{F}^{+} = (f_{kj}^{+} :\ k=1,\ 2;\ \ j=1,\ 2) = \begin{pmatrix} 115 & 95 \\ 100 & 100 \end{pmatrix}$;

б) $H^{+} = Z^{T}$, де $Z = Z^{-}$ — матриця ризику (невикористаних можливостей).

Пояснити сутність чистих стратегій гравців, елементів $f_{kj}(k=1,\ 2;\ j=1,\ 2)$ функціоналу оцінювання $\left(F = F^{+}\right)$.

7.9. ПОЗНАЧЕННЯ, ВИКОРИСТОВУВАНІ У РОЗДІЛІ 7

$\Theta = (\theta_1;...;\theta_n)$ — множина станів економічного середовища (чистих стратегій другого гравця);

$S = (s_1;...;s_m)$ — множина альтернативних рішень (чистих стратегій) СПР;

$R_k = (r_{k1};...;r_{kn})$ — норма прибутку валюти k-го виду (випадкова величина, яка приймає своє значення r_{kj} з імовірністю q_j, $k=1,...,m;\ j=1,...,n$);

$m_k = M(R_k)$ — сподівана норма прибутку валюти k-го виду ($k=1,...,m$);

$\sigma_k^2 = D(R_k)$ — ступінь ризику (дисперсія норми прибутку) валюти k-го виду ($k = 1,...,m$);

$Q = (q_1;...;q_n)$ — апріорний розподіл імовірності станів економічного середовища;

$P = (p_1;...;p_m)$ — розподіл імовірності щодо використання СПР (першим гравцем) своїх чистих стратегій;

$X = (x_1;...;x_N)$ — структура «валютного кошика»;

x_k — частка капіталу, інвестованого у валюту k-го виду ($k = 1,...,m$);

$R_{\Pi} = \sum_{k=1}^{m} x_k R_k$ — норма прибутку «валютного кошика», складеного з m видів валют;

$R = (r_{kj} : k = 1,...,m;\ j = 1,...,n)$ — матриця норм прибутку валют, що складають «валютний кошик» (функціонал оцінювання);

$\sigma_{kj} = \mathrm{cov}(R_k; R_j) = \sigma_k \sigma_j \rho_{kj}$ — коваріація норм прибутків валют k-го та j-го видів ($k = 1,...,m$; $j = 1,...,m$);

$C = (\sigma_{kj} : k = 1,...,m;\ j = 1,...,m)$ — коваріаційна матриця між нормами прибутку валют, що складають «валютний кошик» (функціонал оцінювання);

α^+, β^- — відповідно нижня, верхня ціна гри;

V, V^* — ціна гри;

s_{P^*}, θ_{Q^*} — оптимальні змішані стратегії відповідно першого, другого гравців;

P^*, Q^* — розподіл імовірності, що визначає оптимальну змішану стратегію відповідно першого, другого гравця;

R_{P^*} — норма прибутку «валютного кошика» (випадкова величина), що визначається вектором (розподілом) P^*;

$F = (f_{kj} : k = 1,...,m;\ j = 1,...,n)$ — функціонал оцінювання;

$Z = (z_{kj} : k = 1,...,m;\ j = 1,...,n)$ — матриця невикористаних можливостей;

$H = Z^T$ — матриця платежів.

РОЗДІЛ 8

УРАХУВАННЯ РИЗИКУ В УПРАВЛІННІ НА БАЗІ ВИКОРИСТАННЯ КОНЦЕПЦІЇ ТЕОРІЇ ГРИ

Скорочення, використовувані у розділі:
ЕОМ — електронно-обчислювальна машина;
НДР — наукові дослідження і розробки;
УО — умовна одиниця;
УГО — умовна грошова одиниця;
АС — активна система;
АЕ — активний елемент.

8.1. ВИБІР УПРАВЛІНСЬКИХ РІШЕНЬ В ЕКОНОМІЦІ ТА ПІДПРИЄМНИЦТВІ

Чому на одних ринках підприємства (фірми) прагнуть дійти згоди, тоді як на інших вони агресивно конкурують? Що роблять підприємства (фірми) для того, щоб запобігти вторгненню в їх сферу діяльності (інтересів) потенційних конкурентів? Як треба приймати виважені, раціональні рішення стосовно цін тощо у випадку, коли змінюються умови стосовно попиту, витрат або коли нові конкуренти прагнуть будь-що вийти на новий для них ринок? По суті, можна поставити й таке запитання: якщо ми впевнені, що наші конкуренти діють раціонально і прагнуть максимізувати свої прибутки, то як в умовах невизначеності, конфлікту та зумовленого ними ризику враховувати їх поводження, приймаючи свої власні рішення щодо максимізації прибутку?

Ця проблема може виявитися непростою, навіть приймаючи гіпотезу щодо симетричної інформації (тобто коли ми і наші конкуренти можемо характеризуватися приблизно однаковою структурою інформованості, витрат тощо).

За цих і подібних ситуацій, про що йшлося в попередньому матеріалі, доречним є використання концепції та інструментарію теорії гри.

Гру можна описати, зокрема, таким чином. Два підприємства, котрі випускають однорідну продукцію, стоять перед дилемою.

В одному випадку вони можуть закріпитися на ринку завдяки встановленню високої ціни, котра забезпечує їм середній картельний прибуток $П_k$. Вступаючи ж у жорстоку конкурентну боротьбу, обидва підприємства одержують деякий прибуток $П_w < П_k$. Якщо один з цих конкурентів установлює високу ціну, а другий — низьку, то останній реалізує монопольний прибуток $П_M$, а перший несе збитки $П_G$. Подібна до цієї ситуація може виникнути, наприклад, коли обидві фірми повинні публічно оголосити свої ціни, котрі протягом певного часу не можуть переглядатися.

За відсутності жорстких умов (антидемпінгового законодавства) цим двом підприємствам вигідно призначати низькі ціни. Стратегія «низьких цін» є домінуючою для будь-якої фірми: незалежно від того, яку ціну обере конкуруюча фірма, самому завжди вигідніше встановлювати низьку ціну. Але у такому випадку перед фірмами виникає дилема, оскільки прибуток $П_k$ (котрий для обох гравців є вищим, ніж прибуток $П_w$) не досягається ($П_k > П_w$), тобто виникає ризик невикористаних можливостей.

Стратегічна комбінація «низькі ціни / низькі ціни» з відповідними платежами являє собою рівновагу за Нешем, за якої жодному з гравців невигідно сепаратно відходити від обраної стратегії. Концепція рівноваги є принциповою у розв'язанні стратегічних ситуацій, але за певних обставин вона вимагає деякого вдосконалення.

Як приклади тут можна навести прийняття рішення з приводу проведення цінової політики щодо виходу на нові ринки чи кооперацію та створення спільних підприємств, визначення лідерів і виконавців в області інновацій, вертикальної інтеграції тощо.

Положення концепції теорії гри можна, в принципі, використовувати для більшості випадків і видів прийняття рішень, якщо на них впливають інші «діючі особи» (їх рішення). Цими діючими особами, чи гравцями, необов'язково можуть бути лише ринкові конкуренти; в їх ролі можуть виступати субпостачальники, провідні клієнти, контрагенти (організації фірми), а також співробітники даного підприємства (фірми).

Інструментарій теорії гри доцільно використовувати, коли поміж учасниками процесу існують суттєві (важливі) залежності в області платежів. Ситуацію з можливими конкурентами наведено на рис. 8.1. Тут цифрами позначено відповідні поля (квадранти) таблиці.

Можливий вплив реакції конкурентів на власні сплати	Вплив власних ходів на сплати конкурентів	
	низький	високий
Низький	1	2
Високий	3	4

Рис. 8.1. Область стратегічних рішень
для використання теорії гри

Квадранти 1 і 2 характеризують ситуації, коли реакція конкурентів не суттєво впливає на сплати фірми. Це відбувається у тих випадках, коли у конкурента відсутня мотивація (квадрант 1) чи можливості (квадрант 2) завдати «удару у відповідь». Тому такий гравець не має потреби у детальному аналізі стратегії щодо вмотивованих дій конкурентів.

Аналогічний висновок випливає, хоча й з інших причин, і для ситуації, відображеної квадрантом 3. Тут реакція конкурентів могла б суттєво вплинути на фірму (її стратегію), але оскільки її власні дії не здатні суттєво вплинути на сплати (прибутки) конкурента, то і не варто остерігатися його реакції. Як приклад можна навести рішення щодо входження у певну ринкову нішу: за певних обставин у великих фірм (підприємств) немає підстав активно реагувати на стратегію невеликої фірми. Отже, лише ситуація у заштрихованому квадранті 4 (можливість адекватних кроків у відповідь на дії ринкових конкурентів) вимагає використання концепції та інструментарію теорії гри, а при цьому виникає ризик, зокрема ризик невикористаних можливостей.

Зазначимо, що тут відображені лише необхідні, але не такі, що є достатніми, умови для того, щоб використати теорію гри для прийняття рішень в умовах конкуренції та зумовленого нею ризику. Бувають ситуації, коли одна стратегія домінує над рештою незалежно від того, які дії вживатиме у відповідь конкурент. Якщо взяти, наприклад, ринок лікувальних препаратів, то для фірми важливим є першою заявити свій новий товар на ринку: прибуток «першопрохідця» виявиться настільки значним, що решті «гравців» залишиться лише якомога швидше активізувати інноваційну діяльність. Вони обмежені ризиком невикористаних можливостей. Наведемо кілька прикладів.

Приклад 8.1. Проникнення на новий ринок (приклад «домінуючої стратегії»).

Візьмемо підприємство, котре виступає як монополіст на певному ринку (наприклад, IBM на ринку персональних комп'ютерів на початку 80-х років). Інше підприємство, що функціонує, наприклад, на ринку периферійного обладнання для ЕОМ, обдумує проблему щодо проникнення на ринок персональних комп'ютерів, здійснюючи для цього переналагоджування свого виробництва. Компанія-аутсайдер може прийняти альтернативні рішення (про входження чи невходження на ринок). Компанія-монополіст має альтернативні стратегії щодо реагування на появу нового конкурента (агресивно чи дружньо).

Обидва підприємства вступають у двоетапну гру, в якій перший хід робить компанія-аутсайдер. Ігрову ситуацію із зазначенням платежів (в умовних грошових одиницях — УГО) зображено на рис. 8.2 у вигляді дерева, де верхні цифри стосуються компанії-аутсайдера (нова компанія), а нижні — компанії-монополіста (теперішньої).

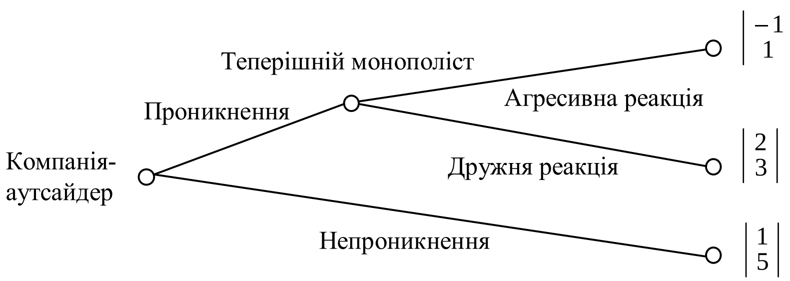


Рис. 8.2. Дерево рішень щодо проникнення на ринок

Зазначимо, що подання гри можна реалізувати з допомогою розгорнутої форми, заданої у вигляді дерева (рис. 8.2) або нормальної чи матричної форми (рис. 8.3).

Теперішній монополіст / Нова компанія	Дружня реакція	Агресивна реакція
Проникнення	2 \ 3	− 1 \ 1
Непроникнення	1 \ 5	1 \ 5

Рис. 8.3. Нормальна форма подання гри, предметом якої є проникнення на ринок

Можна виділити, зокрема, два стани — «проникнення / дружня реакція» і «непроникнення / агресивна реакція». Очевидно, що друга рівновага не має сенсу. З розгорнутої форми (рис. 8.2) випливає, що для компанії, яка вже закріпилася на ринку, є недоцільним реагувати агресивно на появу нового конкурента: за агресивного поводження теперішній монополіст отримає +1 УГО (платіж), а за дружнього — +3 УГО, тобто уникає ризику. Компанія-аутсайдер, до того ж, знає, що для монополіста не раціонально починати дії з витискування її, і тому приймає рішення щодо проникнення на ринок.

Отже, виходячи з викладеного, загроза збитків (ризику) в обсязі –1 УГО відсутня, тобто компанія-аутсайдер збитків не понесе, тим самим уникне ризику невикористаних можливостей (отримати нуль УГО).

Аналогічна раціональна рівновага є характерною для «частково вдосконаленої» гри, котра заздалегідь виключає абсурдні ходи. Рівноважні конфігурації можна відшукати за допомогою спеціального алгоритму з арсеналу теорії дослідження операцій для будь-якої скінченної гри. Гравець, приймаючи рішення, діє таким чином: спочатку робить вибір «кращого» ходу на останньому етапі гри, потім обирає «кращий» хід на передостанньому етапі, враховуючи вибір на останньому етапі, і так далі до тих пір, поки досягне початкового вузла дерева гри. Така стратегія дає змогу мінімізувати ступінь ризику.

Яку користь можуть отримати компанії з аналізу своєї стратегії та стратегії конкурентів (контрагентів) на базі теорії гри? Відомий випадок зіткнення інтересів компаній IBM і Telex. У зв’язку з оголошенням про підготовчі плани останньої щодо проникнення на новий ринок керівництво IBM провело «кризову» нараду, на якій аналізувалися заходи, спрямовані на змушення нового конкурента відмовитися від його наміру. Компанії Telex, можливо, стало відомо про цю нараду. Аналіз на базі теорії гри показав, що погрози IBM через високі для неї витрати (високий ступінь ризику) безпідставні.

Це свідчить, зокрема, про те, що компаніям корисно в експліцитному вигляді обдумувати можливі стратегії партнерів по грі. Ізольовані господарські розрахунки, навіть коли вони спираються на теорію прийняття рішень, носять, як у наведеній вище ситуації, обмежений характер і не враховують міру ризику. Так, компанія-аутсайдер могла б обрати хід «непроникнення», якщо б попередній аналіз переконав її в тому, що проникнення її на ринок викличе агресивну реакцію монополіста. У цьому випадку формально, відповідно до критерію сподіваної вартості та з урахуванням міри ризику, раціональне обрання ходу «непроникнення» за значення ймовірності агресивної відповіді, що дорівнює 0,5. У цьому випадку був би високим ризик можливих очікуваних збитків.

Приклад 8.2. Суперництво компаній в області технологічного лідерства.

Вихідною є ситуація, коли підприємство 1 мало технологічну перевагу, але у даний час має дещо менші (недостатні) фінансові кошти для необхідних наукових досліджень і розробок (НДР), аніж його конкурент. Обидва підприємства повинні вирішити, чи спробувати за допомогою великих капіталовкладень домогтися домінуючого положення на світовому ринку у відповідній технологічній області. Якщо обидва конкуренти вкладуть у справу великі кошти, то перспективи на успіх у підприємства 1 будуть дещо кращими, хоч воно і понесе великі фінансові витрати (як і підприємство 2). На рис. 8.4 цю ситуацію наведено сплатами з відповідними значеннями їх обсягів (в УГО).

Підприємство 2 / Підприємство 1	Ухилення від участі в технологічній конкуренції	Великі витрати на НДР
Невеликі витрати на НДР	3 / 0	0 / 3
Великі витрати на НДР	1 / 0	– 1 / – 2

Рис. 8.4. Вихідна ситуація технологічної конкуренції

Для підприємства 1 найкраще було б, аби підприємство 2 відмовилося від конкуренції. Його вигода у цьому випадку була б 3 УГО. Але в такому разі, з великою ймовірністю, підприємство 2 виграло б у цьому суперництві, коли б воно прийняло більш широку програму інвестицій, а підприємство 1 — урізану програму. Цей стан відображено у правому верхньому квадранті матриці. Тобто тут виникає як ризик нераціональних збитків, так і ризик невикористаних можливостей.

Аналіз ситуації показує, що рівновага настає за високих витрат на НДР підприємства 2 та невеликих витрат підприємства 1. За будь-якого іншого перебігу подій в одного з конкурентів з’являється резон відхилитися від стратегічної комбінації: для підприємства 1 привабливішим є скорочений бюджет (уникнення ризику), якщо підприємство 2 відмовиться від участі у суперництві;

у той же час, підприємству 2 відомо, що за низьких витрат конкурента йому вигідно інвестувати у НДР, знижуючи тим самим ступінь ризику невикористаних можливостей.

Підприємство, що має технологічну перевагу, може вдатися до аналізу ситуації на базі теорії гри, щоб визначитися з тим, як домогтися для себе оптимального результату. За допомогою певного сигналу воно повинно показати, що здатне піти на ризик, здійснити великі витрати на НДР. Якщо такий сигнал не подано, то для керівництва підприємства 2 більш-менш ясно, що підприємство 1 обирає варіант низьких витрат і це підприємство намагатиметься уникнути ризику невикористаних можливостей.

Про достовірність сигналу свідчитимуть, зокрема, купівля підприємством 1 нових лабораторій, найняття на роботу додаткового науково-технічного персоналу тощо.

З позицій теорії гри подібні заходи рівнозначні зміні ходу гри: ситуація одночасного прийняття рішень, у даному випадку, заміняється ситуацією послідовних ходів. Підприємство 1 однозначно демонструє намір (ризикує) піти на великі витрати, підприємство 2 фіксує цей крок і в нього немає більше резону брати участь у суперництві, обтяжуючи себе ризиком можливих збитків.

Нова рівновага випливає з рішення підприємства 2 ухилитися від участі в технологічній конкуренції (ухилитися від ризику) в разі здійснення підприємством 1 великих витрат на НДР (воно обтяжує себе ризиком можливих збитків).

8.2. ІЄРАРХІЧНІ ІГРИ У ПРОБЛЕМАХ УПРАВЛІННЯ ОРГАНІЗАЦІЙНИМИ СИСТЕМАМИ. РОЗПОДІЛ РЕСУРСІВ

8.2.1. Постановка задачі розподілу ресурсів

Організаційна система — це така система, яка включає техніку, колективи людей, інтереси яких суттєво пов’язані з її функціонуванням. Прикладами можуть бути родина, фірма, вищий навчальний заклад, місто, країна. Кожна оргсистема складається з елементів (котрі, у свою чергу, можуть бути системами).

Для наших досліджень суттєвими є такі аспекти. З одного боку, система існує для досягнення певних цілей (виконує свою місію), тобто можна говорити про інтереси системи у цілому. З іншого боку, елементи системи не рідко мають свої інтереси, котрі, у загальному випадку, не збігаються з інтересами системи у цілому. Тобто можна говорити про конфліктність і зумовлений цим ризик.

Усе це дає підстави для формалізації певних аспектів функціонування оргсистем у термінах теорії гри.

Зупинимося на простій дворівневій (модельній) оргсистемі, що складається з «Центру» і множини однотипових «елементів». Управління такою системою розглядатимемо на прикладі задачі розподілу ресурсів. Зміст цієї задачі полягає у такому. Елементи (далі — Споживачі) пропонують Центру замовлення на отримання певного ресурсу (для спрощення розглядатимемо лише один вид ресурсу). Центр на підставі цих замовлень розподіляє наявний обсяг ресурсу (який вважається абсолютно подільним). Якщо усі замовлення можуть бути повністю виконаними, то Центру, очевидно, потрібно виділити кожному Споживачеві стільки ресурсу, скільки він його замовляє.

Істотно складнішою є ситуація дефіциту, коли сумарний обсяг замовлень перевищує наявний у Центру обсяг ресурсу. В цьому випадку задача розподілу ресурсу стає нетривіальною, виникає ризик неправильного розподілу, недоотримання ресурсу. Цей ризик можна трактувати і з позиції Центру, і з позиції Споживачів. Універсальних рекомендацій тут не існує. Є певні підходи і механізми розподілу ресурсу [113], кожен з яких має певні переваги і недоліки.

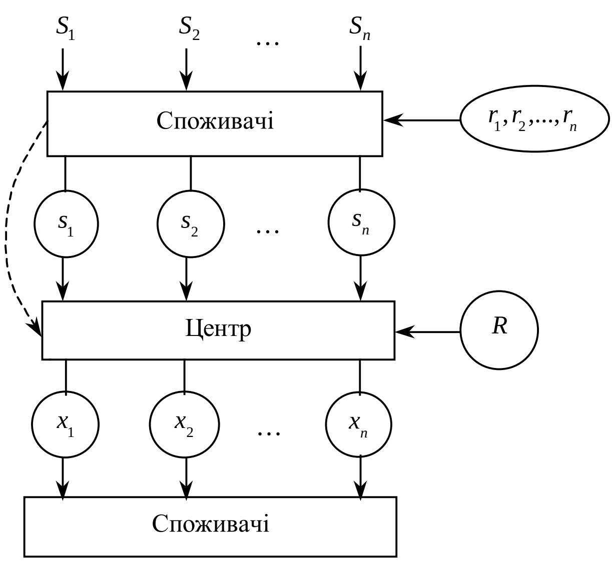


Рис. 8.5. Схема задачі розподілу ресурсу

Здійснимо формалізацію описаної вище задачі. Система складається з Центру та n Споживачів, кожен з яких вибирає зі своєї множини альтернативних замовлень (стратегій) S_i число (стратегію) s_i і повідомляє це замовлення (число $s_i \in S_i$, $i = 1,..., n$) Центру, а також, можливо, ще деяку інформацію (рис. 8.5).

Центр на підставі замовлень Споживачів, наявного обсягу ресурсу R^* та додаткової інформації щодо Споживачів обчислює відповідно з деяким правилом числа x_i $(i = 1,..., n)$ обсяги ресурсу, що виділяються споживачам.

У випадку, коли $\sum_{i=1}^{n} s_i \le R$ (відсутність дефіциту), очевидно, що Центр прийме таке рішення: $x_i = s_i$ $(i = 1,..., n)$ — кожен Споживач отримує стільки, скільки просить. У подальшому вважатимемо, що *існує дефіцит*, тобто виконується нерівність:

$$\sum_{i=1}^{n} s_i > R.$$

Наголосимо на такій особливості: i-й Споживач формує своє замовлення, виходячи з *власної реальної потреби* r_i ($i = 1,..., n$), яка відома йому, може бути його стратегією, але невідома Центру. Числа s_i є *стратегіями Споживачів* як учасників ієрархічної гри. У свою чергу, *стратегією Центру* є вектор $X = (x_1;...; x_n)$.

8.2.2. Механізм прямих пріоритетів

Поряд з обсягами замовлень s_i $(i = 1,..., n)$ Центр ураховує також «важливість» кожного Споживача (виходячи зі своїх уявлень щодо ефективності та міри ризику), яка визначається вектором вагових коефіцієнтів пріоритету $U = (u_1;...; u_n)$ з додатними безрозмірними компонентами.

Зазначимо, що на відміну від попереднього (розділи 4, 5) вагові коефіцієнти пріоритету u_i задовольняють умову нормування

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = n; \quad u_i > 0, \quad i = 1,..., n.$$

[*] Через специфіку ігрових моделей, які розглядаються у розділі 8, автори змушені відмовитися від системи позначень, використовуваних у попередніх розділах.

В якості одного із показників векторної оцінки міри ризику, котрим обтяжений Центр, приймемо обсяг можливих перевитрат $g_1^{\text{Ц}}$ наявного ресурсу, а саме:

$$w_1^{\text{Ц}} = g_1^{\text{Ц}} = \alpha\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - R\right), \qquad (8.1)$$

де

$$\alpha = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \sum_{i=1}^{n} x_i > R, \\ 0, \text{ якщо } \sum_{i=1}^{n} x_i \le R. \end{cases}$$

Відповідно до викладеного вище розподіл ресурсу здійснюватиметься згідно з таким правилом:

$$x_i = \min\{s_i;\ \gamma u_i s_i\}, \quad i = 1,...,n, \qquad (8.2)$$

де γ — спільний для усіх Споживачів параметр (нормуючий множник), який визначається з умови

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = R \qquad (8.3)$$

(весь обсяг ресурсу розподіляється повністю).

Надзвичайно простого вигляду формула (8.2) набуває у випадку «рівності» Споживачів з погляду Центру, тобто коли Центр є байдужим до ризику, котрим обтяжені Споживачі (не враховує їх пріоритетність):

$$u_1 = u_2 = ... = u_n = 1.$$

Ця умова не обмежує узагальнень, але спрощує подальший виклад.

Отже, матимемо:

$$x_i = \min\{s_i,\ \gamma s_i\} = \gamma s_i, \quad i = 1,...,n \qquad (8.4)$$

(випадок $x_i = s_i$ є неможливим, оскільки це суперечить гіпотезі щодо наявності дефіциту). З умови (8.3) одержуємо, що

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma s_i = R,$$

тобто величина нормуючого множника визначається за формулою:

$$\gamma = \frac{R}{\sum_{i=1}^{n} s_i}. \qquad (8.5)$$

Описаний механізм розподілу ресурсів, напевне, найпростіший. Його сутність полягає у тому, що всі замовлення пропорційно «урізуються» шляхом множення на нормуючий множник $\gamma < 1$.

Приклад 8.3. Нехай п'ятеро Споживачів подали замовлення в обсязі 5, 8, 12, 7 та 8 умовних одиниць (УО) ресурсу. Наявний у Центру обсяг ресурсу становить 32 УО. Як повинен Центр розподілити цей ресурс відповідно до механізму прямих пріоритетів?

Розв'язання. Маємо:

$$s_1 = 5; \quad s_2 = 8; \quad s_3 = 12; \quad s_4 = 7\,; \quad s_5 = 8; \quad R = 32.$$

Оскільки

$$\sum_{i=1}^{5} s_i = 5 + 8 + 12 + 7 + 8 + = 40 > 32 = R,$$

то маємо випадок дефіциту.

Визначаємо нормуючий множник γ за допомогою формули (8.5):

$$\gamma = \frac{32}{40} = 0{,}8.$$

У результаті, використовуючи формулу (8.4), одержуємо:

$$x_1 = 4; \quad x_2 = 6{,}4; \quad x_3 = 9{,}6; \quad x_4 = 5{,}6; \quad x_5 = 6{,}4.$$

Переваги механізму прямих пріоритетів є очевидними. Зазначимо деякі його недоліки. По-перше, кожен Споживач отримує менше, ніж замовляє. Але не важко уявити ситуацію, коли Споживачу необхідно на реалізацію певного проекту рівно s_i одиниць обсягу ресурсу, а γs_i його вже зовсім не задовольняє, тобто виникає ризик. По-друге, даний механізм підштовхує споживачів до маніпулювання, до завищення замовлень в умовах дефіциту, щоб перекласти свій ризик на решту Споживачів і на Центр. Дійсно, чим більший обсяг дефіцитного ресурсу Споживач запитує, тим більше отримує, отже, завищуючи свої потреби, він може спробувати наблизити рішення Центру x_i до своїх реальних потреб r_i. Згідно з цією гіпотезою дефіцит ще в більшій мірі зростає, а Центр навіть не має можливості дізнатися про реальні потреби Споживачів r_i, оскільки вони повідомлють йому замовлення $s_i > r_i$.

8.2.3. Механізм зворотних пріоритетів

Механізм зворотних пріоритетів спирається на активну політику Центру, який виходить з того, що чим менший обсяг ресурсу необхідно Споживачу, тим більша ефективність його використання. Нагадаємо, що ризик і Центру, і Споживача — це об'єктивно-суб'єктивна економічна категорія у діяльності суб'єктів господарювання. Кількісною мірою ризику, як це зазначалось у пункті 2.3.1, є вектор $W=(w_1;\ w_2;...)$, одні компоненти якого виражають ризик як об'єктивну категорію, інші — як суб'єктивну, враховуючи ставлення суб'єкта до ризику, систему його цінностей, пріоритетів, прийнятих гіпотез.

У нашому випадку за міру ризику Центру, окрім показника $w_1^{Ц}=g_1^{Ц}$, який визначається формулою (8.1), введемо ще одну компоненту міри ризику $\left(w_2^{Ц}\right)$, яку, на наш погляд, доречно подати за формулою

$$w_2^{Ц}=g_2^{Ц}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(s_i-x_i), \tag{8.6}$$

де

$$\alpha_i=\begin{cases}1, & \text{якщо}\ \ s_i>x_i,\\ 0, & \text{якщо}\ \ s_i\le x_i,\end{cases}\qquad i=1,...,n. \tag{8.7}$$

У ряді випадків доречними будуть інші показники ризику.

Сутність механізму зворотних пріоритетів відображає формула

$$x_i=\min\left\{s_i;\ \gamma\frac{d_i}{s_i}\right\},\quad i=1,...,n, \tag{8.8}$$

яка, власне, і є правилом, згідно з яким Центром здійснюється розподіл ресурсів.

У формулі (8.8) коефіцієнт γ визначається, як і в механізмі прямих пріоритетів, з умови

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=R.$$

Величина d_i є для Центру числовим еквівалентом пріоритету i-го Споживача (C_i). Тобто з позиції Центру для Споживачів має місце ряд пріоритету

$$RI^C=\left(C_{i_1};C_{i_2};...;C_{i_n}\right)$$

і при цьому

$$d_{i_1}>d_{i_2}>...>d_{i_n}.$$

Очевидно, що у даному випадку розмірність величин d_i $(i = 1,...,n)$ виражається в $(\text{УО})^2$.

З формули (8.8) видно, що Споживач, подаючи дуже мале або дуже велике замовлення s_i, отримує малий обсяг ресурсу x_i (в умовах дефіциту така стратегія Центру є цілком зрозумілою).

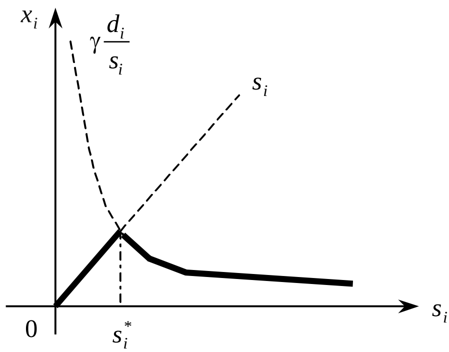


Рис. 8.6. Графік функції виділених ресурсів залежно від замовлення

На рис. 8.6 суцільною (жирною) лінією зображено графік функції $x_i = f(s_i)$. Бачимо, що максимум досягається в точці s_i^*, що є розв'язком рівняння

$$s_i^* = \gamma \frac{d_i}{s_i^*}.$$

Перетворюючи це рівняння, одержуємо:

$$s_i^* = \sqrt{\gamma d_i}, \quad i = 1,...,n. \tag{8.9}$$

За одну з компонент міри ризику i-го Споживача $\left(w_{i1}^C\right)$ можна обрати

$$w_{i1}^C = g_{i1}^C = \alpha\left(r_i - s_i^*\right), \tag{8.10}$$

де

$$\alpha = \begin{cases} 1, & \text{якщо } r_i > s_i^*, \\ 0, & \text{якщо } r_i \le s_i^*, \end{cases} \quad i = 1,...,n.$$

Якщо Центр вибирає стратегію $X^* = \left(s_1^*;...;s_n^*\right)$, то одержуємо, що

$$R = \sum_{i=1}^{n} s_i^* = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\gamma d_i} = \sqrt{\gamma} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{d_i},$$

тобто

$$\sqrt{\gamma} = \frac{R}{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{d_i}}. \qquad (8.11)$$

Зауважимо, що *набір стратегій* s_i^* $i = 1,...,n$ *є рівноважним*, тобто подаючи будь-яке замовлення $s_i \neq s_i^*$, i-й Споживач лише зменшує обсяг ресурсу x_i, який виділяє йому Центр. Можна довести, що кожна зі стратегій s_i^* є також гарантованим результатом, тобто у разі застосування i-м Споживачем цієї стратегії він у будь-якому випадку (тобто за будь-яких обсягів замовлень решти Споживачів) отримує обсяг ресурсу не менший як $x_i = s_i^*$.

Приклад 8.4. Нехай є п'ятеро Споживачів, пріоритети котрих визначаються числами 8, 6, 12, 15, 11. Ресурс Центру має обсяг 60 УО. Визначити обсяги рівноважних стратегій (замовлень) Споживачів, якщо обсяги ресурсу визначаються відповідно до механізму зворотних пріоритетів.

Розв'язання. Отже, маємо, що:

$$d_1 = 8; \quad d_2 = 6; \quad d_3 = 12; \quad d_4 = 15; \quad d_5 = 11; \quad R = 60.$$

Згідно з (8.11)

$$\sqrt{\gamma} = \frac{60}{\sqrt{8} + \sqrt{6} + \sqrt{12} + \sqrt{15} + \sqrt{11}} \approx 3{,}77.$$

З урахуванням (8.9) отримуємо:

$$s_1^* = 3{,}77 \times \sqrt{8} \approx 10{,}7; \quad s_2^* = 3{,}77 \times \sqrt{6} \approx 9{,}2; \quad s_3^* = 3{,}77 \times \sqrt{12} \approx 13{,}1;$$

$$s_4^* = 3{,}77 \times \sqrt{15} \approx 14{,}6; \quad s_5^* = 3{,}77 \times \sqrt{11} \approx 12{,}5.$$

Отже, розподіл ресурсу здійсниться у таких обсягах:

$$x_1 = s_1^* = 10{,}7; \quad x_2 = s_2^* = 9{,}2; \quad x_3 = s_3^* = 13{,}1;$$

$$x_4 = s_4^* = 14{,}6; \quad x_5 = s_5^* = 12{,}5.$$

Цей приклад набуде реальнішого сенсу, якщо в умову задачі будуть введені замовлення Споживачів $(s_i,\ i = 1, \ldots, n)$.

8.2.4. Механізм відкритого управління

Можливість ефективного управління на базі недостовірної інформації обтяжена суттєвим ризиком. Тому являють собою інтерес різноманітні механізми відкритого управління, ідея котрих полягає у створенні для Споживачів стимулів до надання у замовленні своїх реальних потреб.

При цьому ризик Центру вимірюється за допомогою формули (8.1), а величина ризику i-го Споживача дорівнює

$$w_{i2} = g_{i2}^{C} = \alpha(r_i - x_i), \quad i = 1,...,n, \tag{8.12}$$

де

$$\alpha = \begin{cases} 1, & \text{якщо } r_i > x_i\,; \\ 0, & \text{якщо } r_i \le x_i\,, \end{cases}$$

де: r_i — реальні потреби i-го Споживача; x_i — виділений Центром обсяг ресурсу i-му Споживачеві.

Опишемо один із можливих механізмів відкритого управління [113]. Розподіл обсягів ресурсів пропонується проводити в кілька етапів. На першому етапі обсяг ресурсу розподіляється порівну між усіма Споживачами, тобто по R/n кожному. Якщо замовлення деяких Споживачів виявилися не більшими за R/n, то вони (ці і лише ці замовлення) повністю задовольняються. Отже, кількість Споживачів зменшується до n_1 $(n_1 < n)$, зменшується й обсяг ресурсу Центру — до R_1 $(R_1 < R)$. На другому етапі ресурс розподіляється порівну між тими Споживачами, котрі залишилися (нехай їх залишилося n_1), і так далі. Останнім є той етап, коли виявиться, що, розподіливши ресурс порівну між Споживачами, які залишилися, не вдається задовольнити жодного замовлення. У цьому випадку всі Споживачі, які залишилися, отримують порівну з того обсягу ресурсу, що залишився у розпорядженні Центру.

Приклад 8.5. Вісім Споживачів надали Центру замовлення на певний ресурс, обсяги їх становлять відповідно 12, 3, 6, 1, 5, 7, 10, 2 УО. Центр має у своєму розпорядженні ресурс в обсязі $R = 40$.

Необхідно розподілити наявний обсяг ресурсу відповідно до описаного вище механізму.

Розв'язання. На першому етапі отримуємо:

$$\frac{R}{n} = \frac{40}{8} = 5; \quad s_1 = 12 > 5; \quad s_2 = 3 < 5; \quad s_3 = 6 > 5; \quad s_4 = 1 < 5; \quad s_5 = 5 = 5;$$

$$s_6 = 7 > 5; \quad s_7 = 10 > 5; \quad s_8 = 2 < 5; \quad R = 40.$$

Бачимо, що Центр може задовольнити замовлення другого, четвертого, п’ятого та восьмого Споживачів. Отже, маємо:

$$x_2 = 3; \quad x_4 = 1; \quad x_5 = 5; \quad x_8 = 2.$$

Ресурс, що залишився в розпорядженні Центру нерозподіленим, становить:

$$R_1 = 40 - 3 - 1 - 5 - 2 = 29.$$

Кількість Споживачів, котрим ще не виділено ресурс, становить $n_1 = 4$.

На другому етапі маємо, що $\frac{R_1}{n_1} = 7\frac{1}{4}$. Відповідно до механізму розподілу здійснюємо порівняння:

$$s_1 = 12 > 7\frac{1}{4}; \;\; s_3 = 6 < 7\frac{1}{4}; \;\; s_6 = 7 < 7\frac{1}{4}; \;\; s_7 = 10 > 7\frac{1}{4}; \;\; R = 29.$$

Бачимо, що на цьому етапі можна задовольнити замовлення третього та шостого Споживачів, тобто:

$$x_3 = 6; \quad x_6 = 7.$$

Відповідно отримуємо, що

$$R_2 = 29 - 6 - 7 = 16; \quad n_2 = 2.$$

На третьому етапі маємо: $\frac{R_2}{n_2} = \frac{16}{2} = 8.$ Бачимо, що

$$s_1 = 12 > 8; \quad s_7 = 10 > 8; \quad R_2 = 16.$$

Отже, обидва замовлення, що залишилися, перевищують 8 одиниць, а тому перший і сьомий Споживачі отримують по 8 одиниць ресурсу:

$$x_1 = 8; \quad x_7 = 8.$$

Не важко помітити, що оцінки ризику усіх споживачів, окрім першого і сьомого, будуть нульовими (у даному контексті). Оцінки ризику першого та сьомого споживачів відповідно становлять:

$$g_{11}^{\mathrm{C}} = 12 - 8 = 4; \quad g_{71}^{\mathrm{C}} = 10 - 8 = 2.$$

Описаний механізм є одним із механізмів відкритого управління. Дійсно, в остаточному підсумку всі Споживачі поділяються на пріоритетних (які отримують повний обсяг замовлення) і непріоритетних (до останніх у наведеному вище прикладі можна віднести першого та сьомого споживачів). Пріоритетні споживачі не обтяжені ризиком в тому сенсі, що вони отримали ресурс у повному обсязі згідно із замовленням, тому їм немає сенсу деформувати свої реальні потреби. Непріоритетні, як бачимо, обтяжені ризиком і не в змозі збільшити обсяг ресурсу, котрий їм виділяє Центр, ні збільшуючи, ні зменшуючи своє замовлення.

Таким чином, завдяки розподілу дефіцитного ресурсу відповідно до описаного механізму, Центр отримує, взагалі кажучи, більш-менш достовірну інформацію щодо реальних потреб Споживачів.

8.3. УПРАВЛІННЯ АКТИВНИМИ СИСТЕМАМИ

8.3.1. Модель активної системи

Розглянемо загальну постановку *задачі управління* деякою (активною чи пасивною) системою. Нехай *стан системи* описується змінною $y \in A^C$, де A^C — допустима множина станів системи. Стан системи у поточний момент часу залежить від *керуючих впливів* $\eta \in \mathrm{H}$ і при цьому $y = G(\eta)$. Припустимо, що на множині $\mathrm{H} \times A^C$ * задано *функціонал* $\Phi(\eta; y)$, *що визначає ефективність функціонування* системи (з погляду керуючого органу). Величина $K(\eta) = \Phi(\eta;\ G(\eta))$ називається *ефективністю керування* (управління) $\eta \in \mathrm{H}$. Задача керуючого органу полягає у виборі такого допустимого управління, котре б максимізувало значення його ефективності за умови, що відома реакція $G(\eta)$ системи на керуючий вплив:

$$K(\eta) \to \max_{\eta \in \mathrm{H}}.$$

Розглянемо відмінності в управлінні пасивними та активними системами. Для пасивної (наприклад, технічної) системи залежність $y = G(\eta)$ є, фактично, моделлю системи — керованого об'єкта, що відображає закони її функціонування. Спільним для всіх *пасивних систем* є їх «детермінізм» з погляду управління в сенсі *відсутності у керованого об'єкта свободи вибору свого*

* Операція «×» називається прямим (або Декартовим) добутком множин, а множина $\mathrm{H} \times A^C$ складається з усіх можливих пар елементів $(\eta; y)$, де $\eta \in \mathrm{H}$, $y \in A^C$.

стану, власних цілей і засобів щодо їх досягнення, а також можливості прогнозувати поводження керуючого органу.

Дещо інша ситуація постає стосовно *активних систем* (АС), тобто систем, у котрих керовані суб'єкти (хоча б один суб'єкт) наділені властивістю активності, зокрема *свободою вибору свого стану*. Крім можливості вибору стану, елементи АС мають свої інтереси і переваги, тобто здійснюють вибір стану цілеспрямовано (у протилежному випадку їх поводження можна було б розглядати як пасивне). Відповідним чином конкретизується й модель системи $G(\cdot)$, котра має враховувати прояви активності керованих суб'єктів. Прояви ці можна описати (спрощено) таким чином. Уважається, що керовані суб'єкти прагнуть до вибору таких своїх станів (стратегій), котрі є найкращими з погляду їх переваг за заданих чи прогнозованих значень керуючих впливів, а керуючі впливи, у свою чергу, залежать від станів керованих суб'єктів. Якщо керуючий орган має модель реальної активної системи, котра адекватно описує її поводження, то задача управління зводиться до сформульованої вище — обрати оптимальне (допустиме) управління, що максимізує ефективність. Формально цю задачу можна представити у такому вигляді:

$$\eta^* \in \mathrm{H}^* = Arg \max_{\eta \in \mathrm{H}} K(\eta) = \{\eta \in \mathrm{H} : \quad K(\eta) \geq K(\nu) \ \forall \nu \in \mathrm{H}\}.^*$$

Модель АС задається такими складовими:

1. Склад АС — множина суб'єктів та об'єктів, що є елементами системи (у подальшому для їх позначення використовуватимемо термін «учасники АС»).

2. Структура АС — це склад та сукупність інформаційних, керуючих та інших зв'язків між учасниками АС, включаючи відношення підлеглості і розподілу прав щодо прийняття рішень. У більшості моделей теорії активних систем досліджуються дворівневі АС, що складаються з одного керуючого органу — Центру, на верхньому рівні ієрархії, та з одного чи з кількох підлеглих йому керованих суб'єктів — активних елементів (АЕ), на нижньому рівні.

3. Порядок функціонування — послідовність одержання інформації та обрання стратегій учасниками АС.

4. Кількість періодів функціонування відображає наявність чи відсутність динаміки (однократності чи багатократності вибору стратегій (станів) учасниками АС протягом розглядуваного періоду часу).

---

* Символ «∀» у математичних викладках є еквівалентом виразу «для будь-якого».

5. Переваги учасників системи, котрі разом із принципами раціонального поводження визначають залежність стану системи від керуючих впливів і критерію ефективності управління. Тут також необхідно враховувати такі системні характеристики, як ризик, маневреність тощо.

6. Допустимі множини станів (стратегій) учасників АС відображають індивідуальні та спільні для всіх учасників обмеження щодо вибору станів, котрі накладаються оточуючим середовищем, використовуваною технологією тощо.

7. Інформованість учасників — інформація, якою володіють учасники АС на момент прийняття рішень щодо вибору стратегій.

Склад АС, структура, цільові функції, допустимі множини, кількість періодів функціонування, порядок функціонування, врахування ризику та інформованість учасників визначають *механізм функціонування (управління) АС у широкому сенсі* — сукупність законів, правил і процедур взаємодії учасників системи. У *вузькому значенні механізм управління* являє собою сукупність правил прийняття рішень учасниками АС за умови заданих складу та структури її тощо.

Уміючи розв'язувати задачу синтезу механізму управління у вузькому значенні, можна розв'язувати задачу синтезу оптимального складу учасників АС, її структури тощо, тобто задачу синтезу механізму управління у широкому значенні.

Розглянемо *базову модель активної системи*, що складається з Центру та n активних елементів, які функціонують у гіпотетичних умовах вичерпної інформації щодо усіх суттєвих зовнішніх і внутрішніх щодо системи параметрів (детермінована АС). Ризик у цьому випадку зумовлюється лише незбігом інтересів АС. Структуру цієї АС наведено на рис. 8.7.

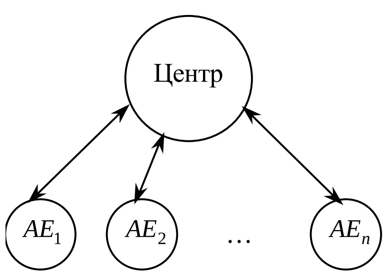


Рис. 8.7. Дворівнева активна система

Термін «базова» щодо описуваної моделі несе таке навантаження: модель, з одного боку, є найпростішою, оскільки в ній не враховується низка чинників (динаміка, невизначеність тощо, котрі доречно враховувати у розширеннях базової моделі), а з іншого боку, на її прикладі можна відслідкувати низку закономірностей управління АС з тим, аби використовувати їх в узагальненнях, для переходу до складніших (реальних та адекватних) моделей.

Для того, щоб конкретизувати постановку задачі управління в АС, необхідно описати переваги і моделі поводження її учасників — активних елементів і Центру.

8.3.2. Пріоритети учасників активної системи

Нехай i-й активний елемент (АЕ) спроможний обирати певні *дії* (стратегії, стани тощо) з деякої множини A_i^E — допустимої множини дій даного АЕ $(i = 1, \ldots, n)$.

Дію i-го АЕ позначатимемо через y_i, $y_i \in A_i^E \, (i = 1, \ldots, n)$. У результаті вибору дії $y_i \in A_i^E$, під впливом обставин (випадкових і невипадкових) реалізується результат діяльності АЕ, котрий позначатимемо через $z_i \in A_i^0$, де A_i^0 — множина можливих результатів діяльності i-го АЕ. Можлива незбіжність дії АЕ та результату його діяльності може бути зумовлена впливом обставин (зовнішнього середовища, діями інших учасників АС тощо).

Зв'язок між дією i-го АЕ $y_i \in A_i^E$ та результатом його діяльності $z_i \in A_i^0$ може мати складну природу й описуватися розподілами ймовірності, нечіткими інформаційними функціями (множинами) тощо, тобто це спричиняє виникнення ризику.

У теорії активних систем уводиться гіпотеза, що АЕ можуть мати свої пріоритети над множиною результатів. Пріоритет i-го АЕ щодо результату z_i позначимо через λ_i, а множину різних реалізацій пріоритету — через Λ_i. Пріоритети активних елементів пов'язані також із суб'єктивним їх ставленням до ризику.

Часто пріоритет i-го АЕ з множини Λ_i можна параметризувати за допомогою змінної r, що приймає значення з підмножини M дійсної осі, $M \subseteq E^1$ *. Тобто кожній з можливих реалізацій пріо-

* Через E^1 позначається одновимірний Евклідовий простір (множина точок, що належить числовій прямій).

ритетів АЕ $\lambda_i \in \Lambda_i$ ставиться у взаємоодн означну відповідність значення параметра $r_i \in M$. Такий параметр називають *типом* АЕ.

Під час вибору дії $y_i \in A_i^E$ АЕ керується своїм пріоритетом (ставленням до ризику) і тим, як обране ним рішення впливає на результат діяльності $z_i \in A_i^0$, тобто певним законом ν, що призводить до відповідного результату діяльності. Вибір дії АЕ визначається *правилом індивідуального раціонального вибору* $\Pi^{\nu}(\Lambda_i;\ A_i^E)$, котре визначає множину найбільш привабливих, з погляду *i*-го АЕ, дій $(i = 1, \ldots, n)$.

Для спрощення спочатку припустимо, що закон, який впливає на зміну результату діяльності, носить детермінований характер, тобто кожній дії $y_i \in A_i^E$ відповідає єдиний результат діяльності $z_i = \nu(y_i) \in A_i^0$ $\left(\nu : A_i^E \to A_i^0\right)^*$.

Пріоритети елементів можна задавати функціями корисності, цільовими функціями, бінарними і нечіткими відношеннями привабливості тощо. Історично першими зі способів представлення пріоритетів елементів були функції корисності та цільові функції. Нагадаємо, що *функція корисності i-го активного елемента* $u_i^E : A_i^0 \to E^1$ $\left(u_{ii}^E = u_i^E(z_i)\right)$ зіставляє кожний результат z_i діяльності АЕ з певною утилітарною вигідністю (цінністю) чи корисністю, обсяг якої виражається дійсним числом $(i = 1, \ldots, n)$. *Функція корисності Центру* $u^{\text{Ц}}$: $A_i^0 \times \text{Н} \to E^1$ також дає змогу порівнювати пріоритетність (корисність) альтернативних дій і керуючих впливів.

Цільові функції також задають пріоритети елементів, але на множині їхніх дій. Нехай задано функцію корисності *i*-го АЕ u_i^E та детермінований закон ν, що пов'язує дію цього АЕ $y_i \in A_i^E$ та результат його діяльності $z_i \in A_i^0$. Тоді результат діяльності однозначно визначається дією активного елемента: $z_i = \nu(y_i)$. Це дає можливість визначити *цільову функцію i*-го АЕ:

$$f_i(y) = u_i^E(\nu(y)), \quad \left(f_i : A_i^E \to E^1\right).$$

Така функція відображає «корисність» дії *i*-го АЕ (вибір якої цим і визначається), а не результату діяльності.

Відповідність індивідуального раціонального вибору дії, котра відповідає пріоритету, що задається цільовою функцією і відби-

---

* Тут і надалі з допомогою символу «$\to$» позначається оператор відображення однієї множини в іншу.

ває концепцію раціонального поводження i-го АЕ, визначається співвідношенням:

$$\Pi^{\nu}\left(f_i;\ A_i^E\right) = Arg \max_{y \in A_i^E} f_i(y).$$

Змістовно раціональним вважається вибір АЕ таких дій, котрі максимізують його цільову функцію і (у детермінованому випадку) приводять до результатів діяльності, що мають максимальну корисність.

Приклад 8.6. Розглянемо активний елемент, котрий виготовляє певну продукцію. Обсяг продукції вважатимемо за дію цього елемента і позначимо його (обсяг) через y. Множина можливих дій (обсягу) $A^E = [0; +\infty)$. Елемент реалізує продукцію по ціні $p \in E^1$ і витрачає на її виробництво $c_r(y) = \frac{1}{2r} y^2$, де r — параметр (тип) елемента, що характеризує його індивідуальні особливості, $r \in M = [1;\ 2]$. Результатом діяльності вважатимемо виручку за продану (реалізовану) продукцію z.

Цільову функцію елемента можна визначити, знаючи, що виручка від реалізації пов'язана з дією таким співвідношенням: $z = py$.

Отже, цільова функція АЕ (у даному випадку — прибуток) запишеться так:

$$f(y) = p\,y - c_r(y).$$

Обсяг виробництва, за якого отримуємо максимальне значення функції цілі, дорівнює

$$y^* = p\,r.$$

8.3.3. Моделі поводження у теоретико-ігровій постановці

Для опису поводження активних елементів, що входять у певну багатоелементну АС, недостатньо визначити їх пріоритети у відповідності щодо раціонального індивідуального вибору окремо для кожного АЕ, оскільки необхідно ще описати модель поводження кількох активних елементів системи, зважаючи на їх взаємодію. Власне тому виникає конфліктність і зумовлений цим ризик. Нехай у системі наявним є лише один активний елемент. Позначимо його цільову функцію через $f_1(y)$, $y \in A_1^E$. Згідно з гіпотезою щодо раціонального (індивідуального) поводження передбачається, що АЕ поводить себе таким чином, щоб обранням дії максимізувати значення своєї функції цілі, тобто

$$y_1^* \in Arg\max_{y \in A_1^E} f_1(y).$$

Якщо активних елементів декілька, то необхідно враховувати їх взаємовплив — у цьому випадку виникає ризик і гра.

Зрозуміло, що у випадку декількох гравців індивідуально раціональна стратегія залежить від стратегії інших гравців. Набір таких раціональних стратегій називають розв'язком гри (*рівновагою*).

Кожному з n гравців (активних елементів) поставимо у відповідність функцію виграшу $f_i(y)$, де: $y = (y_1;...;y_n)$ — вектор дій усіх гравців; $y \in A^C$; $A^C = A_1^E \times ... \times A_n^E$ — допустима множина станів активної системи.

Використовуючи сучасну термінологію теорії гри, називатимемо дії y_i — *стратегіями*, а вектор y — *ситуацією* гри. Множина стратегій $y_{-i} = (y_1;...;y_{i-1};\ y_{i+1};...;y_n)$ називається вектором *обставин* гри для i-го гравця. Очевидно, що $y = y_i \cup y_{-i} = (y_i;\ y_{-i})$.

Розглянемо деякі з поширених *концепцій рівноваги.*

а) **Максимінна рівновага**. Відповідно до принципу гарантованого результату гарантоване значення цільової функції i-го активного елемента, несхильного до ризику, у виборі ним стратегій y_i визначається таким чином:

$$f_i^\Gamma(y_i) = \min_{y_{-i} \in A_{-1}^C} f_i(y_i;\ y_{-i}),$$

де A_{-i}^C — множина обставин гри для i-го гравця. Вона визначається за формулою:

$$A_{-i}^C = A_1^E \times ... \times A_{i-1}^E \times A_{i+1}^E \times ... \times A_n^E.$$

Це означає, що активний елемент вважає, що в результаті гри реалізуються найгірші для нього обставини, і вибором своєї стратегії $y_i \in A_i^E$ мінімізує ступінь ризику і максимізує гарантоване значення цільової функції $f_i^\Gamma(y_i)$, тобто

$$y_i^\Gamma = Arg\max_{y_i \in A_i^E} \min_{y_{-i} \in A_{-i}^C} f_i(y_i;\ y_{-i}), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Вектор $y^\Gamma = (y_1^\Gamma; \ldots;\ y_n^\Gamma)$ називається вектором гарантованих стратегій активних елементів і відповідає *рівновазі АС у максимінних стратегіях* (рівновага Вальда, точка Вальда). Наголосимо, що використання принципу гарантованого результату дає активному елементові песимістичну оцінку результату гри, що не завжди є доцільним. При цьому АЕ уникає ризику.

б) **Рівновага Неша.** Однією з найчастіше використовуваних концепцій рівноваги АС є рівновага Неша. Вектор $y^{\mathrm{H}} = \left(y_1^{\mathrm{H}};...;\ y_n^{\mathrm{H}}\right)$ називається *рівноважним за Нешем* (точкою Неша) для АС, якщо для будь-якого $y_i \in A_i^E$ і для всіх $i = 1, \ldots, n$ має місце оцінка

$$f_i\left(y_i^{\mathrm{H}};\ y_{-i}^{\mathrm{H}}\right) \geq f_i\left(y_i;\ y_{-i}^{\mathrm{H}}\right),$$

тобто жодному з активних елементів не вигідно змінювати свою стратегію за умови, якщо решта АЕ не змінюють своїх стратегій. Зміна стратегій обтяжена ризиком. Наголосимо, що використання концепції Неша вимагає введення такої гіпотези: гравці не можуть домовитися і вийти з цієї точки спільно, тобто рівновага Неша передбачає відсутність коаліцій гравців (розглядаються безкоаліційні ігри). Коаліційні ефекти розглядаються, зокрема, в [14, 40, 76].

в) **Рівновага в домінантних стратегіях**. Ситуація гри (точка) $y^D = \left(y_1^D;...;y_n^D\right)$ називається *рівноважною в домінантних стратегіях* для АС, якщо для будь-якого $y_{-i} \in A_{-i}^C$, для будь-якого $y_i \in A_i^E$ і для усіх $i = 1, \ldots, n$ має місце оцінка

$$f_i\left(y_i^D;\ y_{-i}\right) \geq f_i\left(y_i;\ y_{-i}\right).$$

Домінантна стратегія кожного елемента абсолютно оптимальна, тобто не залежить від поводження (стратегій) решти гравців. Отже, тут відсутній ризик, пов’язаний з конфліктом. Наголосимо, що далеко не в усіх іграх існує рівновага в домінантних стратегіях.

Не важко довести, що будь-яка рівновага в домінантних стратегіях є рівновагою Неша, але не навпаки.

г) **Паретто-оптимальні ситуації.** Вектор стратегій $y^{\Pi} = \left(y_1^{\Pi};\ldots;y_n^{\Pi}\right)$ називається *рівноважним за Паретто* (Паретто-оптимальним і при цьому ефективним), якщо не існує іншої ситуації, за якої усі гравці виграють не менше чи хоча б один гравець виграє строго більше, тобто для будь-якого $y \in A^C$ існує таке $i \in N = \{1;\ 2;\ldots;\ n\}$, що:

$$f_i(y) < f_i\left(y^{\Pi}\right).$$

Ця рівновага знижує загальний ризик невикористаних можливостей усієї АС. Окрім теорії гри, Парето-оптимальні ситуації виникають під час оцінювання одного й того ж об’єкта за різними критеріями, як про це йшлося у попередньому матеріалі (див. також [32]).

Крім наведених, в теорії гри існують й інші концепції рівноваги: Байєса, Штакельберга, Курно та ін.

8.3.4. Загальна постановка задачі управління активними системами

Визначивши принципи раціонального (індивідуального і колективного) поводження активних елементів і Центру, ми можемо сформулювати у загальному вигляді задачу управління активною системою.

Нехай $y=(y_1;...;\ y_n)\in A^C$ — вектор стратегій активних елементів, відповідні компоненти якого кожен із АЕ може обирати незалежно від інших АЕ (гіпотеза *незалежного поводження*). Припустимо, що цільова функція i-го АЕ $f_i(y;\ \eta)$ відбиває його пріоритети на множині $A^C\times \mathrm{H}$. Визначимо $\Pi(\eta)$ — *множину розв'язків гри* активних елементів (множину таких стратегій, що можуть бути реалізованими, множину дій) як множину рівноважних, за заданого управління $\eta\in \mathrm{H}$, їх стратегій. В одноелементній АС $\Pi(\eta)$ є множиною точок максимуму цільової функції АЕ, у багатоелементних системах — множиною рівноважних точок (утвореною максимінними стратегіями, домінантними стратегіями чи стратегіями, що забезпечують рівновагу Неша — залежно від конкретної задачі та використовуваних гіпотез щодо поводження учасників АС та їх ставлення до ризику).

Множина розв'язків гри відображає припущення Центру щодо поведінки керованих суб'єктів (активних елементів) за заданого управління. Крім того, припускається, що інтереси Центру ідентифікуються з інтересами АС у цілому (загалом) та що Центр повинен конкретизувати свої припущення щодо стратегій елементів, які обираються з множини рішень гри. Найчастіше застосовуються два «граничних» підходи:

- *метод гарантованого результату*, коли Центр несхильний до ризику, в разі використання котрого Центр розраховує на найгірший для нього вибір АЕ;
- *гіпотеза доброзичливості*, у межах якої Центр вважає, що АЕ обирають з множини рішень гри найбільш привабливі, з погляду Центру, дії, тобто Центр байдужий до ризику.

Задача управління АС полягає у пошуку оптимального, з множини допустимих, управління η^*, що максимізує цільову функцію Центру, якою є *максимальна ефективність*:

$$K(\eta)=\max_{y\in\Pi(\eta)}\Phi(\eta;\ y).$$

Тобто η^* вибирається з умови

$$K\left(\eta^*\right) = \max_{\eta \in H} \max_{y \in \Pi(\eta)} \Phi(\eta;\ y)$$

або ж

$$\eta^* \in H^* = Arg \max_{\eta \in H} \max_{y \in H(\eta)} \Phi(\eta;\ y)\,.$$

Якщо ж цільовою функцією АС є *гарантована ефективність*, тобто

$$K^{\Gamma}(\eta) = \min_{y \in \Pi(\eta)} \Phi(\eta;\ y),$$

то задача управління АС полягає у пошуку оптимального управління η^{**}, для якого

$$K^{\Gamma}\left(\eta^{**}\right) = \max_{\eta \in H} \min_{y \in \Pi(\eta)} \Phi(\eta;\ y)$$

або ж

$$\eta^{**} \in H^{**} = Arg \max_{\eta \in H} \min_{y \in \Pi(\eta)} \Phi(\eta;\ y)\,.$$

Зазначимо, що наведене теоретико-ігрове формулювання задачі управління в АС характеризується тим, що Центр є метагравцем, має право першого ходу та можливість призначати свою стратегію, яка залежить від стратегій АЕ: $\eta = \eta(y)$. Така гра є ієрархічною грою — грою типу r_2 у термінології теорії ієрархічних ігор [40]. Функція $\eta(\cdot)$ називається *механізмом управління* у вузькому сенсі.

Два важливих часткових випадки загальної постановки задачі управління являють собою *задача стимулювання* та *задача планування*.

Концептуально в *задачі стимулювання* стратегією Центру є вибір системи (механізму) стимулювання (набору функцій стимулювання) $\gamma(y) = (\gamma_1(y); \ldots; \gamma_n(y))$, що ставить у відповідність діям АЕ величину винагород, отримуваних від Центру, тобто $\eta = \gamma(y)$.

Задачею *синтезу оптимальної функції стимулювання* називається задача пошуку допустимої системи стимулювання, що має максимальну ефективність. Під час її вивчення основний акцент робиться на дослідженні впливу параметрів АС та обмежень механізму стимулювання на множину розв’язків гри, котра в задачах стимулювання називається множиною реалізовуваних дій.

У *задачі планування* стратегія Центру полягає у виборі множини S допустимих повідомлень активних елементів та механізму (процедури) планування $\pi(\cdot)$, що ставить у відповідність вектору повідомлень АЕ $S = (s_1;...; s_n)$ стратегію Центру — вектор $X = (x_1;...; x_n)$, тобто

$$X = \pi(S).$$

Під час їх вивчення основний акцент, окрім аналізу ефективності, робиться на дослідженні вигідності для АЕ (з погляду максимізації його функції корисності $u^E(X; S)$) повідомленої ним Центру достовірної інформації — так звана *проблема маніпулювання*.

У вузькому сенсі термін «задача планування» використовується в задачах стимулювання, коли на другому кроці розв'язування її, за відомих множин реалізовуваних дій, розв'язується задача оптимального узгодженого планування, тобто задача обрання конкретної дії АЕ, реалізація якої найвигідніша для Центру.

8.3.5. Класифікація задач управління активними системами

Наведемо основні засади і значення ознак системи класифікацій:

1. *Склад АС*: кількість АЕ — одноелементні та багатоелементні АС.

2. *Структура АС*: кількість рівнів ієрархії — дворівневі, трирівневі та інші АС; підпорядкованість АЕ — АС з унітарним контролем (типу «віяло», в яких структура підпорядкованості має вигляд дерева) та АС з розподіленим контролем (у яких АЕ може бути підпорядкований одночасно кільком керуючим органам, зокрема — багатоканальні АС); взаємозалежність показників діяльності, витрат та індивідуального керування АЕ — незалежні АЕ, слабо пов'язані АЕ [25].

3. *Порядок функціонування*: у першому наближенні можна виокремити стандартний і нестандартний порядок функціонування. Стандартний відповідає, наприклад, базовій моделі.

4. *Кількість періодів функціонування*: статичні (учасники АС здійснюють вибір стратегій однократно) і динамічні АС. Динамічні АС залежно від взаємозв'язку, періодів функціонування та врахування учасниками АС впливу наслідків рішень на майбутні

періоди функціонування можуть, у свою чергу, поділятися на АС з далекоглядними і недалекоглядними АЕ, адаптивні та неадаптивні АС тощо [40, 59, 110].

5. *Цільові функції* (пріоритети учасників АС) визначають конкретний тип задачі управління — задача стимулювання, задача планування чи інші випадки.

6. *Допустимі множини* — незалежні чи взаємозалежні множини можливого вибору (станів) учасників АС; розмірність простору індивідуальних станів АЕ і планів — АЕ зі скалярними і векторними пріоритетами.

7. *Інформованість учасників*. Ця класифікаційна ознака має, мабуть, найбільшу кількість підкласифікацій. АС поділяють на АС із симетричною та з асиметричною інформованістю учасників (передусім важливо визначитися з інформованістю АЕ та Центру), а також на детерміновані АС та АС з невизначеністю [59]. У свою чергу, АС з невизначеністю можна класифікувати за такими ознаками [77]:

7.1. *Тип невизначеності*: внутрішня невизначеність (стосовно параметрів АС, цільових функцій, допустимих множин або і того, і цього); зовнішня невизначеність (стосовно параметрів середовища, зовнішніх щодо АС), а також змішана невизначеність.

7.2. *Вид невизначеності*: інтервальна (коли учаснику АС відома множина можливих значень невизначеного параметра), ймовірнісна (відомий розподіл імовірності АС) або нечітка (відома функція належності — нечіткі АС) невизначеність, а також змішана невизначеність.

7.3. *Принципи поводження* учасників АС, методи подолання невизначеності та зумовленого нею ризику та принципи раціонального поводження: використання методу гарантованого результату, сподіваної корисності; недомінуючих альтернатив; повідомлення інформації; вибір структури системи тощо.

Відповідно до різних ознак існує низка класифікацій та їх комбінацій. Зазначимо, що не всі комбінації ознак є допустимими. Наприклад, використання сподіваної корисності можливе лише в імовірнісних АС, повідомлення інформації має сенс лише за асиметричної інформованості й повинно враховувати порядок функціонування АС.

Відповідно до наведеної системи класифікації розглянута вище базова модель АС є: багатоелементною з непов'язаними АЕ, дворівневою з унітарним контролем, статичною, зі стандартним порядком функціонування, скалярними пріоритетами АЕ, детермінованою із симетричною інформованістю учасників активною системою.

8.3.6. Активні системи з імовірнісною невизначеністю. Елементи теорії контрактів

Теорія контрактів — розділ теорії управління в соціально-економічних системах, що вивчає механізми стимулювання в активних системах, які функціонують в умовах зовнішньої ймовірнісної невизначеності та зумовленого цим ризику. Базовою моделлю теорії контрактів є одноелементна статична задача стимулювання другого роду в АС із зовнішньою ймовірнісною невизначеністю і симетричною інформованістю учасників [14, 77]. Уважатимемо, що АЕ обирає дію $y \in A^E$, котра під впливом зовнішнього середовища приводить до реалізації результату діяльності $z \in A^0$. Нехай заданою є щільність розподілу ймовірності $p(z;\ y)$ щодо результату діяльності $z \in A^0$ за обрання АЕ дії $y \in A^E$ (рис. 8.8).

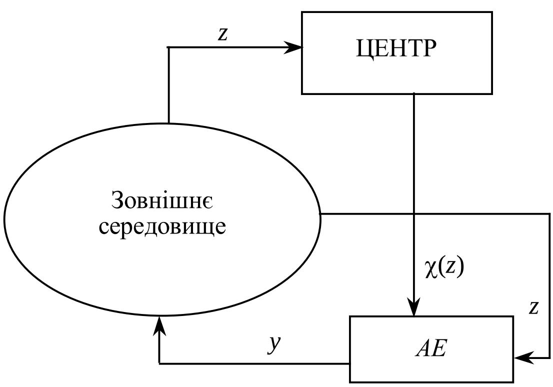


Рис. 8.8. Модель активної системи із зовнішньою невизначеністю та симетричною інформованістю

Нехай також *функція корисності Центру* задана у вигляді доходу, тобто

$$u^{Ц}(z) = h(z),$$

котрий залежить від результату діяльності $z \in A^0$, а *функція корисності* АЕ — у вигляді «дохід мінус штрафи»

$$u^E(z) = u^E(\chi(z);\ z) = h(z) - \chi(z),$$

де $\chi(z)$ — величина штрафу, що накладається Центром на АЕ в разі отримання ним результату діяльності $z \in A^0$, чи у вигляді «стимулювання мінус витрати»

$$u^E(z;\ y) = u^E(\gamma(z);\ z;\ y) = \gamma(z) - c(y),$$

де $c(y)$ — витрати, пов'язані з дією $y \in A^E$, направленою на досягнення АЕ результату $z \in A^0$.

Функції корисності АЕ, а також функції доходу, штрафів, стимулювання, які залежать від результатів діяльності z, відрізнятимемо від відповідних величин, що є їх сподіваними значеннями, тільки відсутністю над позначенням відповідної випадкової функції символу «~». Наприклад,

$$\tilde{\chi}(y) = \int_{A^0} \chi(z) p(z;\ y) dz$$

означає сподівану величину (тут $p(z;\ y)$ — функція щільності розподілу ймовірності щодо отримання АЕ результату $z \in A^0$ за вибору ним дії $y \in A^E$).

Приймемо таку концепцію щодо формалізованого опису порядку функціонування активної системи:

1. Центр інформує АЕ щодо функцій стимулювання $\gamma(z) \in \Gamma$ та обсягів сплат (штрафів) $\chi(z) \in \mathrm{X}$, аргументом яких є результат його діяльності $z \in A^0$.

2. Активний елемент обирає дію $y \in A^E$.

3. Реалізується випадкова величина — результат діяльності АЕ $z \in A^0$.

4. Центр спостерігає (контролює, здійснює моніторинг) результатів діяльності, проводяться сплати і визначається значення функцій корисності учасників АС. Зазначимо, що Центр не має змоги спостерігати дії АЕ $y \in A$.

Приймемо гіпотезу (вважатимемо), що оскільки на момент прийняття рішень учасники АС не знають результату діяльності, а мають лише інформацію про щільність розподілу ймовірності $p(z;\ y)$, то вони використовують (у першому наближенні) сподівану корисність для подолання невизначеності, конфліктності та зумовленого ними ризику, тобто цільові функції учасників — це математичні сподівання відповідних функцій корисності.

Задача (першого роду) синтезу оптимальної функції стимулювання має такий вигляд:

$$\tilde{\Phi}\left(\gamma^*;\ y^*\right) = \max_{\gamma(z)\in\Gamma} \tilde{\Phi}\left(\gamma^*;\ y^*(\gamma)\right),$$

$$\tilde{\Phi}\left(\gamma;\ y^*(\gamma)\right) = \int_{A^0} h(z)p\left(z;\ y^*(\gamma)\right)dz\ ;$$

$$y^*(\gamma) \in Arg\max_{y\in A^E}\left(\int_{A^0}\gamma(z)p(z;\ y)dz - c(y)\right);$$

$$\int_{A^0}\gamma(z)p\left(z;\ y^*\right)dz - c(y) \ge b,$$

де b — деяка константа, яку часто називають «обмеженням щодо сплати по безробіттю» (для спрощення можна покласти, що $b = 0$).

Аналогічну формалізовану постановку задачі першого роду можна навести і для формалізованого подання цільової функції АЕ у вигляді «дохід мінус штрафи»:

$$\tilde{\Phi}\left(\chi^*;\ y^*(\chi)\right) = \max_{\chi(z)\in\chi}\left(\chi;\ y^*(\chi)\right),$$

де

$$\tilde{\Phi}\left(\chi; y^*(\chi)\right) = \int_{A^0} h(z)p\left(z;\ y^*(\chi)\right)dz;$$

$$y^*(\chi) \in Arg\max_{y\in A^E}\int_{A^0}(h(z) - \chi(z))p(z;\ y)dz\ .$$

Наведену задачу називають *задачею (першого роду) теорії контрактів*, а розв'язок $\left(\gamma^*;\ y^*\right)$ — *оптимальним контрактом*. Коректніше припустити, що у задачі теорії контрактів [14] АЕ має нейманівську функцію корисності, котра залежить від сплат з боку Центру. Тут нами розглядається спрощений випадок, коли ця функція вважається лінійною.

Одним з багатьох методів розв'язування задач теорії контрактів є *двокроковий метод*.

Припустимо, що множина можливих дій АЕ є скінченною (дискретною), тобто $A^E = (y_1;...;y_m)$, $A^0 = (z_1;...;\ z_m)$. Позначимо $\gamma_k = \gamma(y_k)$; $c_k = c(y_k)$; p_{kj} — імовірність отримання АЕ результату $z_{kj} \in A^0$ за вибору ним дії $y_k \in A^E$ (тут: z_{kj} — реалізація випадкової величини z_k, що відображає множину результатів діяльності АЕ за вибору ним дії $y_k \in A^E$, $j = 1, \ldots, n_k$; n_k — кількість реалізацій дискретної випадкової величини z_k, $k = 1, \ldots, m$). На першому кроці визначається *множина реалізовуваних дій*. З цією метою для кожної можливої дії y_k ($k = 1, ..., m$) відшукується система стимулювання γ_j^k, що задовольняє обмеження:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n_k} \gamma_j^k p_{kj} - c_k \geq \sum_{j=1}^{n_k} \gamma_j^k p_{ij} - c_i, & i = 1, ..., m; \\ 0 \leq \gamma_j^k \leq \gamma^{\max}, & j = 1, ..., n_k. \end{cases}$$

де $\gamma^{\max} = \text{const}$.

Якщо існує розв'язок цієї задачі, то дія y_k реалізовувана.

Середньозважені витрати на стимулювання реалізації дії y_k дорівнюють:

$$\tilde{\gamma}_k = \sum_{j=1}^{n_k} \gamma_j^k p_{kj}.$$

Якщо ж деяка з дій не реалізовувана, то витрати на стимулювання її реалізації вважатимемо такими, що дорівнюють $+\infty$.

На другому кроці визначається дія y_{k^*}, номер якої

$$k^* \in Arg \max_{k=1,\ldots,} \left(\sum_{j=1}^{n_k} h(z_j) p_{kj} - \tilde{\gamma}_k \right).$$

Ця дія, на думку Центру, найвигідніша та реалізовувана.

Отже, спочатку визначається множина дій АЕ, що реалізовувані за заданих обмежень, а потім знаходиться оптимальна реалізовувана дія.

Зазначимо, що задача пошуку загальних умов (достатніх і, тим паче, необхідних) щодо оптимальності різних систем стимулювання в імовірнісних активних системах, обтяжених ризиком, на даний час залишається відкритою. Актуальною є розбудова відповідних моделей з урахуванням ризику на всіх рівнях економічного управління, починаючи від проблем глобалістики.

8.4. КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ТА ТЕМИ ДЛЯ ОБГОВОРЕННЯ

1. У чому полягає сутність рівноваги за Нешем? Навести приклад і дати пояснення.

2. Концепція побудови області стратегічних рішень, що являє собою інтерес для використання теорії гри.

3. Поясніть сутність понять: розгорнута форма подання гри, нормальна форма подання гри.

4. Сутність ігрової постановки задачі щодо проникнення підприємств (компаній) на новий ринок з урахуванням ризику.

5. Сутність ігрової постановки задачі щодо проблеми суперництва компаній в області технологічного лідерства з урахуванням ризику.

6. Сутність механізму прямих пріоритетів у проблемах розподілу обмежених ресурсів. Як тут ураховується ступінь ризику?

7. Сутність механізму обернених пріоритетів у проблемах розподілу обмежених ресурсів з урахуванням ступеня ризику.

8. Сутність механізму відкритого управління у проблемах розподілу ресурсів. Як ураховується тут ризик?

9. Концепція та формування дворівневої моделі активної системи управління. Способи врахування ризику.

10. Пріоритети учасників активної системи управління. Наведіть відповідні приклади.

11. Основні елементи теоретико-ігрової постановки задачі поводження активних елементів системи управління з урахуванням ризику.

12. Сутність рівноваги в домінантних стратегіях у теоретико-ігровій постановці задачі моделювання активних систем.

13. Урахування ризику в загальній постановці задачі управління активними системами. Наведіть приклади.

14. Назвіть окремі підходи до класифікації задач управління активними системами. Типи та види невизначеності та зумовленого нею ризику.

15. Сутність та основні елементи теорії контрактів у моделюванні активних систем з урахуванням ризику.

8.5. ТЕМИ РЕФЕРАТІВ

1. Механізм відкритого управління в експертній системі на базі концепції теорії гри з урахуванням ризику.

2. Моделювання поводження фірм на конкретних ринках на базі концепції теорії гри з урахуванням ризику.

3. Моделі деяких задач ринкової економіки з урахуванням ризику на базі нескінченних ігор.

4. Урахування невизначеності, конфліктності та зумовленого ними ризику у проблемах визначення раціональних запасів на базі використання теоретико-ігрових підходів.

5. Прийняття рішень в АПК з урахуванням ризику на базі інструментарію теорії гри.

6. Проблеми синтезу оптимального механізму в активних системах із зовнішньою невизначеністю на базі концепції теорії гри.

7. Задачі синтезу оптимального механізму стимулювання із зовнішньою нечіткою невизначеністю на базі концепції теорії гри.

8. Теорія реалізовуваності з урахуванням ризику на базі використання теоретико-ігрових моделей.

9. Моделювання механізмів відкритого управління в активних соціально-економічних системах з урахуванням ризику на базі використання теоретико-ігрових моделей.

8.6. ПРИКЛАДИ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Восьмеро споживачів певного ресурсу подали замовлення до Центру в обсягах: 9; 18; 15; 14; 10; 13; 7; 14 (в УО). Обсяг наявного ресурсу Центру становить 70 одиниць. Як необхідно розподілити цей ресурс відповідно до механізму прямих пріоритетів?

2. Розподіл обмеженого ресурсу здійснюється відповідно до механізму зворотних пріоритетів. Пріоритети Центру щодо чотирьох споживачів визначаються числами 26, 18, 24, 20. Якими будуть рівноважні стратегії (замовлення) споживачів, якщо наявний у Центру обсяг обмеженого ресурсу становить 60 УО?

3. Розподіл обмеженого ресурсу здійснюється відповідно до конкурсного механізму. П’ятеро споживачів подали до Центру свої замовлення: 5, 8, 6, 9, 8 (УО). Відомі також показники ефективності (в УО): 11, 20, 18, 21, 21 відповідно. Як необхідно здійснити розподіл ресурсу, обсяг якого становить 25 УО?

4. Восьмеро споживачів подали до Центру замовлення (в УО): 12, 10, 16, 18, 10, 12, 15, 10. Центр розподіляє ресурс, обсяг якого становить 100 УО. Як розподілити цей ресурс відповідно до механізму відкритого управління?

8.7. ПОЗНАЧЕННЯ, ВИКОРИСТОВУВАНІ В РОЗДІЛІ 8

S_i — множина стратегій i-го Споживача ($i = 1,...,n$);

s_i — число (стратегія), яке i-й Споживач повідомляє Центру ($s_i \in S_i$, $i = 1,...,n$);

r_i — реальна потреба i-го Споживача в ресурсі ($r_i \in S_i$, $i = 1,...,n$);

R — наявний обсяг ресурсу, який розподіляється Центром;

$X = (x_1;...;x_n)$ — стратегія Центру;

x_i — обсяг ресурсу, який виділяється Центром i-му Споживачу ($i = 1,...,n$);

$U = (u_1;...;u_n)$ — вектор вагових коефіцієнтів пріоритету, який визначає «важливість» Споживачів з позиції Центру;

α — індикатор несприятливого відхилення;

γ — нормувальний множник;

$W = (w_1; w_2;...)$ — вектор оцінок ризику (його компоненти є кількісними оцінками різних аспектів ризику);

$w_j^{Ц} = g_j^{Ц}$ — оцінка міри j-го аспекту ризику Центру ($j = 1, 2,...$);

$w_{ij} = g_{ij}^{C}$ — оцінка міри j-го аспекту ризику i-го Споживача ($i = 1,...,n$; $j = 1, 2,...$);

$RI^C = (C_{i1};...;C_{in})$ — ряд пріоритету Споживачів з позиції Центру;

d_i — числовий еквівалент пріоритету i-го Споживача з позиції Центру ($i = 1,...,n$);

$A^C = A_1^E \times \ldots \times A_n^E$ — допустима множина станів активної системи (вектор стратегій);

A_i^E — множина дій (стратегій, станів тощо) i-го активного елемента ($i = 1,...,n$);

$y = (y_1;...;y_n)$ — стан системи ($y \in A^C$; $y = G(\eta)$);

y_i — дія (стратегія, стан тощо) активного елемента ($y_i \in A_i^E$, $i = 1,...,n$);

η — керуючий вплив ($\eta \in \mathrm{H}$);

η^*, η^{**} — оптимальний керуючий вплив (управління);

$\Phi(\eta; y)$ — функціонал, що визначає ефективність функціонування системи;

$K(\eta)$, $K^{\Gamma}(\eta)$ — критерій відповідно ефективності, гарантованої ефективності щодо керування системою ($\eta \in \mathrm{H}$);

z, z_i, z_{kj} — результат діяльності активного елемента;

ν — закон, що визначає результат діяльності активного елемента як функцію дії, обраної активним елементом;

A_i^0 — множина можливих результатів i-го активного елемента ($i = 1, ..., n$);

λ_i — пріоритет i-го активного елемента щодо результату діяльності z_i ($\lambda_i \in \Lambda_i$; $i = 1, ..., n$);

Λ_i — множина реалізацій пріоритету i-го активного елемента ($i = 1, ..., n$);

r_i — скалярна величина, що параметризує пріоритет i-го активного елемента ($i = 1, ..., n$);

M — підмножина дійсної осі ($M \subseteq E^1$);

$\Pi^{\nu}(\Lambda_i; A_i^E)$ — правило індивідуального раціонального вибору, яке визначає множину найбільш привабливих з погляду i-го активного елемента дій ($i = 1, ..., n$);

$u_i^E(z)$ — функція корисності i-го активного елемента ($i = 1, ..., n$);

$u^{\text{Ц}}(z; \eta)$ — функція корисності Центру;

$f_i(y)$, $f_i(y; \eta)$ — цільова функція i-го активного елемента ($y \in A^C$; $\eta \in \text{H}$; $i = 1, ..., n$);

$y_{-i} = (y_1; ...; y_{i-1}; y_{i+1}; ...; y_n)$ — множина обставин гри для i-го гравця ($i = 1, ..., n$);

y_i^{Γ} — стратегія i-го активного елемента, що мінімізує ступінь ризику і максимізує гарантоване значення цільової функції активного елемента ($i = 1, ..., n$);

$f_i^{\Gamma}(y_i)$ — гарантоване значення цільової функції i-го активного елемента у виборі ним стратегії $y_i \in A_i^E$ ($i = 1, ..., n$);

$y^{\text{H}} = (y_1^{\text{H}}; ...; y_n^{\text{H}})$ — вектор рівноваги активної системи за Нешем (точка Неша);

$y^D = (y_1^D; ...; y_n^D)$ — вектор рівноваги активної системи в домінантних стратегіях;

$y^{\Pi} = (y_1^{\Pi}; ...; y_n^{\Pi})$ — вектор рівноваги активної системи за Паретто (точка Паретто);

$\Pi(\eta)$ — множина розв'язків гри активних елементів за заданого управління $\eta \in \text{H}$;

$\eta = \gamma(y)$, $X = \pi(S)$ — механізми управління активною системою (відповідно стимулювання, планування);

$\chi(z)$ — обсяг сплат (штраф), що накладається Центром на активний елемент у разі отримання ним результату діяльності $z \in A^0$;

$h(z)$ — величина доходу активного елемента у разі отримання ним результату діяльності $z \in A^0$;

$c(y)$ — витрати, пов'язані з дією $y \in A^E$, спрямованою на досягнення активним елементом результату діяльності $z \in A^0$;

$\tilde{\chi}(\cdot), \tilde{\Phi}(\cdot)$ — сподівані значення (математичні сподівання) відповідних випадкових величин;

$p(z; y)$ — функція щільності розподілу ймовірності щодо отримання активним елементом результату $z \in A^0$ у разі вибору ним дії $y \in A^E$;

$\Phi(\cdot)$ — цільова функція активного елемента;

p_{kj} — імовірність отримання активним елементом результату $z_{kj} \in A^0$ у разі вибору ним дії $y_k \in A^E$;

n_k — кількість реалізацій дискретної випадкової величини z_k ($z_k = (z_{k1};...;z_{kn_k})$);

γ_j^k — величина стимулювання активного елемента у разі вибору ним дії $y_k \in A^E$ і отриманні ним результату z_{kj} ($k = 1,..., m$; $j = 1,..., n_k$).

ПЕРЕЛІК СИМВОЛІВ (КВАНТОРІВ, ОПЕРАТОРІВ), ВИКОРИСТОВУВАНИХ У ПОСІБНИКУ

$\forall$ — для будь-якого;

$\exists$ — існує;

$\Rightarrow$ — випливає;

$\succ$ — має вищий пріоритет (кращий за …);

$\succeq$ — має не нижчий пріоритет (не гірший за …);

$\sim$ — еквівалентний (рівнозначний);

$\sum_{i=1}^{n}$ — оператор відшукання суми n пронумерованих елементів;

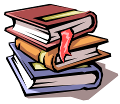
$\prod_{i=1}^{n}$ — оператор відшукання добутку n пронумерованих елементів;

opt — оператор оптимізації;

$\arg\max$ ($\arg\min$) — оператор відшукання у заданій множині елемента (аргумента), що забезпечує максимальне (мінімальне) значення цільовій функції;

$\xrightarrow{e}$ — оператор згортки на основі критерію e;

$\xrightarrow{KU}$ — оператор зваженого згортання з урахуванням вектора вагових коефіцієнтів U.



ЛІТЕРАТУРА

1. *Аверкин А. Н., Батыршин А. З., Блишун А. Ф*. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д. А. Поспелова. — М.: Наука, 1986. — 312 с.

2. *Алєксєєв І. В., Захарчук О. В., Рим Н. Н*. Банківський маркетинг. — Львів: Львів. банків. коледж Нац. банку України, 1998. — 96 с.

3. *Альгин А. П*. Грани экономического риска. — М.: Знание, 1991. — 64 с.

4. *Его же*. Риск и его роль в общественной жизни. — М.: Мысль, 1989. — 187 с.

5. *Андрейчиков А. В., Андрейчикова О. Н.* Анализ, синтез, планирование решений в экономике. — М.: Финансы и статистика, 2000. — 368 с.

6. *Балабанов И. Т*. Риск — менеджмент. — М.: Финансы и статистика, 1996. — 192 с.

7. *Его же*. Финансовый менеджмент. — М.: Финансы и статистика, 1994. — 224 с.

8. *Балашов О. В*. Принятие бизнес-решений: стратегия, методы, психология. — Одесса: ОКФА, 1996. — 152 с.

9. Банковское дело / Под ред. О. Л. Лаврушина. — М.: Банк. и биржевой науч.-консультац. центр, 1992. — 428 с.

10. *Бланк И. А*. Инвестиционный менеджмент. — К.: МП «ИТЕМлтд»: «Юнайтед Лондон Трейд Лимитед», 1995. — 448 с.

11. *Блекуэлл Д., Гиршик М. А*. Теория игр и статистических решений. — М.: ИЛ, 1958. — 318 с.

12. *Бойделл Т*. Как улучшить управление организацией: Пособие для руководителя. — М.: «ИНФРА-М» — АОЗТ «Премьер», 1995. — 420 с.

13. *Борисов А. Н., Алексеев А. В., Крумберг О. А*. Модели принятия решений на основе лингвистической переменной. — Рига: Зинатне, 1982. — 256 с.

14. *Бурков В. Н., Данев Б., Енакеев А. К. и др*. Большие системы: моделирование организационных механизмов. — М.: Наука, 1989. — 245 с.

15. *Бурков В. Н., Новиков Д. А*. Введение в теорию активных систем. — М.: ИПУ РАН, 1996. — 125 с.

16. *Вентцель Е. С.* Исследование операций: задачи, принципы, методология. — М.: Наука, 1980. — 208 с.

17. *Верченко П. І.* Ієрархічна модель підтримки прийняття рішень в умовах невизначеності // Моделювання та інформаційні системи в економіці. — К.: КНЕУ, 2000. — Вип. 64. — С. 125—134.

18. *Верченко П. І.* Система критеріїв прийняття рішень при дослідженні економічних процесів з несиметричними розподілами // Проблеми економічного ризику: аналіз та управління: Зб. наук. праць за матеріалами Першої Всеукр. наук.-практ. конф. (26—28 жовтня 1998 р.) (далі — Проблеми…). — К.: Міносвіти України, КНЕУ, 1998. — С. 13, 14.

19. *Верченко П. І., Вітлінський В. В., Компаніченко О. С.* Аналіз зваженого середньогеометричного як функції корисності у проблемах прийняття рішень, обтяжених ризиком // Вчені записки. — К.: КНЕУ, 1998. — Вип. 1. — С. 184—189.

20. *Вилкас Э. Й.* Оптимальность в играх и решениях. — М.: Наука, 1990. — 256 с.

21. *Вітлінський В. В.* Алгоритм підтримки процесів прийняття рішень на базі нечітких оцінок // Машинна обробка інформації. — К.: КДЕУ, 1995. — Вип. 56. — С. 99—106.

22. *Його ж.* Аналіз, оцінка і моделювання економічного розвитку. — К.: ДЕМІУР, 1996. — 212 с.

23. *Його ж.* Аналіз та моделювання ризику проектів. — К.: КДЕУ, 1995. — 17 с.

24. *Його ж.* Врахування ризику та інфляції в моделюванні інвестиційних проектів. — К.: КДЕУ, 1995. — 11 с.

25. *Його ж.* Економічний ризик: гносеологічні аспекти та проблеми розвитку теорії // Проблеми… — С. 14—17.

26. *Його ж.* Економічний ризик: системний аналіз, менеджмент. — К.: КДЕУ, 1994. — 245 с.

27. *Його ж.* Машинна обробка інформації по управлінню запасами з урахуванням ризику // Машинна обробка інформації. — К.: КДЕУ, 1995. — Вип. 56. — С. 126—130.

28. *Його ж.* Моделювання ризику в трансформаційному менеджменті. — К.: КДЕУ, 1995. — 14 с.

29. Його ж. Моделювання та оптимізація ризику в стратегічному менеджменті // Машинна обробка інформації. — К.: КДЕУ, 1995. — Вип. 57. — С. 91—102.

30. *Його ж.* Нечітка багатокритеріальна ієрархічна модель підтримки процесів прийняття рішень. — К.: КДЕУ, 1994. — 33 с.

31. *Його ж.* Оцінка інвестиційних проектів з урахуванням ризику. — К.: КДЕУ, 1995. — 14 с.

32. *Вітлінський В. В., Верченко П. І.* Аналіз, моделювання та управління економічним ризиком: Навч. посібник для самостійного вивчення дисципліни. — К.: КНЕУ, 2000. — 292 с.

33. *Вітлінський В. В., Наконечний С. І.* Економічний ризик і проблеми його моделювання. — К.: КДЕУ, 1993. — 8 с.

34. *Вітлінський В. В., Наконечний С. І.* Ризик у менеджменті. — К.: ТОВ «Борисфен-М», 1996. — 336 с.

35. *Вітлінський В.В., Наконечний С.І., Соколов В.А*. Програма, методичні вказівки та навчальні завдання для проведення практичних занять і лабораторних робіт з курсу «Економічний ризик і методи його вимірювання». — К.: КДЕУ, 1995. — 109 с.

36. *Вітлінський В. В., Наконечний С. І., Шарапов О. Д*. Економічний ризик і методи його вимірювання: Підручник. — К.: ІЗМН, 1996. — 400 с.

37. *Вітлінський В. В., Сігал А. В*. Проблеми формування «валютного кошика» // Фінанси України. — 1999. — № 2. — С. 108—110.

38. *Їх же*. Управління портфельним ризиком в умовах нестабільності // Ризикологія в економіці та підприємництві: Зб. наук. праць / За матеріалами міжнар. наук.-практ. конф. (27, 28 березня 2001 р.). — К.: КНЕУ, Акад. ДПС України, 2001. — 449 с.

39. *Воробьев Н. Н.* Теория игр для экономистов-кибернетиков. — М.: Наука, 1985. — 213 с.

40. *Гермейер Ю. Б.* Игры с непротивоположными интересами. — М.: Наука, 1976. — 327 с.

41. *Глухов В. В., Бахрамов Ю. М*. Финансовый менеджмент (участники рынка, инструменты, решения). — СПб.: Спец. л-ра, 1995. — 429 с.

42. *Голубков Е. П.* Какое принять решение? (Практикум хозяйственника). — М.: Экономика, 1990. — 189 с.

43. *Грабовый П. Г., Петрова С. Н., Полтавцев С. И. и др*. Риски в современном бизнесе. — М.: Аланс, 1994. — 200 с.

44. *Дамари Р*. Финансы и предпринимательство: Финансовые инструменты, используемые западными фирмами для роста и развития организаций. — Ярославль: Елень, 1993. — 223 с.

45. *Де Гроот М*. Оптимальные статистические решения. — М.: Мир, 1974. — 496 с.

46. *Дорин А. В*. Экономическая социология: Учеб. пособие. — Минск: ИП «Экоперспектива», 1997. — 254 с.

47. *Дюбин Г. Н., Суздаль В. Г.* Введение в прикладную теорию игр. — М.: Наука, 1981. — 336 с.

48. *Жлуктенко В. І., Наконечний С. І.* Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч. посібник. — К.: ІЗМН, 1997. — 408 с.

49. *Жуковин В. Е.* Нечеткие многокритериальные модели принятия решений. — Тбилиси: Мецниереба, 1988. — 72 с.

50. *Заде Л. А.* Понятие лингвистической переменной и ее применение к принятию приближенных решений. — М.: Мир, 1976. — 165 с.

51. *Идрисов А. Б.* Планирование и анализ эффективности инвестиций. — М.: PRO-INVEST CONSALTING, 1995. — 160 с.

52. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Аналитическая геометрия. — М.: Наука, 1971. — 232 с.

53. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. — М.: Прогресс, 1975. — 606 с.

54. *Кардаш В. А*. Экономика оптимального погодного риска в АПК (теория и методы). — М.: Агропромиздат, 1989. — 167 с.

55. *Касимов Ю. Ф*. Основы теории оптимального портфеля ценных бумаг. — М.: ИИД «Филинъ», 1998. — 144 с.

56. *Кини Р. Л., Райфа Х.* Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. — М.: Наука, 1981. — 560 с.

57. *Ковальчук К. Ф*. Интеллектуальная поддержка принятия экономических решений. — Донецк: ИЭП НАН Украины, 1996. — 244 с.

58. *Козелецкий Ю*. Психологическая теория решений. — М.: Прогресс, 1979. — 504 с.

59. *Кононенко А. Ф., Холезов А. Д., Чумаков В. В*. Принятие решений в условиях неопределенности. — М.: ВЦ АН СССР, 1991. — 197 с.

60. Кредитний ризик комерційного банку: Навч. посібник / В. В. Вітлінський, О. В. Пернарівський, Я. С. Наконечний, Г. І. Великоівненко; За ред. В. В. Вітлінського. — К.: Т-во «ЗНАННЯ» КОО, 2000. — 251 с.

61. *Лапуста М. Г., Шаршукова Л. Г.* Риски в предпринимательской деятельности. — М.: ИНФРА-М, 1998. — 224 с.

62. *Лопатников Л. И*. Экономико-математический словарь: Слов. современной экон. науки. — М.: ABF, 1996. — 704 с.

63. *Лукашин Ю. П*. Оптимизация структуры портфеля ценных бумаг // Экономика и математ. методы. — 1995. — Т. 31, вып. 1. — С. 138—150.

64. *Льюис Р.Д., Райфа Х.* Игры и решения. — М.: ИЛ, 1961. — 642 с.

65. Математическая энциклопедия. — М.: Сов. энцикл., 1985. — Т. 5. — 1247 с.

66. *Мелихов А. Н., Бернштейн Л. С., Коровин С. Я*. Ситуационные советующие системы с нечеткой логикой. — М.: Наука, 1990. — 272 с.

67. *Мирзоахмедов Ф. М*. Математические модели и методы управления производством с учетом случайных факторов. — К.: Наук. думка, 1991. — 224 с.

68. *Моисеев Н. Н*. Математические задачи системного анализа. — М.: Наука, 1981. — 487 с.

69. *Наконечний С. І., Лузан І. П.* Планування виробництва і використання кормів в районних агропромислових об’єднаннях. — К.: Урожай, 1986. — 162 с.

70. *Наконечний С. І., Савіна С. С.* Погодний ризик АПК: адаптивне моделювання, економічне зростання та прогнозування. — К.: ДЕМІУР, 1998. — 162 с.

71. Наука в современной капиталистической экономике / С. М. Никитин, Л. П. Ночевкин, А. А. Дынкин и др.; Отв. ред. С. М. Никитин. — М.: Наука, 1987. — 236 с.

72. *Нейман Дж., Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. — М.: ИЛ, 1960. — 708 с.

73. *Нельсон Р., Уинтер С.* Эволюционная теория экономических изменений. — М.: ЗАО «Финстатинформ», 2000. — 474 с.

74. Нечеткие многокритериальные модели принятия решений. — Тбилиси: Мецниереба, 1988. — 72 с.

75. *Нікбахт Е., Гроппеллі А.* Фінанси. — К.: Вік, Глобус, 1992. — 383 с.

76. *Новиков Д. А.* Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. — М.: Фонд «Проблемы управления», 1999. — 150 с.

77. *Его же.* Стимулирование в социально-экономических системах (базовые математические модели). — М.: ИПУ РАН, 1998. — 216 с.

78. *Олексюк О. С.* Побудова моделі оптимального інвестиційного портфеля з трьох активів // Проблеми… — С. 54—56.

79. *Осадник В.* Выбор стратегии с помощью аналитико-иерархического процесса //Проблемы теории и практики управления. — 1994. — № 6. — С. 112—118.

80. *Первозванский А. А.* Математические модели в управлении производством. — М.: Наука, 1975. — 616 с.

81. *Первозванский А. А., Первозванская Т. Н.* Финансовый рынок: расчет и риск. — М: ИНФРА-М, 1994. — 192 с.

82. *Пестель Э.* За пределами роста. — М.: Прогресс, 1988. — 238 с.

83. *Петраков Н. Я.* Русская рулетка: экономический эксперимент ценою 150 миллионов жизней. — М.: ОАО «Изд-во «Экономика», 1998. — 286 с.

84. *Петраков Н. Я., Ротарь В. И.* Фактор неопределенности и управление экономическими системами. — М.: Наука, 1985. — 191 с.

85. *Полищук Л. И.* Анализ многокритериальных экономико-математических моделей. — Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1989. — 352 с.

86. *Пономаренко О. І., Пономаренко В. О.* Системні методи в економіці, менеджменті та бізнесі. — К.: Либідь, 1995. — 240 с.

87. *Портер М. Л.* Международная конкуренция: Пер. с англ. — М.: Междунар. отношения, 1993. — 417 с.

88. *Райзберг Б. А.* Предпринимательство и риск. — М.: Знание, 1992. — 64 с.

89. *Райс Т., Койли Б.* Финансовые инвестиции и риск: Пер. с англ. — К.: Торгово-издат. бюро BHV, 1995. — 592 с.

90. *Рогов М.* Если оценки не совпадают // РИСК. — 1997. — № 5. — С. 12—18.

91. *Романюк Т. П., Терещенко Т. А., Присенко Г. В., Городкова І. М.* Математичне програмування: Навч. посібник. — К.: ІЗМН, 1996. — 312 с.

92. *Руа Б.* Проблемы и методы принятия решений в задачах со многими целевыми функциями // Вопросы анализа и процедуры принятия решений. — М.: Мир, 1976. — С. 20—58.

93. *Саати Т.* Математические методы исследования операций. — М.: Военуздат, 1963. — 420 с.

94. *Его же.* Принятие решений методом анализа иерархий: Пер. с англ. — М.: Радио и связь, 1989. — 316 с.

95. *Саати Т., Кернс К.* Аналитическое планирование. Организация систем: Пер. с англ. — М.: Радио и связь, 1991. — 224 с.
96. *Сарана М. А., Верченко П. І.* Неокласичний підхід до побудови оптимального портфеля цінних паперів // Проблеми… — С. 68, 69.
97. *Сигал А. В.* Оптимизация структуры портфеля в пятой информационной ситуации // Там же. — С. 69, 70.
98. *Его же.* Основы современной теории портфеля ценных бумаг: Учеб. пособие. — Симферополь: КЭИ КНЭУ, 1998. — 60 с.
99. *Його ж.* Застосування теорії ігор щодо теорії портфеля // Машинна обробка інформації. — К.: КНЕУ, 1998. — Вип. 61. — С. 154—160.
100. *Його ж.* Формування множини ефективних портфелів за умови невідомого розподілу ймовірностей // Там само. — Вип. 62. — С. 147—151.
101. Стратегическое планирование / Под ред. З. А. Уткина. — М.: ЭКМОС, 1998. — 440 с.
102. *Сявавко М. С., Рибицька О. М.* Математичне моделювання за умов невизначеності. — Львів: Укр. технології, 2000. — 319 с.
103. Теория прогнозирования и принятия решений / Под ред. С. А. Саркисяна. — М.: Высш. шк., 1977. — 352 с.
104. *Трухаев Р. И.* Модели принятия решений в условиях неопределенности. — М.: Наука, 1981. — 258 с.
105. *Фахутдинов Р. А.* Стратегический менеджмент. — М.: ЗАО «Бизнес-школа «Интел-Синтез», 1997. — 304 с.
106. Финансовый менеджмент / Под ред. Е. С. Стояновой. — М.: Перспектива, 1993. — 268 с.
107. *Фишберн П.* Теория полезности для принятия решений. — М.: Наука, 1978. — 352 с.
108. Хозяйственный риск и методы его измерения: Пер. с венг. / Т. Бачкаи, Д. Месена, Д. Мико и др. — М.: Экономика, 1979. — 183 с.
109. *Черкасов В. В.* Проблемы риска в управленческой деятельности: Моногр. — М.: Рефл-бук; К.: «Ваклер», 1999. — 288 с.
110. *Цыганов В. В.* Адаптивные механизмы в отраслевом управлении. — М.: Наука, 1991. — 166 с.
111. *Шапиро В. Д. и др.* Управление проектами. — СПб.: «Два-три», 1993. — 443 с.
112. *Шарп У., Александер Г., Бейли Д.* Инвестиции. — М.: Инфра-С, 1998. — 1028 с.
113. *Шибалкин О.Ю.* Проблемы и методы построения сценариев социально-экономического развития. — М.: Наука, 1992. — 176 с.
114. *Шикин Е. В., Чхартишвили А. Г.* Математические методы и модели в управлении: Учеб. пособие. — М.: Дело, 2000. — 440 с.
115. *Юдин Д. Б.* Математические методы управления в условиях неполной информации. — М.: Сов. радио, 1974. — 400 с.
116. *Яккока Ли.* Карьера менеджера. — М.: Прогресс, 1991. — 384 с.
117. *Ястремський О. І.* Моделювання економічного ризику. — К.: Либідь, 1992. — 176 с.

118.*Ястремський О. І.* Основи теорії економічного ризику: Навч. посібник для студентів екон. спец. навч. закладів. — К.: «АртЕк», 1997. — 248 с.
119. *Эддоус М., Стенсфилд Р.* Методы принятия решений: Пер. с англ. — М.: ЮНИТИ, Аудит, 1997. — 510 с.
120. Экономическая стратегия фирмы / Под ред. А. П. Градова. — СПб.: Спец. лит-ра, 1995. — 414 с.
121. *Alexander C.* Financial risk management and analysis. — N. Y.: John Wiley, 1996. — 352 p.
122. *Black F., Sholes M.* The Pricing of Options and Corporate Liabilities // Journal of Political Economy. — 1974. — 81 (3). — May / June. — P. 637—654.
123. *Elton E. J., Gruber M. J.* Modern Portfolio Theory and Investment Analysis. № 4. — N. Y.: John Wiley, 1987. — 284 p.
124. *Harker P. T.* Derivatives of the perron Root of a positive Reciprocal Matrix: With Application to the Analytic Hierarchy Process // Applied Mathematics and Computation. — 1987. — № 226. — P. 217—232.
125. *Fain R. A.* Procedure for Multiple-aspect Decision Making Using Fuzzy Sets // International Journal of systems Sciences. — 1977. — № 8. — P. 1—7.
126. *Jajuga K., Jajuga T.* Jak inwestowac w papiery wartosciowe. — Warszawa: HWN, 1994. — 189 s.
127. *Lederman J., Klein R.* (Eds) Global asset allocation: Techniques for optimizing portfolio management. — N. Y.: John Wiley, 1994. — 400 p.
128. *Lintner J.* The Valuation of Risky Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolio and Capital Budgets //Review of Economics and Statistics. — 1965. — February. — P. 13—27.
129. *Markowitz H. M.* Portfolio Selection // Journal of Finance. — 1952. — 7 (1). — March. — P. 77—91.
130. *His as well.* Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments. — N. Y.: John Wiley, 1959. — 129 p.
131. *Merton R. C.* Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: the Continuous — Time Case // The Review of Economic Statistics. — 1969. — August.
132. *Modigliani F., Miller M. H.* The Cost of Capital, Corporate Finance and the Theory of Investment // American Economic Review. — 1958. — 48 (3). — June.
133. *Moore P. G.* The bussiness of risk. — Gambridge, 1983. — 375 p.
134. *Mossin J.* Equilibrium in a Capital Asset Market // Econometrica. — 1966. — 34 (4). — October. — P. 768—783.
135. *Ross S. A.* The Arbitrage Theory of Capital Asser Pricing // Journal of Economic Theory. 1976. — December. — P. 341—360.
136. *Ruan T. M.* Theory of portfolio selection. — London: Macmillan, 1978. — 279 p.
137. *Saaty T. L.* Measuring the fuzziness of sets // Journal of Cybernetics. — 1974. — Vol. 4. — P. 53—61.

138. *Saaty T. L., Vargas L. G*. Modeling behavior in Competition: The Analytic Hierarchy Process // Applied Mathematics and Computation. — 1995. — Vol. 16. — P. 49—92.
139. *Simon H., Newell A.* Heuristic problem solving the next advance in operations research // Oper. Res. — 1958. — Vol. 6. — January. — P. 277—293.
140. *Sharpe W. F.* A Simplified Model for Portfolio Analysis // Management Science. — 1963. — January. — P. 277—293.
141. *His as well*. Capital Asset prices: a Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk // Journal of Finance. — 1964. — 19 (3). — September. — P. 425—442.
142. *Tobin J*. The Theory of Portfolio Selection in F.H. Hahn and F.R.P. Brechling (eds). The Theory of Interest Rate. — London: Macmillan, 1965. — P. 3—51.
143. *Vince R*. Portfolio management formulas. — N. Y.: John Wiley, 1991.
144. *Zadeh L. A*. Fuzzy sets // Inform Control. — 1965. — Vol. 8. — P. 338—353.
145. *Zadehi F*. The Analytis Hierarchy Process — a. Survey of the Method and its Applications // Interfaces. — 1986. — Vol. 16. — P. 96—108.
146. *Zawadzka A*. Ryzyko bankowe. — Warszawa, 1995. — 124 s.