

Лекція № 6

Аналіз просторових закономірностей стану довкілля. Еколого-картографічне моделювання

План

1. Принципи картографічного моделювання
2. Властивості карт як моделей
3. Поєднання карт з іншими моделями
4. Інформаційні властивості карт
5. Прикладні методики математико-картографічного моделювання

1. Принципи картографічного моделювання

У екологічній науці моделювання розуміється досить широко, як створення образу якого-небудь явища або процесу. Моделями в науках про взаємодію суспільства і природи служать географічні (геологічні, соціологічні і т.п.) описи, теорії і гіпотези, аеро- і космічні знімки, таблиці, профілі і діаграми, математичні і логічні формули, рівняння і символи. Особливе місце в переліку моделей стану довкілля займають екологічні карти. На сьогодні еколого-картографічне моделювання є одним із пріоритетних та перспективних напрямків моделювання та прогнозування стану довкілля. Моделюванням називають опосередковане практичне або теоретичне дослідження якого-небудь об'єкта або явища, при якому вивчається не сам об'єкт або явище, а якийсь його замітник: допоміжна штучна або природна система (Новик, Уємов, 1968; Берляндт, 1988). При цьому модель повинна знаходитися у визначеній об'єктивній відповідності з досліджуваним процесом або явищем, заміщаючи його на окремих етапах пізнання і даючи в кінцевому рахунку інформацію про сам модельований об'єкт.

У сучасній картографії *карти* найчастіше розглядаються як образно-знакові моделі, що відтворюють ту або іншу частину дійсності в схематизованій (генералізованій) і наочній формі. Картографічні моделі відбивають не тільки зовнішні форми, але також сутність явищ. Вони служать не тільки для реалізації накопичених знань (для передачі інформації), але також як засіб отримання нових знань. Поняття “картографічне моделювання” дозволяє охарактеризувати картографування і використання карт за допомогою загальних гносеологічних категорій, включити карти в клас моделей, розширити, доповнити і скорегувати картографічні методи, співвідносячи їх із загальнонауковими методами моделювання. З'являється можливість знайти оптимальні варіанти стикування з іншими видами моделювання (математичним, комп'ютерним і т.п.).

Картографічне моделювання – це створення, аналіз і перетворення картографічних творів як моделей об'єктів і процесів з метою їхнього використання для отримання нових знань про ці об'єкти і процеси. Самі *карти* розглядаються як математично визначені, просторові образно-знакові моделі дійсності. Картографічне моделювання — один із проявів загальнонаукового методу моделювання, тому воно спирається на його загальні принципи, переломлюючи їх згідно своїм можливостям та предмету пізнання (рис. 1, наводиться за []).



Рис. 1. Ієрархія принципів еколого-картографічного моделювання

Наведені на схемі (рис. 1) загальні принципи моделювання зазнали наукової конкретизації в картографії і тих науках, що користуються картографічною формою моделювання. Картографічне моделювання спирається на чотири основні принципи:

- математичної формалізації, що забезпечує перехід від сферичної поверхні планети до площини через картографічні проєкції;

- символізації, тобто використання систем умовних знаків;
- генералізації, що виявляється в доборі головного, істотного і його цілеспрямованому узагальненні згідно призначення, тематики і масштабу карти;
- системності, що визначає всі етапи складання і генералізації картографічного зображення, проектування легенд і знакових систем.

Серед інших принципів моделювання, що використовуються у науках про Землю і суспільство, найбільш істотні для картографування принцип системності, конкретизований стосовно просторових і часових характеристик геосистем, принцип історизму, що розкривається в порівняльному й актуалістичному підходах і т.д. Дуже важливим є також принцип ієрархічності класифікацій, адже таксономічні класифікації – основа для розробки легенд карт.

Таким чином, кожна конкретна картографічна модель реалізується на основі власне картографічних принципів моделювання і принципів моделювання, прийнятих у галузевих науках (умовно назвемо їх принципами тематичного моделювання). Складна ієрархія принципів моделювання, що визначають властивості карти як моделі, ілюструється схемою (мал. 2.1).

2. Властивості карт як моделей

Просторово-часова подібність. Існує кілька проявів подібності картографічного зображення і його реального прообразу []:

- а) геометрична подібність, що виявляється в подібності розмірів об'єктів картографування і їхніх зображень, що забезпечує точність вимірів по картах у межах можливостей даного масштабу, шкали, прийнятого січення;
- б) часова подібність, що означає адекватну передачу стану і розвитку явищ у даний (відображуваний на карті) момент часу;
- в) подібність відносин, що полягає в подібності зв'язків, територіальної співвідпорядкованості. взаємного розташування об'єктів.

Змістова відповідність – одна з найважливіших властивостей картографічної моделі. Вона передбачає науково обґрунтоване зображення явищ, їх головних типових особливостей з урахуванням генезису, ієрархії і внутрішньої структури. Змістова відповідність визначається рівнем вивченості явища, повнотою і достовірністю вихідної інформації, науково обґрунтованою методикою складання і правильною картографічною генералізацією. Змістова відповідність виявляється через ізоморфізм – однозначну відповідність моделі й об'єкта, що характерно для великомасштабних аналітичних карт, і гомоморфізм, коли одному об'єкту на карті відповідає деяка множина реальних об'єктів. В той же ж час карта містить елементи суб'єктивної інтерпретації дійсності, але це не можна розглядати як недолік, а, скоріше, як перевагу

карти. Адже такий підхід значною мірою захищає від формалізму, дозволяючи досвідченому спеціалісту-екологу використовувати свої знання і дані, що не піддаються формалізації.

Абстрактність. Найбільшою мірою абстрагуванню сприяє генералізація картографічного зображення – цілеспрямований добір, узагальнення, ідеалізація об'єктів, виключення незначних і малоістотних для даної карти деталей, акцентування уваги на головних рисах і т.д. Абстрактність картографічної моделі дає переваги, незамінні при дослідженні.

Вибірковість. Суть цієї властивості полягає в тому, що картографічна модель здатна роздільно відтворювати фактори, явища і процеси, що у реальній дійсності діють спільно. Узагалі будь-яка карта показує явища вибірково (селективно), але в найбільшій мірі цією властивістю володіють аналітичні карти. З їх допомогою можна розщеплювати взаємозв'язки, ніби “розкласти по полицках” і піддати аналізу самі складні екологічні явища та процеси.

Синтетичність картографічної моделі, навпаки, забезпечує цілісне зображення явищ і процесів, що у реальних умовах виявляються ізольовано. Картографічний синтез пов'язаний з введенням узагальнюючих понять, показників, умовних позначок, з розробкою синтетичних легенд.

Метричність – найбільш явна властивість карти, що забезпечується математичним законом проекції, точністю складання і відтворення карти. Масштаб, класифікації, шкали і градації умовних позначок дозволяють виконувати по картах усілякі виміри і визначення, а, зокрема:

- а) одержувати якісні характеристики;
- б) здійснювати виміри в абсолютному або відносному вираженні;
- в) вводити бальні оцінки, що носять проміжний характер між якісними і кількісними показниками.

Завдяки своїм метричним властивостям карти є основою для створення математичних моделей. Ближче усього до карт у цьому відношенні стоять космічні та аерофотознімки, фотограметричні моделі, графіки і схеми.

Наочність – прямий наслідок образного характеру картографічної моделі. Величезне значення наочності підтверджується на сьогодні оснащенням сучасних електронно-обчислювальних систем засобами візуалізації інформації, бурхливим розвитком ГІС-технологій. Властивості наочності позбавлені математичні і поняттєві моделі.

Оглядовість – найспецифічна властивість карти, що дозволяє досліднику охопити єдиним поглядом як завгодно великі простори. Саме завдяки цій властивості моделюються охоплюються головні властивості екосистем, причому інформація подається в систематизованому й формалізованому вигляді.

Однозначність зображення також впливає з математичного закону побудови карти. Цю властивість варто розуміти ширше, ніж просту взаємну

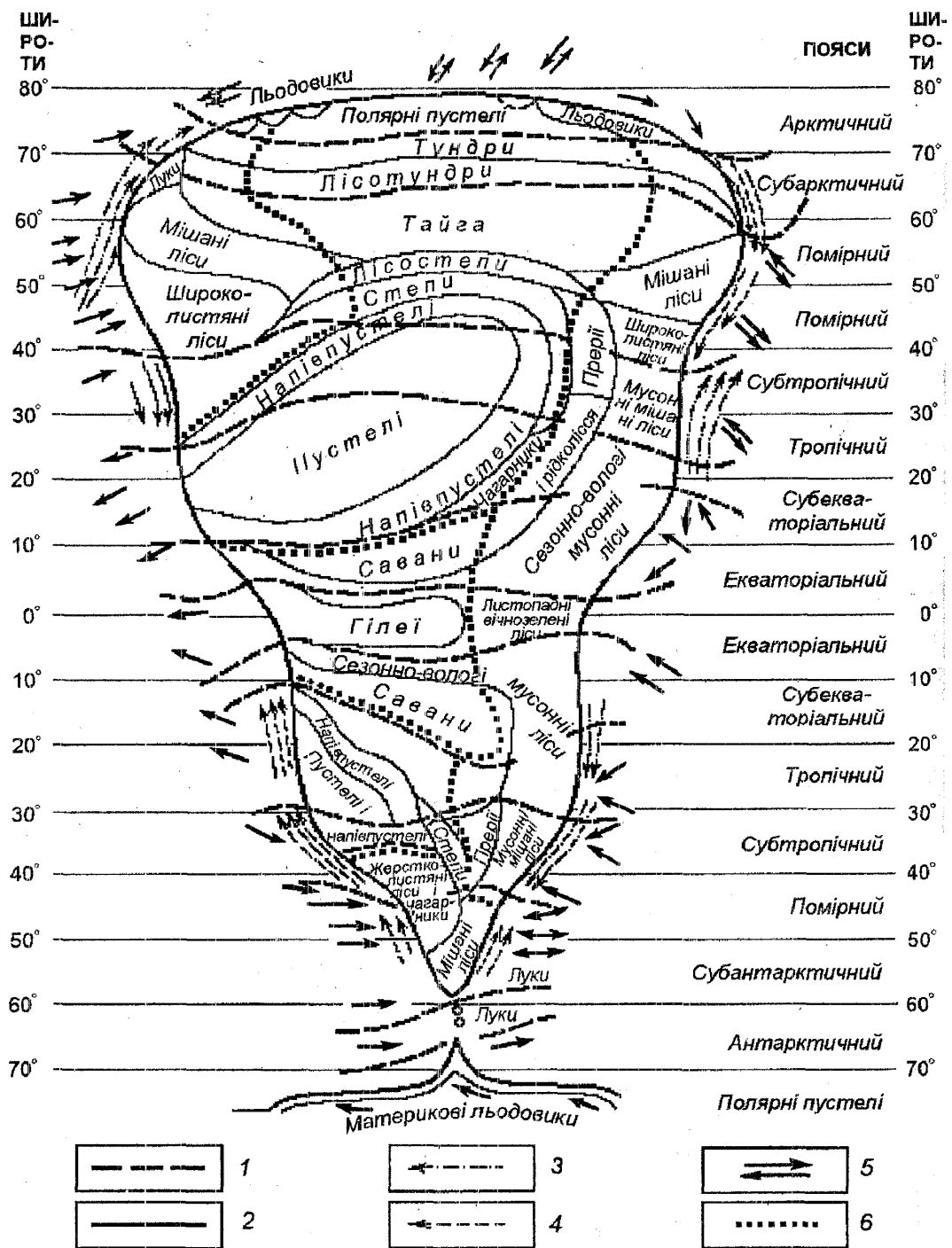
однозначну відповідність точок на карті і на земній поверхні, коли будь-якій крапці точці з координатами X и Y поставлено у відповідність лише одне значення (Z) картографованого показника: $Z = F(X, Y)$. Однозначність має й інше трактування. Справа в тім, що всякий знак, будь-яка точка, лінія або полігон на карті мають лише один, зафіксований у легенді, зміст.

Безперервність зображення. Математичне рівняння можна скласти тільки по окремих відомих значеннях, в описі або на схемі недосліджені місця опускаються. Для створення карти необхідно володіти даними для всієї території. Безперервність картографічного зображення – велика перевага лише у випадку досконалої вивченості території, але при недостатній або нерівномірній вивченості ця властивість може стати недоліком карти.

3. Поєднання карт з іншими моделями

Спільне застосування карт і інших моделей – характерна риса сучасних екологічних досліджень, особливо в тих випадках, коли мова йде про вивчення складних екосистем.

Типовий приклад цього – **теоретико-картографічне моделювання**, тобто поєднання образно-знакових картографічних моделей з ідеальними теоретичними. З одного боку, карти сприяють висуванню наукових концепцій і гіпотез, а з іншого – різного роду апріорні схеми, представлені в картографічній формі, отримують наочне “предметне” відображення. Саме таким шляхом перевіряють, конкретизують і коректують теорії, гіпотези, прогнози й екстраполяції, зіставляють їх з фактичними картами, аеро- і космічними зображеннями або з об'єктами, що реально існують у природі. Абстрактні картографічні моделі дуже зручні для відпрацювання принципів і методики дослідження. Вони дають можливість поставити дослід в контурному, базовому вигляді, а потім, змінюючи просторові умови, ускладнюючи модельне зображення, уводячи нові фактори й аномалії, моделювати на картах екстремальні ситуації, що не зустрічаються в реальній дійсності, наприклад, в цілях прогнозу стану довкілля.



Умовні позначення:

1. межі поясів; 2. межі зональних типів ландшафтів; 3. Теплі течії;
4. холодні течії; 5. переважаючі напрямки вітрів; 6. межі секторів

Рис. 2. Схема розміщення географічних поясів та природних зон на гіпотетичному (ідеальному) материкау, обриси якого відповідають розподілу суші за відповідними географічними широтами, а гори умовно відсутні (за О. Рябчиковим)

Яскравим прикладом ідеальної теоретико-картографічної моделі є карта так званих "ідеальних материків" (рис. 2). Вона прекрасно передає асиметрію

розподілу суші і моря на земній кулі, що зручно для теоретичного аналізу глобальної широтної зональності, меридіональної секторності й інших природних закономірностей. З даною картою добре узгоджуються ідеальні ґрунтово-геохімічні поля, що дозволяє порівнювати і аналізувати з прийнятливою точністю територіальну складову сучасних передумов геоекологічної ситуації, вмісту та міграції хімічних елементів (в т.ч. і полютантів) та інш. Такі абстрактні і спрощені моделі можна далі порівнювати з реальними ситуаціями в Євразії, Північній і Південній Америці, відзначаючи при цьому “аномальні” особливості, пов’язані з площею і конфігурацією кожного реального материка, його географічним положенням і орографією, розміщенням постійних і сезонних центрів дії атмосфери, пануючих вітрів (в т.ч. і транскордонного переносу) і морських течій.

Теоретико-картографічне моделювання дозволяє:

- а) аналізувати й упорядковувати властивості реальних об’єктів дійсності;
- б) відбирати (виділяти) властивості, істотні з теоретичної точки зору, і будувати моделі, що володіють цими властивостями;
- в) аналізувати і порівнювати ідеальні моделі з реальними об’єктами, виділяти нормальні й аномальні фактори;
- г) створювати і розвивати подільші теоретичні напрацювання;
- д) уточнювати й удосконалювати послідовними наближеннями саму

теоретико-картографічну модель.

Експериментально-картографічне моделювання. Якщо взаємодія картографічних і теоретичних моделей здійснюється на рівні високої абстракції й ідеалізації досліджуваного об’єкта, то спільне застосування карт і фізичних, лабораторних моделей дозволяє реалізувати найбільш конкретне, предметне дослідження. У цьому випадку карта стає засобом точного кількісного аналізу результатів моделювання. Наприклад, при дослідженні на лабораторних моделях механізму ерозійної діяльності, сучасних несприятливих геологічних процесів (в т.ч. і антропогеннозумовлених), при оцінці екологічних умов гідроекосистем, при аналізі впливу того чи іншого підприємства на стан оточуючого середовища складаються карти, що фіксують різні стадії експерименту.

На рис. 3 представлені карти послідовних етапів формування перекатів, утворення піщаних гряд і улоговин, їх зміщення по руслу при лабораторному моделюванні в лотку. Це ніби серія дуже докладних різночасних карт (січення рельєфу русла — 1 см), по яких дуже зручно простежити й оцінити картометрично динаміку руслових процесів.

Точно так само, комбінуючи лабораторні моделі і карти, простежують і вимірюють динаміку ярів, масштаби дефляції ґрунтів, зміни поверхневого та

підземного стоку, забруднення поверхневих, підземних вод, ґрунтів, атмосфери, динаміку лісових масивів, величини антропогенного навантаження та інші екологічні процеси.

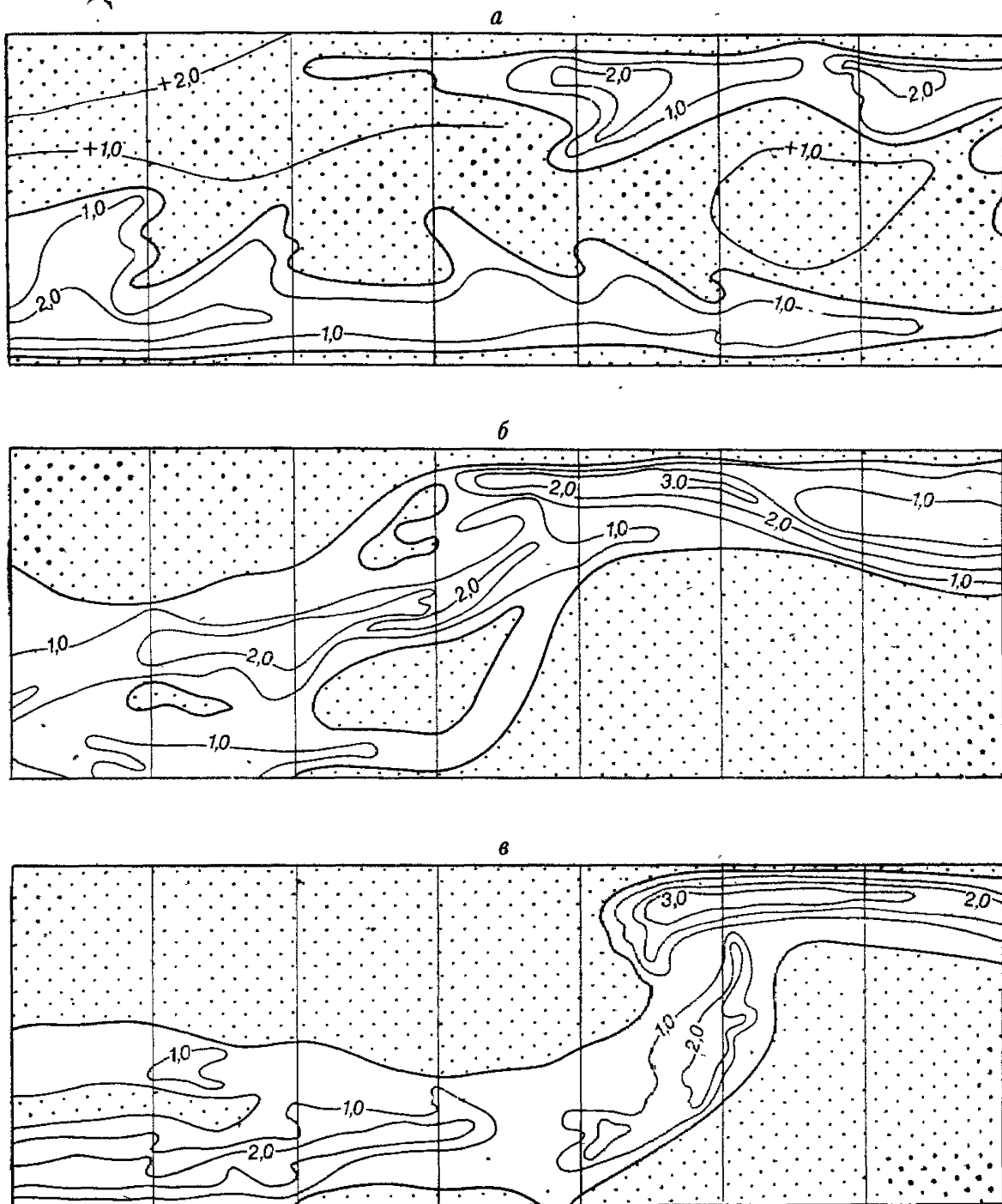


Рис. 3. Картографічне відображення результатів моделювання руслових процесів у лабораторному лотку. Сезонні переміщення перекату (запозичено з роботи Берлянта А.М., 1988):

а – весняна повінь; б – початок літньої межені; в – кінець літньої межені

Окремо слід згадати високу пізнавальну ефективність математико-картографічного моделювання, що використовує сильні сторони математичних і картографічних моделей у процесі аналізу і синтезу багатофакторної і різнорідної просторово-тимчасової інформації (Жуков, 1980). Картографічна інтерпретація математичних розрахунків приводить їх до виду, оптимального для дослідження, попереджує помилки і прорахунки, дозволяє оцінити точність математичного моделювання і його еколого-географічну достовірність. Найбільш глибоко особливості даного виду моделювання розглянуті і в роботі []. В цій праці В.Т. Жуков, С.Н. Сербенюк, В.С. Тікунов (1980) пропонують конкретні прикладні методики побудови кореляційних, регресійних, факторних, таксономічних моделей та перспективи автоматизації процесів математико-картографічного моделювання.

Спільне використання карт і математичних моделей вплинуло не тільки на картографію, але і на математизацію всієї екологічної науки, перш за все, шляхом:

- а) модифікації математичних понять і термінів відповідно до картографічної термінології;
- б) перетворення математичного апарату з урахуванням просторових властивостей карти;
- в) розробку способів картографічного відображення й аналізу математичних моделей.

4. Інформаційні властивості карт

Карта як модель має високу інформативність. Однак у розумінні сутності і властивостей картографічної інформації немає єдності. В загальному випадку під картографічною інформацією розуміють зміст карти, відомості, укладені в ній і одержувані по карті, кількість умовних позначок, ймовірність появи того або іншого знака, їх розманітність, спосіб графічної передачі тематичного змісту і т.п.

Важливою характеристикою карти є її інформаційна ємність. Для оцінки інформаційної ємності карти використовується формула ентропії К. Шеннона:

$$H = \sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i ,$$

де p_i – ймовірність появи i -того знаку на карті. Пр отриманні інформації з декількох карт ця формула набуває вигляду (Curry, 1972):

$$H = \sum_{q=1}^Q \sum_{i=1}^n p_{iq} \log_2 p_{iq}$$

де $q = 1, 2, \dots, Q$ – карти різної тематики, різночасні або різного масштабу, а p_{iq} – ймовірність появи i -го знаку на q -ій карті.

Для неперервних картографічних зображень (наприклад, для карт ізоліній) існує інша ймовірнісна модель, відповідно до якої карта розглядається як безліч елементарних комірок ΔS із щільністю розподілу імовірностей $p(S)$. Тоді ентропія виражається функцією:

$$H' = \int p(S) \log_2 p(S) \Delta S dS$$

причому рівняння для H і H' не виводяться одне з іншого.

Крім ймовірнісно-статистичного підходу до оцінки кількості картографічної інформації застосовується комбінаторний підхід. Суть його полягає у врахуванні числа знаків на карті, кількості їх характеристик, градацій, дат (або періодів), співвідношення тематичного змісту з географічною основою і т.п. Згідно цього підходу кількість інформації розраховується як:

$$I_s = \log_2 \left(\sum_{k=1}^n R_k N_k \prod_{i=1}^{m(k)} D_{k,i} \right)$$

де n – число знаків, що позначають види територіальних об'єктів; $m(k)$ – число характеристик знаків; N_k – число знаків, що позначають об'єкт кожного виду; $D_{k,i}$ – градації i -тої характеристики k -того виду; R_k – дата для кожного знаку об'єкта. У цій формулі враховані комбінації якісних, кількісних і тимчасових характеристик знаків, однак не прийняті в увагу їхні територіальні зв'язки і просторові поєднання.

І ймовірнісний і комбінаторний підходи до інформаційної ємності карти мають визначений сенс, якщо мова йде про оцінку навантаження карти. Однак інформація, що одержує читач (споживач карти), не може бути зведена тільки до навантаження. Карта на відміну від інших засобів комунікації дає не просто послідовність сигналів (знаків), а безліч знаків одночасно, що створює можливість їхньої просторової комбінації, тобто додавання, взаємного перекриття, сусідства, об'єднання, перетинання і т.п. У цьому принципову відмінність карти від інших засобів комунікації.

Для формування картографічних образів використовуються усі графічні засоби: форма, структура, орієнтування знаків, колір, відтінки кольору і т.д. Застосовуються способи поєднання (накладення і перетину) знаків, упорядкування й групування, використовуються різні інформативні плани, коли одні образи виступають у якості головних і “повідомляються” читачу в першу чергу, а інші як би “відтираються” на другий план.

5. Прикладні методики математико-картографічного моделювання

Формалізоване картографічне зображення будується на доволі жорсткій математичній основі (назвемо її умовно проекцією), по суті, вже пристосовано для математичного аналізу. Як уже зазначалось вище, кожній точці карти з координатами x і y поставлено у відповідність лише одне значення картографованого явища z , а це дозволяє розглядати зображення даного явища як функцію $z = F(x, y)$. Багато явищ, показані на картах, реально зв'язані між собою функціональними або статистичними залежностями, інші – можуть бути умовно представлені як функції простору і часу. Ці залежності складні, різноманітні і не завжди досить вивчені, але для їх аналізу вдається застосувати формальний математичний апарат, абстрагуючись від малоістотних деталей, ставлячи задачі з певними обмеженнями, апроксимуючи складні і невідомі функції простішими.

У принципі майже всі розділи сучасної математики застосовні для обробки картографічного зображення. Однак деякі розділи математики застосовуються традиційно більш інтенсивно і ефективно.

Прийоми математичного аналізу.

Апроксимації. Найбільш розроблений і широко застосовується для роботи з картами апарат теорії апроксимації, що дозволяє аналітично описувати поверхні і виконувати дії з ними. Апроксимація – це наближення, спрощення реальних складних залежностей, заміна невідомих функцій відомими.

Будь-яку складну і неправильну поверхню, зображену на карті і задовольняючому рівнянню $z = F(u, v)$, можна апроксимувати, тобто приблизно представити функцією виду:

$$z = F(u, v) + \varepsilon,$$

де ε – залишок, що не піддається апроксимації.

Функцію $f(u, v)$ можна також розкласти в ряд, представивши рівняння поверхні у вигляді:

$$z = f_1(u, v) + f_2(u, v) + \dots + f_n(u, v) + \varepsilon$$

де $f_i(u, v)$ – компоненти розкладання, що описують апроксимуючу поверхню, які є невідомими. Визначення їхніх чисельних величин здійснюється за умови мінімізації квадратів відхилень апроксимуючої поверхні від вихідної:

$$\sum_{i=1}^m \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^m [F(u_i, v_i) - f(u_i, v_i)]^2 = \min$$

де $i=1, 2, \dots, m$ – число точок на карті, у яких визначені відхилення. Існують різні способи апроксимації в залежності від конкретних задач дослідження і застосовуваного математичного апарату.

Апроксимація за допомогою алгебраїчних багаточленів. У цьому випадку функція $f(u, v)$ розкладається по ступенях координат u і v :

$$f(u, v) = A_{00} + A_{10}u + A_{01}v + A_{20}u^2 + \dots + A_{mn}u^m v^n,$$

де A_{rs} – коефіцієнти членів розкладання з координатами u у ступені r і v в ступені s , які невідомі. Для обчислення коефіцієнтів з вихідної карти знімають ряд значень z_i , після чого складається система рівнянь, розв'язуваних спільно способом найменших квадратів.

Апроксимація за допомогою ортогональних алгебраїчних багаточленів відрізняється від попереднього способу тим, що апроксимуюче рівняння знаходять не у вигляді сум степенів координат u і v , а за допомогою систем лінійно незалежних ортогональних багаточленів (поліномів) $\varphi_r(u)$ і $\varphi_s(v)$, перший з яких залежить тільки від координат u , а другий – тільки від координат v ; r і s – індекси, що вказують степінь поліномів, що приймають значення $0, 1, 2, \dots, m$ і $0, 1, 2, \dots, n$.

Апроксимуюче рівняння записується у вигляді

$$\bar{z} = f(u, v) = \sum_{r=0}^m \sum_{s=0}^n A_{rs} \varphi_r(u) \varphi_s(v)$$

Точність апроксимації оцінюється по формулі середньої квадратичної помилки:

$$\mu = \pm \frac{\sum_{i=1}^m \epsilon_i^2}{mn}$$

Інші види апроксимацій. У якості апроксимуючих можна брати будь-які відомі алгебраїчні або тригонометричні функції, що володіють тими або іншими корисними властивостями або задовольняють які-небудь апріорно задані умови, або полегшують обчислення. Наприклад, якщо потрібно отримати лише позитивні значення z , то доцільно застосувати експонентний поліном:

Прийоми математичної статистики

Прийоми математичної статистики призначені для вивчення по картах просторових і тимчасових статистичних сукупностей і утворених ними статистичних поверхонь. Статистичними сукупностями називаються масові, якісно однорідні множини випадкових величин або явищ. Терміном “випадкові” позначають такі величини і явища, що складним чином залежать від багатьох факторів і сумарний ефект їхньої взаємодії (результат) не можна прогнозувати з повною впевненістю, а лише з деякою імовірністю. На картах статистичні сукупності утворюють статистичні поверхні – якийсь статистичний

рельєф, який зображується ізолініями або картографіями.

Статистична обробка картографічного зображення переслідує головним чином три завдання:

- 1) вивчення характеристик і функцій розподілу явища;
- 2) вивчення форми і тісноти зв'язку між явищами;
- 3) оцінка ступеня впливу окремих факторів на досліджуване явище і виділення ведучих факторів

Для **характеристики розподілу явища** на карті використовуються різні узагальнюючі статистики. До них відносяться середні величини і показники різноманитності. Із середніх найбільш уживані мода, медіана, середня арифметична і середня зважена арифметична, а з набору показників різноманітності найпоширенішими є розмах, середнє квадратичне відхилення, дисперсія і коефіцієнт варіації.

Оцінка форми і тісноти зв'язку між явищами. Для характеристики взаємозв'язку явищ, зображених на картах різної тематики, використовується апарат кореляційного аналізу. Кореляційний аналіз створює основу і для більш складних видів аналізу: регресійного, дисперсійного, факторного і ін.

Найбільш популярний коефіцієнт кореляції r , що характеризує зв'язок між двома явищами A і B , якщо цей зв'язок близький до прямолінійного. Числові значення r можуть змінюватись від -1 до $+1$. При $r = +1$ або $r = -1$ існує функціональний прямий або зворотний зв'язок. Коли r близький до 0 , то зв'язок між явищами відсутній. При $r > |0,7|$ зв'язок вважається істотним.

Для розрахунку коефіцієнта кореляції, як і інших показників зв'язку, необхідно сформувати дві вибірки з порівнюваних карт. З цією метою на карти поординатно поміщають сітки рівновіддалених точок і в кожній точці знімають значення a_i і b_i . Перш ніж приступити до визначення тісноти зв'язку, необхідно мати уявлення про форму зв'язку, для чого доцільно побудувати графік, відкладаючи по осях значення a_i і b_i . Точки на графіку утворять поле кореляції, по виду якого судять про тісноту і форму зв'язку. Якщо точки дають великий розкид, розташовуються безсистемно, то це свідчить про відсутність зв'язку між явищами. Якщо ж поле кореляції витягнуте у вигляді більш-менш вузької смуги, значить зв'язок між явищами існує, причому чим вузьча ця смуга, тим зв'язок сильніший.

Якщо смуга кореляції наближається до лінійної форми, то зв'язок між явищами можна оцінити коефіцієнтом кореляції. У випадках, коли поле кореляції явно скривлене, необхідно обчислити кореляційне відношення.

Коефіцієнт кореляції розраховується по формулі:

$$r = \sum_{i=1}^n \frac{(a_i - M_a)(b_i - M_b)}{n \sigma_a \sigma_b}$$

де M_a і M_b – середні арифметичні для явищ A і B ; $\sigma_a\sigma_b$ – середні квадратичні відхилення для явищ A і B ; n – число пар даних, отриманих з карт.

Наближене значення середньої квадратичної помилки коефіцієнта кореляції підраховують по формулі

$$m_r = \frac{1-r^2}{\sqrt{n}}$$

У випадках, коли зв'язок між явищами має явно криволінійний характер, обчислюють кореляційне відношення

Оцінка факторів. При екологічному аналізі даних, узятих з карт, завжди можна виділити ряд факторів, що викликають варіабельність пов'язаних з ними явищ та ознак. Наприклад, кліматичні показники впливають на розсіювання забруднюючих речовин поблизу конкретного джерела викидів та на певній відстані від нього, геологічна будова і літологічний склад порід певної території, в значній мірі визначає особливості міграції поллютантів та наявність і масштаби геохімічних бар'єрів, тип ґрунту впливає на потенціал його самовідновлення тощо.

Оцінка впливу тих або інших факторів (груп факторів) на мінливість середніх значень досліджуваного явища і є задачею **дисперсійного аналізу**. З цією метою дисперсія вибіркової сукупності розкладається на складові, обумовлені дією різних факторів. Кожна складова дає оцінку дисперсії в загальній сукупності. Перевірка значимості цих оцінок виконується за допомогою таблиць статистики F , що розраховується теоретично. Якщо значення F , отримане в результаті обчислень, виявиться менше табличного, то це значить, що немає основ вважати вплив досліджуваного фактора істотним. Якщо ж розрахункове значення F більше табличного, то цей вплив можна вважати істотним.

Розрахункове значення F отримується за формулою:

$$F = \frac{\sigma_n^2}{\sigma_0^2}$$

де σ_n^2 – дисперсія, обумовлена явищем досліджуваного фактора, а σ_0^2 – залишкова дисперсія, що характеризує вплив всіх інших причин. Значення сум квадратів відхилень знаходяться по наступних робочих формулах:

$$S = \sum_1 a^2 + \sum_2 a^2 - \frac{(\sum a_1 + \sum a_2)^2}{n_1 + n_2}$$

$$S_n = \frac{(\sum a_1)^2}{n_1} + \frac{(\sum a_2)^2}{n_2} - \frac{(\sum a_1 + \sum a_2)^2}{n_1 + n_2}$$

$$S_0 = S - S_n,$$

де a_1 і a_2 – значення, що відносяться до випадкового і досліджуваного факторів, а n_1 і n_2 – їх число у вибірці.

Ступені свободи визначаються за формулою:

$$\chi = n_1 + n_2 - 1$$

$\chi_n = 1$ (число досліджуваних факторів мінус одиниця)

$$\chi_0 = n_1 - 1 + n_2 - 1 = n_1 + n_2 - 2$$

Оцінки дисперсій одержують по формулах

$$\sigma^2 = \frac{S}{\chi}; \quad \sigma_n^2 = \frac{S_n}{\chi_n}; \quad \sigma_0^2 = \frac{S_0}{\chi_0}$$

У ході дисперсійного аналізу можна не тільки оцінити істотність впливу фактора на мінливість досліджуваної ознаки, але також оцінити у відсотках частку, внесену цим фактором у загальне варіювання. Для цього береться відношення факторіальної і залишкової суми квадратів відхилень до суми квадратів відхилень, що характеризує загальне розсіювання:

$$\text{вплив факторів, включених у модель: } N = \frac{S_n}{S} 100\%$$

$$\text{вплив залишкових факторів: } O = \frac{S_0}{S} 100\%$$

Одним з видів багатомірного статистичного аналізу є **факторний аналіз**, що дозволяє виділити один або кілька головних факторів, які чинять основний вплив на вислідну ознаку. Рівняння факторного аналізу має вигляд

$$a_p = \sum_{r=1}^k l_{pr} f_r + e_p$$

де a_p – вихідні показники; f_r – виділені головні фактори, що дають синтетичну оцінку досліджуваного явища; l_{pr} – «вага» кожного фактора в синтетичній оцінці (так зване “факторне навантаження”) і e_p – залишок, що характеризує невраховані відхилення.

Факторний аналіз ґрунтується на дослідженні кореляційної матриці між багатьма показниками (10-30 і більше), що впливають на досліджуване явище. У ході аналізу виділяють кілька головних факторів (три-чотири), що узагальнюють вплив окремих вихідних показників. Потім дається змістовна теоретична інтерпретація виявлених головних факторів.

Аналогічні задачі вирішуються і за допомогою **компонентного аналізу**,

що відрізняється від факторного тим, що в ньому не розглядаються залишки, оскільки загальна дисперсія змінних цілком вичерпується встановленими компонентами. Компонентний аналіз має переваги перед факторним, тому що не ставить умови випадковості розподілу вихідних показників. Головні компоненти — це лінійні комбінації вихідних показників, що описуються рівнянням:

$$K_r = \sum_{p=1}^m l_{pr} a_p$$

де K_r – r -та компонента; l_{pr} – вага показника a_p у r -тій компоненті; $p = 1, 2, \dots, m$ і $r = 1, 2, \dots, m$.

Ця група прийомів використовується для оцінки ступеня однорідності і взаємної відповідності явищ, досліджуваних по картах.

Одна із останніх тенденцій еколого-картографічного моделювання – використання в прикладних дослідженнях прийомів **теорії інформації**. Теорія інформації – це математична дисципліна, що широко використовує ймовірнісні підходи. У еколого-картографічній найчастіше використовується основна функція теорії інформації – ентропія. У математичній теорії інформації ця функція служить мірою невизначеності випадкового експерименту. Широкі пізнавальні можливості функції ентропії привернули до неї увагу екологів, і тепер ентропія застосовується для вивчення організації біогеоценозів, диференціації території, аналізу мереж розселення, установалення різноманітних екологічних взаємозв'язків.

Поки що на жаль не існує універсальних методик, які б пов'язали поняття ентропії з кількістю картографічної інформації. Тому при аналізі карт використовується більше логарифмічна функція ентропії, що володіє корисними властивостями. Ентропією $E(A)$ деякої системи A називається сума добутків ймовірностей (ω_i) різних станів цієї системи на логарифми ймовірностей, узяті зі зворотним знаком:

$$E(A) = E(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n) = - \sum_{i=1}^n \omega_i \log_2 \omega_i$$

У теорії інформації для розрахунків прийнято брати логарифм

імовірностей за основою 2, що пов'язано з використанням двійкової системи числення. Зміст функції ентропії не зміниться, якщо користуватися десятковими або натуральними логарифмами.