Лекція 5

СКЛАДАННЯ РІВНЯНЬ РУХУ СИСТЕМИ. ВИЗНАЧЕННЯ ОСНОВНИХ ХАРАКТЕРИСТИК МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ. СТІЙКІСТЬ СТАНІВ РІВНОВАГИ Й РУХИ

Способи складання рівнянь руху

Прямий спосіб. По цьому способі маси подумки відокремлюють від безмасового силового каркаса (пружного кістяка) системи й для кожної з них записують диференціальні рівняння руху, причому дія відкинутих пружних зв'язків заміняють їхніми реакціями. Цей спосіб зручний у тих випадках, коли реакції зв'язків (сили пружності й в'язкості) не занадто складно виражаються через характерні переміщення й швидкості.

Зворотний спосіб. Ідея полягає в тому, що всі маси системи відокремлюють від її безмасового силового каркаса й аналізують його деформації під дією заданих зовнішніх сил (пара) і сил інерції (моментів сил інерції) відділених мас.

Зворотний спосіб зручний при аналізі вільних і змушених коливань багатомасових систем.

333.1 Основне рівняння вільних коливань лінійної системи

Розглянемо найпростіший випадок, типовий для системи з одним ступенем свободи без дисипації енергії (рис. 3.1).

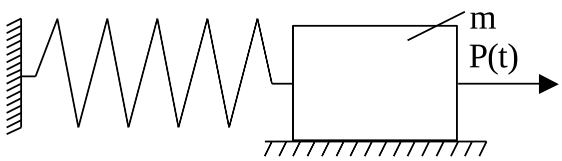


Рисунок 3.1 – Розрахункова схема лінійної системи

Допустимо, що збудлива сила P(t) відсутня, але стан рівноваги будь яким способом було порушено й потім система була надана самої собі. Рух, що відбувається в таких умовах, і являє собою вільні коливання.

Для визначення руху необхідно задатися початковим зсувом x_0 і по чатковою швидкістю V_0 (початковими умовами):

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0; \quad \boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_0 \quad \text{при} \quad t=0. \tag{3.1}$$

У будь-який момент руху на вантаж m діє горизонтальна реакція пружини –cx.

Диференціальне рівняння руху

$$m\ddot{x} + cx = P(t) \tag{3.2}$$

приймає вид

$$m\ddot{x} + cx = 0; \quad \ddot{x} + (c/m)x = 0;$$
$$\ddot{x} + p^2 x = 0, \tag{3.3}$$

де p – постійна, залежна від властивостей системи:

$$p = \sqrt{c/m}\,. \tag{3.4}$$

Рішення рівняння (3.3) можна представити у вигляді

$$x = C_1 \sin(pt) + C_2 \cos(pt) \tag{3.5}$$

або
$$x = A \sin(pt + \alpha)\,. \tag{3.6}$$

Постійні C_1 й C_2 визначаються з початкових умов:

$$C_1 = V_0 / p; \quad C_2 = x_0\,,$$

так що $x = x_0 \cos(pt) + (V_0 / p) \sin(pt)$. (3.7)

Аналогічно

$$A = \sqrt{x_0^2 + (V_0 / p)^2}; \quad \alpha = \operatorname{arctg}(p x_0 / V_0)\,, \tag{3.8}$$

де A – амплітуда коливань;

α – початкова фаза коливань.

Із закону руху (3.6) видно, що рух являє собою гармонійні коливання (рис. 3.2).

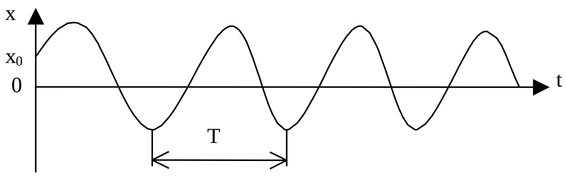


Рисунок 3.2 – Приклад осцилограми гармонійних коливань

Гармонійні коливання характеризуються тим, що повторення процесу починається після такого проміжку часу T (період коливань), після закінчення якого аргумент $(pt+\alpha)$(фаза коливань) збільшиться на 2π. Звідси

$$T = 2\pi / p\,.$$

Тоді число коливань в одиницю часу, тобто частота коливань, $f = 1/T = p/2\pi$, а фізичний зміст постійної p – число коливань в 2π одиницю часу (кутова частота коливань).

З виразу (3.4) видно, що частота p залежить від параметрів системи й не залежить від характеру початкового збурювання, що викликали коливальний процес. За цією ознакою кутову частоту вільних коливань називають власною частотою.

У загальному випадку власна частота системи визначається по формулі

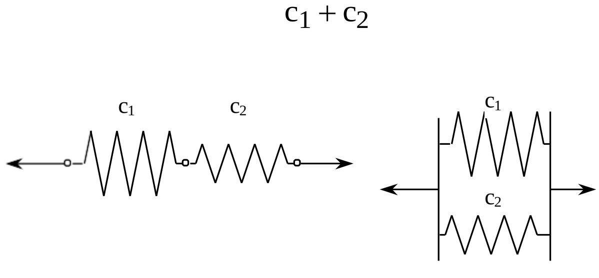
$$p = \sqrt{c/a}\,, \tag{3.9}$$

де a – коефіцієнт інерції (іноді називають наведеною масою);

c – узагальнений коефіцієнт твердості.

Якщо пружний зв'язок утворений декількома пружинами, то загальний коефіцієнт твердості підвісу для схем з послідовним розташуванням пружин (рис. 3.3, а).

$$c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} \tag{3.10}$$



а) б)

а – послідовне з’єднання; б – паралельне з’єднання

Рисунок 3.3 – Приклади систем з різним розташуванням пружин

Для схем з паралельним розташуванням пружин (рис. 3.3, б)

$$c = c_1 + c_2 . \tag{3.11}$$

Коефіцієнти твердості з визначають методами теорії опору матеріалів.

Стійкість станів рівноваги й режимів руху

Розрізняють стійкий і нестійкий стан рівноваги системи. Для рішення питання про стійкість стану потрібно досліджувати наслідок можливості порушення цього стану, тобто вивчити загальні властивості руху, що виникає після яких-небудь малих початкових збурювань стану рівноваги. Такий стан називається обуреним.

Нестійкий стан – стан, при якому система, роблячи обурений рух, віддаляється від стану рівноваги.

Стан вважається стійким, якщо при обуреному русі система залишається в безпосередній близькості від рівноважного стану або поступово до нього наближається.

У механічних системах часто нормальним станом є стаціонарний режим руху. Для таких систем стійкість визначається загасаючим характером додаткового руху, викликаного миттєвими збурюваннями. Якщо додатковий рух веде систему від стаціонарного режиму руху, то режим уважається нестійким.

Для консервативних механічних систем з кінцевим числом ступенів свободи стійкість визначається по теоремі Лагранжа-Діріхле. Відповідно до цієї теореми система стійка, якщо в стані рівноваги її потенційна енергія має мінімум.

Стосовно до консервативних систем з одним ступенем свободи ознакою мінімуму потенційної енергії є позитивність коефіцієнта твердості с.

Для консервативних систем зі ступенем свободи більше одиниці мінімуму потенційної енергії відповідає система нерівностей (критерій Сильвестра):

$$c_{11} > 0; \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0; \ldots; \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix} > 0 . \tag{3.12}$$

Якщо система не має властивість консервативності, то для дослідження стійкості необхідно досліджувати характер обуреного руху. Звичайно для перевірки стійкості немає необхідності вивчати обурений рух у всіх подробицях. Досить обмежитися аналізом початку процесу обуреного руху (коли у зв'язку з малістю відхилень рівняння лінійно).

Література [1, с.13-50]; [3, с. 22-46; 124-131].