

11 ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВОГО ВАРІАНТУ ЗАЛІКОВОЇ РОБОТИ

Завдання № 1 Застосування простих і складних процентів в банківській практиці

Вклад в сумі 3246 грн. внесено в банк під 12,5% річних 29.04.11. Розрахувати та проаналізувати граничні суми виплат на дати вилучення 27.07.12 та 02.10.13 (365/360) при нарахуванні:

- а) простих процентів;
- б) складних процентів;
- в) неперервному нарахуванні процентів;
- г) капіталізації складних процентів 12 раз на рік.

Розв'язання.

Спочатку розрахуємо кількість днів при французькій практиці (365/360) на дати вилучення:

- з 29.04.11 по 27.07.12:

$$k_1 = 366 + 1 + 31 + 30 + 27 = 455 \text{ днів};$$

- з 29.04.11 по 02.10.13:

$$k_2 = 366 + 365 + 1 + 31 \cdot 3 + 30 \cdot 2 + 2 = 887 \text{ днів}.$$

Тоді граничні суми виплат на дати вилучення будуть

- а) при нарахуванні простих процентів:

$$S_1 = 3246 \left(1 + \frac{455}{360} \cdot 0,125 \right) = 3758,82 \text{ грн.},$$

$$S_2 = 3246 \left(1 + \frac{887}{360} \cdot 0,125 \right) = 4245,72 \text{ грн.};$$

- б) при нарахуванні складних процентів:

$$S_1 = 3246 \left(1 + \frac{12,5}{100} \right)^{\frac{455}{360}} = 3767,03 \text{ грн.},$$

$$S_2 = 3246 \left(1 + \frac{12,5}{100} \right)^{\frac{887}{360}} = 4338,93 \text{ грн.};$$

- в) при неперервному нарахуванні процентів:

$$S_1 = 3246 \cdot e^{0,125 \cdot \frac{455}{360}} = 3801,55 \text{ грн.},$$

$$S_2 = 3246 \cdot e^{0,125 \cdot \frac{887}{360}} = 4416,77 \text{ грн.};$$

- г) при капіталізації складних процентів 12 раз на рік.

$$S_1 = 3246 \left(1 + \frac{0,125}{12} \right)^{\frac{455}{12 \cdot 360}} = 3798,45 \text{ грн.},$$

$$S_2 = 3246 \left(1 + \frac{0,125}{12} \right)^{\frac{887}{12 \cdot 360}} = 4409,74 \text{ грн..}$$

Завдання № 2 Операції з валютою

Передбачається розмістити $P_{\text{дол.}} = 3,2$ тисяч доларів на гривневому депозиті. Курс продажу на початок строку депозиту $K_0 = 26,45$ грн. за 1 долар; курс покупки долара в кінці операції $K_1^{(1)} = 26,87$ ($K_1^{(2)} = 27,01$) грн. Процентні ставки $i_{\text{грн.}} \% = 12,5$, $i_{\text{дол.}} \% = 6,3$. Строк депозиту 18 місяців. Розрахувати кінцеву суму при подвійній конверсії та при прямому нарахуванні по валютній ставці простих та складних відсотків.

Необхідно розмістити на валютному депозиті суму в $P_{\text{грн.}} = 4,3$ тисячах грн., конвертувавши її попередньо в долари. Знайти нарощену вартість вкладів при подвійній конверсії та при прямому нарахуванні по гривневій ставці простих та складних відсотків.

Визначити вид найбільш вигіднішого розміщення вкладу для кожного з випадків.

Розв'язання.

Передбачається розмістити $P_{\text{дол.}} = 3,2$ тисяч доларів на гривневому депозиті. Проведемо розрахунок при нарахуванні простих відсотків:

– при подвійній конверсії **СКВ** → **грн.** → **грн.** → **СКВ**:

$$S_{v-1} = P_v \frac{K_0}{K_1^{(1)}} \left(1 + i \cdot \frac{m}{12} \right) = 3,2 \cdot \frac{26,45}{26,87} \left(1 + 0,125 \cdot \frac{18}{12} \right) = 3,7406 \text{ тис. доларів},$$

$$S_{v-2} = P_v \frac{K_0}{K_1^{(2)}} \left(1 + i \cdot \frac{m}{12} \right) = 3,2 \cdot \frac{26,45}{27,01} \left(1 + 0,125 \cdot \frac{18}{12} \right) = 3,7212 \text{ тис. доларів};$$

– при прямому нарахуванні по валютній ставці простих відсотків:

$$S_v = P_v \left(1 + i_v \cdot \frac{m}{12} \right) = 3,2 \cdot \left(1 + 0,063 \cdot \frac{18}{12} \right) = 3,5024 \text{ тис. доларів.}$$

Проведемо розрахунок при нарахуванні складних відсотків:

– при подвійній конверсії **СКВ** → **грн.** → **грн.** → **СКВ**:

$$S_{v-1} = P_v \frac{K_0}{K_1^{(1)}} (1 + i)^{\frac{m}{12}} = 3,2 \cdot \frac{26,45}{26,87} (1 + 0,125)^{\frac{18}{12}} = 3,7587 \text{ тис. доларів},$$

$$S_{v_2} = P_v \frac{K_0}{K_1^{(2)}} (1+i)^{\frac{m}{12}} = 3,2 \cdot \frac{26,45}{27,01} (1+0,125)^{\frac{18}{12}} = 3,7392 \text{ тис. доларів};$$

– при прямому нарахуванні по валютній ставці складних відсотків:

$$S_v = P_v \left(1 + i_v \cdot \frac{m}{12}\right) = 3,2 \cdot \left(1 + 0,063 \cdot \frac{18}{12}\right) = 3,5071 \text{ тис. доларів.}$$

Визначимо вид найбільш вигіднішого розміщення вкладу: подвійна конверсія **СКВ** → **грн.** → **грн.** → **СКВ** або пряме нарахування по валютній ставці простих та складних відсотків:

– при нарахуванні простих відсотків:

$$i_{d_1} = \frac{S_{v_1} - P_v}{P_v n} = \frac{3,7406 - 3,2}{3,2 \cdot \frac{18}{12}} = 0,1126,$$

$$i_{d_2} = \frac{S_{v_2} - P_v}{P_v n} = \frac{3,7212 - 3,2}{3,2 \cdot \frac{18}{12}} = 0,0278;$$

За умовою задачі, при нарахуванні простих відсотків доходність валютного депозиту 6,3%, доходність операцій з подвійною конверсією 11,26% та 2,78% відповідно. Отже, для першої операції вигідніша подвійна конверсія **СКВ** → **грн.** → **грн.** → **СКВ**, а для другої – доларовий депозит.

– при нарахуванні складних відсотків:

$$i_{d_1} = \frac{S_{v_1} - P_v}{P_v n} = \frac{3,7587 - 3,2}{3,2 \cdot \frac{18}{12}} = 0,11639,$$

$$i_{d_2} = \frac{S_{v_2} - P_v}{P_v n} = \frac{3,7392 - 3,2}{3,2 \cdot \frac{18}{12}} = 0,1123;$$

За умовою задачі, при нарахуванні складних відсотків доходність валютного депозиту 6,3%, доходність операцій з подвійною конверсією 11,64% та 11,23% відповідно. Отже, для обох операцій вигідніша подвійна конверсія **СКВ** → **грн.** → **грн.** → **СКВ**.

Передбачається розмістити $P_{\text{грн.}} = 4,3$ тисяч грн. на доларовому депозиті.

Проведемо розрахунок при нарахуванні простих відсотків:

– при подвійній конверсії **грн.** → **СКВ** → **СКВ** → **грн.**:

$$S_{ua_1} = P_{ua} \frac{K_1^{(1)}}{K_0} \left(1 + j \cdot \frac{m}{12}\right) = 4,3 \cdot \frac{26,87}{26,45} \left(1 + 0,063 \cdot \frac{18}{12}\right) = 4,7811 \text{ тис. грн.,}$$

$$S_{ua_2} = P_{ua} \frac{K_1^{(2)}}{K_0} \left(1 + j \cdot \frac{m}{12}\right) = 4,3 \cdot \frac{27,01}{26,45} \left(1 + 0,063 \cdot \frac{18}{12}\right) = 4,8060 \text{ тис. грн.};$$

– при прямому нарахуванні по валютній ставці простих відсотків:

$$S_{ua} = P_{ua} \left(1 + i_{ua} \cdot \frac{m}{12}\right) = 4,3 \cdot \left(1 + 0,125 \cdot \frac{18}{12}\right) = 5,1063 \text{ тис. грн.}$$

Проведемо розрахунок при нарахуванні складних відсотків:

– при подвійній конверсії **грн.** → **СКВ** → **СКВ** → **грн.**:

$$S_{ua_1} = P_{ua} \frac{K_1^{(1)}}{K_0} (1 + j)^{\frac{m}{12}} = 4,3 \cdot \frac{26,87}{26,45} (1 + 0,063)^{\frac{18}{12}} = 4,7875 \text{ тис. грн.},$$

$$S_{ua_2} = P_{ua} \frac{K_1^{(2)}}{K_0} (1 + j)^{\frac{m}{12}} = 4,3 \cdot \frac{27,01}{26,45} (1 + 0,063)^{\frac{18}{12}} = 4,8125 \text{ тис. грн.};$$

– при прямому нарахуванні по валютній ставці складних відсотків:

$$S_{ua} = P_{ua} (1 + i_{ua})^{\frac{m}{12}} = 4,3 \cdot (1 + 0,125)^{\frac{18}{12}} = 5,1309 \text{ тис. грн.}$$

Визначимо вид найбільш вигіднішого розміщення вкладу: подвійна конверсія **грн.** → **СКВ** → **СКВ** → **грн.** або пряме нарахування по валютній ставці простих та складних відсотків:

– при нарахуванні простих відсотків:

$$i_{d_1} = \frac{S_{ua_1} - P_{ua}}{P_{ua} n} = \frac{4,7811 - 4,3}{4,3 \cdot \frac{18}{12}} = 0,07459,$$

$$i_{d_2} = \frac{S_{ua_2} - P_{ua}}{P_{ua} n} = \frac{4,8060 - 4,3}{4,3 \cdot \frac{18}{12}} = 0,07845;$$

За умовою задачі, при нарахуванні простих відсотків доходність гривневого депозиту 12,5%, доходність операцій з подвійною конверсією 7,46% та 7,85% відповідно. Отже, вигідніше розмістити гривневий депозит.

– при нарахуванні складних відсотків:

$$i_{d_1} = \frac{S_{v_1} - P_v}{P_v n} = \frac{3,7587 - 3,2}{3,2 \cdot \frac{18}{12}} = 0,07558,$$

$$i_{d_2} = \frac{S_{v_2} - P_v}{P_v n} = \frac{3,7392 - 3,2}{3,2 \cdot \frac{18}{12}} = 0,07945;$$

За умовою задачі, при нарахуванні простих відсотків доходність гривневого депозиту 12,5%, доходність операцій з подвійною конверсією 7,56% та 7,95% відповідно. Отже, вигідніше розмістити гривневий депозит.

Завдання № 3 Розрахунок параметрів постійних рент

1) Розмір щорічних платежів 3246 грн., строк 5 років, проценти нараховуються по складній процентній ставці 12,5% річних. Знайти нарощену суму та сучасну вартість простих рент постнумерандо.

2) Знайти нарощену суму та сучасну вартість простих рент постнумерандо, якщо розмір щорічних платежів 3246 грн., строк 5 років, проценти нараховуються по складній процентній ставці 12,5% річних:

а) 4 рази на рік по ставці 3,125%;

б) 3 платежі на рік;

в) 4 рази на рік по ставці 3,125%, 3 платежі на рік.

3) Визначити розмір щорічних платежів в кінці року по складній процентній ставці 12,5% річних для накопичення через 5 років суми 41630 грн.

4) Визначити розмір щорічних платежів в кінці року по складній процентній ставці 12,5% річних для погашення впродовж 5 років боргу 41630 грн.

5) Розмір щорічних платежів – 3246 грн., складна процентна ставка – 12,5% річних, нарощена сума – 41630 грн. Визначити строки в днях ($T=360$) простих рент постнумерандо.

6) Розмір щорічних платежів – 3246 грн., складна процентна ставка – 12,5% річних, сучасна вартість – 4163 грн. Визначити строки в днях ($T=360$) простих рент постнумерандо.

7) Визначити під яку процентну ставку треба вносити щорічно 3246 грн., щоб через 5 років накопити суму 41630 грн. (для рент постнумерандо).

8) Визначити під яку процентну ставку треба вносити щорічно 3246 грн., щоб через 5 років погасити борг 4163 грн. (для рент постнумерандо).

Розв'язання.

1) Розмір щорічних платежів 3246 грн., строк 5 років, проценти нараховуються по складній процентній ставці 12,5% річних. Знайдемо нарощену суму простих рент постнумерандо:

$$S = R \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 3246 \cdot \frac{(1+0,125)^5 - 1}{0,125} = 20827,18 \text{ грн.}$$

та сучасну вартість простих рент постнумерандо:

$$A = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = 3246 \cdot \frac{1 - (1+0,125)^{-5}}{0,125} = 11557,60 \text{ грн.}$$

2) Знайдемо нарощену суму та сучасну вартість простих рент постнумерандо, якщо розмір щорічних платежів 3246 грн., строк 5 років, проценти нараховуються по складній процентній ставці 12,5% річних:

а) 4 рази на рік по ставці 3,125%:

$$S = R \frac{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} - 1}{i} = 3246 \cdot \frac{(1 + 0,03125)^{4 \cdot 5} - 1}{0,125} = 22084,69 \text{ грн.},$$

$$A = R \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{-mn}}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1} = 3246 \cdot \frac{1 - (1 + 0,03125)^{-4 \cdot 5}}{(1 + 0,03125)^4 - 1} = 11389,62 \text{ грн.};$$

б) 3 платежі на рік:

$$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1} = \frac{3246}{3} \cdot \frac{(1+0,125)^5 - 1}{(1+0,125)^{\frac{1}{3}} - 1} = 21672,27 \text{ грн.},$$

$$A = \frac{R}{p} \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1} = \frac{3246}{3} \cdot \frac{1 - (1+0,03125)^{-5}}{\sqrt[3]{1+0,03125} - 1} = 12026,57 \text{ грн.};$$

в) 4 рази на рік по ставці 3,125%, 3 платежі на рік.

$$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} = \frac{3246}{3} \cdot \frac{(1 + 0,03125)^{4 \cdot 5} - 1}{(1 + 0,03125)^{\frac{4}{3}} - 1} = 21971,05 \text{ грн.},$$

$$A = \frac{R}{p} \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{-mn}}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} = \frac{3246}{3} \cdot \frac{1 - (1 + 0,03125)^{-4 \cdot 5}}{(1 + 0,03125)^{\frac{4}{3}} - 1} = 11873,30 \text{ грн.}$$

3) Визначимо розмір щорічних платежів в кінці року по складній процентній ставці 12,5% річних для накопичення через 5 років суми 41630 грн.:

$$R = \frac{S}{s_{n,i}} = \frac{Si}{(1+i)^n - 1} = \frac{41630 \cdot 0,125}{(1+0,125)^5 - 1} = 6488,204 \text{ грн.}$$

4) Визначимо розмір щорічних платежів в кінці року по складній процентній ставці 12,5% річних для погашення впродовж 5 років боргу 41630 грн.

$$R = \frac{A}{a_{n,i}} = \frac{Ai}{1 - (1+i)^{-n}} = \frac{41630 \cdot 0,125}{1 - (1+0,125)^{-5}} = 11691,95 \text{ грн.}$$

5) Розмір щорічних платежів – 3246 грн., складна процентна ставка – 12,5% річних, нарощена сума – 41630 грн. Визначимо строки в днях ($T=360$) простих рент постнумерандо.

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{R}i + 1\right)}{\ln(1+i)} = \frac{\ln\left(\frac{41630}{3246} \cdot 0,125 + 1\right)}{\ln(1+0,125)} \cdot 360 = 2924 \text{ дні.}$$

6) Розмір щорічних платежів – 3246 грн., складна процентна ставка – 12,5% річних, сучасна вартість – 4163 грн. Визначимо строки в днях ($T=360$) простих рент постнумерандо.

$$n = \frac{-\ln\left(1 - \frac{A}{R}i\right)}{\ln(1+i)} = \frac{-\ln\left(1 - \frac{4163}{3246} \cdot 0,125\right)}{\ln(1+0,125)} \cdot 360 = 534 \text{ дні.}$$

7) Для визначення процентної ставки, під яку треба вносити щорічно 3246 грн., щоб через 5 років накопити суму 41630 грн. (для рент постнумерандо) необхідно розв'язати нелінійне рівняння:

$$41630 = 3246 \cdot \frac{(1+i)^5 - 1}{i}.$$

1 спосіб. Коренями будуть (Maple):

$$0.4848739136, -1.205126549 + 1.948468100i, -3.074620816, \\ -1.205126549 - 1.948468100i$$

Отже, $i = 0,48487$ або 48,49%.

2 спосіб. Згідно формулі $s_{n;i} = \frac{S}{R} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{41630}{3246} = 12,825$. Визначи-

мо $s_{n;i}$, для декількох довільних значень процентних ставок. Так для $i = 0,48$

$$s_{5;0,48} = \frac{(1+0,48)^5 - 1}{0,48} = 12,710.$$

Для $i = 0,49$

$$s_{5;0,49} = \frac{(1+0,49)^5 - 1}{0,49} = 12,947$$

Дійсне значення процентної ставки лежить в інтервалі $0,48 < i < 0,49$, так як $12,710 < 12,825 < 12,947$.

Знайдемо дійсне значення процентної ставки:

$$i = 0,48 + \frac{12,825 - 12,710}{12,947 - 12,710}(0,49 - 0,48) = 0,485.$$

Перевіримо правильність знаходження дійсної процентної ставки:

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{(1+0,485)^5 - 1}{0,485} = 12,825$$

Таким чином, процентна ставка повинна складати $i = 48,5\%$.

8) Для визначення процентної ставки, під яку треба вносити щорічно 3246 грн., щоб через 5 років погасити борг 4163 грн. (для рент постнумерандо) необхідно розв'язати нелінійне рівняння:

$$4163 = 3246 \cdot \frac{1 - (1+i)^{-5}}{i}.$$

1 спосіб. Коренями будуть (Maple):

$$0.7293089013, -0.8164538516 + 0.8260407451 I, -1.658337520 + 0.4430532736 I, \\ -1.658337520 - 0.4430532736 I, -0.8164538516 - 0.8260407451 I$$

Отже, $i = 0,7293$ або $72,93\%$.

2 спосіб. Згідно формулі $a_{n;i} = \frac{A}{R} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = \frac{4163}{3246} = 1,2825$. Визначи-

мо $a_{n;i}$, для декількох довільних значень процентних ставок. Так для $i = 0,74$

$$a_{5;0,74} = \frac{1 - (1+0,74)^{-5}}{0,74} = 1,267.$$

Для $i = 0,72$

$$a_{5;0,72} = \frac{1 - (1+0,72)^{-5}}{0,72} = 1,297$$

Дійсне значення процентної ставки лежить в інтервалі $0,72 < i < 0,74$, так як $1,267 < 1,2825 < 1,297$.

Знайдемо дійсне значення процентної ставки:

$$i = 0,72 + \frac{1,2825 - 1,267}{1,297 - 1,267}(0,74 - 0,72) = 0,7306.$$

Перевіримо правильність знаходження дійсної процентної ставки:

$$\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = \frac{1 - (1+0,7306)^{-5} - 1}{0,7306} = 1,2806$$

Таким чином, процентна ставка повинна складати $i = 73,06\%$.