МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

О.В. КАПУСТЯН
О. В. ПЕРЕГУДА
В. В. СОБЧУК

ЗАДАЧІ З ПАРАМЕТРАМИ

Методичні вказівки
для проведення практичних занять

КИЇВ 2023

Рецензенти:

доктор фізико-математичних наук О.А. Бурилко
кандидат фізико-математичних наук О.В. Борисейко

Затверджено
вченою радою механіко-математичного факультету
(протокол № 9 від 16 лютого 2023 року)

Перегуда О.В.
Задачі з параметрами: метод. вказівки. / О.В. Капустян, О. В. Перегуда, В.В. Собчук. Електронне видання, 2023 - 62 с.

У методичних вказівках для проведення практичних занять “Задачі з параметрами”, що відповідають загальноосвітнім стандартам, викладено основні методи розв’язання рівнянь та нерівностей з параметрами. Основною метою методичних вказівок є демонстрація використання різнопланових методів дослідження та знаходження розв’язків рівнянь та нерівностей, що містять параметри, формування у студентів теоретичних знання і практичних навичок для аналізу досліджуваного об'єкта, розробки обґрунтованих рішень та рекомендацій.

Рекомендовано для студентів математичних та педагогічних спеціальностей.

ЗМІСТ

Передмова 4

1 Лінійні рівняння та системи лінійних рівнянь з параметром 7

2 Квадратні рівняння, системи квадратних рівнянь та нерівності з параметром 13

3 Ірраціональні рівняння та нерівності з параметрами 24

4 Тригонометричні рівняння та нерівності з параметрами 33

5. Графічний метод розв’язання рівнянь та нерівностей з параметрами 40

6. Вправи для самостійного розв’язування 50

Література 62

ПЕРЕДМОВА

Задачі з параметрами є одним з найважчих та найцікавіших розділів курсу “Практикум розв’язування олімпіадних задач”. Розв’язування задач цього типу по сутті це є дослідження функцій, що входять в умову задачі, і подальше розв’язання рівнянь або нерівностей з числовими коефіцієнтами.

При розв’язуванні рівнянь (нерівностей) з параметрами потрібно з’ясувати, при яких значеннях параметра задане рівняння (нерівність) має розв’язок, і знайти всі ці розв’язки. У випадку, коли хоча б одне з допустимих значень параметра не досліджено, задача не вважається повністю розв’язаною.

Протягом тривалого часу задачі з параметрами входили в екзаменаційні білети з математики для абітурієнтів вищих навчальних закладів, а в останні роки такі задачі пропонуються й при складанні ЗНО.

Для вивчення даного матеріалу, що вимагає великої кількості часу; крім того, перш ніж приступати до розв’язання подібних задач студент повинен досконало оволодіти загальним курсом елементарної математики. Проте необхідність у проведенні досліджень значно ускладнює розв’язань цього типу задач.

Розв’язування задач з параметрами потребує знань властивостей елементарних функцій (область визначення, множина значень, проміжки зростання і спадання функції), властивостей рівнянь (рівносильність та нерівносильність перетворень), вміння проводити дослідження, не випускаючи ніяких випадків. Крім того, для застосування графічних методів потрібні вміння виконувати побудову графіків функції та проводити графічні дослідження, що відповідають різним значенням параметра.

Мета даної методичної розробки у систематизації методів розв'язування задач з параметром, що можуть мати олімпіадний характер. Також запропонована система задач з параметрами для різних розділів елементарної математики та запропоновані аналітичні способи досліджень при розв'язанні рівнянь та нерівностей з параметрами.

Якщо в процесі навчання математики використовувати системи задач з параметрами, які містить їх як моделі реальних систем і процесів, їх дослідження, а також узагальнення математичних задач і тверджень, реалізуючи при цьому дидактичні та психологічні принципи розвиваючого навчання, то це буде сприяти інтелектуальному розвитку студентів, підвищенню їх інтересу до математики як навчального предмета, розвитку дослідницьких умінь і загального рівня математичної підготовки.

Неважко розв'язати таку нову задачу, яка схожа на розв'язану раніше. Однак задачі з параметрами часто не схожі одна на одну і за аналогією їх розв'язувати не завжди є змога.

Розв'язування задач з параметрами розвиває абстрактне мислення, спонукає до пошукової діяльності, формує навички аналізу. Це важливо для математичного розвитку особистості –

якості, що застосовується під час розв’язування прикладних задач з фізики, інформатики, економіки тощо.

Задачі з параметрами відіграють важливу роль у формуванні логічного мислення й математичної культури, але знаходження розв’язків та дослідження таких рівняннь викликає значні труднощі. Це пов'язане з тим, що кожне рівняння з параметрами являє собою цілий клас звичайних рівнянь, для кожного потрібно знайти розв’язок.

Лінійні рівняння та системи лінійних рівнянь з параметром

Розв'язування рівнянь та нерівностей з параметрами визначається залежно від допустимих значень параметрів. Параметр – величина, числові значення якої дають можливість виділити певний елемент з множини елементів того ж виду.

При розв'язуванні прикладів з параметром, який надалі будемо позначати літерою a, слід пам'ятати, що існує дві постановки цих задач.

Перша постановка: для кожного можливого значення параметра знайти усі розв'язки заданого рівняння або нерівності.

Друга постановка: знайти усі значення параметра, при кожному з яких розв'язки рівняння існують або задовольняють заданим умовам.

Розв'язати рівняння або нерівність з параметром – знайти для довільного припустимого значення a множину усіх коренів заданого рівняння. Одним з алгоритмів розв'язування таких задач є наступний:

- спочатку знайти інтервали змінювання параметра a, на кожному з яких задане рівняння розв'язується певним методом;
- знайти розв'язки рівняння на кожному отриманому проміжку.

У відповіді вказують інтервали змінювання параметра і відповідні розв'язки рівняння.

Означення. Рівнянням з параметрами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ називаємо рівняння виду

$$F(x, a_1, a_2, \ldots a_n) = 0, \qquad (1)$$

де x — шукана невідома (змінна).

Значення параметрів $a_1, a_2, \ldots, a_n$ при яких вираз $F(x, a_1, a_2, \ldots a_n)$ є визначеним при деяких значеннях x, називають допустимими. Множину всіх допустимих систем значень параметрів рівняння (1) називають областю зміни параметрів цього рівняння.

Розв'язати рівняння з параметрами означає знайти всі розв'язки цього рівняння для кожної допустимої системи значень параметрів.

При дослідженні та знаходженні розв'язків рівняння (1) зазвичай необхідно:

1) визначити область допустимих значень параметрів $a_1, a_2, \ldots, a_n$;

2) розв'язати рівняння (1) відносно змінної x $x = f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$;

3) з'ясувати, при яких допустимих значеннях параметрів значення функції $x = f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ є розв'язками даного рівняння;

4) розглянути інші можливі значення параметрів для яких зміна x приймає інші значення на відміну від $x = f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Рівняння виду $ax+b=0$, де x — невідома, a,b — параметри, називають лінійним рівнянням з параметрами.

Розглянемо можливі випадки дослідження цього рівняння:

Якщо $a \neq 0$, то рівняння (2) має єдиний розв'язок $x=-\frac{b}{a}$.

Якщо $a=0, b=0$, то рівняння (2) має безліч розв'язків.

Якщо $a=0, b \neq 0$, то рівняння (2) не має розв'язків.

Приклад 1.1. Дослідити наявність розв'язків рівняння $(b^2-1)x=b^2+2b-3$ в залежності від значень параметра b.

Розв'язання. Використовуючи схему дослідження лінійного рівняння, маємо:

$$\begin{cases} b^2-1=0, \\ b^2+2b-3=0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} (b-1)(b+1)=0, \\ (b-1)(b-3)=0. \end{cases}$$

Якщо $b \neq 1$ та $b \neq -1$, то рівняння має єдиний розв'язок $x=\frac{b-3}{b+1}$.

Якщо $b=1$, то рівняння має безліч розв'язків.

Якщо $b=-1$, то рівняння не має розв'язків.

Приклад 1.2 Визначити розв'язки рівняння $\frac{1}{x}=\frac{b}{a-x}$ відносно параметрів a та b.

Розв'язання.

1. Область допустимих значень невідомого x і параметрів: $x \neq 0, \quad a \neq 0$.

Перетворивши рівняння, маємо $a-x=bx$, $(b+1)x=a$.

2. Якщо $b=-1$ і $a=0$ одночасно, то рівняння має безліч

розв'язків, тобто рівняння справджується для будь – яких значень x, що входять до області допустимих значень.

3. Якщо $b=-1$ і $a\neq 0$ одночасно, то рівняння набуває вигляду $0x=a$. Рівняння немає розв'язків.

4. Якщо $b\neq -1$, то рівняння має єдиний розв'язок $x=\dfrac{a}{b+1}$.

Перевіримо, при яких значеннях параметрів a і bутворений розв'язок задовольняє рівняння.

Виходячи з умови, $x\neq 0$ та $a-x\neq 0$,маємо $a\neq 0$ та $b\neq 0$.

Отже при $a\neq 0$ та $b\neq 0$ маємо єдиний розв'язок рівняння $x=\dfrac{a}{b+1}$.

Дослідити систему рівнянь що залежить від параметрів означає встановити наступне:

- чи є система *сумісною* і *визначеною,* тобто має єдиний розв'язок, і при яких умовах;

знайти розв'язок та записати його вираз через параметри системи;

- чи є система *несумісно,* тобто немає розв'язків, і при яких умовах;
- чи є система *сумісною* і *невизначеною*, тобто має безліч розв'язків і при яких умовах.

Розглянемо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

де x, y — невідомі; a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 — параметр.

1. Якщо $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_1}$, то система має єдиний розв'язок. Графіки рівнянь, що входять у систему, мають одну спільну точку, координати якої є розв'язком системи.

2. Якщо $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, то система не має розв'язків. Графіки рівнянь при цьому є взаємно паралельними прямими.

Якщо $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, то система рівнянь має безліч розв'язків. Графіки рівнянь збігаються.

Приклад 1.3. При якому значенні параметра a система $\begin{cases} ax + 3y = 9 \\ 12x + ay = 18 \end{cases}$ має безліч розв'язків?

Розв'язання. Система має безліч розв'язків, якщо $\frac{a}{12} = \frac{3}{a} = \frac{9}{18}$.

Розв'яжемо рівняння $\frac{a}{12} = \frac{3}{a}$.

Отримаємо $a = \pm 6$. З умови $\frac{3}{a} = \frac{9}{18}$ маємо $a = 6$.

Приклад 1.4. При яких значеннях параметра m система рівнянь

$$\begin{cases} mx+(3m-8)y=3m \\ 2x+(m-2)y=m+1 \end{cases}$$ має розв'язки $x<0,\ \ y>0$?

Знайти ці розв'язки.

Розв'язання. Система має розв'язки, якщо $\dfrac{m}{2}\neq\dfrac{3m-8}{m-2}$,

тобто $m(m-2)\neq 6m-16$ або $m^2-8m+16\neq 0$.

Отже, $m\neq 4$.

Розв'язуючи систему рівнянь, отримаємо:

$$x=\frac{-m+8}{(m-4)^2},\ \ y=\frac{m(m-5)}{(m-4)^2}.$$

За умовою задачі $x<0,\ \ y>0$, тобто

$$\begin{cases} -\dfrac{m+8}{(m-4)^2}<0 \\ \dfrac{m(m-5)}{(m-4)^2}>0. \end{cases}$$

Оскільки $(m-4)^2>0$, то остання система рівносильна системі:

$$\begin{cases} -m+8<0 \\ m(m-5)>0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} m>8 \\ \left[\begin{array}{l} m>0 \\ m>5 \end{array}\right. \end{cases} \text{ або } m>8.$$

Отже, $m\in(8;\ +\infty)$, $x=\dfrac{-m+8}{(m-4)^2}$, $y=\dfrac{m(m-5)}{(m-4)^2}$.

Квадратні рівняння, системи квадратних рівнянь та нерівності з параметром

Означення. Рівняння виду $ax^2+bx+c=0$, де x — шукане невідоме, a, b, c — параметри, $a\neq 0$ називається *квадратним рівнянням з параметрами.*

Як відомо, корені квадратного рівняння знаходимо за формулою:

$$x_{1,\,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}\text{, де } D=b^2-4ac.$$

1. Якщо $D>0$, то рівняння має 2 дійсні корені.
2. Якщо $D=0$, то рівняння має єдиний корінь.
3. Якщо $D<0$, то рівняння не має дійсних коренів.

Якщо квадратне рівняння має дійсні розв'язки x_1 і x_2, квадратного рівняння виконуються певні теореми.

Розглянемо деякі властивості квадратного тричлена. Виділяючи повний квадрат, отримаємо наступне представлення:

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

з якого маємо, що графік квадратичної функції отримується з графіка функції $y=ax^2$ за допомогою 2-х паралельних переносів — зсуву на величину $(-b/2a)$ вздовж осі абсцис Ox і зсуву на величину $\left(4ac-b^2/4a\right)$ вздовж осі ординат Oy.

Координати вершини параболи, що задається квадратичною функцією визначаються параметрами

$$x_B = -\frac{b}{2a}, \quad y_B = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Вісь симетрії параболи є пряма $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Теорема (Вієта). Якщо x_1 і x_2 корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то мають місце співвідношення:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b/a; \\ x_1 \cdot x_2 = c/a. \end{cases}$$

Теорема. Для того щоб корені квадратного рівняння мали однакові знаки, необхідно і достатньо виконання співвідношень:

$$D = b^2 - 4ac > 0, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0$$

при цьому обидва корені будуть додатні, якщо додатково виконується умова

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0,$$

і обидва кореня будуть від'ємні, якщо

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0.$$

Теорема. Для того щоб корені квадратного рівняння мали різні знаки, необхідно і достатньо щоб виконувалися співвідношення

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} < 0.$$

Наведемо також теореми про розташування коренів квадратного рівняння на числовій осі Ox.

Теорема. Нехай числа x_1 і x_2 $\left(x_1 < x_2\right)$ корені квадратного рівняння $f\left(x\right)=0$, де $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$, $D=b^2-4ac>0$, $a \neq 0$, і дані деякі значення A і B на осі Ox.

Розглянемо можливі випадки розташування коренів рівняння відносно значень A та B:

1. Обидва корені менше числа A, тобто $x_1 < A$ і $x_2 < A$ тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{cases} a>0, \\ x_B=-\dfrac{b}{2a}<A, \\ f\left(A\right)>0, \\ D \geq 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} a<0, \\ x_B=-\dfrac{b}{2a}<A, \\ f\left(A\right)<0, \\ D \geq 0. \end{cases}$$

Геометрична ілюстрація представлена на Рис.2.1 та Рис.2.2:

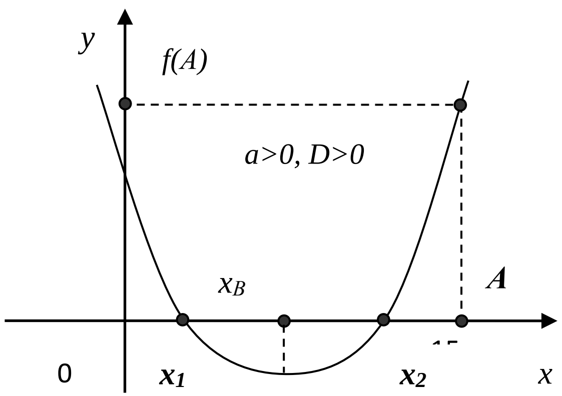


Рис. 2.1

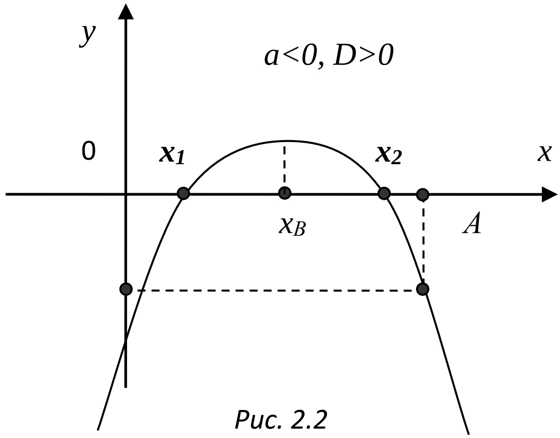


Рис. 2.2

2. Корені лежать по різні боки від числа A, тобто $x_1 < A < x_2$ тоді і тільки тоді, коли $\begin{cases} a > 0, \\ f(A) < 0, \\ D \geq 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} a < 0, \\ f(A) > 0, \\ D \geq 0. \end{cases}$

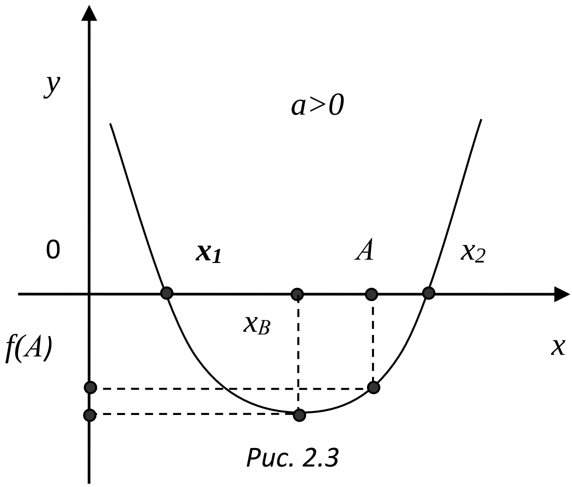


Рис. 2.3

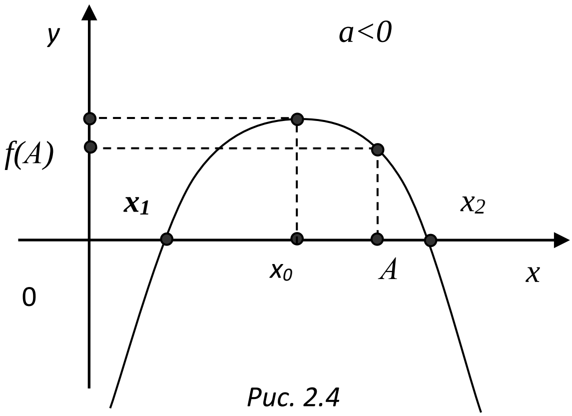


Рис. 2.4

3. Обидва корені більше числа A, тобто $x_1 > A$ і $x_2 > A$ тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{cases} a > 0, \\ x_B > A, \\ f(A) > 0, \\ D \geq 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} a < 0, \\ x_B > A, \\ f(A) < 0, \\ D \geq 0. \end{cases}$$

Аналогічним чином отримаємо умови для наступних випадків.

4. Обидва кореня між точками A і B, тобто $A < x_1 < B$ і $A < x_2 < B$

тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{cases} a > 0, \\ A < x_B < B, \\ f(A) > 0, \\ f(B) > 0, \\ D \geq 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} a < 0, \\ A < x_B < B, \\ f(A) < 0, \\ f(B) < 0, \\ D \geq 0. \end{cases}$$

5. Корені рівняння лежать по різні боки відрізка $[A,\ B]$, тобто $x_1 < A < B < x_2$ тоді і тільки тоді

$$\begin{cases} a > 0, \\ f(A) < 0, \\ f(B) < 0, \\ D \geq 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} a < 0, \\ f(A) > 0, \\ f(B) > 0, \\ D \geq 0. \end{cases}$$

Приклад 2.1. Знайти усі значення параметра *a*, для кожного з яких обидва корені рівняння $ax^2 + (a-1)x - 1 = 0$ більші за -2.

Розв'язання. В умові прикладу зазначено, що рівняня має два корені, отже $a \neq 0$. Застосуємо наведені вище теоретичні результати.

Обчислимо $D = (a-1)^2 + 4a = (a+1)^2 \geq 0$, $x_0 = -\dfrac{a-1}{2a}$,

$f(-2) = 4a - 2(a-1) - 1 = 2a + 1$. Враховуючи отримані результати, запишемо сукупність двох систем:

$$\begin{cases} a > 0, \\ (a+1)^2 \geq 0, \\ \dfrac{1-a}{2a} > -2, \\ 2a+1 > 0 \end{cases} \qquad \text{або} \qquad \begin{cases} a < 0, \\ (a+1)^2 \geq 0, \\ \dfrac{1-a}{2a} > -2, \\ 2a+1 < 0 \end{cases}$$

За розв'язками цих систем, отримаємо $a \in (-\infty, -0{,}5) \cup (0, +\infty)$.

Отже, $a \in (-\infty, -0{,}5) \cup (0, +\infty)$.

Приклад 2.2. Для яких значень параметра a нерівність $ax^2 + (a+3)x + 4 > 0$ виконується для будь яких $x > -1$?

Розв'язання. Якщо множина *X* – розв'язок заданої нерівності, то ми маємо, що проміжок $(-1, +\infty)$ повинен належати множині *X*, тобто

$$(-1, +\infty) \subset X .$$

Розглянемо усі можливі значення параметра *a*.

1. Якщо *a=0*, то нерівність має вид $3x + 4 > 0$, та її розв'язком буде проміжок $X = \left(-\dfrac{4}{3}, +\infty\right)$. В цьому випадку умова $(-1, +\infty) \subset X$ виконується та *a=0* є розв'язком.

2. .Якщо $a > 0$, то графіком правої частини нерівності є квадратний тричлен, гілки якого спрямовані вгору. Розв'язання нерівності залежить від знака виразу дискримінанта $D = (a+3)^2 - 16a = (a-1)(a-9)$.

Розглянемо випадок, коли $D \geq 0$. Тоді для того, щоб для всіх

$x > -1$ виконувалася нерівність, потрібно, щоб корені квадратного тричлена були менші за число -1, тобто:

$$\begin{cases} a > 0, \\ D \geq 0, \\ x_0 < -1, \\ f(-1) > 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} a > 0, \\ (a-1)(a-9) \geq 0, \\ -\dfrac{a+3}{2a} < -1, \\ a-(a+3)+4 > 0 \end{cases}.$$

Знайшовши розв’язок даної системи, отримаємо $a \in (0,1)$.

Якщо $D < 0$, то парабола лежить вище осі Ох, і розв'язком нерівності буде будь-яке число з множини дійсних числа, а отже і проміжок $(-1, +\infty)$.

Визначимо відповідні значення *a* з умови:

$$\begin{cases} a > 0, \\ D < 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} a > 0, \\ (a-1)(a-9) < 0 \end{cases}.$$

Розв’язком даної системи є $a \in [1, 9]$.

3.Якщо $a < 0$, то при $D > 0$ розв'язком нерівності є проміжок (x_1, x_2), який не може включати проміжок $(-1, +\infty)$, а при $D \leq 0$ нерівність немає розв’язку.

Отже, для будь-яких значенні параметра з проміжку $a \in [0, 9]$ нерівність $ax^2 + (a+3)x + 4 > 0$ виконується для будь-яких $x > -1$.

Приклад 2.3. Для яких значенні параметра *a* множина значень функції $y = (a^2 - 1)x^2 + (a-1)x + 2$ містить відрізок $[0, 1]$?

Розв'язання.

1. Якщо $a^2 - 1 = 0$, то

а) при *a =1* функція набуде вигляду *y = 2,* та безліч її значень складається з єдиної точки 2 і не містить відрізок $[0, 1]$;

б) при *a = -1* функція набуде вигляду *y = -2x+2.* Її безліч значень містить відрізок $[0, 1]$, отже *a = -1* є розв'язком задачі.

2. Якщо $a^2 - 1 > 0$, то гілки параболи спрямовані вгору, найменше значення функція приймає у вершині параболи $y_0 = f(x_0)$:

$$x_0 = \frac{1-a}{2(a^2-1)} = -\frac{1}{2(a+1)},\ y_0 = \frac{(a^2-1)}{4(a+1)^2} - \frac{a-1}{2(a+1)} + 2 = \frac{3a+5}{4(a+1)}.$$

Множиною значень функції є проміжок $Y = \left[\frac{3a+5}{4(a+1)}, +\infty\right)$, який буде містити відрізок $[0, 1]$, якщо виконуються умови:

$$\begin{cases} \dfrac{3x+5}{4(a+1)} < 0, \\ a^2 - 1 > 0 \end{cases}.$$

Розв'язуючи цю систему нерівностей, отримаємо що $a \in \left(-\frac{5}{3}, -1\right)$.

3. Якщо $a^2 - 1 < 0$, то гілки параболи спрямовані вниз, найбільше значення функція набуває у вершині параболи $y_0 = \frac{3a+5}{4(a+1)}$

Множиною значень функції є проміжок $Y = \left(-\infty, \frac{3a+5}{4(a+1)}\right]$, який

містить відрізок $[0,1]$, якщо виконуються умови: $\begin{cases} \frac{3x+5}{4(a+1)} > 1, \\ a^2 - 1 < 0 \end{cases}$.

Розв’язуючи цю систему нерівностей, отримаємо $a \in (-1, 1)$.

Отже, при $a \in \left(-\frac{5}{3}, 1\right)$ множина значень функції $y = (a^2-1)x^2 + (a-1)x + 2$ містить відрізок $[0,1]$.

Приклад 2.4. Визначити дійсні числа $a, b, c,$ для яких $|f(x)| = |ax^2 + bx + c| \le 1$ при $|x| \le 1$ і $\frac{8}{3}a^2 + 2b^2$ є максимальне.

Розв’язання. Розглянемо замість виразу $\frac{8}{3}a^2 + 2b^2$ вираз $\frac{3}{2}\left(\frac{8}{3}a^2 + 2b^2\right) = 4a^2 + 3b^2$ та дослідимо його на максимум.

Скористаємось наступним *допоміжним твердженням* : якщо $|u| \le 1, |v| \le 1,$ то $|u - v| \le 2.$

Рівність досягається тоді і лише тоді, коли $u = 1, v = -1$ або $u = -1, v = 1.$ Застосуємо цю нерівність до функції $|f(x)| \le 1$ при $x = 1$ і $x = 0.$

Отримаємо:

$$2 \ge |f(1) - f(0)| = |a + b + c - c| = |a + b|.$$

Звідки маємо, що $(a+b)^2 \le 4$.

При $x=-1$ і $x=0$ отримаємо:

$$2 \ge |f(-1)-f(0)| = |a-b+c-c| = |a-b|.$$

Звідки маємо,що $(a-b)^2 \le 4$.

З отриманих співвідношень матимемо, що

$$4a^2+3b^2 = 2(a+b)^2 + 2(a-b)^2 - b^2 \le 16.$$

Рівність досягається тоді, коли $b=0$. Отже, $|a+b| = |a-b| = |a| = 2$.

Тоді $|f(1)-f(0)| = |(a+c)-c| = |a| = 2$ та маємо $|c|=1$ і $|a+c|=1$.

Таким чином, або $c=1,\ a=-2,\ \ b=0,$ або $c=-1, a=2, b=0.$ В цих двох випадках при $0 \le |x| \le 1$ отримаємо: $0 \le x^2 \le 1; \qquad -1 \le 2x^2-1 \le 1.$

Отже, отримаємо нерівність відносно невідомих параметрів

$$|2x^2-1| = |-2x^2+1| = |ax^2+bx+c| \le 1, \text{ та}$$

$$\max\left(\frac{8}{3}a^2+2b^2\right) = \frac{2}{3}\left(4a^2+3b^2\right) = \frac{2}{3}\cdot 16 = 10\frac{2}{3}.$$

Ірраціональні рівняння та нерівності з параметрами

Рівняння або нерівність будемо називати ірраціональним(ою), якщо невідоме, що містить дане рівняння(нерівність) входить під знаком радикала. Розв'язування ірраціонального рівняння (нерівності), як правило, зводиться до звільнення від ірраціональності і розв'язку отриманого рівняння(нерівності).

Окреслимо основні етапи та способи розв'язування ірраціональних рівнянь (нерівностей).

1. Знаходження області допустимих значень:

Знаходимо ОДЗ з умов того, що підкореневий вираз $f(x)$ ірраціональності $\sqrt{f(x)}$ задовольняє умові $f(x) \geq 0$. При знаходженні розв'язків ірраціонального рівняння перевіряємо, чи входять знайдені корені до області допустимих значень.

2. Піднесення обох частин рівняння до парного степеня (до непарного степеня).

3. Заміна радикалів новими невідомими.

Одним зі способів розв'язування складних ірраціональних рівнянь є заміна кожного радикала новою змінною. Це дозволяє звести ірраціональне рівняння до системи алгебраїчних рівнянь.

4. Виділення повного квадрата.

5. Множення (або ділення) на сполучений вираз.

6. Зведення до однорідних ірраціональних рівнянь

Нагадаємо, що рівняння виду $Af^2(x) + Bf(x)g(x) + Cg^2(x) = 0$

називається однорідним. Воно може бути зведене до квадратного рівняння заміною $t=\frac{f(x)}{g(x)}$ або $t=\frac{g(x)}{f(x)}$.

7. Розкладання на множники.

8. Перетворення рівняннь з кубічними ірраціональностями. Розглянемо ірраціональні рівняння виду $\sqrt[3]{f(x)}+\sqrt[3]{g(x)}=\sqrt[3]{h(x)}$. Піднесемо обидві частини рівняння до куба

$$f(x)+g(x)+3\sqrt[3]{f(x)}\sqrt[3]{g(x)}(\sqrt[3]{f(x)}+\sqrt[3]{g(x)})=h(x).$$

Використаємо для спрощення початкове рівняння та піднесемо до куба отримане:

$$27f(x)g(x)h(x)=\left(h(x)-f(x)-g(x)\right)^3.$$

Якщо початкове рівняння має корінь, то він є коренем отриманого перетвореного рівняння. Однак отримане рівняння може мати корінь, який не є коренем початкового рівняння.

Введмо позначення: $\sqrt[3]{f(x)}=y_1$, $\sqrt[3]{g(x)}=y_2$, $\sqrt[3]{h(x)}=y_3$.

Тоді отримаємо рівняння наступного вигляду:

$$(y_1+y_2-y_3)((y_1-y_2)^2+(y_1+y_2)^2+(y_1+y_3)^2)=0.$$

Це рівняння відрізняється від початкового рівняння , яке можна подати у вигляді $y_1+y_2=y_3$.

Якщо перетворене рівняння має сторонні корені по відношенню до початкового, то $y_1=y_2$, $y_1+y_3=0$, $y_2+y_3=0$.

Отже, сторонні корені початкового рівняння повинні задовольняти системі рівнянь:

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) + h(x) = 0, \\ g(x) + h(x) = 0. \end{cases}$$

Приклад 3.1. Знайти розв'язки рівняння $\sqrt{x^2 + ax - 2a} = x + 1$ для усіх значень параметра a:

Розв'язання. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата та отримаємо:

$$x^2 + ax - 2a = x^2 + 2x + 1 \text{ або } (a-2)x = 2a + 1.$$

Розглянемо можливі випадки розв'язків рівняння в залежності від значень a.

1. Нехай $a = 2$, тоді рівняння набуде вигляду $0 = 5$, тобто воно не має розв'язків.

2. Нехай $a \neq 2$, тоді рівняння набуде вигляду $x = \dfrac{2a+1}{a-1}$.

Для перевірки отриманих розв'язків, підставимо $x = \dfrac{2a+1}{a-1}$ у початкове рівняння.

Отримаємо:

а) Ліва частина $\sqrt{\dfrac{(2a+1)^2}{(a-2)^2} + \dfrac{a(2a+1)}{(a-2)} - 2a} = \left|\dfrac{3a-1}{a-2}\right|$.

При $a \leq \dfrac{1}{3}$ та при $a > 2$ маємо $\left|\dfrac{3a-1}{a-2}\right| = \dfrac{3a-1}{a-2}$;

При $\dfrac{1}{3} < a < 2$ маємо $\left|\dfrac{3a-1}{a-2}\right| = \dfrac{1-3a}{a-2}$.

б) Права частина $\dfrac{2a+1}{a-2} + 1 = \dfrac{3a-1}{a-2}$.

Отже маємо, що $x = \dfrac{2a+1}{a-1}$ є коренем початкового рівняння при $a \le \dfrac{1}{3}$ та при $a > 2$. При $\dfrac{1}{3} < a \le 2$ рівняння розв'язків немає.

Приклад 3.2. Залежно від значення параметра a розв'язати рівняння $\sqrt{2x+a} - \sqrt{x-1} = 2$.

Розв'язання. Застосуємо заміну змінної $y = \sqrt{x-1}$, де $y \ge 0$. Тоді $x = y^2 + 1$ та початкове рівняння набуває вигляду $\sqrt{2y^2 + a + 2} = y + 2$.

Отримане рівняння рівносильне системі рівнянь:

$$\begin{cases} y^2 - 4y + a - 2 = 0, \\ y \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язавши перше рівняння системи, отримаємо:

$$y_1 = 2 - \sqrt{6-a} \text{ та } y_1 = 2 + \sqrt{6-a}.$$

В цілому система буде мати розв'язки для одного з трьох наступних випадків:

а) $0 \le y_1 = y_2$;

б) $0 \le y_1 < y_2$;

в) $y_1 < 0 \le y_2$.

Випадок а) можливий, коли $a = 6$ або $y_1 = y_2 = 2.$ Отже, $x = 5.$

Випадок б) можливий, коли $2 - \sqrt{6-a} \ge 0$. Отримаємо, що

$2 \le a < 6$. Отже, $x_1 = 11 - a - \sqrt{6-a}$, $x_1 = 11 - a + \sqrt{6-a}$.

Випадок в) можливий, коли виконуються умови:

$$\begin{cases} 2 - \sqrt{6-a} < 0, \\ 2 + \sqrt{6-a} \ge 0. \end{cases}$$

Отримаємо, що $a < 2$ та рівняння має розв'язок $x = 11 - a + 4\sqrt{6-a}$.

Приклад 3.3. Залежно від значень параметра *a* розв'язати нерівність $\dfrac{\left|x^2 - 3a(2x-3a)+4\right|}{|x-3a|} \le \sqrt{-x^2+4x+12}$.

Розв'язання. Визначимо область допустимих значень для виразів, що містить початкова нерівність:

$$\begin{cases} x \ne 3a, \\ -x^2+4x+12 \ge 0; \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x \ne 3a, \\ -2 \le x \le 6. \end{cases}$$

Виконаємо перетворення лівої частини нерівності та зробимо її оцінку:

$$\frac{\left|x^2 - 3a(2x-3a)+4\right|}{|x-3a|} = \frac{\left|x^2 - 6ax + 9a^2 + 4\right|}{|x-3a|} = \frac{\left|(x-3a)^2 + 4\right|}{|x-3a|} =$$

$$= |x-3a| + \frac{4}{|x-3a|} = 2\left(\frac{|x-3a|}{2} + \frac{2}{|x-3a|}\right) \ge 4.$$

(Скористалися оцінкою суми двох взаємно обернених додатних виразів $x + \dfrac{1}{x} \ge 2$ при $x > 0$). Рівність досягається за умови

$|x-3a|=2$.

Оцінимо праву частину початкової нерівності

$$\sqrt{-x^2+4x+12}=\sqrt{-(x-2)^2+16}\le 4.$$

Рівність досягається при $x = 2$.

Оцінивши кожну частину початкової нерівності, отримаємо, що вона має розв'язки за умови

$$\begin{cases}|x-3a|=2,\\ x=2;\end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases}x=2,\\ \left[\begin{array}{l}a=0,\\ a=\dfrac{4}{3}.\end{array}\right.\end{cases}$$

Отже, маємо при $a\in\left\{0;\dfrac{4}{3}\right\}$ розв'язок $x = 2$.

При $a\in(-\infty;0)\cup\left(0;\dfrac{4}{3}\right)\cup\left(\dfrac{4}{3};+\infty\right)$ рівність розв'язків немає.

Приклад 3.4. Розв'язати рівняння $\sqrt{1+ax}-\sqrt{1-ax}=x$ в залежності від значень параметра a.

Розв'язання. Маємо ірраціональне рівняння, тому допустимі значення параметра a та змінної x визначаються із наступних умов:

$$\begin{cases}1-ax\ge 0,\\ 1+ax\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow -1\le ax\le 1$$

Таким чином, необхідно дослідити, коли добуток ax має додатне і від'ємне значення. Розглянемо наступні випадки:

1. Якщо $ax > 0$, то вираз $\sqrt{1+ax}-\sqrt{1-ax}>0$, тобто додатний.

Згідно з умовою початкового рівняння (ліва частина більше нуля), то змінна x >0 (права частина). Відповідно тоді значення параметра $a > 0$ (бо $ax > 0$).

2. Якщо $ax < 0$, то вираз $\sqrt{1+ax}-\sqrt{1-ax}<0$, тому $x < 0$ та відповідно $a > 0$.

3. Коли $a = 0$, то з початкового рівняння знаходимо розв'язок $x = 0$.

Таким чином, задане рівняння має розв'язок тільки при $a \geq 0$. Перетворимо рівняння до виразу $\sqrt{1+ax}=x+\sqrt{1-ax}$ та піднесемо до квадрата ліву і праву частини рівняння.

Отримаємо що

$$x(x+2\sqrt{1-ax}-2a) = 0 .$$

Маємо, що рівняння має розв'язок $x_1 = 0$ для усіх дійсних значень параметра a. Інша частинина рівняння $2\sqrt{1-ax}=2a-x$ має розв'язок, коли $2a - x \geq 0$, та $1- ax \geq 0$.

Після піднесення до квадрату обох частин рівняння отримаємо, що $x_2=-2\sqrt{1-a^2}$, $x_3=2\sqrt{1-a^2}$ при $|a|\leq 1$.

Таким чином, значення x_2 та x_3 є розв'язками початкового рівняння при виконанні наступних умов:

$$\begin{cases} ax<1, \\ 2a-x\geq 0, \\ a>0, \\ |a|\leq 1. \end{cases}$$

З отриманої системи нерівностей, підставляючи значення x_2 та x_3, отримаємо інтервал для параметра a:

$$\begin{cases} \pm 2\sqrt{1-a^2} \le 1, \\ a \ge \sqrt{1-a^2}, \\ 0 \le a \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2a-1)^2 \ge 0, \\ a^2 \ge \dfrac{1}{2}, \\ 0 \le a \le 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < a < 1.$$

Отже, $x_1 = 0$ при $a \in R$, $x_2 = -2\sqrt{1-a^2}$, $x_3 = 2\sqrt{1-a^2}$ при $\frac{\sqrt{2}}{2} < a < 1$.

Приклад 3 5. Розв'язати нерівність $2\sqrt{a+x} > x+1$ для усіх значень параметра a.

Розв'язання. Визначимо область допустимих значень для заданої нерівності: $x + a \ge 0$ та $x \ge -a$.

Задана ірраціональна нерівність рівносильна наступній сукупності систем нерівностей:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + a \ge 0, \\ x + 1 < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x + 1 \ge 0, \\ 4(x+a) > (x+1)^2 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -a \le x \le -1, \\ \begin{cases} x \ge -1, \\ 1 - 2\sqrt{a} < x < 1 + 2\sqrt{a}. \end{cases} \end{array} \right.$$

Розв'язок першої системи нерівностей ($-a \le x \le -1$) має місце при значеннях параметра $a > 1$, а розв'язок другої системи нерівностей – при значеннях параметра $a>0$.

Отже отримаємо наступні випадки:

якщо $0 < a < 1$, то задана нерівність має розв'язок

$$1-2\sqrt{a}<x<1+2\sqrt{a},$$

якщо $a > 1$, то треба об’єднати розв’язки двох систем нерівностей.

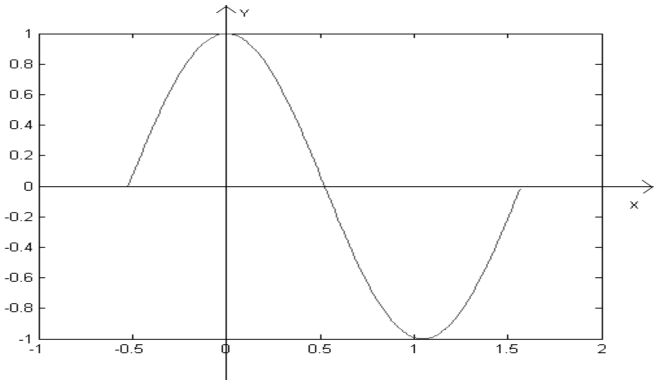
Тригонометричні рівняння та нерівності з параметрами

Приклад 4.1. При якому значенні параметра a рівняння $\cos^2 3x + (2a^2 - \frac{7}{2})\cos 3x + a^2 - 2 = 0$ має рівно 5 коренів на проміжку $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$?

Розв'язання.

$$\cos^2 3x + (2a^2 - \frac{7}{2})\cos 3x + a^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 3x = -\frac{1}{2} \\ \cos 3x = -2a^2 + 4 \end{array}\right.$$

Розглянемо графік функції $y = \cos 3x$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$.



Очевидно, що рівняння $\cos 3x = -\frac{1}{2}$ має на проміжку $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$ два корені.

Для виконання умови задачі необхідно, щоб рівняння $\cos 3x = -2a^2 + 4$ мало на цьому проміжку 3 корені.

Очевидно, що для цього необхідно, щоб $-2a^2+4=0 \Leftrightarrow a=\pm\sqrt{2}$.

Отже**,** $a=\pm\sqrt{2}$.

Приклад 4.2. Для яких дійсних значеннь параметра *a* рівняння $(a^2+1)\sin^2 x+2a^2\sin x+\frac{1}{2}=0$ має розв'язки?

Розв'язання. Застосуємо заміну $\sin x=t, t\in[-1;1]$, зведемо рівняння до квадратного: $(a^2+1)t^2+2a^2t+\frac{1}{2}=0$.

Відповідно до умови задачі, необхідно знайти такі значення параметра *a* при яких квадратне рівняння має хоча б один розв'язок на проміжку $t\in[-1;1]$.

Розглянемо два випадки:

1) Обидва корені квадратного тричлена $f(t)=(a^2+1)+2a^2t+\frac{1}{2}$ належать проміжку $[-1;1]$:

$$-1\le t_1\le t_2\le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} D\ge 0 \\ f(-1)\ge 0 \\ f(1)\ge 0 \\ -1\le \dfrac{-2a^2}{2(a^2+1)}\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4a^4-4(a^2+1)\dfrac{1}{2}\ge 0 \\ a^2+1-2a^2+\dfrac{1}{2}\ge 0 \\ a^2+1+2a^2+\dfrac{1}{2}\ge 0 \\ -\dfrac{a^2}{a^2+1}\le 1 \\ -\dfrac{a^2}{a^2+1}\ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^4-a^2-1\ge 0 \\ a^2-\dfrac{3}{2}\le 0 \\ 3a^2+\dfrac{3}{2}\ge 0 \\ -a^2\le a^2+1 \\ a^2\le a^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a^2\ge 1 \\ a^2\le -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ -\sqrt{\dfrac{3}{2}}\le a\le \sqrt{\dfrac{3}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a\ge 1 \\ a\le -1 \end{array}\right. \\ -\sqrt{\dfrac{3}{2}}\le a\le \sqrt{\dfrac{3}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow a\in\left[-\sqrt{\frac{3}{2}};-1\right]\cup\left[1;\sqrt{\frac{3}{2}}\right].$$

2) Один з коренів квадратного тричлена належить проміжку $\left[-1;1\right]$.

$$f(-1)\cdot f(1)\le 0 \Leftrightarrow (3a^2+\frac{3}{2})(\frac{3}{2}-a^2)\le 0 \Leftrightarrow a\in\left(-\infty;-\sqrt{\frac{3}{2}}\right]\cup\left[\sqrt{\frac{3}{2}};+\infty\right).$$

Об'єднуючи отримані розв'язки для обох випадків отримаємо, що $a\in\left(-\infty;-1\right]\cup\left[1;+\infty\right)$.

Приклад 4.3. Знайти значення параметра a для яких нерівність $2\sin^2 x+2(a-3)\cos x+a-9<0$ виконується при всіх дійсних значеннях *x*.

Розв'язання. Застосуємо заміну $\cos x=t$, отримаємо що

$$2(1-t^2)+2(a-3)t+a-9<0 \Leftrightarrow 2t^2-2(a-3)t-a+7>0 .$$

Очевидно, що при $x \in \mathbb{R}$, $t \in [-1;1]$.

За умовою задачі треба знайти такі значення *a*, при яких квадратний тричлен $f(t)=2t^2-2(a-3)t-a+7$ набуває додатніх значень при $t \in [-1;1]$.

Розглянемо наступні випадки:

1) $$\begin{array}{l} D<0 \Leftrightarrow 4(a-3)^2-4\cdot 2(7-a)<0 \Leftrightarrow \\ a^2-6a+9-14+2a<0 \Leftrightarrow a^2-4a-5<0 \Leftrightarrow -1<a<5 \end{array}$$

2) Обидва корені $f(t)$ належать інтервалу $(-\infty;-1)$:

$$t_1 \le t_2 < -1 \Leftrightarrow \begin{cases} D \ge 0 \\ f(-1)<0 \\ \dfrac{a-3}{2}<-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a^2-4a-5 \ge 0 \\ 2+2(a-3)-a+7>0 \\ a<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a \ge 5 \\ a \le 1 \end{array}\right. \\ a>-3 \\ a<1 \end{cases} \Leftrightarrow -3<a \le -1$$

3) Обидва корені $f(t)$ належать інтервалу $(1;+\infty)$:

$$t_1 \ge t_2 > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} D \ge 0 \\ f(1)>0 \\ \dfrac{a-3}{2}>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-4a-5 \ge 0 \\ 2-2(a-3)-a+7>0 \\ a>5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a \ge 5 \\ a \le 1 \end{array}\right. \\ a>5 \\ a<5 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \varnothing$$

Об'єднання розвязків розглянутих випадків дає $a \in (-3;5)$.

Приклад 4.4. При яких значеннях *a* система $\begin{cases} \sin x+\cos y=2a^2 \\ \sin x\cos y=a^2(a^2-4) \end{cases}$ має дійсні розв'язки?

Розв'язання. Для знаходження розв'язку, застосуємо обернену теорему Вієта. Тоді маємо, що $\sin x$ та $\cos y$ це є розв'язки квадратного рівняння $t^2-2a^2t+a^2(a^2-4)=0$.

Отримаємо,

$$\begin{cases} \sin x+\cos y=2a^2 \\ \sin x\cos y=a^2(a^2-4) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x=a^2+2a \\ \cos y=a^2-2a \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x=a^2-2a \\ \cos y=a^2+2a \end{cases} \end{array}\right.$$

Оскільки, $\sin x$ та $\cos y$ знаходяться в межах $[-1;1]$, то система має розв'язки при всіх значеннях параметра *a* таких, що

$$\begin{cases} \left|a^2+2a\right|\le 1 \\ \left|a^2-2a\right|\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+2a\le 1 \\ a^2+2a\ge -1 \\ a^2-2a\le 1 \\ a^2-2a\ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+2a-1\le 0 \\ a^2+2a+1\ge 0 \\ a^2-2a-1\le 0 \\ a^2-2a+1\ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+2a-1\le 0 \\ a^2-2a-1\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1-\sqrt{2}\le a\le -1+\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2}\le a\le 1+\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-\sqrt{2}\le a\le -1+\sqrt{2}$$

Отже, $a\in\left[1-\sqrt{2};-1+\sqrt{2}\right]$.

Приклад 4.5. Для усіх значень параметра *a* розв'язати рівняння $|a-2\sin x|+2|\sin x-\cos x|+|2\cos x-1|=a-1$.

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді

$$|a-2\sin x|+2|\sin x-\cos x|+|2\cos x-1|=$$
$$=(a-2\sin x)+(\sin x-\cos x)+(2\cos x-1)$$

Скористаємося властивістю, що $|a|+|b|=a+b\Leftrightarrow\begin{cases} a\ge 0 \\ b\ge 0 \end{cases}$.

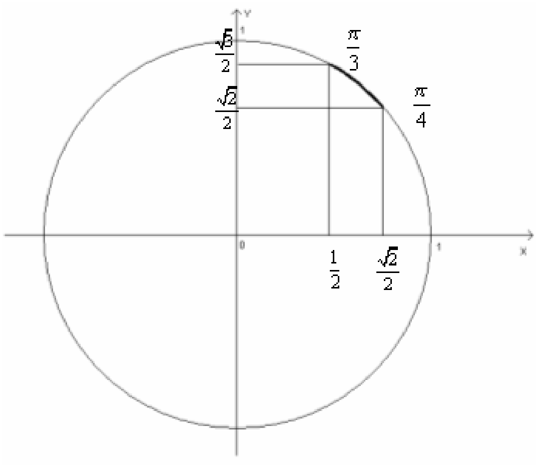
Отримаємо, що

$$|a-2\sin x|+2|\sin x-\cos x|+|2\cos x-1|=a-1\Leftrightarrow$$

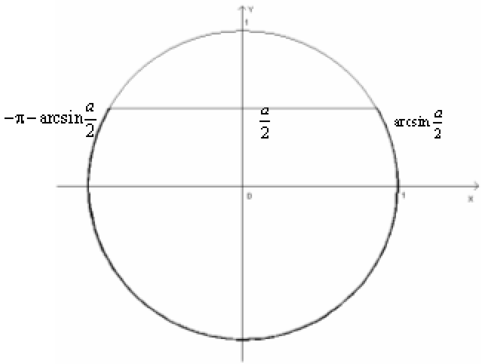
$$\begin{cases} a-2\sin x\ge 0 \\ \sin x-\cos x\ge 0 \\ 2\cos x-1\ge 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \sin x\le \dfrac{a}{2} \\ \sin(x-\dfrac{\pi}{4})\ge 0 \\ \cos x\ge \dfrac{1}{2} \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} \sin x\le \dfrac{a}{2} \\ \dfrac{\pi}{4}+2\pi n\le x\le \dfrac{5\pi}{4}+2\pi n \\ -\dfrac{\pi}{3}+2\pi n\le x\le \dfrac{\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \sin x\le \dfrac{a}{2} \\ \dfrac{\pi}{4}+2\pi n\le x\le \dfrac{\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

Для розв’язання системи нерівностей розглянемо одиничне коло. Розв’язки другої нерівності мають вигляд :



Перша нерівність виконується для усіх $a\ge 2$, для a < -2 не має розв’язків та для $-2<a<2$ маємо розв’язок



$$-\pi-\arcsin\frac{a}{2}+2\pi k\le x\le \arcsin\frac{a}{2}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}\ .$$

Отже отримаємо, що:

при $a\ge\sqrt{3}$, $\quad \dfrac{\pi}{4}+2\pi k\le x\le\dfrac{\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$,

при $\sqrt{2}\le a\le\sqrt{3}$, $\quad \dfrac{\pi}{4}+2\pi k\le x\le\arcsin\dfrac{a}{2}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$,

при $a<\sqrt{2}$, $\quad x\in\varnothing$.

Графічний метод розв'язання рівнянь та нерівностей з параметрами

В залежності від ролі, яка надається параметру в задачі (нерівноправна або рівноправна зі змінною) виділяють два основних графічних методи:

1)побудова графічної моделі в координатній площині xOy;

2)побудова графічної моделі в координатній площині xOa.

На площині xOy функція $y = f(x, a)$ задає сімейство кривих, що залежать від параметра a. Від однієї кривої сімейства можна перейти до будь-якої іншої за допомогою деякого перетворення площини (паралельне перенесення, поворот і т.д.). Виконуючи відповідні перетворення, будемо аналізувати та "зчитувати" з графіка відповідь задачі.

Алгоритм графічного методу:

1. Знайти область допустимих значень невідомого та параметрів, що входять до рівняння.

2. Виразити параметр як функцію від невідомого: $a = f(x)$.

3. В системі координат $x0y$ побудувати графік функції $y = f(x)$ для тих значень *x*, які входять в область визначення рівняння.

4. Знайти точки перетину прямої $y = a$ з графіком $y = f(x)$.

Можливі випадки:

1) пряма $y = a$ не перетинає графік функції $y = f(x)$. При

цьому значення a рівняння розв’язків не має.

2) пряма $y=a$ перетинає графік функції $y=f(x)$.

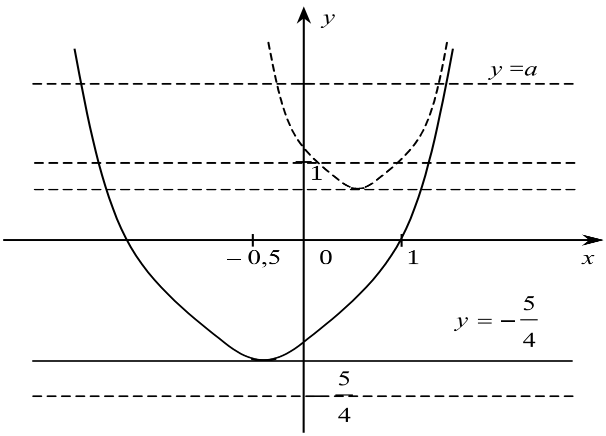
5. Визначити абсциси точок перетину (для цього достатньо розв’язати рівняння $a=f(x)$ відносно x).

Приклад 5.1 Визначити усі значення параметра a для якких рівняння $x^2-|x-1|=a$ не має дійсних розв’язків.

Розв’язання. 1. Якщо $x<1$, рівняння набуває вигляду $x^2+x-1=a$.

2. Якщо $x\geq 1$, матимемо $x^2-x+1=a$.

У системі координат $x0y$ будуємо графіки функцій $y_1=x^2+x-1$ для $x<1$ та $y_2=x^2-x+1$ для $x\geq 1$.



Визначаємо точки перетину прямої $y=a$ з графіком функції $y=x^2-|x-1|$. Пряма $y=-\dfrac{5}{4}$ має з графіком функції $y=x^2-|x-1|$ лише одну спільну точки, абсциса якої дорівнює $-\dfrac{1}{2}$.

Якщо $a \in \left(-\infty;\ -\frac{5}{4}\right)$, рівняння розв’язків не має, оскільки пряма $y = a$ не перетинає графік $y = x^2 - |x-1|$.

Якщо $a \in \left(-\frac{5}{4};\ 1\right]$, пряма $y = a$ перетинає графік функції $y = x^2 - |x-1|$ у двох точках, абсциси яких x_1, x_2 можна знайти з рівняння

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5+4a}}{2},\ \ x_2 = \frac{-1+\sqrt{5+4a}}{2}.$$

Якщо $a \in (1;\ \pm\infty)$, то перетином прямої $y = a$ з графіком функції $y = f(x)$ є дві точки з абсцисами x_1, x_2, де x_1 — менший корінь рівняння $x^2 + x - 1 = a$; x_2 — більший корінь рівняння $x^2 - x + 1 = a$, тобто

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5+4a}}{2};\ \ x_2 = \frac{1+\sqrt{3+4a}}{2}.$$

Отже, якщо $a \in \left(-\infty;\ -\frac{5}{4}\right)$, рівняння розв’язку не має;

якщо $a = -\frac{5}{4}$, то $x = -\frac{1}{2}$;

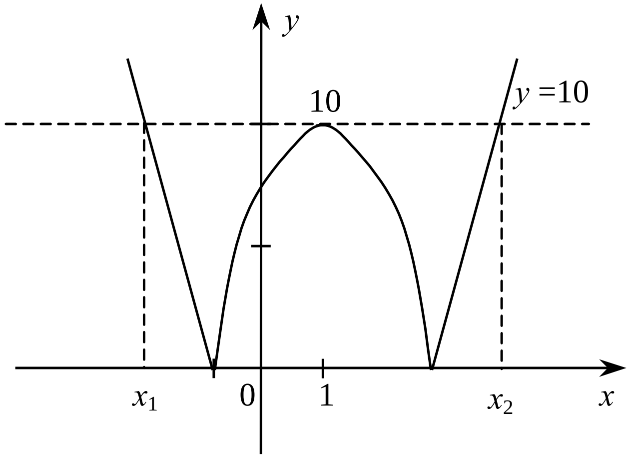
якщо $a \in \left(-\frac{5}{4};\ 1\right]$, то $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5+4a}}{2}$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{5+4a}}{2}$;

якщо $a \in (1;\ +\infty)$, $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5+4a}}{2}$; $x_2 = \frac{1+\sqrt{-3+4a}}{2}$.

Приклад 5.2. Для яких значень параметра m рівняння $|x^2 - 2x - 9| + m = 0$ має три дійсні розв’язки?

Роз’язання. Запишемо рівняння у вигляді $|x^2 - 2x - 9| = -m$.

Побудуємо схематично графіки функцій $y=\left|x^2-2x-9\right|$ та $y=-m$.



Якщо $-m=10$, то пряма $y=10$ перетинає криву $y=\left|x^2-2x-9\right|$ у трьох точках з абсцисами x_1; 1; x_2.

Приклад 5.3. Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння $tg(2|x|+\lg(2-x)-\lg(\lg a))=0$ має єдиний корінь.

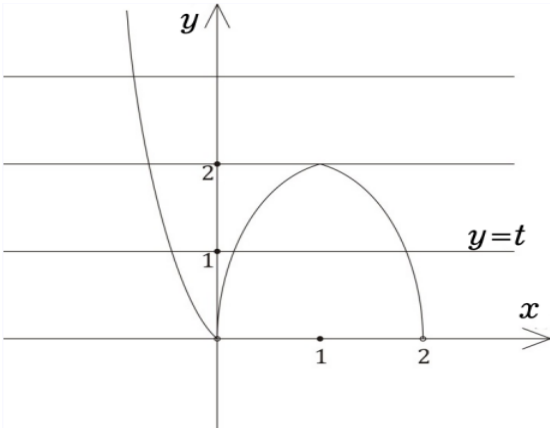
Розв'язання. Для спрощення розв'язання введемо заміну $\lg a=t,\quad t>0$ та використаємо властивість логарифмів:

$$\lg(2|x|\cdot(x-2))=\lg t.$$

Перейдемо до рівносильної системи:

$$\begin{cases}2|x|>0,\\ 2-x>0,\\ 2|x|\cdot(2-x)=t.\end{cases}$$

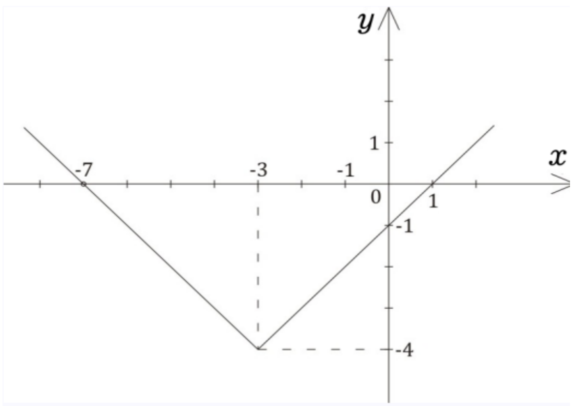
Будуємо схематичний графік функції $y=2|x|\cdot(2-x)$ та сімейство прямих $y=t$, паралельних вісі Ox.



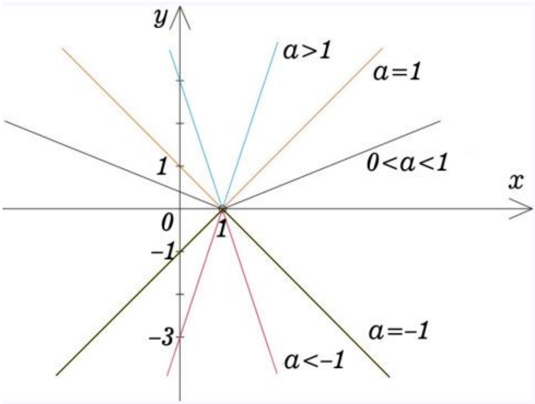
Сімейство прямих $y = t$ має перетинати отриманий графік лише в одній точці. Ця вимога виконується лише при $t > 2$, тобто при $\lg a > 2$, звідки отримаємо, що $a > 100$.

Приклад 5.4. Для кожного значення параметра a знайдіть всі значення x, що задовольняють рівнянню $|x+3| - a|x-1| = 4$.

Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді $|x+3| - 4 = a|x-1|$ та побудуємо схематично графік функції $y = |x+3| - 4$.



Графік функції $g(x) = a\,|\,x-1\,|$ задає сімейство двох променів (при $a \neq 0$) що мають спільний початок в точці $(1;0)$, які утворюються стиском вздовж вісі Oy (при $a > 0$) або розтягом (при $0 < a < 1$) та відображенням відносно осі Ox при $a < 0$.



Розмістивши графіки в одній системі координат, отримаємо:

1)якщо $a = 0$, то $x = 1$ або $x = -7$;

2)якщо $a = 1$, то $x \in [1;+\infty)$;

3)якщо $a = -1$, то $x \in [-3;1]$;

4)якщо $a > 1$, то $x = 1$;

5)якщо $a < -1$, то $x = 1$;

6)якщо $a \in (-1;0) \cup (0;1)$, то $x = 1$ або $x = \dfrac{7+a}{a-1}$.

Приклад 5.5. При яких значеннях параметра a система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(a+1), \\ (x+y)^2 = 14 \end{cases}$$

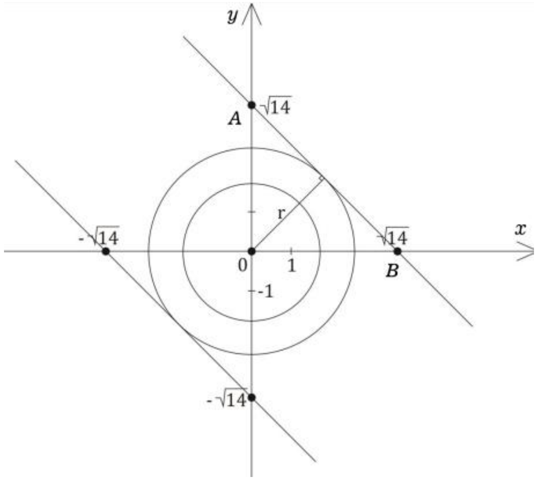
має рівно два розв’язки?

Розв'язання. Графіком другого рівняння системи є дві паралельні прямі

$$x+y=\sqrt{14} \text{ та } x+y=-\sqrt{14}.$$

Графіком першого рівняння є сімейство кіл з центром у початку координат та радіусом $r=\sqrt{2(a+1)}$ при $a>-1$.

Схематично зробимо побудову відповідних графіків.



Система матиме рівно два розв'язки, якщо коло буде дотикатись двох паралельних прямих, тобто якщо $r=\frac{1}{2}$, $AB=\sqrt{7}$.

Отже отримаємо, що $\sqrt{2(a+1)}=\sqrt{7}$ та відповідно $a=\frac{5}{2}$.

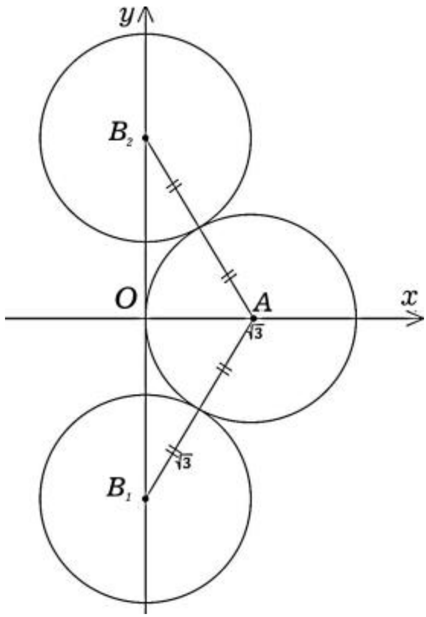
Приклад 5.6. Для яких значеннях параметра a система рівнянь

$$\begin{cases} x^2+y^2=2\sqrt{3}x, \\ x^2=2ax-y^2+3-a^2 \end{cases}$$ має єдиний розв'язок?

Розв'язання. Виконавши перетворення, перше рівняння системи набуває вигляду: $(x-\sqrt{3})^2 + y^2 = 3$.Це рівняння задає коло з центром у точці $A(\sqrt{3};0)$ і радіусом $r=\sqrt{3}$.

Аналогічним чином, перетворюємо друге рівняння системи: $x^2 + (y-a)^2 = 3$. Це рівняння задає сімейство кіл з центром у точці $B(0;a)$ та радіусом $R=\sqrt{3}$.

Для виконання умови задачі потрібно щоб кола були зображені як на малюнку (параметр a може набувати як додатних так і від'ємних значень):



Розглянемо елементи утворених трикутників B_1OA та B_2OA.

З трикутника B_2OA (або B_1OA) отримаємо:

$(B_2A)^2 = (B_2O)^2 + (OA)^2$ або $(B_1A)^2 = (B_1O)^2 + (OA)^2$.

Отже, $(2\sqrt{3})^2 = a^2 + (\sqrt{3})^2$ або $12 = a^2 + 3$.

Отримаємо, що $a_1 = -3$, $a_2 = 3$.

Приклад 5.7. Скільки коренів має рівняння $x^5 - 5x^4 + 5x^3 = a$ у залежності від значення параметра a?

Розв'язання. Запишемо умову задачі у вигляді системи рівнянь $\begin{cases} y = x^5 - 5x^4 + 5x^3, \\ y = a. \end{cases}$.

Графік функції $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3$ схематично побудуємо, скориставшись похідною. Маємо

$$y' = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 5x^2(x^2 - 4x + 3),$$

тому функція зростає на проміжку $(-\infty;1]$, спадає на проміжку $[1;3]$, зростає на проміжку $[3;+\infty)$.Ця інформація дає можливість схематично побудувати графік.

Інший графік $y = a$ – пряма, паралельна до осі Ox. Звідси неважко отримати відповідь: рівняння має один корінь, якщо $a \in (-\infty;-27)$ або $a \in (1;+\infty)$; два корені, якщо $a = -27$ або $a = 1$; три корені, якщо $a \in (-27;1)$.

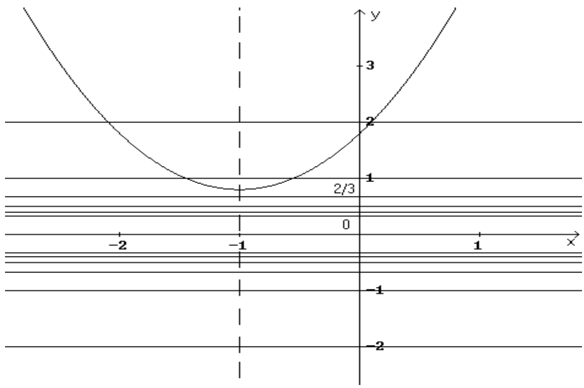
Приклад 5.7. Для яких значеннь параметра a рівняння $\sin\dfrac{2\pi}{x^2 + 2x + a} = 0$ має 4 розв'язки?

Розв'язання. Розглянемо стандартний розв'язок тригонометричного рівняння:

$$\sin\frac{2\pi}{x^2+2x+a}=0 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{x^2+2x+a}=\pi n,\ n\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$
$$x^2+2x+a=\frac{2}{n},\quad n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}.$$

Розв'яжемо задачу графічно. Рівняння $y=\frac{2}{n}, n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ задає на координатній площині множину прямих, паралельних осі OX, які знаходяться між прямими y = 2 та y = -2. Рівняння $y=x^2+2x+a$ задає на координатній площині множину парабол з вершинами у точках (-1, a-1).

Згідно умови задачі, ці множини повинні перетинатися у 4 точках. Очевидно, це можливо тоді, коли вершина параболи знаходиться між прямими y = 1 і $y=\frac{2}{3}$.



Отримаємо, що ордината вершини розташована у межах від $\frac{2}{3}$ до 1. Тобто, $\frac{2}{3}<a-1<1 \Leftrightarrow \frac{5}{3}<a<2$. Отже, $a\in\left(\frac{5}{3};2\right)$.

ВПРАВИ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. При якому значення параметра в рівняння $\left(b^2-2b\right)x=b^2-4$ має безліч розв'язків?

2. При якому значення параметра з рівняння $c^2(x-1)+2x+c(3x-1)=0$ має безліч розв'язків?

3. При якому значенні параметра a рівняння $(a-3)(a-4)x=a^2-16$ не має розв'язку?

4. Визначити при яких значеннях n рівняння $\frac{4x+3n}{3}=\frac{5x-2n}{4}$ має додатні розв'язки.

5. При якому значенні параметрів k рівняння $3k+3(x+1)=\frac{3kx+15}{5}$ не має розв'язку?

6. Визначити при яких значеннях параметра a корні рівняння $ax=7x-1$ кратні 5.

7. Розв'язати рівняння $|x+1|+a|x-2|=3,$ де a — параметр.

8. При яких значеннях параметра a всі розв'язки рівняння $2|x-a|+a-4+x=0$ задовольняє нерівність $0\le x<4$?

9. При яких значеннях параметра a рівняння $a^3+a^2|a+x|+|a^2x+1|=1$ має не менше чотирьох цілих коренів?

10. При яких значеннях параметра a рівняння $2x-\left|x-a^2\right|=11a-3|x+4a|$:

а) не має розв'язків;

б) має скінчену непорожню множину розв'язків?

11. При якому значенні параметра a система $\begin{cases} ax+8y=24 \\ 2x+ay=12 \end{cases}$ має безліч розв'язків? Записати загальний вигляд розв'язків.

12. При якому найбільшому значенні параметра a $\begin{cases} (a-4)x+(a-4)y=0 \\ 3x+ay=3{,}3 \end{cases}$ не має розв'язків.

13. При яких значеннях m система рівнянь $\begin{cases} (m+5)x+(2m+3)y=3m+2 \\ (3m+10)x+(5m+6)y=2m+4 \end{cases}$ має від'ємні розв'язки? Знайти ці розв'язки.

14. При яких значеннях m система рівнянь $\begin{cases} mx+4y=6-9m \\ 2x+(2+m)y=8 \end{cases}$ має розв'язки $x>0$, $y>0$? Знайти ці розв'язки.

15. Дослідити та розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3x+(m-1)y=12 \\ (m-1)x+12y=24. \end{cases}$

16. При якому значенні параметра m рівняння $\left|x^2-2x-25\right|+m=0$ має три розв'язки? (В. –26)

17. При якому найбільшому цілому значенні параметра

m $(m \neq 0)$ рівняння $\left|x^2 - 2x - 14\right| + m = 0$ має два розв'язки?

18. Розв'язати графічно рівняння $\sqrt{x-a} = 2x - 1$.

19. Розв'язати графічно рівняння $\sqrt{4x - x^2} = a + 1$.

Для всіх значень парметра a ***розв'язати рівняння:***

20. $\sin^2 x + \sin x + a = 0$

21. $\cos 2x - \sin x = a$

23. $\cos 2x + a\cos x = 0$

24. $\cos^2 x - 4\cos a \cos x + 1 = 0$

25. $\sin x + \cos(a + x) + \cos(a - x) = 2$

26. $\sin x + 2\cos ax = 3$

27. $4\cos x \cdot \sin a + 2\sin x \cos a - 3\cos a = 2\sqrt{7}$

28. $4\sin(x + \frac{\pi}{3})\cos(x - \frac{\pi}{6}) = a^2 + \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x$

29. $\frac{a^2}{1 - tg^2 x} = \frac{\sin^2 + a^2 - 2}{\cos 2x}$

30. $tg 2x + tg(\frac{\pi}{4} - x) = a$

31. $\left|tgx + actx\right| = \frac{4}{\sqrt{3}}, a \neq \pm 1$

32. $\cos^4 x + \cos^4(x + \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{2}\sin 2x + a = 0$

33. $1 + 2(\sin^2 2x - 2a\cos 2x + a)tg^2 x - \cos 4x = 0$

34. $\cos^4 x - a\cos^2 x - 2(a + 2) = 0$

35. $a\sin x - 2a\cos 2x = 1$

36. $\cos^4 x + (a-1)\sin^2 x = 3a+1$

37. $\sin^2 x - \sin x\cos x - 2\cos^2 x = a$

38. $\sin^2 x + a\sin x + 1 - a^2 = 0$

39. $\sin x + \dfrac{1}{\sin x} = 2\left|\cos ax\right|$

40. $(a^2+2)\sin^2 x + 4a\sin x\cos x = a^2+3$

41. $\cos x + \sqrt{1+a}\sin x = 1 + \sqrt{1-a}$

42. $8(a+2)(\sin^6 x + \cos^6 x) - 2\cos 4x = 3a^2 + 6a + 6$

43. $4(a-3)(\sin^4 x + \cos^4 x) + \cos 4x = a^2 + 2a - 11$

44. $4(a+2)(\sin^4 x + \cos^4 x) + a\cos 4x = 4a^2 + 5a + 4$

45. $\sin(x+a) - \sin x = \sin a$

46. $\cos^2(x+a) + \cos^2(x-a) = \sin 2a$

47. $tgx - tg(a-x) = 2tga$

48. $a(\cos x - \sin x)^2 + b\cos 2x = 0$

49. $\sin 2x + 2a\sqrt{2}(\sin x - \cos x) + 1 - 4a = 0$

50. $(a+1)\cos x - (a-1)\sin x = 2a$

51. $\sin 3x + \sin 2x = a\sin x$

Для яких значень параметра a ***рівняння має розв'язки?***

52. $\sqrt{a + \sqrt{a + \sin x}} = \sin x$

53. $\sqrt{a}\cos x - 2\sin x = \sqrt{2} + \sqrt{2-a}$

54. $\sin^2 x + 5\cos^2 x - 3\sin x\cos x = a + 4$

55. $2(tg^2 x + ctg^2 x + 2) + a^2 = 3a(tgx + ctgx)$

56. $2\sin^2 x + 26\cos^2 x + 10\sin x\cos x = 15 - a$

57. $tg4x - tg(2x - \frac{\pi}{4}) = a - 1$

Для яких значень параметра a ***рівняння має єдиний розвязок?***

58. $4a\cos\frac{\pi x}{2} + a^2(a\sqrt{|x|} + 1) = 12$

59. $\cos\frac{2\pi}{x^2 + x - a} = a$

60. $a^2\cos\frac{\pi x}{2} - 6 = a(1 + 2\sqrt[3]{|x|})$

61. $4(\sin^6 x + \cos^6 x) - 4a\sqrt{\frac{3x}{2\pi} - \frac{x^2}{\pi^2}} + a^2 + 2a - 3 = 0$

62. $2\cos ax - 3tg^2 x - 2 = 0$

63. $1 + \sin^2 ax = \cos x$

64. $\cos^2 ax + \cos x = 2(\cos ax + \cos x - 1)$

65. $x^2 - 2a\sin(\cos x) + 2 = 0$

66. $2x^2 - atg(\cos x) + a^2 = 0$

67. $\sqrt{\frac{1}{36} + \sqrt{3|x| + x^4}} = \frac{1}{6} + \frac{\sin a}{2} - \frac{\cos^2 a}{3}$

Для яких значень параметра a ***рівняння:***

68. $2\cos 2x + 2a\sin x + a - 1 = 0$ має єдиний розвязок на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$?

69. $(1-a)\,tg^2 x - \frac{2}{\cos x} + 1 + 3a = 0$ має більше одного розвязку на інтервалі $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$?

70. $\sin^2 x - \left(3a + \frac{1}{2}\right)\sin x + \frac{3a}{2} = 0$ має три корені на проміжку $\left[\frac{2\pi}{3};\pi\right]$?

71. $\sin^2 x + (4a^2 - 3)\sin x + 4a^2 - {} = 0$ має 4 корені на проміжку $\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$?

72. $\sin\frac{2\pi}{x^2+2x+a} = 0$ має 6 коренів ?

73. $\cos\sqrt{a^2-x^2} = 1$ має 8 коренів ?

74. $2(a^2+1)\cos^2 x + 4a^2\cos x + 1 = 0$ не має коренів ?

75. $(a^2+1)\sin^2 x + 2a^2\sin x + \frac{1}{2} = 0$ має хоча б один корінь ?

76. $2\sin^2 x - 3\cos x\sin x - 3\cos^2 a = a$ не має розв’язків на проміжку $[0;\frac{\pi}{2})$?

77. $\sin x \cos 2x \sin 3x = a$ має два корені на проміжку $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$?

78. $\cos x \cos 2x \cos x = a$ має більше одного кореня на проміжку $\left[\frac{\pi}{8}; \frac{3\pi}{8}\right]$?

79. $\cos 2x + 2\cos x - 2a^2 - 2a + 1 = 0$ має єдиний розв'язок на проміжку $[0; 2\pi)$?

80. $\cos 2x + 2(2a-1)\sin x - 2a^2 + 2a - 1 = 0$ має три кореня на проміжку $[0; 2\pi)$?

Скільки коренів має рівняння в залежності від параметра а на проміжку?

81. $\cos x ctg x - \sin x = a\cos 2x,\ x \in [0; 2\pi]$

82. $\dfrac{a\sin x - 2}{a - 2\cos x} = \dfrac{a\cos x - 2}{a - 2\sin x},\ x \in [20\pi; 29\pi]$

83. $\dfrac{a - 3\sin x}{a\cos x - 3} = \dfrac{a - 3\cos x}{a\sin x - 3},\ x \in [40\pi; 49\pi]$

84. При яких значеннях а серед коренів рівняння $\sin 2x + 6a\cos x - \sin x - 3a = 0$ знайдуться два корені, різниця між якими буде $\frac{3\pi}{2}$.?

85. При яких значеннях а серед коренів рівняння $\sin 2x + 4a\sin x - \cos x - 2a = 0$ знайдуться два корені, різниця між якими буде $\frac{3\pi}{2}$.?

86. При яких додатніх значеннях а усі додатні корені ріняння $\cos(\frac{x}{2}+a)-\cos(\frac{3x}{2}+a)=\sin\frac{x}{2}$ розташовані в порядку зростання, утворюють арифметичну прогресію?

87. При яких додатніх значеннях а усі додатні корені ріняння $\sin(\frac{3x}{2}+a)+\sin(\frac{x}{2}+a)=\cos\frac{x}{2}$ розташовані в порядку зростання, утворюють арифметичну прогресію?

88. Знайти значення а з проміжку [-2;1], при кожному з яких відстань на числовій осі між будь-якими коренями рівняння $\sin 2x+|2a+1|\sin x+|a|=2|a|\cos x+\sin x+|2a^2+a|$ не меньше, ніж $\frac{\pi}{2}$.

88. Знайти значення а з проміжку [-1;2], при кожному з яких відстань на числовій осі між будь-якими коренями рівняння $\sin 2x+2|a|\cos x-\sin x+|a|=|2a-1|\sin x+|2a^2-a|$ не меньше, ніж $\frac{\pi}{2}$.

89. При яких додатніх значеннях а, всі невід'ємні значення х, які задовольняють рінянню $\cos((19a-7)x)=\cos x((17a+13x)$ і розташовані в порядку зростання, утворюють арифметичну прогресію?

90. При яких додатніх значеннях а, всі невід'ємні значення х, які задовольняють рінянню $\cos((5a-9)x)=\cos x((9a+17)x)$ і

розташовані в порядку зростання, утворюють арифметичну прогресію?

91. Знайти значення параметра a, при кожному з яких рівняння $(a - x^2 - \cos\frac{11\pi}{4}x)\sqrt{8 - ax} = 0$ має на проміжку $[-2;3]$ непарну кількість коренів.

92. При якому a фігура, що задається рівнянням $|x-6|+|x-\sin a|+|y-3|+|y-\sin a|=9-2\sin a$ має найбільші периметр і площу?

93. При якому a фігура, що задається рівнянням $|x+7|+|x+\cos a|+|y+3|+|y+\cos a|=10-2\cos a$ має найбільші периметр і площу?

Знайти значення параметра a при яких система має розв'язки, і знайти ці розв'язки.

94. $\begin{cases} \sin x \cos 2y = (a^2-1)^2+1 \\ \cos x \sin 2y = a+1 \end{cases}$

95. $\begin{cases} \sin x + \cos y = 2a^2 \\ \sin x \cos y = a^2(a^2-4) \end{cases}$

96. $\begin{cases} \sin x \cos y = a^2 \\ \sin y \cos x = a \end{cases}$

97. $\begin{cases} \dfrac{1}{\sin x} - \cos x = \dfrac{a+3}{3} \\ \sin x \cos y = -\dfrac{a}{3} \end{cases}$

98. $\begin{cases} \dfrac{1}{\cos x} + tgy = 2a + 2 \\ tgy + (a^2 + 2a)\cos x = 0 \end{cases}$

99. $a \geq 0 \begin{cases} \sin x \cos y = a^3 - a^2 - 6a + \dfrac{35}{4} \\ \cos x \sin y = a^2 - 6a + \dfrac{33}{4} \end{cases}$

100. $\begin{cases} tgx + ctgy = a \\ ctgx + tgy = 2 \end{cases}$

101. $\begin{cases} \sin x \cos 2y = a^2 + 1 \\ \cos x \sin 2y = a \end{cases}$

102. $\begin{cases} (a^2 - a)\sin \dfrac{x}{2} + 2\cos y = a + 5 \\ 3\sin \dfrac{x}{2} + \cos y = 4 \end{cases}$

При якому значенні параметра a система має єдиний розв'язок?

103. $\begin{cases} (|x| + 1)a = y + \cos x \\ \sin^2 x + y^2 = 1 \end{cases}$

104. $\begin{cases} ax^2 + a - 1 = y - |\sin x| \\ tg^2 x + y^2 = 1 \end{cases}$

Знайти всі знічення параметра a, при кожному з яких нерівність виконується при всіх дійсних значеннях x?

105. $a(4 - \sin x)^4 - 3 + \cos^2 x + a > 0$

106. $-5 + 5a + \sin^2 x + a(3 - \cos x)^2 > 0$

107. $\cos^2 x + 2a\sin x - 2a < a^2 - 4$

108. $\sin^6 x + \cos^6 x + a\sin x\cos x \geq 0$

109. $(a^2 + a - 2)\cos 2x + 2(a+5)\sin x - a^2 - a + 6 \geq 0$

110. $a^2 + 2a - \sin^2 x - 2a\cos x > 2$

111. $2\sin^2 x + 2(a-3)\cos x - a - 9 < 0$

112. При яких значеннях а, розв'язок нерівності $\cos^2 x + a\sin x < 2 - \sin x$ містить проміжок $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$?

Розв'язати нерівність для всіх значень параметра a:

113. $\cos x - \frac{1}{\cos x} \leq a$

114. $a\sin^2 x + 2\cos x - (a-1) > 0$

115. При якому додатньому а нерівність $|| tgx - \frac{1}{2} | - \frac{1}{2} | \leq a$ виконується при всіх $x \in \left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right)$?

116. При якому а нерівність $(a-1)\sin^2 x + 2(a-2)\sin x + a + 3 < 0$ не має розв'язку?

117. При яких значеннях параметра a нерівність

$$\sin^5 + \cos^5 - a(\sin x + \cos x) \geq \frac{a^2 - 11}{2}(\sin x + \cos x)\sin x\cos x$$

виконується при всіх $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$?

118. Нехай $x_0 -$ більший із коренів рівняння

$x^2+2(a-b-3)x+a-b-13=0.$ Знайти найбільше значення x_0 при $a \ge 2, b \le 1.$

119. Знайти всі числа $a,$ що задовольняють умові $-1<a<1,$ для яких вираз $1+2\sqrt{x^2-2axy+y^2-6y+10}$ набуває найменшого значення лише при одній парі чисел $x, y.$

120. Для кожного значення параметра $a,$ що задовольняє нерівностям $0<a<2,$ знайти найменше значення виразу

$x^2+y^2-2a(x+y)$ при умові $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}xy\right)=1.$

121. При яких значеннях параметрів a і b вираз

$p=2a^2-8ab+17b^2-16a-4b+2044$ набуває найменшого значення? Чому дорівнює це значення?

$p=2(a-2b-4)^2+9(b-2)^2+1976.$ (2)

122. Для всіх значень параметра p знайти найбільше і найменше значення функції

$f(x)=2\sin\, p\cos x-\dfrac{1}{2}\cos 2x, x\in(-\infty,+\infty).$

ЛІТЕРАТУРА

1. Вишенський В.О., Перестюк М.О., Самойленко А.М. Задачі з математики. – К. : Вища школа, 1985. – 264 с

2. Горгеладзе Ш.Г., Кухарчук М.М., Яремчик Ф.П. Збірник конкурсних задач з математики: Навчальний посібник. – К.: Вища школа, 1988.–328с

3. Доманська І.П., Зеліско Г.В., Стахів Л.Л. Рівняння з параметрами: Методичні рекомендації.- Львів: Видавн. центр ЛДУ ім. І. Франка, 2005

4. Цегелик Г.Г. Збірник типових конкурсних тестових завданьз математики: Навчальний посібник.-Львів: Видавн. центр ЛДУ ім. І. Франка, 2005.–140с

5. Назаренко О.М., Назаренко Л.Д. Тисяча і один приклад. Рівності і нерівності. Посібник для абітурієнтів. – С.: Слобожанщина, 1994. – 272 с.

6. Конет І.М., Паньков Г.В. та ін. Обласні математичні олімпіади. – Кам'янець-Подільський: Абетка, 2000. – 303 с.

7. Беседін Б.Б., Кадубовський О.А. Про алгоритмічний підхід до розв'язання рівнянь та нерівностей (з однією змінною) другого степеня з параметром. Фізико-математична освіта: науковий журнал. 2018. Випуск 2 (16). С. 18–22.

8. Істер О. С. Методи розв'язування задач з математики. Теорія. Приклади. Вправи. Книга 1. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2014. 480 с.

9. Крамор В.С. Задачі з параметрами і методи їх розв'язання. Тернопіль : Навчальна книга «Богдан», 2012. 416 с.

10. Апостолова Г., Ясінський В.. Перші зустрічі з параметром. — К.: Факт, 2004. 316 с