



ТЕМА 4

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МОДЕЛІ У ЛОГІСТИЧНИХ БІЗНЕС-ПРОЦЕСАХ

Основні поняття: модель оптимального розміру замовлення, витрати на виконання замовлення, витрати на зберігання запасу, загальні витрати, формула Уілсона, модель з розривами цін, багатопродуктова модель з обмеженими ресурсами, функція Лагранжа, множника Лагранжа, багатомономенклатурна модель, оптимальний період між замовленнями

План

1. Основна модель економічного розміру замовлення EOQ (Economic Order Quantity).
2. Модель економічного розміру замовлення з розривами цін.
3. Багатопродуктова модель з обмеженими ресурсами.
4. Багатомономенклатурна модель EOQ.

Питання №1

Основна модель економічного розміру замовлення EOQ (Economic Order Quantity)

Найбільш поширеною моделлю прикладної логістики є модель оптимального або економічного розміру замовлення EOQ (Economic Order Quantity). Розрахунок EOQ здійснюється на основі сумарних загальних витрат, які можна представити у вигляді функції:

$$C_{\Sigma} = C_{\text{Придб}} + C_{\text{Замовл}} + C_{\text{Збер}} + C_{\text{Д}}. \quad (4.1)$$

Витрати на придбання $C_{\text{Придб}}$ визначаються вартістю одиниці продукції; в свою чергу, вартість може бути постійною або змінною при обліку оптових знижок, які залежать від обсягу замовлення.

Витрати на оформлення (виконання) замовлення $C_{\text{Замовл}}$ являють собою постійні витрати, які пов'язані з розміщенням замовлення у постачальників і його транспортуванням. Вважається, що витрати не залежать від обсягу замовлення.

Витрати на зберігання запасів $C_{\text{Збер}}$ містять витрати на утримання і вантажопереробку запасу на складі; витрати містять як відсоток на інвестований капітал, так і вартість зберігання, утримання і догляду.

Витрати від дефіциту запасу $C_{\text{Д}}$ включають, по-перше, потенційні втрати прибутку через відсутність запасу, по-друге, можливі втрати через втрату довіри покупців.

Очевидно, що облік різної кількості складових у формулі (4.1) призводить до багатоваріантності розрахункових формул для визначення

оптимального розміру замовлення EOQ. Розглянемо основну модель розрахунку оптимального розміру замовлення.

При формуванні основної моделі EOQ як критерій оптимізації приймається мінімум загальних витрат, що включають витрати на виконання замовлення і витрати на зберігання запасу на складі протягом певного періоду часу (рік, квартал тощо):

$$C_{\Sigma} = C_{\text{замовл}} + C_{\text{збер}} = \frac{C_0 S}{q} + C_u i \frac{q}{2} \rightarrow \min, \quad (4.2)$$

де C_0 – витрати на виконання одного замовлення (гр. од.);

S – потреба у замовленні продукту протягом даного періоду (шт., т);

C_u – ціна одиниці продукції, що зберігається на складі (гр. од.);

i – частка від ціни, що припадає на витрати по зберіганню (%);

q – шукана величина замовлення (шт., т).

Витрати на виконання замовлення із збільшенням розміру замовлення зменшуються, підкоряючись гіперболічній залежності; витрати на зберігання партії поставки зростають прямопропорційно розміру замовлення; крива загальних витрат має увігнутий характер, що говорить про наявність мінімуму, який відповідає оптимальній партії q_{opt} .

Оптимальна величина замовлення розраховується за формулою:

$$q_{opt} = \sqrt{\frac{2C_0 S}{C_u i}}. \quad (4.3)$$

При цьому мінімальні сумарні витрати за аналізований період складатимуть

$$C_{min} = \sqrt{2C_0 S C_u i}. \quad (4.4)$$

Формула (4.3) зустрічається в різних джерелах під такими назвами: Уїлсона (найбільш поширена) або Вільсона, Харріса, Кампа.

Формула (4.3) одержана при великій кількості припущень:

- витрати на виконання замовлення C_0 , ціна продукції C_u і витрати на зберігання одиниці продукції протягом аналізованого періоду постійні;
- період між замовленнями (поставками) постійний, тобто $T = \text{const}$;
- замовлення q_{opt} виконується повністю миттєво;
- інтенсивність попиту $\lambda = \frac{q_{opt}}{T}$ – постійна;
- ємність складу не обмежена;
- розглядаються тільки поточні (регулярні) запаси, інші види запасів (страхові, підготовчі, сезонні, транзитні та ін.) не враховуються [3, 5].

Тракування витрат C_0 , пов'язаних із замовленням, носить дискусійний характер. Так, в більшості випадків C_0 включає транспортно-заготівельні витрати: від витрат на укладання договору і пошуку постачальників до оплати послуг з доставки. Наприклад, витрати на постачання одиниці продукту, що замовляється, включають наступні елементи:

- вартість транспортування замовлення;
- витрати на розробку умов поставки;
- вартість контролю виконання замовлення;
- вартість оформлення документів тощо.

В інших випадках, наприклад, транспортні витрати не входять у C_0 і представлені у вигляді додаткових складових: витрат на транспортування і витрат, пов'язаних із запасами під час доставки.

Ще один варіант обліку транспортних витрат полягає в тому, що вони враховуються у вартості одиниці продукції, що надійшла на склад. Якщо покупець сам оплачує транспортні витрати і несе повну відповідальність за вантаж у дорозі, то при оцінці вартості товарів, що зберігаються на складі як запаси, до їх закупівельної ціни слід додати транспортні витрати.

У той же час навіть при дотриманні усіх обмежень припущення, які прийняті при виведенні формули Уїлсона, вимагають уточнення витрат на зберігання.

У моделі (4.2) передбачається, що оплата за зберігання одиниці продукції пропорційна її ціні, а середня кількість продукції, яка перебуває на зберіганні, при постійній інтенсивності попиту за певний період часу дорівнює

$$\bar{q} = \frac{q}{2}. \quad (4.5)$$

Однак практика оренди складських приміщень, а також розрахунки витрат на зберігання на складах фірм говорять про те, що, як правило, враховується не середній розмір партії, а площа (або об'єм) складу, яка потрібна для всієї партії:

$$C_{збер} = \alpha k q, \quad (4.6)$$

де α – витрати на зберігання продукції з урахуванням займаної площі (обсягу) складу за певний період, гр. од./ м² на добу (гр. од./ м³ на добу);

k – коефіцієнт, який враховує просторові габарити одиниці продукції, м²/шт. (м³/шт.).

Підставляючи (4.6) у формулу (4.2), отримаємо

$$C_{\Sigma} = \frac{C_0 S}{q} + \alpha k q \rightarrow \min. \quad (4.7)$$

Використовуючи стандартну процедуру і необхідні перетворення, знаходимо оптимальний розмір замовлення

$$q_{opt} = \sqrt{\frac{C_0 S}{\alpha k}}. \quad (4.8)$$

Величина мінімальних витрат розраховується за формулою

$$C_{min} = 2 \sqrt{C_0 S \alpha k}. \quad (4.9)$$

Питання №2

Модель економічного розміру замовлення з розривами цін

Не менш важливою умовою, яку необхідно враховувати при розрахунку ЕОQ, є знижки. Відомо, що при покупці партії товару більшість фірм надає знижки, величина яких залежить від розміру замовлення q . Для визначення ЕОQ у випадку надання знижок можна використовувати такий підхід:

1. Для кожного рівня ціни за формулою Уїлсона (4.3) розраховують розмір замовлення:

2. Одержані розміри замовлення перевіряють на оптимальність: якщо рівень замовлення попадає в інтервал надання знижки, то він є оптимальний для даного рівня ціни. В іншому випадку як оптимальний розмір замовлення беруть нижню границю інтервалу надання знижки.

3. Для кожного рівня ціни і відповідного йому рівня замовлення розраховують загальні витрати на замовлення, зберігання запасу та закупівлю за формулою:

$$C_{\Sigma} = C_{\text{замовл}} + C_{\text{зберіг}} + C_{\text{закуп}} = \frac{C_0 S}{q} + C_u i \frac{q}{2} + C_u S \rightarrow \min. \quad (4.10)$$

Оптимальним розміром замовлення (ЕОQ) є той, при якому витрати на виконання замовлення, зберігання запасу на складі і закупівлю товару будуть мінімальними.

Приклад. Обсяг продажів магазину складає 200 одиниць товару на рік. Вартість подачі кожного замовлення складає 380 у.о., а витрати на зберігання складають 20% від закупівельної ціни. Якщо величина замовлення менше 50 одиниць товару, то закупівельна ціна однієї одиниці товару складає 7000 у.о. У тому випадку, коли величина замовлення коливається від 50 до 99 одиниць, надається знижка 5% від закупівельної ціни. Замовленням, величина яких складає 100 і більше одиниць товару, відповідає знижка в 7%. Визначити оптимальну величину замовлення.

Таблиця 4.1 – Ціна одиниці товару в залежності від розміру замовлення

Розмір замовлення, од.	Знижка, %	Ціна одиниці продукції, у.о.
1-49	0	7000
50-99	5	6650
100 і більше	7	6510

1. Використовуючи формулу Уїлсона (4.3), розрахуємо розмір замовлення для кожного рівня ціни.

$$\text{а) } C_u = 7000 \text{ у.о.} \quad q_{opt} = \sqrt{\frac{2C_0 S}{C_u i}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 380 \cdot 200}{7000 \cdot 0,2}} \approx 10 \text{ од.}$$

$$\text{б) } C_u = 6650 \text{ у.о.} \quad q_{opt} = \sqrt{\frac{2C_0 S}{C_u i}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 380 \cdot 200}{6650 \cdot 0,2}} \approx 11 \text{ од.}$$

$q = 11$ од. не є оптимальним розміром замовлення, оскільки не попадає в інтервал надання знижки 50-99 од. Таким чином, як оптимальний розмір

замовлення для цього рівня ціни беремо нижню границю інтервалу надання знижки, тобто $q_{opt} = 50$ од.

$$\text{в) } C_u = 6510 \text{ у.о.} \quad q_{opt} = \sqrt{\frac{2C_0S}{C_{ui}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 380 \cdot 200}{6510 \cdot 0,2}} \approx 11 \text{ од.}$$

$q = 11$ од. не є оптимальним розміром замовлення, оскільки не попадає в інтервал надання знижки 100 і більше од. Таким чином, як оптимальний розмір замовлення для цього рівня ціни беремо нижню границю інтервалу надання знижки, тобто $q_{opt} = 100$ од.

2. Для кожного рівня ціни і відповідного йому рівня замовлення розрахуємо загальні витрати за формулою (4.10):

$$\text{а) } C_u = 7000 \text{ у.о.} \quad q = 10 \text{ од.}$$

$$C_{\Sigma} = \frac{380 \cdot 200}{10} + 7000 \cdot 0,2 \cdot \frac{10}{2} + 7000 \cdot 200 = 760 + 7000 + 1400000 = 1407760 \text{ у.о.}$$

$$\text{б) } C_u = 6650 \text{ у.о.} \quad q = 50 \text{ од.}$$

$$C_{\Sigma} = \frac{380 \cdot 200}{50} + 6650 \cdot 0,2 \cdot \frac{50}{2} + 6650 \cdot 200 = 1520 + 33250 + 1330000 = 1364770 \text{ у.о.}$$

(min)

$$\text{в) } C_u = 6510 \text{ у.о.} \quad q = 100 \text{ од.}$$

$$C_{\Sigma} = \frac{380 \cdot 200}{100} + 6510 \cdot 0,2 \cdot \frac{100}{2} + 6510 \cdot 200 = 760 + 65100 + 1302000 = 1367860 \text{ у.о.}$$

Як можна бачити, мінімальні загальні витрати будуть при розмірі замовлення $q = 50$ од., який є оптимальним за даних умов.

Питання №3

Багатопродуктова модель з обмеженими ресурсами

При виведенні формул (4.3)–(4.4) вважалося, що кожен вид продукції не залежить від інших і зберігається на складі самостійно. Однак для промислових підприємств, а також підприємств оптової та роздрібної торгівлі умови незалежності видів продукції можуть бути порушені. Основними причинами виникнення взаємозв'язку між видами продукції, що поставляються на склад, є наступні обмеження:

- максимальний розмір капіталу B , який передбачається вкласти в запаси;
- площа (об'єм) складу, де розміщуються одночасно N видів продукції;
- верхня межа загального числа замовлень за певний період та ін.

Розглянемо спочатку задачу, яка враховує обмеження на максимальний розмір капіталу.

1) На першому етапі розв'язання задачі розраховуються оптимальні партії поставок q_{opti} по кожному i -му виду продукції за формулою (4.3).

2) На другому етапі порівнюються витрати, пов'язані з запасами продукції і капіталом B , виділеним на придбання продукції:

$$\sum_{i=1}^N C_{ui} q_{opti} \leq B. \quad (4.11)$$

Якщо нерівність (4.11) виконується, то поставки здійснюються в обсягах, які розраховуються за формулою (4.3).

Відповідно витрати на виконання замовлення і зберігання при багатопродуктовій поставці визначаються за формулою:

$$C_{\Sigma} = \sum_{i=1}^N \sqrt{2C_{0i}S_iC_{ui}\beta}, \quad (4.12)$$

де β – частка від ціни C_{ui} , що припадає на витрати по зберігання.

3) Третій етап, коли нерівність (4.11) не виконується. Для розрахунку оптимальних значень q_{opti} застосовується метод множників Лагранжа. Функція Лагранжа записується у вигляді:

$$C_{\Sigma} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{C_{0i}S_i}{q_i} + C_{ui}\beta \frac{q_i}{2} \right) + z(B - \sum_{i=1}^N C_{ui}q_i) \rightarrow \min, \quad (4.13)$$

де z – невизначений множник Лагранжа, $z \leq 0$.

Оптимальні значення q_{opti} визначаються за формулою

$$q_{opti} = \sqrt{\frac{2C_{0i}S_i}{C_{ui}(\beta - 2z^*)}}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.14)$$

де z^* – таке значення множника z , при якому виконується рівність (4.11).

Для визначення множника Лагранжа z використовуються різні методи. Перший, найбільш поширений, базується на чисельному методі розв'язання. Другий дає рішення у вигляді:

$$z^* = \frac{\left[\beta - \left(\frac{V}{B} \right)^2 \right]}{2}, \quad (4.15)$$

де $V = \sum_{i=1}^N \sqrt{2C_{0i}S_iC_{ui}}$.

Сумарні витрати, які включають витрати на придбання запасів B , витрати на виконання замовлення і зберігання запасів, будуть дорівнювати

$$C_{\Sigma}^* = B + \sum_{i=1}^N \sqrt{2C_{0i}S_iC_{ui}} \left(\frac{\beta - z}{\sqrt{\beta - 2z}} \right). \quad (4.16)$$

На підставі значень q_{opti} (4.14) здійснюються розрахунки кількості поставок N_i і періодичності поставок T_i протягом аналізованого періоду D для кожного виду продукції:

$$N_i = \frac{S_i}{q_{opti}}, \quad (4.17)$$

$$T_i = \frac{D}{N_i}. \quad (4.18)$$

Питання №4
Багатономенклатурна модель ЕОQ

При наявності на складі постачальника широкої номенклатури продукції (товарів) постає питання про можливу організацію одночасної поставки споживачу n товарних груп. Аргументами на користь об'єднання різних товарних груп в одне замовлення є:

- вимога постачальника про вартість кожного замовлення не нижче деякої граничної величини;
- реалізація повного завантаження використовуваних транспортних засобів;
- обмеження кількості відправлень та їх періодичності кожному клієнту (синхронізація поставок);
- зниження витрат на організацію, комплектацію партій, що постачаються клієнту.

Розглянемо складову витрат, пов'язану з багатономенклатурною поставкою від одного партнера. Очевидно, ці витрати можна представити у вигляді двох складових: постійної C_0 (яка визначається, головним чином, вартістю транспортування) і змінної C_i , що залежить від обсягу виконуваних на складі операцій при формуванні замовлення. Тоді для кожної i -ї номенклатури витрати, які пов'язані з організацією однієї поставки, визначатимуться за формулою [3]

$$C_i^* = C_0 + C_i, \quad (4.28)$$

а для всієї номенклатури у вигляді однієї поставки:

$$C^*(n) = C_0 + \sum_{i=1}^n C_i = \sum_{i=0}^n C_i. \quad (4.29)$$

При одночасному постачанні n позицій номенклатури періодичність T відрізнятиметься від оптимальних періодів незалежних поставок T_i по кожній позиції.

Основне рівняння для сумарних витрат i -ої позиції запишеться у вигляді

$$C_{\Sigma i} = \frac{(C_0 + C_i)S_i}{q_i} + C_{xi} \frac{q_i}{2} \rightarrow \min. \quad (4.30)$$

Величину поставки i -ої позиції номенклатури можна визначити за формулою (4.31):

$$q_i = T_i \frac{S_i}{D}. \quad (4.31)$$

При підстановці (4.31) у формулу (4.30) маємо

$$C_{\Sigma i} = D \frac{(C_0 + C_i)}{T_i} + \frac{C_{xi} T_i S_i}{2D} \rightarrow \min. \quad (4.32)$$

За умови одночасної поставки n позицій номенклатури $T_i = T$. Рівняння для сумарних витрат можна представити у вигляді

$$C_{\Sigma} = \frac{D}{T} \sum_{i=0}^n C_i + \frac{T}{2D} \sum_{i=1}^n S_i C_{xi} \rightarrow \min. \quad (4.33)$$

Оптимальне значення періодичності багатноменклатурної поставки T_{opt}^* визначатиметься за формулою (4.34):

$$T_{opt}^* = D \sqrt{\frac{2 \sum_{i=0}^n C_i}{\sum_{i=1}^n S_i C_{xi}}}, \quad (4.34)$$

а кількість поставок – за формулою (4.35)

$$N^* = \frac{D}{T_{opt}^*}. \quad (4.35)$$

При підстановці значення T_{opt}^* (4.34) у формулу (4.33) після перетворень одержимо вираз для визначення величини мінімальних сумарних витрат:

$$C_{\Sigma n}^* = \sqrt{2 \sum_{i=0}^n C_i \sum_{i=1}^n S_i C_{xi}}. \quad (4.36)$$

При розрахунку багатноменклатурних поставок особливого значення набуває урахування обмежень, пов'язаних з обсягом (площею) і вантажопідйомністю транспортних засобів, об'ємом (площею) складських приміщень, наявністю коштів для придбання всієї партії тощо.

У загальному вигляді урахування обмежень зазначених параметрів здійснюється за допомогою формули

$$T_V = \frac{G_V}{\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i}, \quad (4.37)$$

де G_V – граничні значення фізичного або економічного показника;

$\lambda_i = \frac{S_i}{D}$ – інтенсивність споживання (витрати) i -го продукту (од./добу);

a_i – фізичний або економічний показник i -го продукту.

Якщо період багатноменклатурної поставки $T_{opt}^* \leq T_V$, то її параметри розраховуються за формулами (4.34) – (4.36).

Якщо $T_{opt}^* > T_V$, то як розрахунковий період приймається T_V і здійснюється коректування N^* , q_i^* і $C_{\Sigma}^*(T_V)$ за формулами:

$$N^* = \frac{D}{T_V}, \quad (4.38)$$

$$q_i^* = T_V \frac{S_i}{D}, \quad (4.39)$$

$$C_{\Sigma}^*(T_V) = \frac{D}{T_V} \sum_{i=0}^n C_i + \frac{T_V}{2D} \sum_{i=1}^n S_i C_{xi}. \quad (4.40)$$

За наявності декількох обмежуючих критеріїв вибір варіанта здійснюється за формулою:

$$T_V^* = \min (T_V, T_r, T_h, \dots), \quad (4.41)$$

де T_V, T_r, T_h – періоди часу, розраховані за формулою (4.37) з урахуванням різних критеріїв: обсяг, вага, витрати тощо.