

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Державний вищий навчальний заклад
«Запорізький національний університет»

На правах рукопису

ЛІСНЯК АНДРІЙ ОЛЕКСАНДРОВИЧ

УДК 519.688:519.6:514.752

ТРИКУТНІ СКІНЧЕННІ ЕЛЕМЕНТИ У МАТЕМАТИЧНОМУ
МОДЕЛЮВАННІ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ НА БАЗІ ТЕОРІЇ
R-ФУНКЦІЙ

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних
наук

Науковий керівник
Гоменюк Сергій Іванович,
доктор технічних наук, професор

Запоріжжя – 2012

ЗМІСТ

Вступ.....	4
Розділ 1 Аналіз стану проблеми моделювання складних геометричних об'єктів	15
1.1 Актуальність проблеми моделювання складних геометричних об'єктів	15
1.2 Задача математичного моделювання геометричних об'єктів.....	17
1.3 Огляд методів математичного моделювання геометричних об'єктів	21
1.4 Огляд методів побудови дискретних математичних моделей геометричних об'єктів	28
1.5 Висновки	31
Розділ 2 Формалізація опису геометричних об'єктів	33
2.1 Основні положення теорії R-функцій	33
2.2 Конструктивні засоби R-функцій	39
2.2.1 Двовимірні конструктивні елементи.....	40
2.2.2 Тривимірні конструктивні елементи.....	48
2.2.3 Перетворення системи координат	53
2.2.4 Моделювання складних геометричних об'єктів	58
2.3 Проблемно-орієнтована мова для моделювання геометричних об'єктів.....	59
2.4 Висновки	67
Розділ 3 Побудова дискретних математичних моделей, заданих за допомогою R-функцій, з використанням трикутних скінченних елементів.....	69
3.1 Загальна постановка задачі побудови дискретного представлення на основі трикутних скінченних елементів	69
3.2 Дискретне представлення геометричних об'єктів на площині	72
3.3 Дискретне представлення тривимірних геометричних об'єктів	84
3.4 Методи перетворення сітки на основі трикутних скінченних елементів у двовимірному та тривимірному просторах	98
3.5 Висновки	101

Розділ 4 Автоматизація побудови дискретних моделей геометричних об'єктів	103
4.1 Об'єктно-орієнтована модель інструментальної системи побудови дискретних моделей геометричних об'єктів на базі трикутних скінченних елементів	103
4.2 Оцінка обчислювальної складності	105
4.3 Оцінка точності	107
4.4 Приклади формалізації й дискретизації математичних моделей	111
4.5 Висновки	116
Висновки	118
Список використаних джерел	120
Додаток А Акт про впровадження в початковий процес Запорізького національного університету	135

ВСТУП

Актуальність теми. Комп'ютерне моделювання об'єктів і процесів реального світу займає одне із провідних місць у сучасній інженерній і науковій практиці, тому що з точки зору економічних витрат воно в багато разів вигідніше реальних експериментів. По-перше, проекти, що розробляються людиною, носять усе більш і більш складний характер і в деяких випадках неможлива навіть побудова фізичної моделі, адекватної по своїм експлуатаційним характеристикам реальному інженерному проекту. По-друге, модель, що складається з великої кількості компонентів, містить відповідну кількість зв'язків між ними, які на практиці найчастіше не тільки неможливо відстежити, але навіть і виявити весь набір таких зв'язків. По-третє, моделювання й аналіз властивостей інженерних конструкцій у теперішній час виконується за багатьма параметрами, а багатопараметричні дослідження фізичних моделей складних систем вимагають значних витрат.

Розвиток сучасної техніки неможливий без наявності надійних і ефективних методів оцінки міцності й довговічності складних інженерно-технічних конструкцій і споруд, що приводить до необхідності дослідження їх напружено-деформованого стану (НДС). Побудова математичних моделей різних об'єктів і процесів у загальному вигляді є доволі трудомісткою і складною задачею. При дослідженні НДС реальних інженерно-технічних об'єктів за допомогою комп'ютерної техніки на практиці часто застосовують різні наближені обчислювальні методи, які базуються на ідеї переходу від безперервної задачі до дискретної, коли досліджувана суцільна область заміняється деякою скінченною дискретною моделлю. Найпоширенішими в теперішній час обчислювальними методами для дослідження НДС є метод скінченних елементів (МСЕ) та метод граничних елементів (МГЕ), у яких для представлення структури геометричного об'єкта виконується його заміна

деякою сукупністю непересічних скінченних або граничних елементів, що заповнюють увесь об'єм або поверхню об'єкта відповідно.

Однієї з головних проблем, що виникають при практичній реалізації МСЕ або МГЕ, є побудова адекватної дискретної моделі досліджуваної механічної системи.

Проблема оптимальної дискретизації досліджуваної області на скінченні або граничні елементи в загальному вигляді є досить складною (особливо для тривимірних областей). Це обумовлене тим, що на форму скінченних елементів (СЕ) або граничних елементів (ГЕ), як правило, накладають два основних обмеження: вони не повинні мати занадто малих (великих) кутів і площа ГЕ або СЕ не повинна перевищувати деякі, наперед задані, величини. У першому випадку – при розрахунках виникають великі обчислювальні погрішності. У другому – виникає ризик втрати точності обчислень при значній зміні градієнта досліджуваної функції (наприклад, у зоні передбачуваного концентратора деформацій).

Таким чином, при використанні багатьох обчислювальних методів, однією з найбільш складних є проблема побудови адекватних геометричних комп'ютерних моделей реальних об'єктів. Це пов'язане як зі складною формою вихідних геометричних об'єктів, так і з проблемами формалізації їх опису. Крім того, окремою складною задачею є автоматизація побудови дискретних геометричних моделей складних інженерних конструкцій.

У розвиток аналізу складних інженерно-технічних задач, теорії й практики математичного моделювання, а також візуалізації геометричних моделей і просторів чисельних результатів значний внесок зробили роботи Городецького А.С. [18], Згуровського Н.З. [60], Киричевського В.В. [32-34, 73], Куценко Л.І. [39], Михайленко В.М. [57, 58, 60], Моссаковського В.І. [61], Рвачева В.Л. [66-69], Толока В.А. [85-87], Шейко Т.І. [51-56], Хомченко А.Н. [20, 89, 91], Толока А.В. [82-84], Гоменюка С.І. [11-17] та інших дослідників [71, 72].

Розробці методів побудови дискретних геометричних моделей інженерних конструкцій присвячені роботи Ватсона Д. (D. Watson) [147], Лавсона С. (C. Lawson) [119, 120], Рапперта Дж. (J. Ruppert) [135], Скворцова А.В. [74, 75], Шевчука Дж. (J. Shewchuk) [140, 141], Томпсона Дж. (Thompson J.F) [144, 145], Фрея П. (Frey P.J) [107, 108] та інших учених [95, 103, 109].

Швидке зростання продуктивності сучасної обчислювальної техніки стимулювало розвиток великої кількості програмних продуктів, спрямованих на автоматичне проектування, конструювання й виробництво. Із усіх методів комп'ютерного аналізу, що застосовуються в автоматизованому проектуванні, найширше використовується МСЕ [29, 30, 72]. За його допомоги розраховуються напруження, деформації, теплообмін, розподіл магнітного поля й інші задачі з безперервними середовищами, вирішувати які будь-яким іншим методом виявляється досить складно.

У МСЕ аналітична модель структури являє собою поєднання елементів, завдяки чому вона розбивається на окремі частини, які вже можуть оброблятися комп'ютером. Для використання даного методу потрібна абстрактна модель відповідного рівня, яка відрізняється від конструкції тим, що вона формується шляхом виключення несуттєвих деталей і редукування розмірності [96]. Абстрактна модель створюється або в інтерактивному режимі, або автоматично. Готова абстрактна модель розбивається на скінченні елементи, що утворюють аналітичну модель [42].

Побудова таких абстрактних геометричних моделей складних інженерних конструкцій та їх оптимальне розбиття на скінченні елементи (дискретизація досліджуваної області) є досить складною й трудомісткою задачею. Тому автоматизація даного процесу є актуальною задачею. Аналіз існуючих алгоритмів і методів побудови геометричних моделей складних інженерних конструкцій і споруд показує, що одним з найбільш складних етапів є формалізація опису геометрії проєктованого об'єкта. У сучасних системах автоматизації проєктування (САПР), таких, наприклад, як ANSYS [1, 24, 25,

31], COSMOS [21, 22], КОМПАС [37, 38, 59, 78] та ін. [28, 26, 77] геометричне моделювання проєктованих об'єктів здійснюється або шляхом комбінування наявних базових геометричних примітивів, або у вигляді їх деякого параметричного опису. Такий підхід до формалізації опису й побудови геометричних моделей, по-перше, є досить трудомістким, а, по-друге, не завжди дозволяє побудувати адекватну геометричну модель для конструкції нетипової форми.

У першому випадку простежується єдність підходів до конструювання геометрії моделі із заздалегідь підготовлених конструктивних елементів і до підбора заготовлених схем розв'язків для кожного конкретного випадку. Такий підхід вирішує проблему побудови складних геометричних моделей, але є досить трудомістким способом.

При розробці систем, що базуються на формальних мовах опису моделей, виникає питання про організацію єдиного принципу математичного опису геометрії досліджуваної моделі й математичної постановки задачі що розв'язується. На сьогоднішній день, незважаючи на актуальність, ця проблема так і не має закінченого розв'язку. Складність такої задачі полягає в побудові каркаса нетривіальної геометричної моделі, придатної для коректних розрахунків з використанням, наприклад, методу скінчених елементів на основі єдиного формального опису. На сьогоднішній день подібні принципи отримали поширення в основному для воксельних структур у системах візуалізації математичних об'єктів, наприклад, у системі РАНОК [79, 82].

Таким чином, проблема формалізації опису й побудови геометричних моделей складних інженерно-технічних об'єктів та їх дискретизація на скінченні елементи, як і раніше, є актуальною.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалася згідно з планом науково-технічних робіт Запорізького національного університету в рамках держбюджетних тем № 5/09 «Розробка методик та програмного забезпечення для розрахунку конструкцій із гумових та гумовокордних матеріалів» (№ДР 0109U002522) та

№Ф35/529-2011 «Інструментальна система аналізу складних механічних процесів FORTU-FEM» (№0111U009113). Дисертаційна робота є складовою частиною проведених за цими темами досліджень. Дисертантом були розроблені обчислювальні методи та відповідні програмні підсистеми автоматизованої побудови дискретних математичних моделей на базі трикутних скінченних елементів для конструкцій, геометричні моделі яких представлені R-функціями; отримані дискретні представлення були використані для аналізу напружено-деформованого стану конструкцій із гумових та гумовокордних матеріалів.

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є розробка методів і підходів до формалізації опису математичних моделей геометричних об'єктів на базі теорії R-функцій та побудова відповідних дискретних моделей, що ґрунтуються на використанні трикутних скінченних елементів.

Для досягнення поставленої мети в роботі сформульовані такі основні задачі:

- аналіз наявних методів і підходів до моделювання геометричних об'єктів;
- розвиток принципів аналітичного конструювання геометричних об'єктів на базі теорії R-функцій;
- розробка методів побудови та оптимізації дискретних математичних моделей, що ґрунтуються на трикутних скінченних елементах, для аналітичних моделей на базі теорії R-функцій;
- розробка програмного інструментарію автоматизованої побудови дискретних моделей геометричних об'єктів для апробації запропонованих методів та підходів.

Об'єкт дослідження – формалізація опису та побудова дискретних моделей геометричних об'єктів складної форми (інженерні конструкції, споруди, деталі машин і механізмів тощо).

Предмет дослідження – методи та підходи побудови математичних моделей геометричних об'єктів.

Методи дослідження. Дослідження базуються на аналітичній геометрії, математичному моделюванні, математичному аналізі, обчислювальних методах, системному аналізі та об'єктно-орієнтованому підході. Для формального опису геометричних об'єктів складної форми використовується математичний апарат теорії R-функцій.

Наукова новизна одержаних результатів. У рамках вирішення задач дисертаційного дослідження отримано такі основні нові наукові результати:

– отримав розвиток метод математичного моделювання геометричних об'єктів на базі теорії R-функцій у частині розробки нових тривимірних моделей складних об'єктів, що спрощує процес математичного моделювання;

– отримав розвиток метод формального опису математичних моделей геометричних об'єктів на базі проблемно-орієнтованої мови в частині врахування властивостей моделювання на базі теорії R-функцій, що дозволяє автоматизувати процес побудови моделей;

– отримали розвиток методи побудови дискретних моделей, засновані на трикутних скінченних елементах, для аналітичних моделей геометричних об'єктів на базі теорії R-функцій, що дозволяє спростити процес моделювання за рахунок підвищення якості та швидкості візуалізації результатів;

– уперше запропоновано методи оптимізації дискретних моделей шляхом урахування диференціальних характеристик границі геометричного об'єкта, представленого R-функцією, що дозволяє підвищити точність математичного моделювання за рахунок покращення апроксимації границі.

У результаті дисертаційного дослідження вирішена актуальна науково-технічна задача підвищення точності та якості математичного моделювання складних геометричних об'єктів та конструкцій.

Практичне значення одержаних результатів. Розроблені в роботі методи використання функціонального підходу та теорії R-функцій для математичного опису моделей геометричних об'єктів та їх дискретизації на скінченні елементи трикутної форми дозволяють виконувати проектування та відображення інженерних конструкцій і можуть бути використані при

створенні сучасних інформаційних технологій аналізу та прогнозу в авіабудуванні, машинобудуванні, будівництві тощо.

У результаті розв'язання задач дисертаційного дослідження створено програмну систему, яка працює в сімействі операційних систем Windows (XP і новіших) й автоматизує основні етапи проектування функціональної моделі та побудови дискретних математичних моделей геометричних об'єктів. Розроблена система генерує нерівномірну поверхневу скінченно-елементну сітку та дозволяє виконувати такі оптимізаційні задачі як згладжування або загублення та реконструкцію геометричних особливостей (гострих кутів, отворів, тріщин тощо). Програмний продукт може бути використаний як самостійно, так і в складі автоматизованого комплексу, наприклад, системи FORTU-FEM.

Запропоновані та теоретично обґрунтовані обчислювальні алгоритми можуть бути використані конструкторськими організаціями та наукоємними виробництвами для прикладного математичного моделювання геометричних об'єктів.

Практичне значення результатів підтверджується актом впровадження у навчальний процес математичного факультету Запорізького національного університету. Акт про впровадження від 31 січня 2012 року, додається (додаток А).

Особистий внесок здобувача. Усі основні положення й результати дисертаційної роботи отримані здобувачем самостійно та опубліковано в роботах [17, 45, 47, 48, 92, 93].

У наукових працях, опублікованих у співавторстві, з питань, що стосуються наданого дослідження, здобувачеві належить: у роботі [17] огляд методів математичного моделювання складних інженерних споруд; у роботі [47] огляд та порівняльний аналіз методів автоматичної генерації скінченно-елементних сіток, що задовольняють критерію Делоне; у роботі [45] розробка та програмна реалізація підходів для побудови та вдосконалення дискретних моделей геометричних об'єктів на площині та в просторі; у роботі [92] участь у

розробці та програмній реалізації ітераційного алгоритму розбиття на дискретні елементи чотирикутної форми геометричних об'єктів, що задані за допомогою R-функцій; у роботі [48] розробка методів та підходів для побудови дискретних математичних моделей об'єктів заданих за допомогою R-функцій; у роботі [93] класифікація та практична реалізація методів математичного моделювання геометричних об'єктів складної форми.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи оприлюднені на таких семінарах, конференціях, симпозіумах:

- семінар кафедри математичного моделювання математичного факультету Державного вищого навчального закладу «Запорізький національний університет» (м. Запоріжжя, січень 2012 р.);

- семінар кафедри програмного забезпечення автоматизованих систем факультету інформаційних та електронних технологій Запорізької державної інженерної академії (м. Запоріжжя, січень 2011 р.);

- семінар кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень факультету кібернетики Київського національного університету ім. Тараса Шевченка (м. Київ, жовтень 2010 р.);

- семінар відділу прикладної математики та обчислювальних методів Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України (м. Харків, листопад 2010 р.);

- міжнародна конференція «Трёхмерная визуализация научной, технической и социальной реальности» (Росія, Іжевськ, 4-6 лютого 2009 р.);

- міжнародний симпозіум «IEEE East-West Design & Test Symposium» (Росія, Москва, 18-21 вересня 2009 р.);

- конференція молодих учених та спеціалістів Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України «Сучасні проблеми машинобудування» (Харків, 3-6 грудня 2007 р.);

- конференція молодих учених та спеціалістів Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України «Сучасні проблеми машинобудування» (Харків, 4-7 грудня 2006 р.);

- міжнародна конференція «Актуальные проблемы прикладной математики и механики» (Україна, Харків, 23-26 жовтня 2006 р);
- IV регіональна наукова конференція молодих дослідників «Актуальні проблеми математики та інформатики» (м. Запоріжжя, 27-28 квітня 2006 р.);
- міжнародна науково-технічна конференція «Інтегровані комп'ютерні технології в машинобудуванні ІКТМ-2006» (Україна, Харків, 2006 р.).

Публікації. Основні результати за темою дисертації викладено в 13 опублікованих роботах: 4 статтях у наукових журналах і збірниках, що входять до переліку фахових видань України з фізико-математичних наук [17, 45, 47, 92]; 1 стаття в науковому журналі, що входить до переліків фахових видань України з технічних наук [48], 1 статті в зарубіжному науковому виданні [93], тезах 7 доповідей і збірниках праць наукових конференцій [11, 43, 44, 46, 49, 50, 111].

У **першому розділі** проведено огляд літературних джерел за тематикою дисертації. Обґрунтовано вибір напрямку подальших досліджень, пов'язаних з математичним моделювання геометричних об'єктів. Проведено детальний аналіз основних підходів і методів математичного моделювання геометричних об'єктів, наведено огляд основних методів побудови дискретних моделей геометричних об'єктів на базі трикутних скінченних елементів. Основними висновками даного розділу є актуальність розробки та розвитку способів аналітичного конструювання на базі теорії R-функцій, необхідність розробки методів побудови дискретних математичних моделей та створення автоматизованої програмної системи математичного моделювання складних геометричних об'єктів.

У **другому розділі** розглянуто основні положення теорій R-функцій В.Л. Рвачова, практичне використання яких потребує розвитку методів конструювання нових функцій для опису геометричних об'єктів. Із цією метою розроблено моделі геометричних об'єктів, що відповідають основним сучасним конструкторським примітивам. Зокрема, запропоновано аналітичні моделі, що відповідають півплощинам і півпросторам; кутам; областям, обмеженим

кривими та поверхнями другого порядку; багатокутникам; різним типам з'єднань. Також розглянуто основні прийоми утворення функціональних моделей циліндричних і гвинтових тіл, тіл обертання тощо. Розглянуто такі основні операції над аналітичними моделями, як: переміщення, обертання, різні типи симетрії та трансляції.

Для автоматизації використання R-функцій у математичному моделюванні геометричних областей, у першу чергу, необхідно розробити формальний спосіб їх опису, який буде придатним для автоматизованої обробки із застосуванням комп'ютера. Аналіз показав, що найбільш розповсюдженим розв'язком цієї задачі є використання проблемно-орієнтованих формалізованих мов. У другому розділі розроблено проблемно-орієнтовану мову, яка є модифікацією мови FORTU-3, що враховує особливості моделювання геометричних об'єктів на базі теорії R-функцій.

У **третьому розділі** розглянуто задачу побудови дискретних математичних моделей геометричних об'єктів, що задані у функціональному вигляді. Запропоновано методи, які дозволяють отримувати та оптимізувати дискретизацію на основі трикутних скінченних елементів двовимірних та поверхні тривимірних геометричних об'єктів. Отримано ряд критеріїв, що дозволяють досягти необхідної точності апроксимації та якості скінченних елементів. Сформульовано та доведено теореми про можливість досягнення довільної точності апроксимацій геометричного об'єкта додаванням скінченної кількості нових вузлів сітки.

У **четвертому розділі** наведено розроблену об'єктно-орієнтовану модель автоматизованої системи математичного моделювання геометричних об'єктів. Основою системи є обчислювальний блок для побудови скінченноелементної сітки та підсистема графічного інтерфейсу користувача. Запропонована модель може бути використана як для побудови самостійної програмної системи, так і при створенні препроцесора для наявних систем аналізу напружено-деформованого стану з використанням МСЕ, наприклад, системи FORTU-FEM.

Проведений у цьому розділі аналіз показав, що кількість операцій обчислення R-функції (яка є однією з найбільш вибагливих щодо обчислювальних ресурсів) можна обмежити величиною $O(N)$, де N – кількість вузлів вихідної сітки.

Проведений обчислювальний експеримент показав, що відносна похибка дискретних моделей, побудованих за допомогою розроблених підходів та методів, не перевищує 1%. Як порівняльні величини в обчислювальному експерименті використано площу для двовимірних та площу поверхні для тривимірних геометричних об'єктів. При цьому в результаті оптимізації може бути отримана як відносно рівномірна сітка, так і сітка, що згущується в околі особливих точок та великої кривини границі.

РОЗДІЛ 1

АНАЛІЗ СТАНУ ПРОБЛЕМИ МОДЕЛЮВАННЯ СКЛАДНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

1.1 Актуальність проблеми моделювання складних геометричних об'єктів

Швидкий розвиток комп'ютерної техніки та її широке застосування в проектуванні й виробництві привели до активного її використання інженерами для дослідження міцності та довговічності інженерних конструкцій і об'єктів. Міжнародна конкуренція на ринку продукції, товарів і послуг та підвищені вимоги до якості продукції приводять власників підприємств до необхідності розвитку автоматизації проектування й виробництва [15, 33, 42].

Отже, сучасні підприємства не зможуть вижити в умовах глобальної конкуренції, якщо не будуть випускати нові продукти кращої якості, більш низької вартості за найкоротший проміжок часу. Тому виробники прагнуть використовувати обчислювальні можливості комп'ютерів, їх високу швидкодію й зручний графічний інтерфейс для автоматизації розв'язку задач проектування та подальшого виробництва. Для розв'язку таких задач використовуються технології автоматизованого проектування (computer-aided design – CAD), автоматизованого виробництва (computer-aided manufacturing – CAM) і автоматизованої розробки або конструювання (computer-aided engineering – CAE), роль яких у сучасному виробництві досить значна [1, 42].

У практиці сучасних інженерних розрахунків найбільш складним є аналіз функціональних характеристик, міцності та довговічності машин, механізмів, будівельних конструкцій, споруд тощо. Якість одержуваних результатів напряму пов'язана з адекватністю й точністю обраних математичних моделей, складовими елементами котрих, як правило, є математичні моделі геометричних об'єктів.

Задачі представлення та опису геометрії вихідної моделі вирішують системи автоматизованого проектування (САПР). Одна з функцій САПР –

визначення геометричної структури конструкцій (деталей механізмів, архітектурних елементів, електронних схем, планів будинків тощо). Геометрична структура, отримана в таких системах, може використовуватися як основа для подальших операцій у системах автоматизації виробництва й конструювання. Однією зі значних переваг САПР є можливість заощаджувати час і скорочувати кількість помилок за рахунок повторного використання побудованих раніше елементів моделей у проектуванні та конструюванні. Отже, можна стверджувати, що системи автоматизованої розробки креслень і системи математичного моделювання геометричних об'єктів є одними з важливих компонентів автоматизованого проектування [24, 25, 28].

Для вивчення поведінки, удосконалення й оптимізації геометрії конструкцій, що проектуються, застосовуються системи автоматизованого конструювання. Інструментальні засоби систем автоматизованого конструювання дозволяють здійснювати різноманітні види аналізу, у тому числі визначення напружено-деформованого стану інженерних конструкцій. Отримані при розв'язку таких задач системи диференціальних рівнянь на практиці вимагають застосування обчислювальних методів. Одним з найпоширеніших обчислювальних методів є метод скінченних елементів [29, 30, 85].

Однією з основних проблем при використанні МСЕ (особливо в тривимірній постановці) є побудова дискретних скінченно-елементних моделей конструкцій, що розраховуються. Важливими складовими проблеми побудови скінченно-елементних математичних моделей є дві актуальні на теперішній час задачі [15, 71, 109]:

- формалізація опису складних геометричних об'єктів;
- автоматична побудова дискретної математичної моделі геометричного об'єкта заданої форми.

Адекватність побудованих дискретних моделей геометричних об'єктів впливає на стійкість і точність застосовуваних обчислювальних методів. Таким чином, задача побудови дискретних математичних моделей геометричних

об'єктів є досить актуальною.

1.2 Задача математичного моделювання геометричних об'єктів

Розв'язок задач побудови, аналізу й оптимізації математичних моделей геометричних об'єктів, визначення різних властивостей, проведення обчислених експериментів, модифікації й візуалізації базується на аналітичній і диференціальній геометрії, обчислювальних методах, варіаційному обчисленні. [10, 88, 95].

Як правило, об'єкти реального світу, що моделюються (інженерні конструкції та споруди), є суцільними (solid) тілами або просто тілами, які надалі будемо називати геометричними об'єктами.

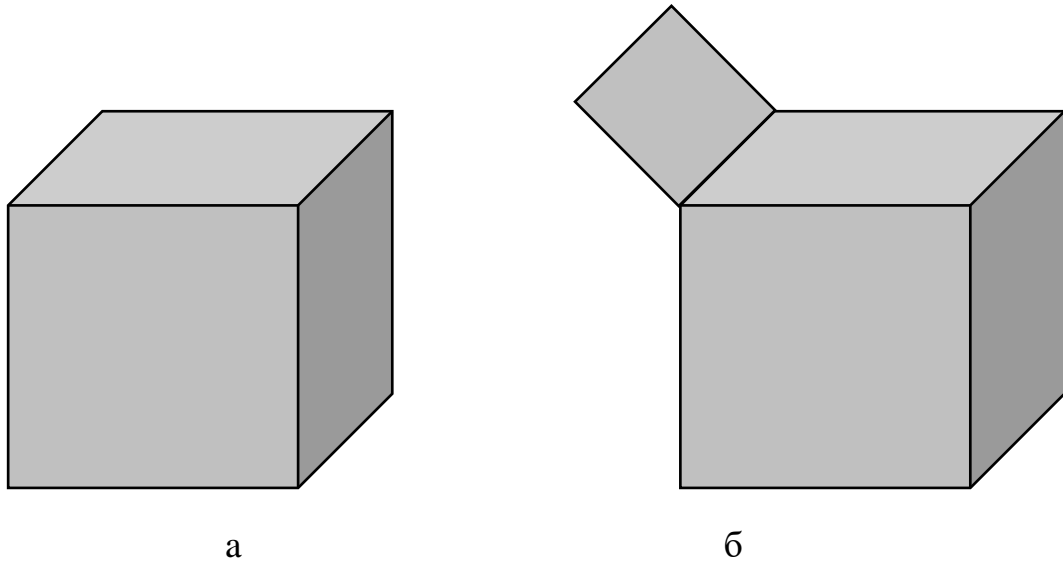
Суцільне або твердотільне моделювання є важливим напрямком досліджень у сучасних додатках проектування, автоматизації виробничих процесів та комп'ютерної графіки. Сфера застосування твердотільних моделей охоплює декілька напрямів, у тому числі математику, інформатику й машинобудування. Отже, це досить загальний напрям, який повинен ураховувати розмаїття точок зору й відповідати різній меті [114].

Поняття «суцільне» або «тверде» застосовується до тіл, які можна представити у вигляді підмножини тривимірного евклідового простору E^3 й задовольняючим наступним властивостям [133, 134]:

- твердість – інваріантність структури й форми щодо розташування в просторі;
- однорідність – відсутність ізольованих і «висячих» ділянок границі (рис. 1.1);
- скінченність – обмеженість займаної частини площі або об'єму;
- замкнутість відносно булевих операцій: у результаті їх застосування до суцільних тіл також виходять суцільні тіла;

– скінченність опису – наявність скінченного числа геометричних особливостей, що дає можливість описати структуру тіла за допомогою обмеженого обсягу інформації для представлення в пам'яті комп'ютера.

– детермінованість границі – однозначне визначення множини точок його границі.



а – суцільне тіло; б – не суцільне тіло

Рисунок 1.1 – Множини, що відповідають геометричним об'єктам

Множини, які задовольняють переліченим властивостям, придатні для моделювання суцільних тіл. Такими множинами є замкнуті, обмежені й регулярні підмножини E^3 [134].

Множину X називають регулярною, якщо замикання її внутрішніх точок збігається із множиною X [94, 105]. Операція регуляризації r множини X визначається співвідношенням (1.1).

$$rX = \text{замикання}(\text{внутрішні точки}(X)). \quad (1.1)$$

Слід зазначити, що перетинання двох замкнутих регулярних множин (рис. 1.3, а – в), не завжди є замкнутим і регулярним (рис. 1.3 г).

Аналогічне твердження слушне й для різниці двох замкнутих регулярних

множин [105]. Для розв'язку цієї задачі вводиться додаткова операція – регуляризація [105, 134]. Застосувавши оператор r до результатів множинних операцій, можна одержати регуляризованні множинні операції (1.2).

$$\begin{aligned} X \cup * Y &= r(X \cup Y), \\ X \cap * Y &= r(X \cap Y), \\ X - * Y &= r(X - Y). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Отже, під суцільним, твердим або просто тілом будемо розуміти об'єкт який має ненульовий об'єм та геометричне місце точок якого задовольняє описаним вище властивостям.

Автоматизовані системи використовують різні підходи до представлення двовимірних або тривимірних геометричних об'єктів. На основі отриманих представлень описується геометрична структура й характеристики об'єктів. Схема представлення (або просто представлення) множини об'єктів O множиною L – це відношення r між O і L , яке повинне задовольняти наступним властивостям:

- область визначення – множина тіл, які можна описати за допомогою схеми представлення;
- однозначність – схема представлення r однозначна, якщо r є відношенням один до одного (наприклад, якщо O – множина багатокутників на площині, тоді множина впорядкованих послідовностей точок L буде однозначною схемою представлення, і навпаки, множина неупорядкованих послідовностей буде неоднозначною схемою представлення) (рис. 1.2);
- точність – схема представлення є точною, якщо вона не використовує апроксимацію об'єкта;
- дійсність (валідність) – неможливість створення моделі неіснуючого об'єкта;
- замкненість – об'єднання й перетинання суцільних тіл є суцільним тілом;

– компактність і ефективність – можливість компактного зберігання структури об'єкта й наявність ефективних алгоритмів для визначення необхідних фізичних характеристик.

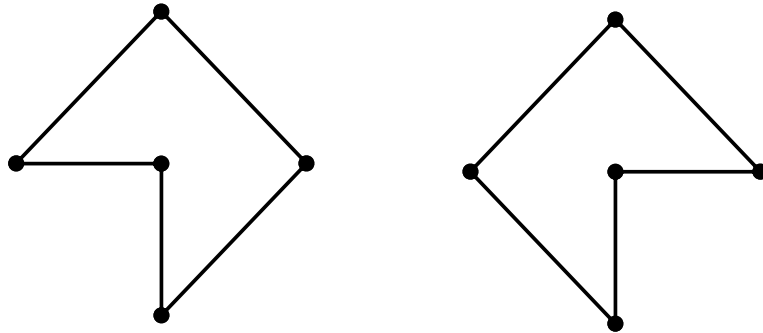
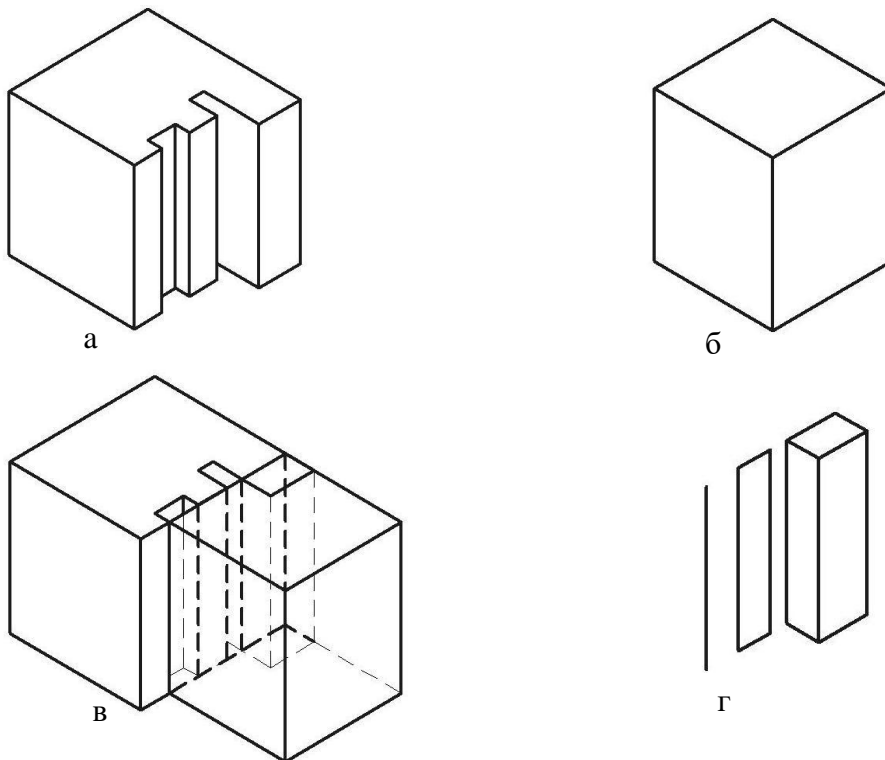


Рисунок 1.2. – Різні варіанти з'єднання вузлів, що призводять до неоднозначності інтерпретації схеми представлення



а – вихідна регулярна множина 1; б – вихідна регулярна множина 2;
в – перетин регулярних множин; г – результат перетину регулярних множин

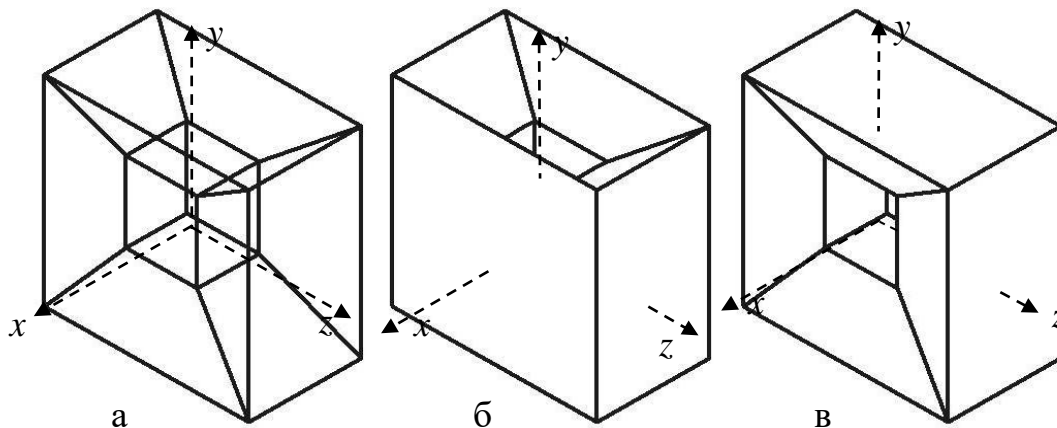
Рисунок 1.3 – Операція перетину множин

Для представлення двовимірних і тривимірних геометричних об'єктів існує велика кількість різних варіантів [42, 134].

1.3 Огляд методів математичного моделювання геометричних об'єктів

Умовно можна виділити ряд різних представлень, в основі яких лежать різноманітні методи моделювання геометричних об'єктів.

Каркасне представлення [42] засноване на визначенні форми об'єкта у вигляді скінченної множини вузлів і ребер, що лежать на поверхні геометричного об'єкта (рис. 1.4 а). Зміна форми об'єкта здійснюється шляхом зміни координат вузлів і структури ребер. Однак, модель, що складається з вузлів і ребер, може бути неоднозначною, оскільки не містить інформацію про внутрішні та зовнішні області об'єкта, що моделюється. Наприклад, у каркасній моделі, наведеній на рис. 1.4 а, важко визначити наявність та напрямок центрального отвору (рис. 1.4 б, в).



а – каркас об'єкта; б – напрямок отвору вздовж Oy ;
в – напрямок отвору вздовж Ox

Рисунок 1.4 – Неоднозначність каркасного представлення

При плоскогранному представленні [88] форма деталі задається за допомогою обмежуючих її поверхонь у вигляді сукупності даних про вузли, ребра та грані. Математичний опис, як правило, включає інформацію про зв'язність поверхонь, тобто про те, як поверхні з'єднуються одна з одною і по яким кривим.

Представлення у вигляді інженерних креслень – набір плоских проекцій, які використовуються для обміну інформацією про структуру деталі або конструкції між інженерами. Даний підхід одержав широке розповсюдження в техніці та підтримується більшістю сучасних САПР, наприклад, Autocad [36, 76] і Компас [9, 59, 78]. Однак, слід зазначити, що в загальному випадку для довільного тривимірного об'єкта важко визначити необхідну кількість плоских проекцій для повного й адекватного опису його форми.

Макетування параметризованих об'єктів [133] – представлення об'єкта у вигляді посилання на зразок у бібліотеці параметризованих примітивів. Таке представлення будується за допомогою використання кортежів, що складаються із номера примітива й послідовного перерахування необхідних параметрів для одержання необхідного об'єкта. Такий спосіб опису є однозначним та компактним, однак, алгоритми обчислення властивостей об'єктів вимагають окремої адаптації для кожного конкретного геометричного об'єкта. Даний підхід застосовується тоді, коли кількість типів об'єктів, що моделюються, порівняно невелика. Наприклад, для зубчатого колеса (рис. 1.5): N – кількість зубів, A – кут зубчастого зачеплення, B – радіус описаного кола, C – радіус кола заглибин, R – радіус внутрішнього отвору.

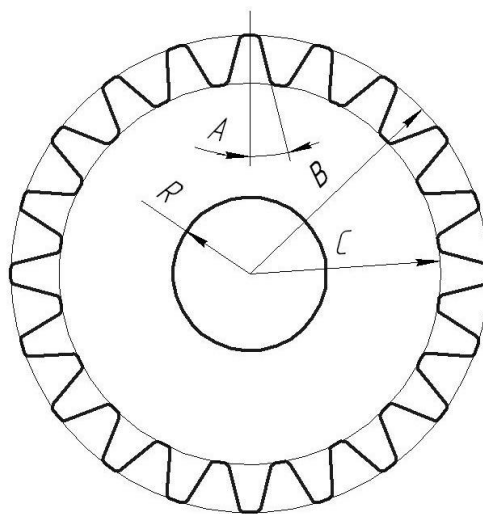


Рисунок 1.5 – Зубчате колесо $1NABCR$

Конструктивна твердотільна (об'ємна) геометрія (Constructive Solid Geometry) [95, 113, 114, 118] – підхід, при якому об'єкти представляються у вигляді послідовності булевих операцій, застосовуваних до певної колекції геометричних об'єктів (примітивів). Дане представлення схематично можна зобразити у вигляді CSG-дерева. Використання загальних операцій і обмеженого набору примітивів робить дане представлення однозначним, компактним і простим при застосуванні. При використанні регулярних множин, як примітивів, та регуляризованих операцій над множинами отримання моделі виродженого тіла зводиться до мінімуму [134]. Недоліком є відносна складність опису границі, що адекватно відображає об'єкт моделювання, та обмеженість кількості примітивів. Наприклад, на рис. 1.6 зображене бінарне CGS-дерево послідовності операцій, необхідних для одержання підставки.

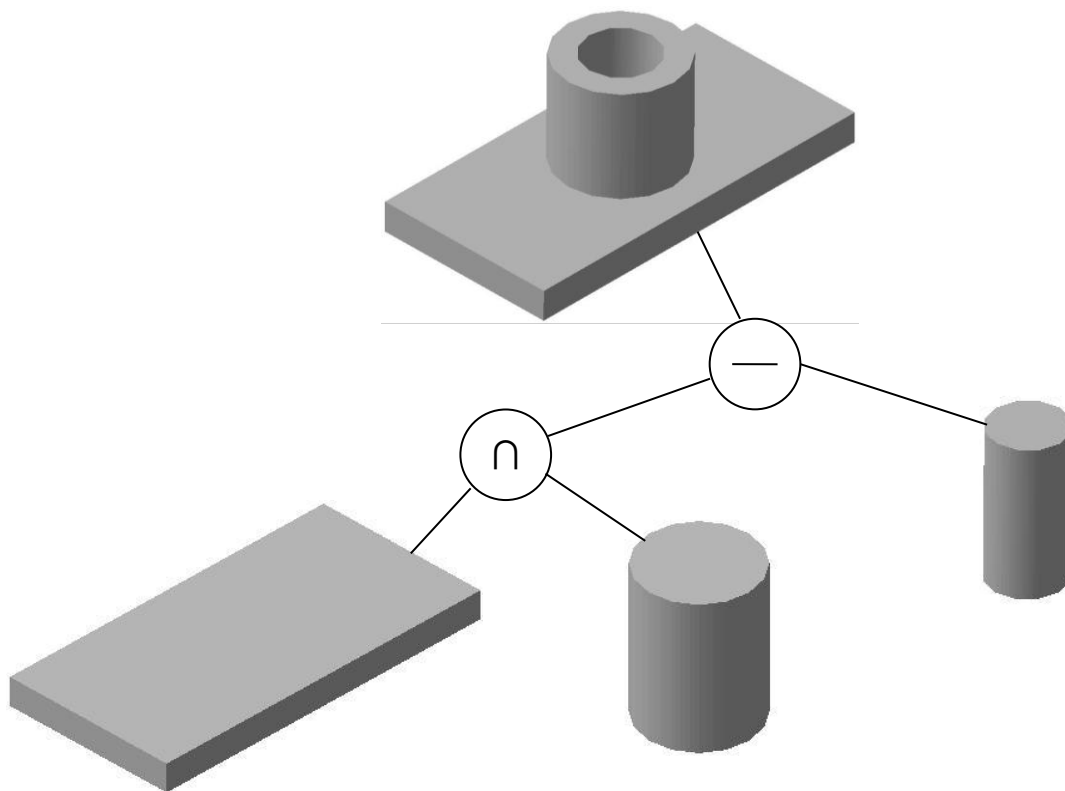
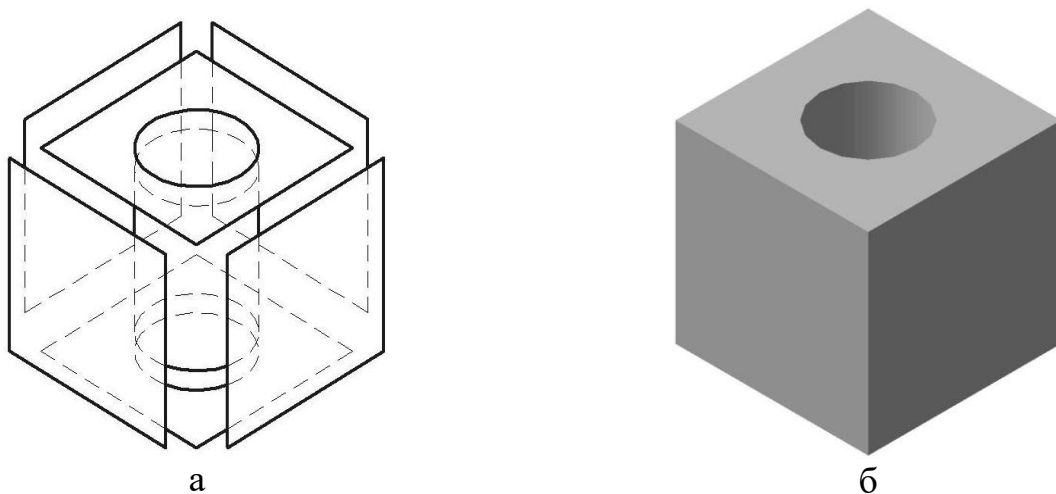


Рисунок 1.6 – Моделювання підставки з використанням конструктивної твердотільної геометрії

Граничне представлення [105, 137, 143] засноване на тому, що будь-яке суцільне тіло має певну границю, а границя будь-якого тривимірного тіла однозначно його визначає в евклідовому просторі. Такий підхід є універсальним засобом передачі форми геометричних об'єктів у комп'ютерній графіці [10, 136]. Граничне представлення (рис. 1.7) лежить в основі ядра графічного моделювання Parasolid, на якому засновані такі системи геометричного моделювання як SolidWorks [26] та Solid Edge [35].



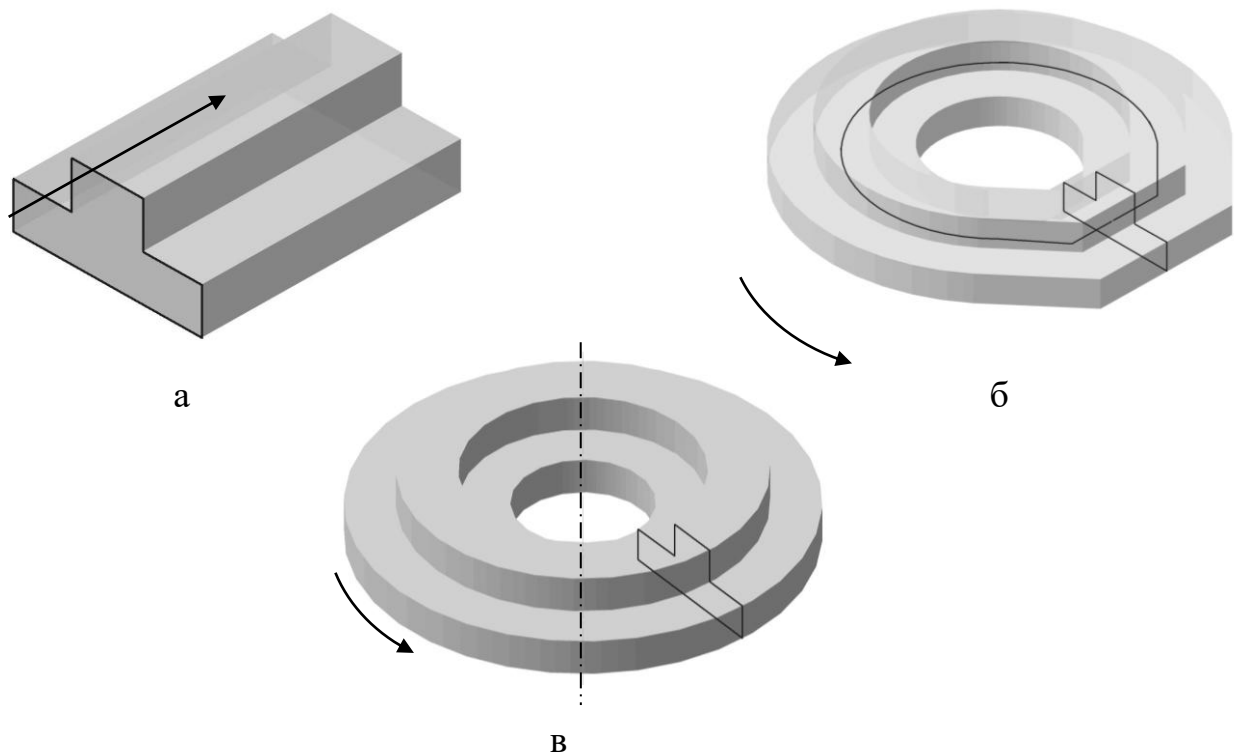
а – ділянки границі об'єкта; б – геометричний об'єкт

Рисунок 1.7 – Граничне представлення

Витягування, рух, обертання [42, 94] – підходи, які будують представлення геометричного об'єкта, ґрунтуючись на тому факті, що в результаті руху плоскої множини в просторі «витягується» деякий об'єм (тіло), який може бути представлений об'єктом, що рухається, та його траєкторією (рис. 1.8). Слід зазначити, що використання даного підходу не гарантує одержання регулярної множини [94].

Параметричне представлення [42, 133] – підхід, в основу якого покладена ідея завдання геометричних обмежень і деяких розмірних параметрів. Подібний опис ґрунтується на побудові форми шляхом розв'язку рівнянь, що виражають геометричні обмеження, та рівнянь, які описують розміри й взаємозв'язок між

ними. Як правило, будується плоска фігура, що відповідає обмеженням, а просторове тіло утворюється шляхом застосування витягування, руху або обертання.



а – витягування; б – рух; в – обертання навколо осі

Рисунок 1.8 – Представлення геометричного об'єкта

Схеми на основі декомпозиції [144] представляють геометричне тіло у вигляді об'єднання непересічних елементів. Дане представлення розділяється на два типи: воксельне й коміркове. При воксельному представленні формують рівномірне розбиття всього простору навколо об'єкта на сукупність простих тіл, і вибирають тільки ті з них, які належать об'єкту. Іншими словами – це тривимірний аналог растрового представлення фігури на площині. Коміркове представлення є подібним воксельному, але на форму елементів не накладають жорстких обмежень [42], а границя об'єкта апроксимується гранями елементів.

Серединна вісь (поверхня) – підхід, заснований на ідеї використання

«скелета» багатокутника (багатогранника в тривимірному просторі), під яким розуміється геометричне місце точок кривої (поверхні), утвореної центрами кіл (сфер), що торкаються границь об'єкта (рис. 1.9). Алгоритми одержання серединних осей (поверхонь) можуть використовувати розбиття об'єму, трасуванням променем, діаграми Воронова, триангуляцію Делоне тощо [63, 74, 100, 101, 132]. У загальному випадку одержання такого представлення є досить складною задачею.

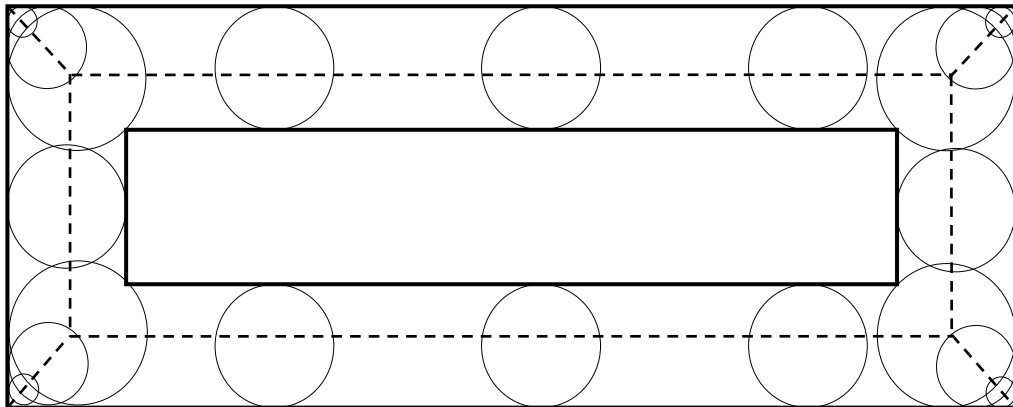


Рисунок 1.9 – Об'єкт на площині та його серединна вісь

Функціональне представлення – підхід, який заснований на ідеї представлення геометричного тіла за допомогою неявних математичних функцій або співвідношень. Перспективним напрямком розвитку даного підходу є застосування апарата R-функцій, запропонованих В.Л. Рвачовим [66-69, 139] для аналітичного конструювання результуючих неявних функцій.

Існує ряд переваг, відносно інших підходів, що дозволяють розглядати R-функцій, запропоновані В.Л. Рвачовим, як перспективний і універсальний метод опису геометричних об'єктів, до яких можна віднести [51, 53, 138]:

- можливість самостійно визначати множину функціональних об'єктів-примітивів в символічному виді (за допомогою формул), або за допомогою обчислювальних підпрограм;
- можливість побудови різноманітних логічних комбінацій з раніше

визначених примітивів;

- відсутність теоретичних обмежень для опису моделей геометричних об'єктів довільної складності;
- можливість застосування для побудови моделей довільної розмірності;
- простота операцій підвищення розмірності;
- можливість комбінування з іншими способами опису математичних моделей геометричних об'єктів, до яких можна віднести, наприклад, апроксимацію сплайнами.

Опис геометричної інформації про об'єкт за допомогою єдиного аналітичного рівняння є розв'язком так званої зворотної задачі аналітичної геометрії. Характерним об'єктом вивчення аналітичної геометрії є пара

$$\{f(P)\} \leftrightarrow \{L\},$$

де $f(P)$ – функція;

$P = (x_1, \dots, x_n)$ – точка в n -мірному евклідовому просторі;

L – геометричний об'єкт в E^n , що представляє собою геометричне місце точок у якому $f(P) = 0$ [51, 53, 69].

Однак, застосування обчислювальних методів, особливо в задачах аналізу напружено-деформованого стану, вимагає переходу від аналітичної моделі до дискретної, тобто, до такої, що містить геометричну інформацію у вигляді скінченної множини вузлів, ребер та граней.

Загальна схема побудови дискретної математичної моделі геометричного об'єкта представлена на рис. 1.10.

Також необхідно зауважити, що в задачах із використанням розповсюдженого на практиці методу скінченних елементів, необхідна побудова дискретних моделей на основі елементів наперед заданої простої форми. При використанні функціонального підходу така задача є особливо

складної, оскільки відсутні правила генерації системи вузлів і елементів, що належать об'єкту. Отже, задача побудови дискретної моделі функціонально заданих геометричних об'єктів є актуальною.

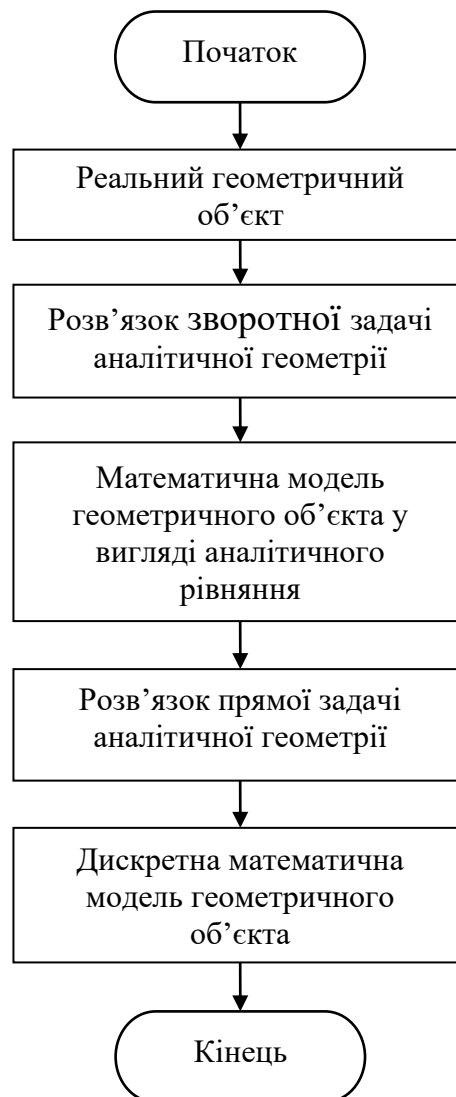


Рисунок 1.10 – Схема побудови математичної моделі геометричного об'єкта

1.4 Огляд методів побудови дискретних математичних моделей геометричних об'єктів

Для роботи методів, що дозволяють будувати дискретні моделі на основі тетрадральних елементів [122, 125,127], розрахунків із застосуванням

обчислювальних методів, таких як метод граничних елементів [2, 19, 62], задач тривимірної візуалізації необхідна побудова якісного розбиття поверхні геометричного об'єкта на елементи трикутної форми або, інакше кажучи, триангуляція поверхні.

Задача триангуляції заданого набору точок на площині добре вивчена. На практиці, як правило, використовують триангуляцію Делоне, яка є найбільш оптимальною із усіх можливих триангуляцій. Відмінна риса триангуляції Делоне в тому, що вона має максимальну суму мінімальних кутів і мінімальну сумою радіусів кіл, описаних навколо трикутників триангуляції [7, 8, 23 109, 112, 131].

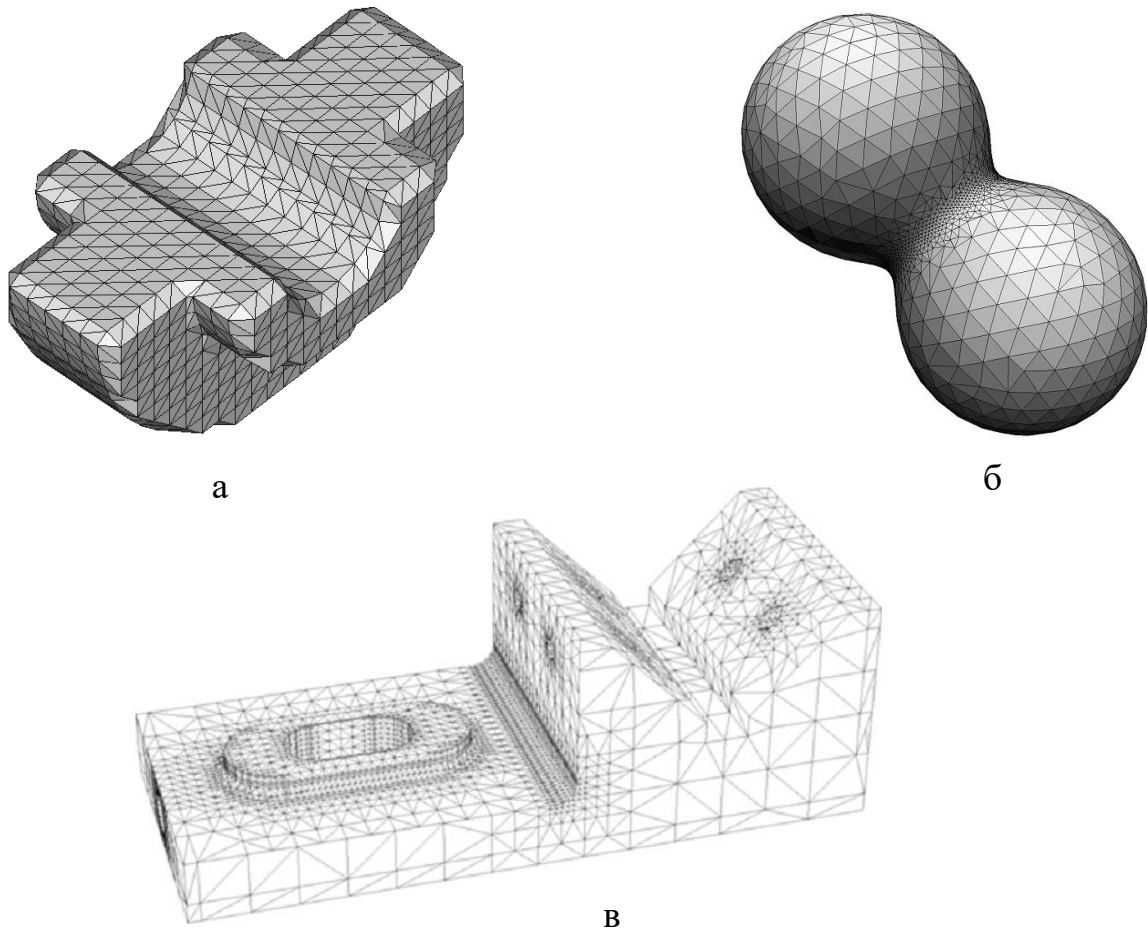
Крім робіт, присвячених побудові триангуляції, існує ряд методів спрямованих на автоматичну оптимізацію існуючої триангуляції, яка заснована на зміні зв'язків між вузлами сітки, додаванні й зміні положення вузлів [106, 110, 116, 129, 130, 135, 146]. Більшість методів побудови й оптимізації триангуляції описані для площини, але можуть бути узагальнені до просторового випадку [121, 140, 141].

Методи побудови дискретних моделей на основі трикутних елементів двовимірних та тривимірних геометричних об'єктів можна розділити на три групи:

- методи вичерпування;
- методи продовження;
- методи рекурсивного ділення.

Методи вичерпування засновані на розбитті області, яка повністю покриває досліджуваний геометричний об'єкт, на непересічні комірки. Кожна комірка перевіряється на предмет перетинання із кривою або поверхнею, потім, при перетинанні, виконується їхня локальна апроксимація. У результаті апроксимації об'єкта в кожній окремій комірці виходить дискретна модель об'єкта в цілому. Найбільш відомими серед методів вичерпування є метод маршируючих кубів [99, 104, 123, 124, 126] (рис. 1.11 а) та метод Скаила (Skala) [128, 142]. Для сітки, отриманою з використанням таких методів, характерна індіферентність до поведінки функції, «погана» якість породжуваних елементів

і загрублення особливостей геометричних об'єктів у вигляді гострих вершин та ребер.



а – метод вичерпування; б – метод продовження; в – метод рекурсивного ділення

Рисунок 1.11 – Приклади дискретних моделей геометричних об'єктів

Методи продовження послідовно знаходять і додають вузли, ребра й грані до вже існуючих елементів. Пошук кожного наступного вузла відбувається в околі вже визначених вузлів на основі якого-небудь критерію прогнозування. До таких методів відносять методи прогресії та предиктор-коректора [117]. Дані методи добре справляються з дискретизацією геометричних об'єктів із гладкою границею, але, як і в попередньому випадку, загрублюють гострі вершини й ребра. Приклад дискретної моделі геометричного об'єкта, отриманий з використанням методів продовження, показаний на рис. 1.11 б [117].

Методи рекурсивного ділення розбивають простір, що покриває об'єкт, на комірки. Вибирається чергова комірка, виконується її тестування на предмет перетинання з поверхнею об'єкта i , у випадку перетинання, виконується аналіз локальної ділянки поверхні за яким-небудь критерієм (розмір елемента, кривина поверхні). Якщо перевірка задовільна, одержуємо локальну апроксимацію поверхні в комірці, інакше комірка розбивається на набір подібних комірок і послідовність описаних вище дій повторюється [98, 115]. Дискретні елементи, отримані такими методами, згущаються в областях з малим радіусом кривини, але геометричні особливості важко відслідковуються, що приводить до невинновданого згущення елементів у їхньому околі. Приклад дискретної моделі геометричного об'єкта, побудованої із застосуванням методів рекурсивного ділення, показано на рис. 1.11 в [107].

Аналіз перерахованих методів побудови дискретних математичних моделей геометричних об'єктів показує, що ця задача має декілька розв'язків, які добре працюють у випадку гладкої поверхні геометричного об'єкта. Основною проблемою є правильність розташування дискретних елементів в областях з гострими ребрами й вершинами. Для їхнього адекватного відображення необхідно виконувати подальший аналіз та оптимізацію. Отже, задача побудови дискретних математичних моделей є актуальною та потребує подальшого розвитку.

1.5 Висновки

У результаті аналізу використання сучасних обчислювальних методів можна зробити висновок, що задача побудови математичних моделей геометричних об'єктів є важливою й актуальною. Розв'язок такої задачі умовно розбивається на дві складові: 1) формалізація опису геометричного об'єкта; 2) побудова дискретної моделі на базі елементів трикутної форми

(триангуляція). Найбільш загальним і універсальним методом для опису форми геометричних об'єктів є апарат R-функції, запропонований В.Л. Рвачовим. Існуючі методи побудови триангуляції функціонально заданих геометричних об'єктів мають ряд недоліків, що вимагає їхнього подальшого розвитку.

Отже, для досягнення поставленої мети в роботі сформульовані наступні основні задачі:

- аналіз існуючих методів і підходів моделювання геометричних об'єктів;
- розвинення принципів аналітичного конструювання геометричних об'єктів на базі теорії R- функцій;
- розробка методів побудови та оптимізації дискретних математичних моделей, заснованих на трикутних скінченних елементах, для аналітичних моделей на базі теорії R- функцій;
- розробка програмного інструментарію автоматизованої побудови дискретних моделей геометричних об'єктів для апробації розроблених методів та підходів.

Основні наукові й практичні результати даного розділу опубліковані в роботах [17, 45, 47, 48, 92, 93].

РОЗДІЛ 2

ФОРМАЛІЗАЦІЯ ОПИСУ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

У роботах академіка В.Л. Рвачова [67-69] відзначалося, що для побудови рівнянь, які відповідають геометричним об'єктам, немає ніяких принципових теоретичних труднощів. Проте на практиці ця задача є досить складною та вимагає додаткових досліджень [52, 53, 56]. Одним з можливих шляхів спрощення математичного моделювання геометричних об'єктів на базі теорії R-функцій є розробка бібліотеки математичних моделей найпоширеніших геометричних примітивів, яку, при необхідності, можна поповнювати новими більш складними елементами, побудованими на базі вже існуючих об'єктів.

2.1 Основні положення теорії R-функцій

У загальному випадку R-функції є неперервними функціями, знак яких однозначно обумовлюється знаками їх аргументів. Тобто, для довільної R-функції можливо побудувати таблицю знаків, з якої, замінивши знаки «-» і «+» на відповідні логічні «0» та «1», можна отримати таблицю булевих функцій.

Булеві функції, що відповідають R-функціям, називаються супровідними булевими функціями. У загальному випадку одна й та ж булева функція може бути супровідною для багатьох R-функцій [69].

Наведений опис можна формалізувати. Позначимо

$$S_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}.$$

Функція $f(x_1, \dots, x_m): E_m \rightarrow E$ називається R-функцією, якщо існує така булева функція $F(X_1, \dots, X_m)$, що

$$S_2(f(x_1, \dots, x_m)) \equiv F(S_2(x_1), \dots, S_2(x_m)).$$

Множина R-функцій, елементи якої мають однакові супровідні функції, називається гілкою R-функцій [138, 139].

На практиці відсутня необхідність знати всі R-функції, потрібно лише вміти конструювати R-функції, що належать певній гілці [139]. Способи конструювання таких функцій впливають із загальних властивостей R-функцій, повний доказ яких можна знайти в [69].

1. Множина R-функцій є замкненою щодо композиції. Інакше кажучи, будь-яка композиція R-функцій також є R-функцією.

2. Якщо безперервна функція $f(x_1, \dots, x_n)$ має нулі тільки на гіперплощинах (тобто $f = 0$, якщо один або більш $x_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$), то f є R-функцією.

3. Добуток R-функцій є R-функцією. Якщо дві R-функції належать одній гілці, то їх добуток належить тій же гілці (тому що для добутку супровідною є логічна еквівалентність).

4. Сума двох R-функцій, що належать одній гілці, є R-функцією, що належить тій же гілці.

5. Якщо f_Φ – R-функція, супровідною для якої є функція Φ , і C – константа, тоді Cf_Φ – R-функція, супровідною для якої є Φ , якщо $C > 0$ та $\neg\Phi$, якщо $C < 0$.

На основі перерахованих властивостей можна зробити висновок, що моделі складних геометричних об'єктів можуть конструюватися з моделей більш простих геометричних об'єктів (складових частин або примітивів). При цьому система R-функцій повинна відповідати повній системі супровідних функцій.

Система R-функцій досить повна, якщо відповідна система супровідних функцій є повною [53]. Повною, хоча й не мінімальною, є система $H = \{X \wedge Y, X \vee Y, \bar{X}\}$. Тому природно використовувати систему R-операцій, супровідною для якої буде система H [51]. Тоді будь-яка R-функція може бути представлена у вигляді комбінації R-кон'юнкції, R-диз'юнкції й R-заперечення. Найпоширенішою на практиці системою подібного типу є система R_0 :

$$\begin{cases} x \wedge_0 y \equiv x + y - \sqrt{x^2 + y^2} \\ x \vee_0 y \equiv x + y + \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \bar{x} \equiv -x \end{cases} \quad (3.1)$$

де $\wedge_0, \vee_0, \bar{\quad}$ – символи R-диз'юнкції, R-кон'юнкції та R-заперечення відповідно.

Більш загальною є система R_α :

$$\begin{cases} x \wedge_\alpha y \equiv \frac{1}{1+\alpha}(x + y - \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy}) \\ x \vee_\alpha y \equiv \frac{1}{1+\alpha}(x + y + \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy}), \\ \bar{x} \equiv -x \end{cases} \quad (3.2)$$

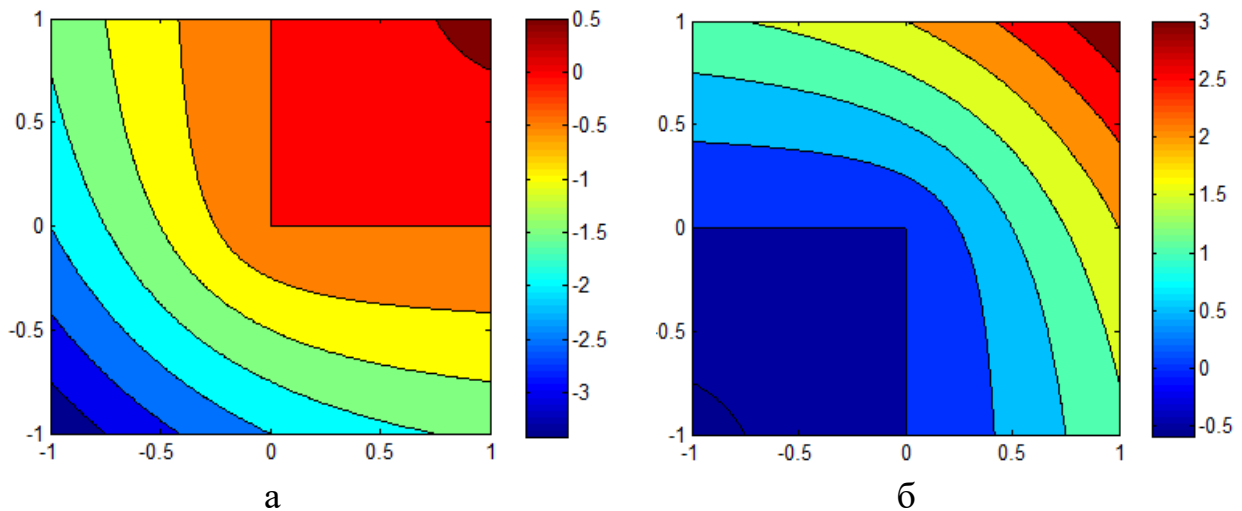
де $\alpha(x, y)$ – довільна обмежена функція, що задовольняє умові $-1 < \alpha(x, y) \leq 1$.

Дана функція не міняє відношення зв'язку між R-функціями та впливає лише на певні властивості конструктивно-диференціального характеру.

Системи (2.1) та (2.2) мають розриви похідних у точці $(0; 0)$. Цей недолік усунутий у системі R_0^m , що має неперервні частковими похідні аж до порядку m та має такий вигляд:

$$\begin{cases} x \overset{m}{\wedge}_0 y \equiv (x + y - \sqrt{x^2 + y^2})(x^2 + y^2)^{\frac{m}{2}} \\ x \overset{m}{\vee}_0 y \equiv (x + y + \sqrt{x^2 + y^2})(x^2 + y^2)^{\frac{m}{2}} \\ \bar{x} \equiv -x \end{cases} \quad (3.3)$$

Зображення ліній рівня, що відповідають різним досить повним системам R-операцій подано на (рис. 2.1 – 2.2).



а – R-диз'юнкція \vee_0 ; б – R-кон'юнкція \wedge_0

Рисунок 2.1 – Лінії рівня для R-операцій

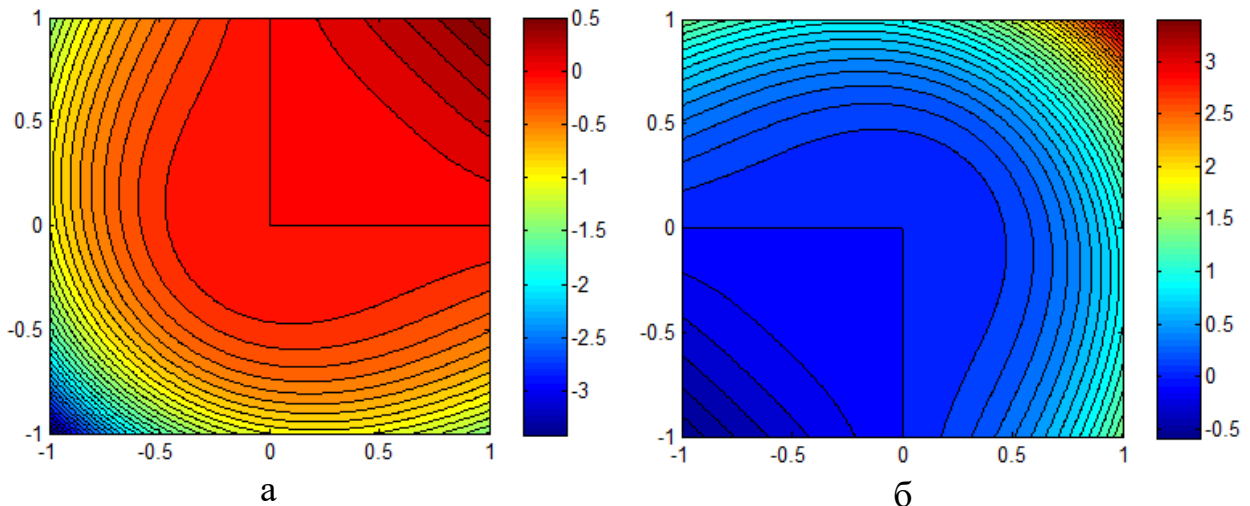
У своїх роботах В.Л. Рвачов відзначав, що принципових теоретичних труднощів при побудові аналітичних рівнянь геометричних об'єктів довільної форми за допомогою R-функцій немає. Між тим на практиці ця задача досить складна, неоднозначна та потребує розвитку [53, 69].

Як правило, для побудови складного геометричного об'єкта використовують предикатні рівняння виду

$$\Omega \equiv F(\Sigma_1, \dots, \Sigma_m) = 1, \quad (3.4)$$

де Ω – складний геометричний об'єкт;

Σ_i – прості або опорні функції, що дорівнюють одиниці в точках об'єкта та нулю поза ним.



а – R-диз'юнкція \bigvee_0^m ; б – R-кон'юнкція \bigwedge_0^m

Рисунок 2.2 – Лінії рівня для R-операцій

Функції Σ_i відіграють роль будівельних (базисних) елементів, а формула (2.4) визначає логіку отримання складного об'єкта Ω . Подібна процедура є стандартною, що передуює побудові рівняння геометричного об'єкта, прийнятого в аналітичній геометрії [51].

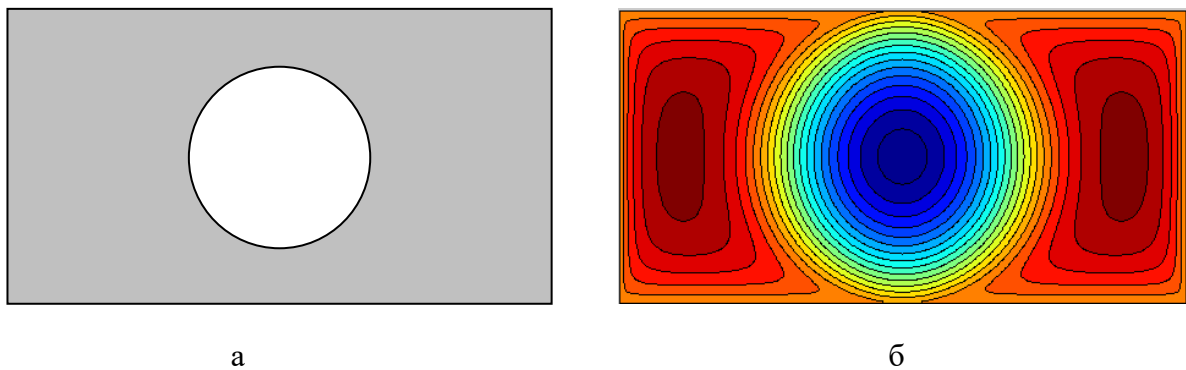
Будь-яке предикатне рівняння може бути презентовано у вигляді суперпозиції повної системи булевих операцій $H = \{X \wedge Y, X \vee Y, \bar{X}\}$, отже, побудова R-функції, для якої дана функція буде супровідною, здійснюється заміною символів цих операцій на відповідні символи якої-небудь досить повної системи R-функцій [51, 139]. Для приклада, прямокутник з отвором у його центрі можна представити у вигляді перетинання смуг та зовнішньої частини кола в його центрі (рис. 2.3), тоді його предикатне рівняння має вигляд

$$\Omega = \Sigma_1 \wedge \Sigma_2 \wedge \overline{\Sigma_3}, \quad (3.5)$$

де $\Sigma_1 = (a^2 - x^2 \geq 0)$ – вертикальна смуга шириною $2a$;

$\Sigma_2 = (b^2 - y^2 \geq 0)$ – горизонтальна смуга шириною $2b$;

$\Sigma_3 = (r^2 - x^2 - y^2 \geq 0)$ – коло з радіусом r .



а – геометричний об'єкт; б – сімейство екіпотенціальних функцій $\omega(x, y) = const$

Рисунок 2.3 – Прямокутник з отвором

Заміною булевих операції R-операціями, одержимо аналітичне рівняння:

$$\omega = (a^2 - x^2) \wedge_0 (b^2 - y^2) \wedge_0 \overline{(r^2 - x^2 - y^2)}. \quad (3.6)$$

Отже, R-функція (2.6) для якої предикат (2.5) є супровідним, визначає три множини:

$\omega < 0$ – зовнішній $e\Omega$ стосовно об'єкта Ω простір;

$\omega = 0$ – границя $\partial\Omega$ геометричного об'єкта Ω ;

$\omega > 0$ – внутрішні $i\Omega$ точки геометричного об'єкта Ω .

Як правило, множина $i\Omega$, визначає відкриту область, а $\partial\Omega$ є його границею. Але, у загальному випадку, дане твердження неправильне, зокрема, для геометричних об'єктів, які не є суцільними, тобто, якщо порушується умова

замкнутості та регулярності.

2.2 Конструктивні засоби R-функцій

Аналіз показує що, актуальними й сучасними методами побудови твердотільних геометричних моделей у сучасних САПР (Компас, Autocad, SolidWorks тощо) є [1, 22, 26, 42, 59]:

- застосування булевих операцій для заздалегідь визначеного набору стандартних опорних примітивів (коло, конус, тор тощо);
- використання параметризації для накладення розмірних та геометричних обмежень на утворюючі елементи геометричного об'єкта;
- виконання операції підвищення розмірності для замкнених і незамкнутих креслень на площині (поверхня на площині, видавлювання, поверхня обертання), тобто побудова сліду шляхом руху деякого ескізу в заданому напрямку.

Використання методів теорії R-функцій дозволяє легко об'єднати представлені методи моделювання в єдиному формульному описі. При використанні функціонального підходу у якості базових примітивів виступають функції, що відповідають найпростішим геометричним об'єктам, на основі яких можна створити бібліотеку примітивів довільної складності та доповнювати її при потребі. Можливість створення примітивів з необхідною кількістю параметрів дозволяє спростити процес побудови подібних геометричних об'єктів за допомогою варіювання параметрів. Математичний апарат теорії R-функцій також дозволяє реалізувати класичні прийоми побудови рівнянь, пов'язаних з операціями підвищення розмірності, побудови призматичних та конічних тіл, тіл обертання з довільним поперечним перерізом [53-55, 69].

2.2.1 Двовимірні конструктивні елементи

Для побудови моделей геометричних об'єктів з використанням функцій В.Л. Рвачова необхідний набір моделей вихідних (утворюючих) конструктивних елементів-примітивів. В інженерній практиці часто використовують креслення на площині [65]. Розглянемо моделі деяких конструктивних елементів, які можуть бути використані для опису моделей плоских геометричних об'єктів.

Будемо описувати геометричні об'єкти у вигляді аналітичних рівнянь, а під моделлю геометричного об'єкта будемо розуміти множину точок на площині або у просторі, для яких значення цієї функції більші або дорівнюють нулю.

Найбільш простим конструктивним елементом є півплощина, тобто множина точок, що лежать по одну сторону від деякої прямої на цій площині. Півплощина, визначена ліворуч від прямої з направляючим вектором $\vec{a}(a_x, a_y)$ та яка проходить через точку $P(x_0, y_0)$, буде мати вигляд

$$F_{hplv}(x, y, a_x, a_y, x_0, y_0) = a_x(y - y_0) - a_y(x - x_0). \quad (3.7)$$

Рівняння, що описують аналогічну півплощину, але с прямою, яка проходить через дві точки на площині $P_0(x_0, y_0)$ й $P_1(x_1, y_1)$, запишеться в наступному вигляді

$$F_{hplp}(x, y, x_0, y_0, x_1, y_1) = (x_0 - x_1)(y - y_0) - (y_0 - y_1)(x - x_0). \quad (3.8)$$

Використовуючи (2.7), запишемо рівняння смуги з направляючим вектором $\vec{a}(a_x, a_y)$ шириною h та серединою, що проходить через початок координат у наступному вигляді

$$b_x = \frac{a_y h}{2\sqrt{a_x^2 + a_y^2}},$$

$$b_y = \frac{a_x h}{2\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}, \quad (3.9)$$

$$F_{strip}(x, y, a_x, a_y, h) = F_{hplv}(x, y, a_x, a_y, b_x, -b_y) \wedge F_{hplv}(x, y, a_x, a_y, -b_x, b_y).$$

Окремі випадки смуги (паралельної одній з координатних осей) можуть мати інший вигляд

$$F_{stripx}(x, y, h) = \frac{h^2}{4} - y^2,$$

$$F_{stripy}(x, y, h) = \frac{h^2}{4} - x^2. \quad (3.10)$$

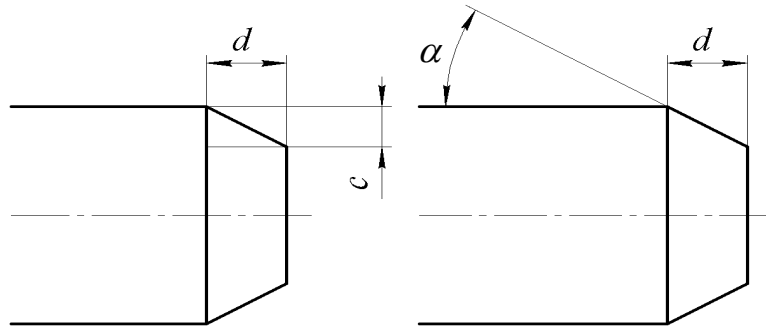
Кут, утворений парою непаралельних векторів $\bar{a}(a_x, a_y)$ та $\bar{b}(b_x, b_y)$, що виходять із однієї спільної точки $P_0(x_0, y_0)$ та обмежують геометричне місце точок праворуч від \bar{a} та ліворуч від \bar{b} , використовуючи співвідношення (2.7), можна записати так

$$pl_1 = F_{hplv}(x, y, -a_x, -a_y, x_0, y_0),$$

$$pl_2 = F_{hplv}(x, y, b_x, b_y, x_0, y_0), \quad (3.11)$$

$$F_{angv}(x, y, a_x, a_y, b_x, b_y, x_0, y_0) = pl_1 + pl_2 + \frac{a_x b_y - b_x a_y}{|a_x b_y - b_x a_y|} \sqrt{pl_1^2 + pl_2^2}.$$

Розповсюджений в креслярській практиці елемент – фаска, задається двома параметрами лінійних розмірів (рис. 2.4 а) або одним лінійним і одним кутовим параметрами (рис. 2.4 б).



a – параметри лінійних розмірів; b – кутовий та лінійний параметри

Рисунок 2.4 – Визначення фаски на кресленні

Вираз для представлення фаски, використовуючи направляючий вектор її осі $\bar{a}(a_x, a_y)$, кут α та розмір d , має вигляд

$$\begin{aligned}
 a'_x &= a_x \cos(\alpha) + a_y \sin(\alpha), \\
 a'_y &= a_y \cos(\alpha) - a_x \sin(\alpha), \\
 x'_0 &= x_0 + \frac{d \cdot a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}, \\
 y'_0 &= y_0 + \frac{d \cdot a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}},
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
 F_{facev}(x, y, a_x, a_y, x_0, y_0, d) &= F_{angv}(x, y, a_y, -a_x, a_x, a_y, x_0, y_0) \wedge \\
 &\wedge F_{hplv}(x, y, a'_x, a'_y, x'_0, y'_0).
 \end{aligned}$$

Якщо визначальними параметрами фаски є лінійні розміри c і d , то співвідношення, що задають фаску, можна представити у вигляді

$$a'_x = a_x \frac{c}{\sqrt{c^2 + d^2}} + a_y \frac{d}{\sqrt{c^2 + d^2}}, \quad a'_y = a_y \frac{c}{\sqrt{c^2 + d^2}} - a_x \frac{d}{\sqrt{c^2 + d^2}}, \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}x_0' &= x_0 + \frac{d \cdot a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}, \\y_0' &= y_0 + \frac{d \cdot a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}},\end{aligned}\tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}F_{facevcd}(x, y, a_x, a_y, x_0, y_0, d) &= F_{angv}(x, y, a_y, -a_x, a_x, a_y, x_0, y_0) \wedge \\&\wedge F_{hplv}(x, y, a_x', a_y', x_0', y_0').\end{aligned}$$

Розповсюдженими компонентами об'єктів на площині є криві другого порядку, такі як коло та еліпс. Рівняння кола із центром у точці $C(c_x, c_y)$ та радіусом r має вигляд

$$F_{circle}(x, y, c_x, c_y, r) = r^2 - (x - c_x)^2 - (y - c_y)^2.\tag{3.14}$$

Рівняння еліпса, вписаного в прямокутник шириною a , висотою b і центром у точці $C(c_x, c_y)$, має вигляд

$$F_{elips}(x, y, a, b, c_x, c_y) = 1 - \frac{(x - c_x)^2}{a} - \frac{(y - c_y)^2}{b}.\tag{3.15}$$

Сектор (рис. 2.5), заданий центром утворюючого кола $C(c_x, c_y)$, радіусом r , парою кутових параметрів α і β таких, що $-\frac{\pi}{2} < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$, враховуючи співвідношення (2.11) і (2.14), буде мати наступне аналітичне представлення

$$\begin{aligned}F_{sector}(x, y, c_x, c_y, r, \alpha, \beta) &= F_{circle}(x, y, c_x, c_y, r) \wedge \\&\wedge F_{angv}(x, y, 1, tg(\alpha), 1, tg(\beta), c_x, c_y).\end{aligned}\tag{3.16}$$

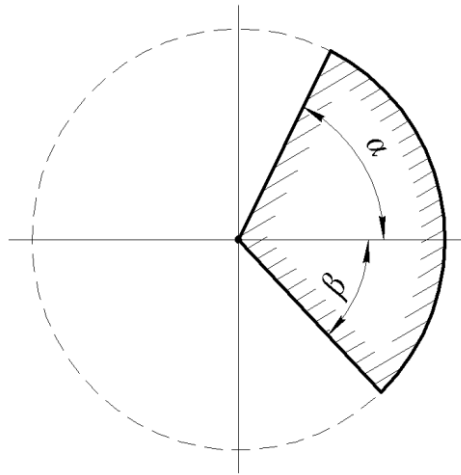
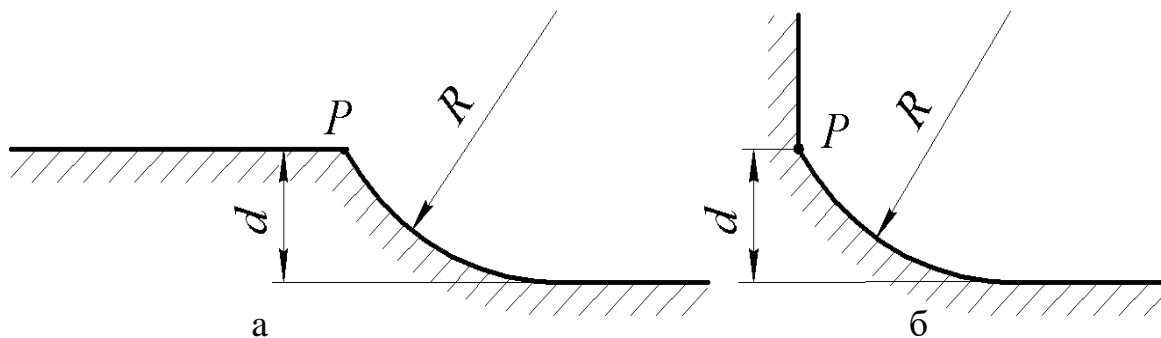


Рисунок 2.5 – Визначення сектора через центр, радіус та пару кутів параметрів

Для більш рівномірного розподілу напружень у деталях машин та механізмів використовують гладкі сполучення, окремим випадком яких є галтель. Розглянемо сполучення галтеллю для паралельних та перпендикулярних півплощин (рис. 2.6).



а – сполучення паралельних півплощин; б – сполучення перпендикулярних півплощин

Рисунок 2.6 – Сполучення галтеллю

Використовуючи точку початку сполучення $P(x_0, y_0)$, радіус сполучення R , величину відступу d та, враховуючи рівняння (2.7) – (2.14), запишемо вирази для різних варіантів сполучення в наступному вигляді

$$\begin{aligned}
d' &= \sqrt{2Rd - d^2}, \\
c_x &= x_0 + d', \\
c_y &= y_0 + R - d, \\
F_{fillet}(x, y, x_0, y_0, R, d) &= F_{angv}(x, y, d', -d, -1, 0, x_0, y_0) \wedge \\
&\wedge F_{hplv}(x, y, -1, 0, c_x, y_0 - d) \vee -F_{circle}(x, y, c_x, c_y, R), \\
F_{filletang}(x, y, x_0, y_0, R, d) &= F_{angv}(x, y, 1, 0, 0, 1, x_0, y_0 - d) \vee \\
&\wedge F_{hplp}(x, y, -1, 0, c_x, c_y, x_0, y_0) \wedge -F_{circle}(x, y, c_x, c_y, R).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Більш загальним варіантом є сполучення двох сторін кута (гострого й тупого) дугою заданого радіуса R (рис. 2.8).

Якщо пари нормованих векторів $\bar{a}(a_x, a_y)$ та $\bar{b}(b_x, b_y)$, які виходять із загальної точки $P_0(x_0, y_0)$, визначають гострий або тупий кут, то сполучення утворюючих його прямих дугою радіуса R буде мати вигляд (2.18).

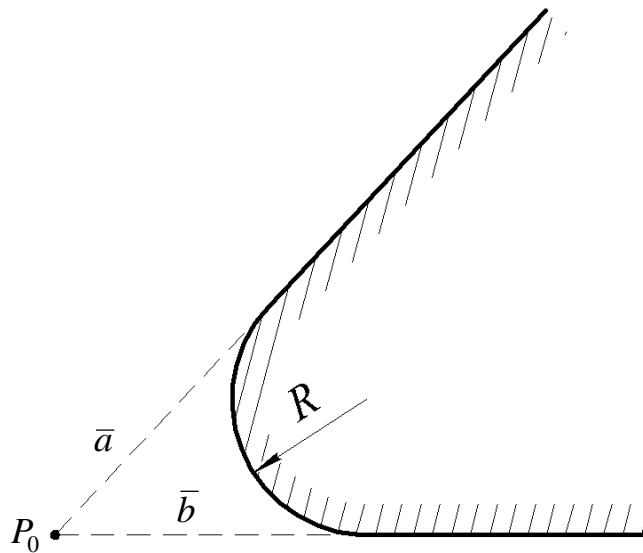


Рисунок 2.7 – Сполучення прямих радіусом

Полігональні елементи, такі як прямокутник, паралелограм, ромб, багатокутники правильної форми також можна віднести до розповсюджених геометричних примітивів.

$$\begin{aligned}
a_x' &= x_0 + \frac{a_x R(a_x(a_x + b_x) + a_y(a_y + b_y))}{|a_x(a_y + b_y) - a_y(a_x + b_x)|}, \\
a_y' &= y_0 + \frac{a_y R(a_x(a_x + b_x) + a_y(a_y + b_y))}{|a_x(a_y + b_y) - a_y(a_x + b_x)|}, \\
c_x &= x_0 + \frac{R(a_x + b_x)}{|a_x(a_y + b_y) - a_y(a_x + b_x)|}, \\
c_y &= y_0 + \frac{R(a_x + b_x)}{|a_x(a_y + b_y) - a_y(a_x + b_x)|},
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
F_{linkingn}(x, y, a_x, a_y, b_x, b_y, x_0, y_0, R) &= (F_{angv}(x, y, a_x, a_y, b_x, b_y, x_0, y_0) \wedge \\
&\wedge F_{hplv}(x, y, a_y + b_y, -(a_x + b_x), a_x', a_y')) \vee F_{circle}(x, y, c_x, c_y, R).
\end{aligned}$$

Прямокутник шириною a , висотою b та точкою перетину діагоналей на початку координат, використовуючи співвідношення (2.10), можливо визначити в наступному вигляді

$$F_{rect}(x, y, a, b) = F_{stripx}(x, y, a) \wedge F_{stripy}(x, y, b). \tag{3.19}$$

Прямокутник з фаскою пари верхніх вершин, заданих кутовим параметром α та лінійним розміром d , прийме наступний вигляд

$$\begin{aligned}
F_{rectfillettop}(x, y, a, b, \alpha, d) &= F_{rect}(x, y, a, b) \wedge \\
&\wedge F_{angp}(x, y, \frac{b}{2}, \frac{a}{2} - d, 0, \frac{\arccotg(\alpha) + b}{2} - d, -\frac{b}{2}, \frac{a}{2} - d).
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Прямокутник з фаскою пари верхніх вершин, визначений через α_1 і d_1 , та фаскою пари нижніх вершин, визначених параметрами α_2 і d_2 , запишеться в наступному вигляді

$$F_{rectfillettboth}(x, y, a, b, \alpha_1, d_1, \alpha_2, d_2) = F_{rectfilletttop}(x, y, a, b, \alpha_1, d_1) \wedge \\ \wedge F_{angp}(x, y, -\frac{b}{2}, d_2 - \frac{a}{2}, 0, d_2 - \frac{actg(\alpha_2) + b}{2}, \frac{b}{2}, d_2 - \frac{a}{2}). \quad (3.21)$$

Правильні багатокутники можуть бути побудовані двома способами: по вписаному або по описаному колу (рис. 2.8).

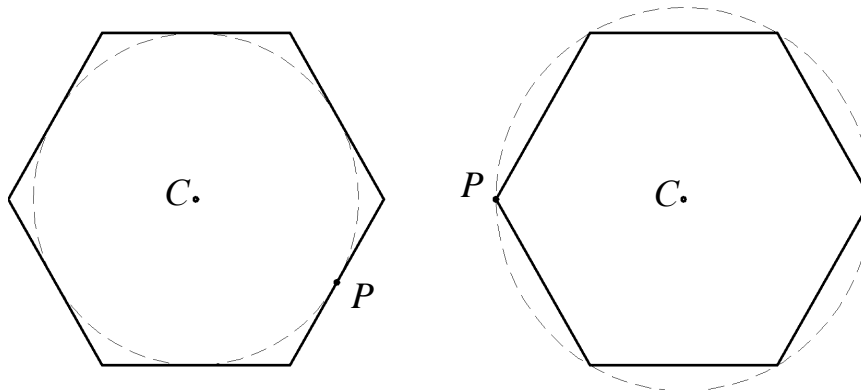


Рисунок 2.8 – Побудова багатокутника за допомогою вписаного та описаного кола

Рівняння правильного багатокутника з кількістю сторін $n > 2$, центром описаного кола в точці $C(c_x, c_y)$ й положенням однієї з вершин у точці $P(x_0, y_0)$ буде мати такий вигляд

$$x_i = x_0 \cos \frac{2\pi i}{n} - y_0 \sin \frac{2\pi i}{n}, \\ y_i = x_0 \sin \frac{2\pi i}{n} + y_0 \cos \frac{2\pi i}{n}, \\ xv_i = x_0 \cos \frac{2\pi(i+1)}{n} - y_0 \sin \frac{2\pi(i+1)}{n} - x_i, \\ yv_i = x_0 \sin \frac{2\pi(i+1)}{n} + y_0 \cos \frac{2\pi(i+1)}{n} - y_i, \quad (3.22)$$

$$F_{ngranout}(x, y, x_0, y_0, n) = F_{hplv}(x, y, xv_0, yv_0, x_0, y_0) \wedge \dots \wedge \\ \wedge F_{hplv}(x, y, xv_{n-1}, yv_{n-1}, x_{n-1}, y_{n-1}).$$

Рівняння правильного багатокутника з кількістю сторін $n > 2$, центром вписаного кола в точці $C(c_x, c_y)$ й положенням однієї з вершин у точці $P(x_0, y_0)$ буде мати вигляд

$$\begin{aligned}
 x_i &= x_0 \cos \frac{2\pi i}{n} - y_0 \sin \frac{2\pi i}{n}, \\
 y_i &= x_0 \sin \frac{2\pi i}{n} + y_0 \cos \frac{2\pi i}{n}, \\
 vx_i &= x_0 \cos \frac{2\pi i}{n} - y_0 \sin \frac{2\pi i}{n}, \\
 vy_i &= x_0 \sin \frac{2\pi i}{n} + y_0 \cos \frac{2\pi i}{n}, \\
 F_{n\text{grain}}(x, y, x_0, y_0, n) &= F_{hplv}(x, y, vx_0, vy_0, x_0, y_0) \wedge \dots \wedge \\
 &\wedge F_{hplv}(x, y, vx_{n-1}, vy_{n-1}, x_{n-1}, y_{n-1}).
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

2.2.2 Тривимірні конструктивні елементи

Найпоширенішими просторовими конструктивними елементами є тіла, обмежені поверхнями другого порядку [5] (наприклад, куля, еліпсоїд, тор тощо) та елементи, отримані рухом профілів плоских геометричних об'єктів, наприклад, визначених у співвідношеннях (2.7) – (2.23).

Аналогічно випадку на площині найбільш простим тривимірним примітивом є півпростір. Рівняння півпростору, визначеного через точку $P(x_0, y_0)$ й нормальний вектор $\bar{n}(n_x, n_y, n_z)$, можна записати в наступному вигляді

$$F_{hspasen}(x, y, z, n_x, n_y, n_z, x_0, y_0, z_0) = n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) + n_z(z - z_0). \tag{3.24}$$

Тіло, обмежене еліпсоїдом, який уписаний у прямокутний паралелепіпед

зі сторонами a, b, c й точкою перетину діагоналей в початку координат, можна представити в наступному вигляді

$$F_{\text{ellipsoid}}(x, y, z, a, b, c) = 1 - \frac{4x^2}{a^2} - \frac{4y^2}{b^2} - \frac{4z^2}{c^2}. \quad (3.25)$$

Окремим випадком (2.25) є тіло, обмежене сферою радіуса R , яке може бути представлене формулою

$$F_{\text{sphere}}(x, y, z, R) = R^2 - x^2 - y^2 - z^2. \quad (3.26)$$

Тіло, яке відповідає внутрішній частині тора радіуса R , що одержаний обертанням утворюючого кола радіуса r навколо осі, яка знаходиться у площині цього кола, має вигляд

$$F_{\text{tor}}(x, y, z, r, R) = R^2 - \left(\sqrt{x^2 + y^2} - r \right)^2 - z^2. \quad (3.27)$$

Тіло у формі циліндра, спрямованого уздовж осі Oz , радіуса R , висотою h й основами, рівновіддаленими від площини xOy , має вигляд

$$F_{\text{cylinder}}(x, y, z, R, h) = \left(R^2 - x^2 - y^2 \right) \wedge \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right). \quad (3.28)$$

Прямокутний паралелепіпед зі сторонами a, b, c й центром в початку координат має вигляд

$$F_{\text{parallel}}(x, y, z, a, b, c) = \left(\frac{a^2}{4} - x^2 \right) \wedge \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) \wedge \left(\frac{c^2}{4} - z^2 \right). \quad (3.29)$$

Окремий випадок прямокутного паралелепіпеда – куб зі стороною a , згідно (2.29), запишеться в наступному вигляді

$$F_{cube}(x, y, z, a) = \left(\frac{a^2}{4} - x^2 \right) \wedge \left(\frac{a^2}{4} - y^2 \right) \wedge \left(\frac{a^2}{4} - z^2 \right). \quad (3.30)$$

Конус із колом радіуса r в основі, розташованим у площині xOy , та висотою h можна записати так:

$$F_{cone}(x, y, z, R, h) = \left(\frac{(z-h)^2}{h^2} - \frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{r^2} \right) \wedge \left(\frac{h^2}{4} - \left(z - \frac{h}{2} \right)^2 \right). \quad (3.31)$$

Перетвореннями, які доволі часто застосовуються для побудови тривимірних геометричних об'єктів, є операції видавлювання, обертання або руху двовимірного профілю [42, 36, 37].

Математична модель довільного геометричного об'єкта на площині в просторі утворює нескінченний циліндричний об'єкт, що отриманий шляхом руху профілю уздовж осі перпендикулярної площині профілю. Практичне застосування таких об'єктів вимагає обмеження його довжини уздовж перпендикулярної осі.

Для побудови математичної моделі циліндричного тіла із профілем $\omega_0(x, y)$, обмеженого площинами $z = a$ та $z = -b$, можна скористатися наступною формулою:

$$F(x, y, z) = \omega_0(x, y) \wedge (a - z) \wedge (b + z). \quad (3.32)$$

На основі профілю $\omega_0(x, y)$ на площині, якщо віссю обертання є вісь Ox , можна одержати функцію, що відповідає тілу обертання у вигляді [51]

$$F(x, y, z) = \omega_0(x, \sqrt{y^2 + z^2}). \quad (3.33)$$

Наприклад, для геометричного об'єкта, представленого на (рис. 2.9), формула профілю буде мати вигляд

$$\omega_0(x, y, a, b, c, d, e, R) = F_{circle}(x, y, 0, b, R) \vee F_{rectfelletop}(x, dy - y, a, r_1, e, r_2), \quad (3.34)$$

де $dy = d + \frac{b-d}{2}$ – зсув по осі Oy ;

$r_1 = b - d$ – висота профілю;

$r_2 = c - d$ – розмір фаски.

Рівняння тіла обертання профілю (2.34) навколо осі Ox буде мати вигляд

$$F(x, y, z) = \omega_0(x, \sqrt{y^2 + z^2}, a, b, c, d, e, R). \quad (3.35)$$

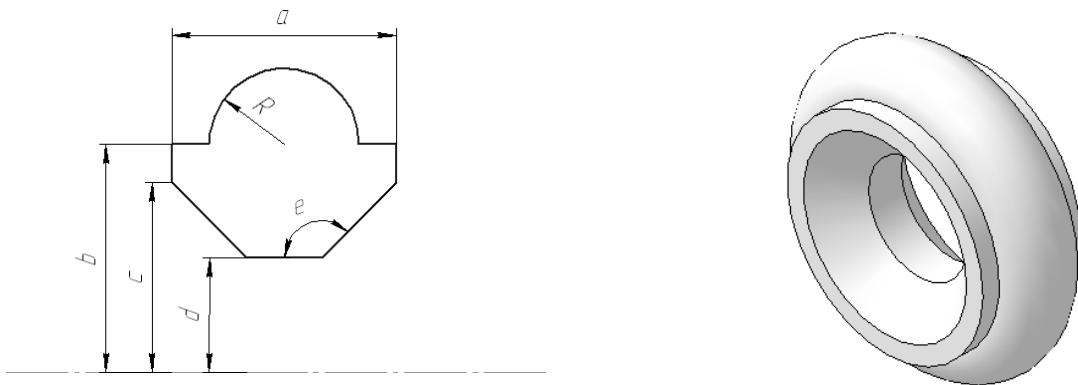


Рисунок 2.9 – Тіло, отримане обертанням профілю

Сектор, отриманий обертанням профілю з радіальними кутами $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ та $\alpha + \beta < 2\pi$ відносно площини профілю, має вигляд

$$\begin{aligned}
x' &= x \cos \beta - y \sin \beta, \\
y' &= x \sin \beta - y \cos \beta, \\
S_1(y, z) &= \sin(\alpha + \beta)(x' \sin(\alpha + \beta) - y' \cos(\alpha + \beta)), \\
S_2(y, z) &= y' \sin(\alpha + \beta), \\
S(x, y, z) &= S_1(y, z) \wedge S_2(y, z), \\
F(x, y, z) &= \omega_0(x, y) \wedge S(x, y, z).
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Для отримання рівняння геометричного об'єкта, закрученого уздовж осі за деяким законом, необхідно визначити два з трійки параметрів: число витків n , крок t , висоту $h = t \cdot n$. Для визначення обертання навколо осі Oz використовується перетворення координат наступного вигляду [53]

$$\begin{cases} x' = x \cos \varphi(z) + y \sin \varphi(z) + c_x(z), \\ y' = y \cos \varphi(z) - x \sin \varphi(z) + c_y(z), \end{cases} \tag{3.37}$$

де $\varphi(z)$ – закон обертання навколо осі Oz ;

$\bar{c}(c_x(z), c_y(z))$ – закон зсуву точок об'єкта в площині $z = H = const$.

Отже, з огляду на (2.37), для моделювання рівномірного поступального руху уздовж осі Oz в позитивному напрямку із визначеними параметрами n , t та висотою $h = t \cdot n$, починаючи від початку координат, можна скористатися виразом

$$\begin{aligned}
x' &= x \cos z \frac{2\pi}{t} + y \sin z \frac{2\pi}{t}, \\
y' &= y \cos z \frac{2\pi}{t} - x \sin z \frac{2\pi}{t}, \\
F(x, y, z) &= \omega_0(x', y') \wedge \left(\left(\frac{t \cdot n}{2} \right)^2 - \left(z - \frac{t \cdot n}{2} \right)^2 \right).
\end{aligned} \tag{3.38}$$

2.2.3 Перетворення системи координат

У системах твердотілого моделювання поширеними є операції, які дозволяють на базі вже побудованих моделей одержувати нові шляхом застосування заміни системи координат, що реалізують переміщення, обертання, масштабування й різні варіанти симетрії [24, 37, 42, 64, 76].

Нехай $\omega_0(x, y)$ математична модель геометричного об'єкта на площині, тоді модель нового об'єкта, переміщеного уздовж координатних осей на відстані dx та dy , відповідно, буде мати вигляд

$$F(x, y, dx, dy) = \omega_0(x + dx, y + dy). \quad (3.39)$$

У випадку переміщення об'єкта на задану відстань dr і обертанні на деякий кут α (рис. 2.10) одержимо рівняння іншого виду

$$F(x, y) = \omega_0(x + dr \cos \alpha, y + dr \sin \alpha). \quad (3.40)$$

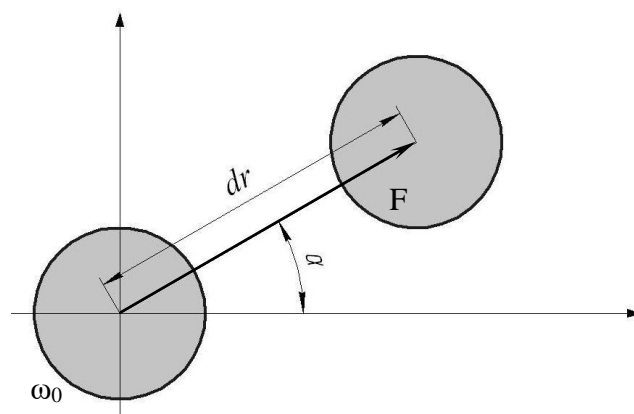


Рисунок 2.10 – Переміщення об'єкта ω_0 на відстань dr та кут α

При обертанні об'єкта $\omega_0(x, y)$ навколо точки $D(x_0, y_0)$ на кут α

(рис. 2.11), модель нового геометричного об'єкта буде мати вигляд

$$\begin{aligned}x' &= x_0 + (x - x_0) \cos \alpha - (y - y_0) \sin \alpha, \\y' &= y_0 + (x - x_0) \sin \alpha + (y - y_0) \cos \alpha, \\F(x, y, x_0, y_0, \alpha) &= \omega_0(x', y').\end{aligned}\tag{3.41}$$

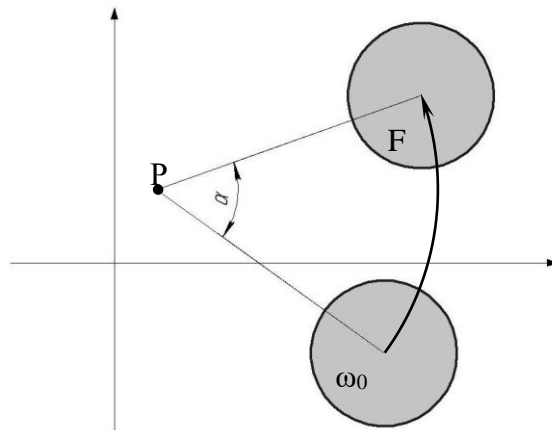


Рисунок 2.11 – Обертання об'єкта ω_0 на кут α відносно точки P

Урахування симетрії конструкцій у багатьох випадках приводить до спрощення побудови моделей об'єктів, отриманих шляхом багаторазового повторення якого-небудь закону симетрії. Як правило, розрізняють наступні типи симетрії: двостороння або дзеркальна симетрія, радіальна симетрія, трансляція (паралельне переміщення), симетрія обертання [51].

Найпоширенішою на практиці є симетрія навколо точки. Якщо $\omega_0(x, y)$ – модель деякого геометричного об'єкта на площині, то модель нового симетричного щодо точки $P(x_0, y_0)$ об'єкта має вигляд

$$F(x, y) = \omega_0(x - 2(x - x_0), y - 2(y - y_0)).\tag{3.42}$$

Іншим розповсюдженим типом симетрії є симетрія навколо координатних

осей. Якщо $\omega_0(x, y)$ – модель геометричного об’єкта, то $\omega(x, y) = \omega_0(x, -y)$, є його дзеркальним відбиттям щодо осі Ox , а $\omega(x, y) = \omega_0(y, x)$ дзеркально відображає вихідний об’єкт відносно прямої $y = x$. У загальному випадку, модель об’єкта, симетричного щодо деякої прямої L , рівняння якої має вигляд $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$, може бути представлена в наступному вигляді [51]

$$\begin{aligned}x' &= 2p \cos \alpha - y \sin 2\alpha - x \cos 2\alpha, \\y' &= 2p \sin \alpha - x \sin 2\alpha + y \cos 2\alpha, \\F(x, y) &= \omega_0(x', y').\end{aligned}\tag{3.43}$$

Якщо пряма L задається у вигляді $Ax + By + C = 0$, то модель симетричного об’єкта прийме вид

$$\begin{aligned}x' &= -\frac{1}{A^2 + B^2} (2CA - yAB - x(A^2 - B^2)), \\y' &= -\frac{1}{A^2 + B^2} (2CB - xAB + y(A^2 - B^2)), \\F(x, y) &= \omega_0(x', y').\end{aligned}\tag{3.44}$$

Часто вживаним на практиці методом побудови моделей складних геометричних елементів є копіювання деякого похідного (утворюючого, опорного) об’єкта уздовж якої-небудь траєкторії. У сучасних системах автоматизованого проектування активно використовують копіювання вздовж прямої та кола [37].

Параметрами трансляції уздовж прямої є крок повторень h і кількість повторень n . Нехай $\omega_0(x, y)$ – модель деякого довільного об’єкта, розташованого в області початку координат, який необхідно n раз копіювати уздовж осі абсцис із кроком h . Тоді, використовуючи співвідношення з [51], рівняння границі об’єкта прийме вигляд

$$\begin{aligned}
\eta(x, h, n) &= (x \wedge_1 \mu(x, h)) \wedge_1 (nh - h - x), \\
\mu(x, h) &= \frac{h}{\pi} \arcsin \left\{ \frac{\sin\left(\frac{x\pi}{h}\right) C_m(\hat{a}, h) S_1(a, h)}{C_m(\hat{a}, h) S_1(a, h) + (1 - S_1(a, h)) p^{m+1}(x, a, h)} \right\}, \\
S_1 &= \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a\pi}{2h}\right), \quad C_m(\hat{a}, h) = 2^{m+1} \cos^{2(m+1)}\left(\frac{x\pi}{h}\right), \\
p(x, a, h) &= |S_2(x, a, h)| - S_2(x, a, h), \\
S_2(x, a, h) &= \sin^2\left(\frac{a\pi}{h}\right) - \sin^2\left(\frac{x\pi}{h}\right), \\
F(x, y) &= G(\omega_0(\eta(x, h, n), y), x, h),
\end{aligned} \tag{3.45}$$

де G – функція, яка має різний вид, залежний від типу утворюючого об’єкта й взаємного розташування об’єктів при копіюванні.

Якщо $\omega_0(x, y)$ – симетричний відносно осі ординат і може бути вкладений у вертикальну смугу $-a < x < a$, то рівняння границі об’єкта, скопійованого n раз із кроком $h > 2a$ по напрямковій осі абсцис, прийме вид [51]

$$F(x, y) = \omega_0(\eta(x, h, n), y) \tag{3.46}$$

Якщо об’єкт $\omega_0(x, y)$ несиметричний відносно осі ординат і може бути вкладений у вертикальну смугу $-a < x < a$, то рівняння границі об’єкта, скопійованого n раз із кроком $h > 2a$ в напрямку осі абсцис, матиме вигляд [51]

$$\begin{aligned}
F(x, y) &= \left[\omega_0(\eta(x, h, n), y) \wedge_\alpha \cos \frac{x\pi}{h} \right] \vee \\
&\quad \left[\omega_0(\eta(x - h, h, n), y) \wedge_\alpha \cos \frac{(x - h)\pi}{h} \right].
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Якщо $\omega_0(x, y)$ може бути вкладений у вертикальну смугу $-a < x < a$, то рівняння границі об'єкта, скопійованого n раз із кроком $h \leq 2a$ в напрямку осі абсцис, матиме вигляд [51]

$$F(x, y) = \left\{ \left[\omega_0(\eta(x, 2h, n), y) \wedge \cos \frac{x\pi}{2h} \right] \vee \left[\omega_0(\eta(x - 2h, h, n), y) \wedge \cos \frac{(x - 2h)\pi}{h} \right] \right\} \vee \left\{ \left[\omega_0(\eta(x - h, 2h, n), y) \wedge \cos \frac{(x - h)\pi}{2h} \right] \vee \left[\omega_0(\eta(x - 3h, 2h, n), y) \wedge \cos \frac{(x - 3h)\pi}{2h} \right] \right\}. \quad (3.48)$$

Копіювання об'єктів з розміщенням їх по колу із зазначеним центром може бути виконано двома способами: рівномірно по колу або із заданим кутовим кроком. Нехай $\omega_0(x, y)$ необхідно n раз рівномірно скопіювати по колу, або n раз скопіювати із заданим кутовим кроком θ_h по дузі, й (x_0, y_0) – центр кола, по якому необхідно зробити копіювання, тоді, повертаючи $\omega_0(x, y)$ навколо даної точки n разів, із кроком θ_h , одержимо необхідну модель об'єкта у вигляді

$$\begin{aligned} x'_i &= x_0 + (x - x_0) \cos i \theta_h - (y - y_0) \sin i \theta_h, \\ y'_i &= y_0 + (x - x_0) \sin i \theta_h + (y - y_0) \cos i \theta_h, \\ F(x, y) &= \omega_0(x'_0, y'_0) \vee \omega_0(x'_1, y'_1) \vee \dots \vee \omega_0(x'_{n-1}, y'_{n-1}). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Причому, $\theta_h = \frac{2\pi}{n}$ для рівномірного розподілу об'єктів по всьому колу або ж використовуючи довільне значення для визначення кроку руху по дузі.

2.2.4 Моделювання складних геометричних об'єктів

Як приклад моделювання елементів складних геометричних об'єктів з використанням деяких із визначених співвідношень (2.7) – (2.49), розглянемо розповсюджений на практиці елемент – шестигранну гайку, яка застосовується для кріплення й з'єднання вузлів та деталей разом з болтами, гвинтами, шпильками й іншими елементами кріплення в машинобудуванні, будівництві й інших виробничих галузях. Оскільки всі типи стандартних гайок та їх розміри описані в ДСТУ, то може бути побудоване сімейство гайок певного типу із заданим розміром під ключ S , висотою H , діаметром внутрішнього отвору d та кроком різьби e (рис. 2.12). Табличні значення зазначених параметрів моделі доступні в довідниках [65].

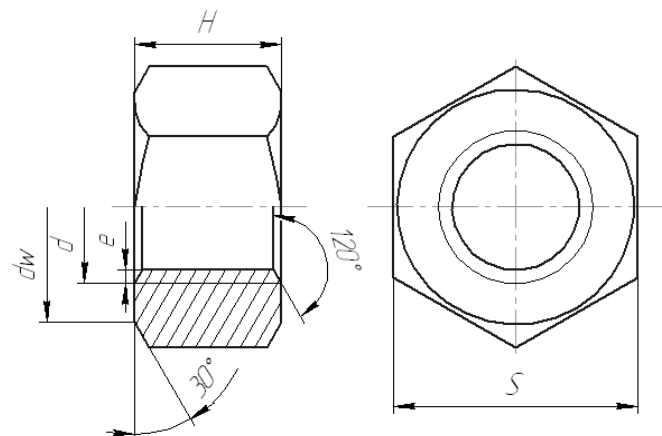


Рисунок 2.12 – Параметризоване креслення гайки

Для побудови профілю гайки на площині можна скористатися прямокутником з фасками зверху й знизу, який необхідно змістити вниз на величину $\frac{S}{2\sqrt{3}} - \frac{d+e}{2}$, і, використовуючи його у якості профілю, повернути навколо осі Ox , застосовуючи (2.35). Для того, щоб придати отриманому об'єкту шестигранну форму, перетнемо його з нескінченним циліндром шестигранної форми, віссю якого є Ox , та радіусом описаної навколо нього

кола $\frac{S}{\sqrt{3}}$. Величина dw , зазначена на кресленні, дорівнює $0.9S$. Отже, загальна модель геометричного об'єкта буде мати вигляд

$$R = \frac{S}{\sqrt{3}}, h = R - \frac{d}{2} + e, dy = \frac{d}{2} - e + \frac{h}{2}, r = R - 0.9S,$$

$$F(x, y, S, H, d, e) = F_{rectfilletboth}(x, y - dy, H, h, \frac{\pi}{6}, r, \frac{\pi}{3}, e), \quad (3.50)$$

$$F_{gaiika}(x, y, z, S, H, d, e) = F_{ngranout}(z, y, R, 0, 6) \wedge F(x, \sqrt{y^2 + z^2}, S, H, d, e).$$

Отримана математична модель (2.50) представлена на рис. 2.13.

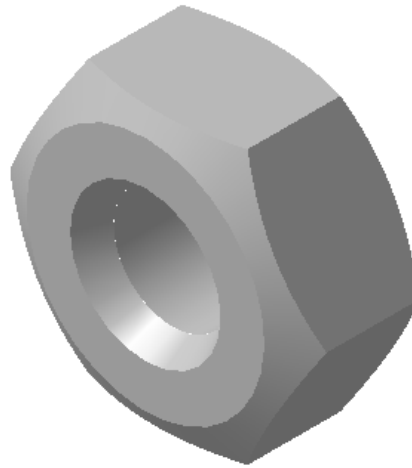


Рисунок 2.13 – Візуалізація гайки

2.3 Проблемно-орієнтована мова для моделювання геометричних об'єктів

Для автоматизації процесу математичного моделювання геометричних об'єктів на базі теорії R-функцій необхідно розробити спосіб визначення математичних співвідношень у вигляді, придатному для наступної автоматизованої обробки з використанням обчислювальної техніки. Аналіз показав, що найпоширенішим способом розв'язку даної задачі є використання

спеціалізованих формальних мов, наприклад, FORTU-3 [3, 13, 14].

Для математичного моделювання геометричних об'єктів проблемно-орієнтована мова повинен вирішувати низки задач:

- описувати математичні співвідношення, що визначають моделі двовимірних та тривимірних геометричних об'єктів;
- визначати розмірність геометричного об'єкта;
- уводити додаткові керуючі параметри;
- мати вбудовані операції, що відповідають R-кон'юнкції та R-диз'юнкції;
- давати можливість одержувати значення проміжних обчислень, наприклад, значення математичних співвідношень, які обираються проектувальником у якості утворюючих або опорних.

Описані вище задачі можуть бути вирішені за допомогою модифікації мови FORTU-3, проблемно-орієнтовану модель якої можна умовно розбити на п'ять частин:

- 1) секція опису параметрів, що змінюються, і їх кількості для завдання розмірності;
- 2) секція опису постійних параметрів для спрощення параметризації моделей геометричних об'єктів;
- 3) секція опису вживаних змінних та функцій, що складається з декларацій різних типів:
 - змінних та функціональних співвідношень, що використовуються у якості утворюючих об'єктів, які надалі можуть бути проаналізовані окремо одна від одної;
 - функціональних співвідношень, які використовують аргументи, константи й утворюючі співвідношення;
- 4) секція визначення основних математичних співвідношень;
- 5) секція, що визначає результуюче співвідношення.

Виходячи з поставлених вимог, можна описати синтаксис і семантику модифікацій проблемно-орієнтованої мови FORTU-3 – FORTU-R у формі

Бекуса-Науера [40, 41, 70].

Основні символи мови FORTU-R визначаються в такий спосіб:

<буква> ::=

A|B|C|D|E|F|G|H|I|J|K|L|M|N|O|P|Q|R|S|T|U|V|W|X|Y|Z|

a|b|c|d|e|f|g|h|i|j|k|l|m|n|o|p|q|r|s|t|u|v|w|x|y|z

<підкреслення> ::=

–

<цифра> ::=

0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9

<ідентифікатор> ::=

<перший символ> {<наступний символ>}

<перший символ> ::=

<буква>

| <підкреслення>

<наступний символ> ::=

<буква>

| <цифра>

| <підкреслення>

<числовий літерал> ::=

[<знак>] <цифра> {<цифра>} [.<цифра>]{<ступінь>}

| [<знак>] .<цифра> {<цифра>}{<ступінь>}

<ступінь> ::=

E [<знак>] <цифра> {<цифра>}

<знак> ::=

- | +

<цілочисельний літерал> ::=

[<знак>] <цілочисельний літерал без знака>

<цілочисельний літерал без знака> ::=

<цифра> {<цифра>}

<зарезервований літерал> ::=

SIN | COS | TAN | EXP | ASIN | ACOS | ATAN | SINH
 | COSH | TANH | ABS | SQRT | ARUMENT | VARIABLE |
 CONSTANT | FUNCTION | VARIABLE | RETURN

<роздільник> ::=

, | = | (|) | . | ! | <ознака кінця рядка>

<ознака кінця рядка> ::=

EOL

<коментар> ::=

! <довільна послідовність символів без EOL> | <ознака кінця рядка>

Ідентифікатор позначає різні символи, що використовуються у формульних виразах. Імена ідентифікаторів можуть бути довільними. Єдине виключення – не допускається збіг із зарезервованими словами.

Основним типом даних у мові FORTU-R є числові дані:

<тип даних> ::=

<числової тип даних>

<числовий тип даних> ::=

[<знак>] <цифра> {<цифра>} [. {<цифра>}] | <числовий літерал>

Тут <числовий тип даних> – це деяка підмножина множини дійсних чисел, представлена у форматі дійсного числа із плаваючою крапкою.

Поняття виразу в FORTU-R описується так:

<вираз> ::=

[<знак>] <елемент виразу >

{<оператор> [<знак>] <елемент виразу > }

<елемент виразу > ::=

<константа>

| <вбудована функція>

| <ім'я змінної>

| (<вираз>)

<оператор> ::=

+ | - | * | / | &

<ім'я змінної > ::=

<ідентифікатор>

<вираз> ::=

[<знак>]<елемент виразу>

{<оператор>[<знак>]<елемент виразу>}

<елемент виразу> ::=

| <константа>

| <вбудована функція>

| <ім'я змінної>

| (<вираз>)

<оператор> ::=

+ | - | * | / | & | | |

<ім'я змінної > ::=

<ідентифікатор>

Константи в FORTU-R визначаються в такий спосіб:

<константа> ::=

<числовий літерал>

Виклики функцій в FORTU-R визначаються так:

<виклик функції> ::=

<ім'я вбудованої функції> ([<список аргументів>])

<список аргументів> ::=

<аргумент> {, <аргумент>}
 <аргумент> ::=
 [<ім'я параметра>=]<значення аргументна>
 <ім'я параметра> ::=
 <ідентифікатор>
 <значення аргументу> ::=
 <вираз>
 <ім'я вбудованої функції> ::=
 SIN | COS | TAN | EXP | ASIN | ACOS | ATAN | SINH
 | COSH | TANH | ABS | SQRT

Операція присвоювання визначається в такий спосіб:

<оператор присвоювання> ::=
 <ідентифікатор><знак присвоювання><вираз>
 <знак присвоювання> ::=
 =

Поняття формули є центральним у мові FORTU-R. Усі формули є арифметичними й оперують виразами типу <числовий тип даних>

Довільний блок у програмі мовою FORTU-R можна визначити в такий спосіб:

<блок> ::=
 <оголошення аргументів>
 | <блок декларації>
 | <оголошення результуючої функції>
 <оголошення аргументів> ::=
 ARGUMENT <ідентифікатор> {, <ідентифікатор> }
 <ознака кінця рядка>

<блок декларації > ::=

 <оголошення констант>

| <оголошення додаткових функцій>

 | <оголошення допоміжних функцій> ::=

<оголошення результуючої функції> ::=

 RETURN <ідентифікатор> {, <ідентифікатор> }

 <ознака кінця рядка>

<оголошення констант> ::=

 CONSTANT <директива> {, <директива> } <ознака кінця рядка>

<оголошення допоміжних функцій> ::=

 BASEFUNCTION <директива> {, <директива> } <ознака кінця
рядка>

<оголошення додаткових функцій> ::=

 FUNCTION <директива> {, <директива> } <ознака кінця рядка>

<оголошення додаткових функцій> ::=

 VARIABLE <директива> {, <директива> } <ознака кінця рядка>

<директива> ::=

 <ідентифікатор> [= <початкове значення>]

<початкове значення> ::=

 <вираз>

<оголошення результуючих функцій> задає в програмі ідентифікатор потрібної функції.

<оголошення аргументів> задає імена аргументів функції й визначає розмірність моделі виходячи з їхньої кількості.

<оголошення констант> призначене для декларації в програмі числових (цілих або дійсних) констант

<оголошення утворюючих функцій> задає в програмі список функцій, які визначаються проектувальником як утворюючі.

<оголошення допоміжних функцій> задає в програмі список допоміжних функцій, призначених, наприклад, для скорочення запису формул.

<оголошення додаткових функцій> задає в програмі список функцій, які використовуються безпосередньо для опису геометричного об'єкта в цілому або елементів, що його утворюють.

Таким чином, загальний вигляд програми мовою FORTU-R має такий вигляд

```

! Визначення аргументів
ARGUMENT X,Y,Z

! Визначення констант
CONSTANT P1 = <числовий тип даних>

! Визначення утворюючих функцій
BASEFUNCTION BF = F(X, Y, Z)

! Визначення додаткових функцій
VARIABLE _X = F(X, Y, Z)
VARIABLE _Y=G(X, Y, Z)

! Визначення допоміжних функцій
FUNCTION W1,W2,W
    W1 = N(X,Y,Z,_X,_Y)
    W2 = N(W1, X,Y,Z,_X,_Y)
    W = N(W1,W2, X,Y,Z,_X,_Y)

RETURN W

```

Повнота й несуперечність FORTU-R очевидно впливає з повноти й несуперечності математичних формул, формальним способом записи яких фактично і є мова FORTU-R.

Як приклад практичного використання опишемо геометричний об'єкт (рис. 2.14), отриманий об'єднанням кубика зі стороною a й кулі радіуса R , зміщеної на дві одиниці уздовж Ox .

ARGUMENT x

ARGUMENT y

ARGUMENT z

CONSTANT R=4

CONSTANT a=1

BASEFUNCTION F1 = R-(x-2)²-y²-z²

BASEFUNCTION F2 = a-x²

BASEFUNCTION F3 = a-y²

BASEFUNCTION F4 = a-z²

FUNCTION F=(((F4&F2)&F3)|F1)

RETURN F

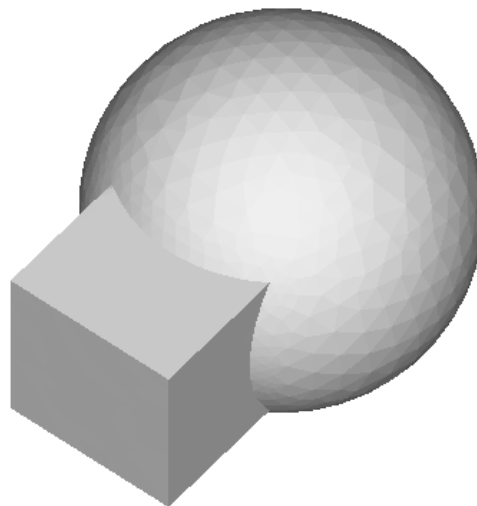


Рисунок 2.14 – Об'єднання кубика з кулею

2.4 Висновки

Таким чином, у результаті аналізу основних положень теорії функцій В.Л. Рвачова можна зробити висновок, що функціональний підхід є найбільш загальним та універсальним методом опису моделей геометричних об'єктів складної форми у вигляді математичних співвідношень.

Для спрощення процесу моделювання складних геометричних об'єктів на базі функціонального підходу побудовані моделі найпоширеніших на практиці конструктивних елементів, що дозволяють конструювати моделі більш складних об'єктів на основі існуючих примітивів. Одною з переваг функціонального підходу при описі моделей геометричних об'єктів є можливість поповнення бібліотеки базових примітивів потрібною кількістю нових об'єктів довільної складності.

Розглянуті в даному розділі операції руху й обертання профілів на площині у ряді випадків дозволяють спростити процес моделювання складних тривимірних тіл.

Описані найпоширеніші операції конструювання моделей плоских і просторових геометричних об'єктів, до яких належать: зсув, обертання, копіювання та різні типи симетрії.

З метою автоматизації математичного моделювання на базі теорії R-функцій у другому розділі розроблена модифікація проблемно-орієнтованої мови FORTU-3, яка враховує особливості функціонального моделювання.

Основні наукові й практичні результати даного розділу опубліковані в роботах [17, 45, 47, 48, 92, 93].

РОЗДІЛ 3

ПОБУДОВА ДИСКРЕТНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ, ЗАДАНИХ ЗА ДОПОМОГОЮ R-ФУНКЦІЙ, З ВИКОРИСТАННЯМ ТРИКУТНИХ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Математичні моделі геометричних об'єктів, заданих у вигляді математичних співвідношень, визначають деяку нескінченну множину точок об'єкта на площині або у просторі. Використання такого опису для задач візуалізації із застосуванням обчислювальної техніки або визначення напружено-деформованого стану конструкції з використанням обчислювальних методів (методи скінченних або граничних елементів, метод кінцевих різниць), приводить до необхідності переходу від аналітичної моделі геометричного об'єкта до відповідної дискретної. Як правило, такий перехід виконується шляхом побудови дискретної моделі на основі елементів простої форми з певною точністю. Через високу топологічну гнучкість на практиці найпоширенішими є елементи трикутної (тетраедральної) форми. Покриття границі (або поверхні) геометричного об'єкта набором трикутних елементів, що не перетинаються, називають тріангуляцією, скінченно-елементною сіткою або просто сіткою.

3.1 Загальна постановка задачі побудови дискретного представлення на основі трикутних скінченних елементів

Нехай x – довільна точка у двомірному або в тривимірному просторі й $F(x) = 0$ – рівняння, множина розв'язків якого визначає поверхні геометричного об'єкта. Отже, довільний геометричний об'єкт Ω може бути визначений у вигляді

$$\partial\Omega = \{x : F(x) = 0\}. \quad (3.1)$$

Дане представлення засноване на теоремі Жордана-Брауена, яка гарантує, що $\partial\Omega$ розбиває Евклідов простір на дві підмножини, одна з яких внутрішня для Ω , інша – необмежена зовнішня.

Відповідно до теореми Жордана-Брауена, геометричний об'єкт, представлений виразом (3.1), описує одну або кілька поверхонь, що ділять простір на внутрішній та зовнішній, відносно об'єкта, підпростори, які є границею кожного з них, і, крім того, визначає що:

- одна з поверхонь є зовнішньою інші внутрішні;
- усі внутрішні поверхні цілком лежать усередині зовнішньої поверхні;
- кожна поверхня є замкненою;
- поверхні не перетинають одна одну й самі себе;
- кожна поверхня орієнтована;
- внутрішній стороні поверхні відповідає область, у якій $F(x) > 0$;
- зовнішній стороні поверхні відповідає область, у якій $F(x) < 0$.

Основними труднощами практичного застосування функціонального підходу є складність побудови первинної множини опорних вузлів, що знаходяться на границі або поверхні геометричного об'єкта, представленого у вигляді (3.1). Ця задача еквівалентна пошуку коренів нелінійного рівняння $F(x) = 0$.

Набір точок на площині або поверхні, з'єднаних симплексами, що не перетинаються, утворює скінченно-елементну сітку на основі трикутних елементів. Нехай $P = \{x_0, x_2, \dots, x_{n-1}\}$, $x_i \in E^d$, $d = \overline{2,3}$ – набір таких точок, тоді триангуляція M набору точок P , що складається з n елементів, є сукупністю трьох множин:

- множина номерів вузлів сітки $V = \{v_0, v_2, \dots, v_{n-1}\}$;
- множина ребер $E = \{e_0, e_2, \dots, e_{m-1}\}$, де $e_i = (v_j, v_l)$ впорядкована пара номерів вузлів, така що $v_j < v_l$, $v_j \in V, v_l \in V$;

– множина трикутників $T = \{t_0, t_2, \dots, t_{k-1}\}$, де $t_i = (v_j, v_g, v_h)$, – упорядкована трійка незбіжних номерів вузлів, така що $v_j = \min(v_j, v_g, v_h)$ та $(v_j, v_g, v_h) \neq (v_j, v_h, v_g)$.

Таким чином, дискретне представлення на базі трикутних елементів для довільного об'єкта Ω може бути отримано об'єднанням трьох множин

$$M(P) = \{V, E, T\}, \quad (3.2)$$

задовольняючих наступним властивостям:

- $\bigcup_{t \in T} t$ покриває границю (поверхню) $\partial\Omega$ двовимірного (тривимірного) геометричного об'єкта з деякою точністю;
- площа будь-якого трикутника $t \in T$ більше нуля;
- перетинання будь-яких двох елементів $t_1 \in T, t_2 \in T$ є: порожньою множиною, ребром $e \in E$ або вузлом $v \in V$.

Скінченно-елементну сітку (3.2), двовимірного або тривимірного геометричного об'єкта, представленого у вигляді (3.1), можна побудувати, використовуючи наступну послідовність дій (рис. 3.1).

1. Одержання та триангуляція опорного набору точок на границі (поверхні) геометричного об'єкта.
2. Верифікація якості апроксимації границі (поверхні) геометричного об'єкта, а також необхідних параметрів, отриманих скінченних елементів. Якщо параметри задовольняють поставленим умовам, то переходимо до відображення результатів дискретизації геометричного об'єкта.
3. Застосування різних технік, що підвищують якість геометричної апроксимації та якість елементів сітки.
4. Повернення до верифікації якості скінченно-елементної сітки.
5. Відображення результату дискретизації геометричного об'єкта.

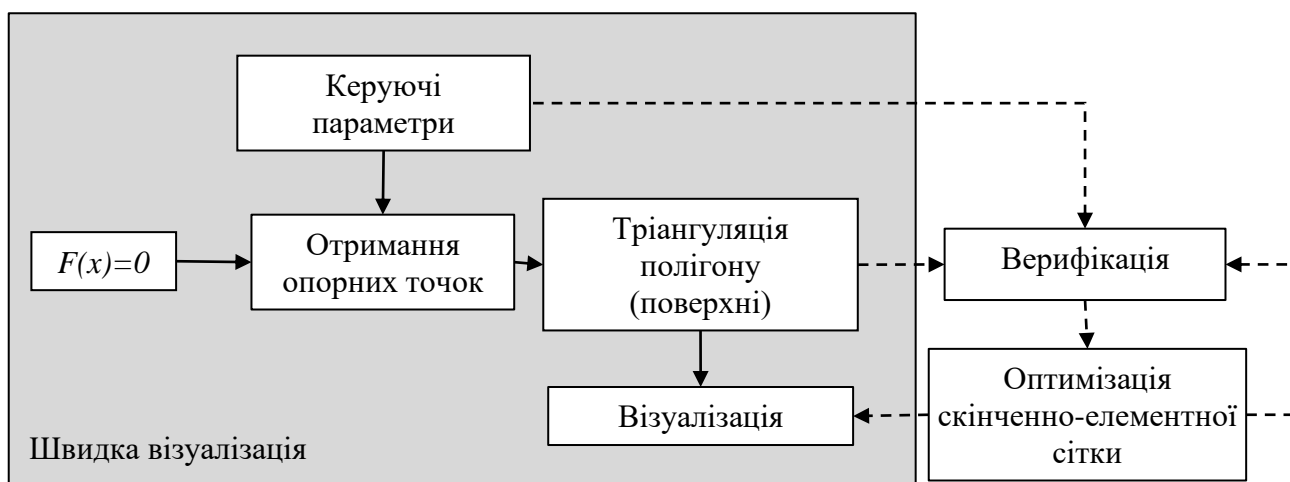


Рисунок 3.1 – Схема побудови дискретної математичної моделі геометричного об'єкта

3.2 Дискретне представлення геометричних об'єктів на площині

Множина опорних точок на границі плоского геометричного об'єкта Ω , може бути отримана шляхом визначення точок перетинання деякої структурованої сітки, що покриває область навколо Ω , з його границею (рис. 3.2).

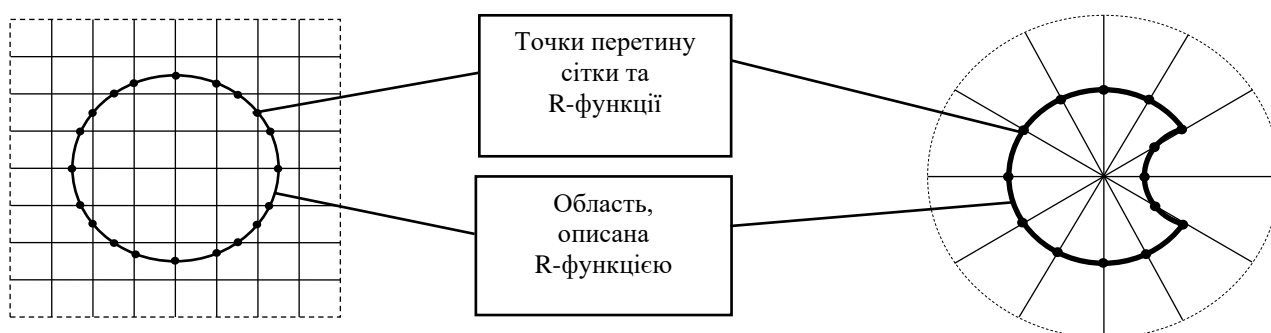


Рисунок 3.2 – Визначення множини опорних точок

При цьому необхідно враховувати, що така сітка повинна цілком покривати область моделювання, а крок її комірок h вибирається довільно, але повинен бути менше розмірів найменшої геометричної особливості об'єкта Ω . Для побудови структурованої сітки може бути обрана довільна система координат.

Визначивши точки перетинання структурованої сітки із границею об'єкта

Ω , і, використовуючи, наприклад, метод золотого перетину, або інші методи для знаходження коренів нелінійного рівняння, одержуємо вихідний набір точок P скінченно-елементної сітки $M(P)$ (рис. 3.3).

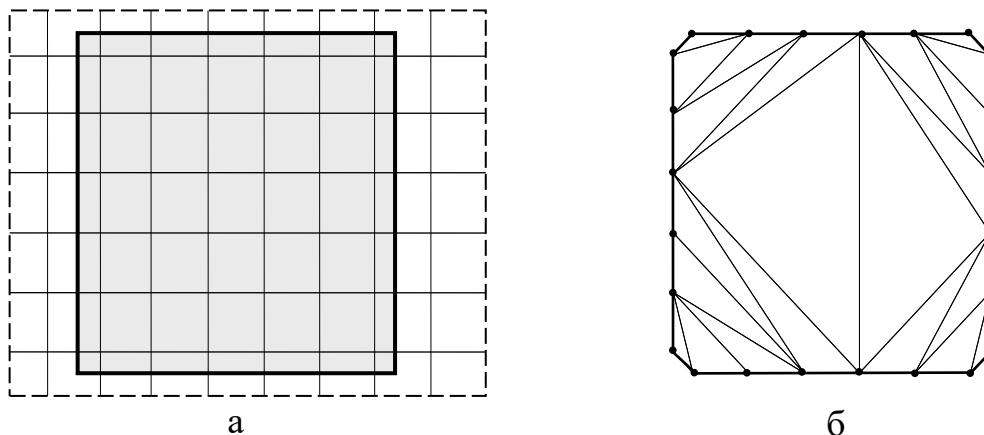


Рисунок 3.3 – Скінченно-елементна сітка опорного набору точок границі геометричного об'єкта

Нехай $L \subset E$ множини ребер, які належать границі геометричного об'єкта $\partial\Omega$. Отже, L утворює один або кілька замкнених контурів, що апроксимують границю об'єкта $\partial\Omega$. При такій апроксимації відбувається втрата ділянок $\partial\Omega$, в околі яких перебувають особливі точки (рис. 3.3 б). З погляду функціонального підходу на базі теорії R-функції особливими, або кутовими є точки, похідні в яких не існують. З геометричної точки зору ці точки, як правило, є такими, у яких відбувається порушення гладкості $\partial\Omega$ та утворюються кути (злами).

Для виявлення загублених ділянок границі можна, визначивши відхилення між нормаллями до ребер і нормаллями до поверхні в їхніх центрах, скорегувати положення вузлів сітки, таким чином, щоб воно було мінімальним (рис. 3.4). Для кожного ребра $e \in L$ таке відхилення можна представити у вигляді

$$\vec{m}(e) = -\frac{\Delta F(c)}{\|\Delta F(c)\|},$$

$$\varepsilon = 1 - \vec{n}(e) \cdot \vec{m}(e),$$
(3.3)

де c – центр ребра e ;

$\bar{n}(e)$ – вектор нормаль до ребра e ;

$\Delta F(c)$ – вектор градієнта.

Використовуючи (3.3), середньоквадратичне відхилення нормалей усіх ребер можна представити в наступному виді

$$\varepsilon_n = \frac{1}{\sum_{e \in L} \|e\|} \sum_{e \in L} \|e\| \left(1 - (\bar{n}(e) \cdot \bar{m}(e))^2\right), \quad (3.4)$$

Вираз (3.4) можна використовувати як одну з оцінок якості апроксимації границі геометричного об'єкта на площині, яке разом з виразом (3.3) дає можливість визначити ребра, які необхідно корегувати.

Якщо значення ε_n перевищує деяку задану величину, то положення вузлів сітки повинне бути скорегованим.

Розглянемо довільний вузол p множини L й суміжні з ним вузли p_j й p_k (рис. 3.4 а). Вектор корегування Δp можна записати так

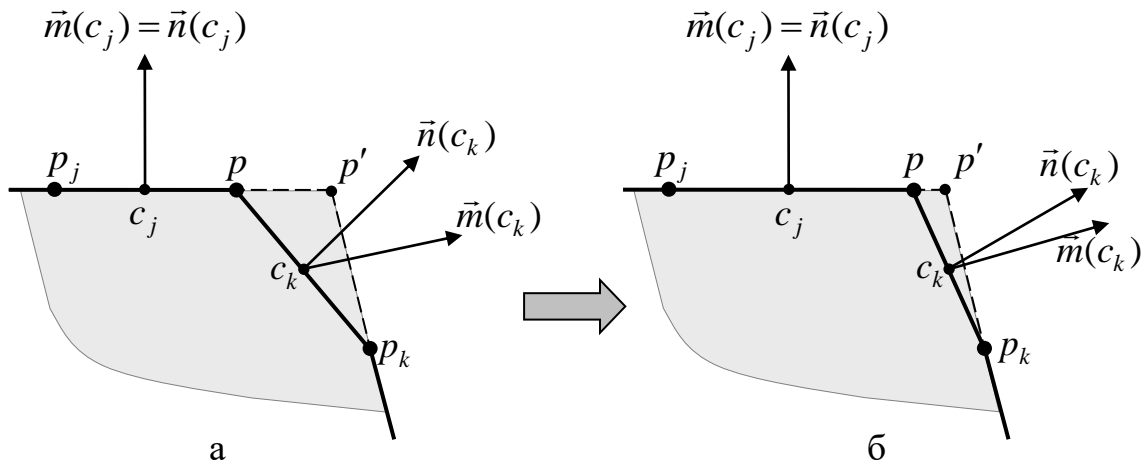
$$\begin{aligned} v(pp_n) &= (\overline{pc_n} \cdot \bar{m}(c_n)) \cdot \bar{m}(c_n), \\ \Delta p &= \frac{1}{\|pp_j\| + \|pp_k\|} \left(\|pp_j\| v(pp_j) + \|pp_k\| v(pk) \right), \end{aligned} \quad (3.5)$$

де $v(pp_n)$ – проекція половини вектора $\overline{pc_n}$ на вектор нормалі до середини c_n ребра pp_n .

Таким чином, одержуємо нове положення вузла $p' = p + \Delta p$. Застосовуючи подібне перетворення для множини всіх граничних вузлів $P \in L$, одержимо оператор наступного вигляду

$$N_1(P): p' \leftarrow p + \Delta p, \quad p \in P. \quad (3.6)$$

Кожна ітерація застосовано оператор (3.6), буде прагнути мінімізувати (3.4) і наближати вузли p до їхнього найкращого положення p' (рис. 3.4 б).



а – вихідна апроксимація границі; б – апроксимація границі після одного кроку оптимізації

Рисунок 3.4 – Пошук особливих точок

Для визначення кривини поверхні $k(p)$, як і в попередньому випадку, розглянемо довільний вузол $p \in L$ та суміжні з ним вузли p_i й p_j (рис. 3.5).

Визначимо $k(p)$ кривину границі $\partial\Omega$ у вузлі p в наступному вигляді

$$k_i(p) = \begin{cases} 0, & \langle \overline{p_i p}, \vec{n}(p) \rangle = 0 \\ \frac{2\sqrt{\|\overline{p_i p}\|^2 - \langle \vec{n}(p), \overline{p_i p} \rangle^2}}{\|\overline{p_i p}\|^2}, & \langle \overline{p_i p}, \vec{n}(p) \rangle \neq 0 \end{cases}, \quad (3.7)$$

$$k(p) = \max(k_i(p), k_j(p)).$$

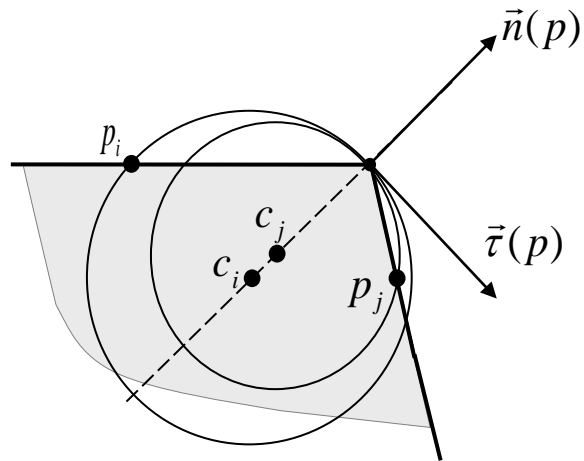


Рисунок 3.5 – Визначення радіусу кривини границі

Визначаючи кривину (3.7) у кожному з вузлів, що утворюють L , можемо розділити множину вузлів на границі $\partial\Omega$ на особливі (кутові) і регулярні, при цьому кутовим вузлам будуть відповідати більші значення кривини, а регулярним – малі. Побудуємо множину H наступного вигляду

$$H(P) = \{k(p) : p \in P\}. \quad (3.8)$$

Множина (3.8) визначає атрибути, що характеризують геометричні властивості L . Розташувавши елементи множини $H(P)$ уздовж координатної вісі, можемо розбити її на дві підмножини, використовуючи, наприклад, один з популярних методів оптимізації К-середніх (K-means), який мінімізує сумарне квадратичне відхилення всіх елементів $H(P)$ від декількох головних точок, де головні точки є центрами мас кожної з отриманих підмножин [6, 27, 97].

Нехай P_{corner} – множина кутових а $P_{regular}$ – регулярних вузлів, таких що, $P = P_{corner} \cup P_{regular}$ та $P_{corner} \cap P_{regular} = \emptyset$.

Множина вузлів P_{corner} послідовно формується з загальної множини вузлів на базі аналізу відповідних значень кривини у вузлі p :

$$\begin{aligned}
\mu_{corner}^{(t+1)} &= \frac{1}{|P_{corner}^{(t)}|} \sum_{p \in P_{corner}^{(t)}} k(p), \\
\mu_{regular}^{(t+1)} &= \frac{1}{|P_{regular}^{(t)}|} \sum_{p \in P_{regular}^{(t)}} k(p), \\
P_{corner}^{(t)} &= \left\{ p : \|k(p) - \mu_{corner}^{(t)}\| < \|k(p) - \mu_{regular}^{(t)}\|, p \in P \right\}, \\
P_{regular}^{(t)} &= \left\{ p : \|k(p) - \mu_{regular}^{(t)}\| < \|k(p) - \mu_{corner}^{(t)}\|, p \in P \right\},
\end{aligned} \tag{3.9}$$

де $\mu_{corner}^0 = \max(|k_G(p)|), p \in P$ – початкове положення центру мас абсолютних значень кривини Гауса у вузлах $p \in P_{corner}$;

$\mu_{noncorner}^0 = \min(|k_G(p)|), p \in P$ – початкове положення центру мас абсолютних значень кривини Гауса у вузлах $p \in P_{noncorner}$.

Крім втрати ділянок границі, набір опорних точок може мати вузли, відстань між якими набагато менше кроку регулярної сітки. Такі вузли можуть призводити до появи елементів виродженої форми. Для таких вузлів можна застосувати операцію злиття, але оптимальним є застосування операції локального згладжування для всіх регулярних вузлів сітки. Локальне переміщення вузла $p \in L$, використовуючи згладжування Лапласа, скорегованого з урахуванням кривини границі, можна записати в наступному вигляді

$$\begin{aligned}
u(p) &= p - \frac{p_j + p_i}{2}, \\
\Delta u(p) &= c \cdot (u(p) - (u(p) \cdot n(p))n(p)),
\end{aligned} \tag{3.10}$$

де p_i, p_j – вузли, пов'язані із p загальними ребрами;

c – константа із проміжку $[0; 1]$.

Таким чином, застосовуючи (3.10) для множини регулярних вузлів, одержимо оператор згладжування $R(P)$ в наступному вигляді

$$R(P): p' \leftarrow p + \Delta u(p), p \in P_{regular}, \quad (3.11)$$

де p' – нове положення вузла p .

Оператори пошуку особливих точок (3.6) і згладжування (3.11) на практиці вносять деяку накопичувальну обчислювальну похибку. Тому необхідно виконувати періодичне проектування граничних вузлів на поверхню $\partial\Omega$ в напрямку нормалей до вузлів. Нехай $proj_{\partial\Omega}^{\vec{n}(p)}(p)$ – точка на границі $\partial\Omega$, отримана проектуванням довільного вузла p в напрямку вектора $\vec{n}(p)$, тоді вектор зміщення вузла можна записати в наступному вигляді

$$\Delta g(p) = p - proj_{\partial\Omega}^{\vec{n}(p)}(p). \quad (3.12)$$

Отже, оператор проектування, враховуючи (3.12), матиме вигляд

$$G(P): p' \leftarrow p + \Delta g(p), p \in P_{regular}, \quad (3.13)$$

де p' – нове положення вузла p .

Оператор (3.11) згладжує ребра границі геометричного об'єкта, але, при практичному застосуванні, лінійні розміри граничних ребер необхідно змінювати залежно від характеристик кривини поверхні. Нехай κ_n – кількість вузлів, рівномірно розподілених по границі з деякою кривиною, тоді для довільного ребра $e \in L$, утвореного парою вузлів p_i та p_j , можна визначити величину ε_k в наступному вигляді

$$\varepsilon_k(e) = \vec{n}(p_i) \cdot \vec{n}(p_j) - \alpha(\kappa_n), \quad (3.14)$$

$$\text{де } \alpha(\kappa_n) = \cos\left(\frac{2\pi}{\kappa_n}\right).$$

Якщо для всіх граничних ребер $\varepsilon_k(e) \geq 0$, то криволінійні ділянки границі добре апроксимовані ребрами сітки але, в іншому випадку ($\varepsilon_k(e) < 0$), необхідна вставка нових вузлів.

Ребра, для яких $\varepsilon_k(e) < 0$ необхідно розбити й спроектувати на границю $\partial\Omega$ (рис. 3.6).

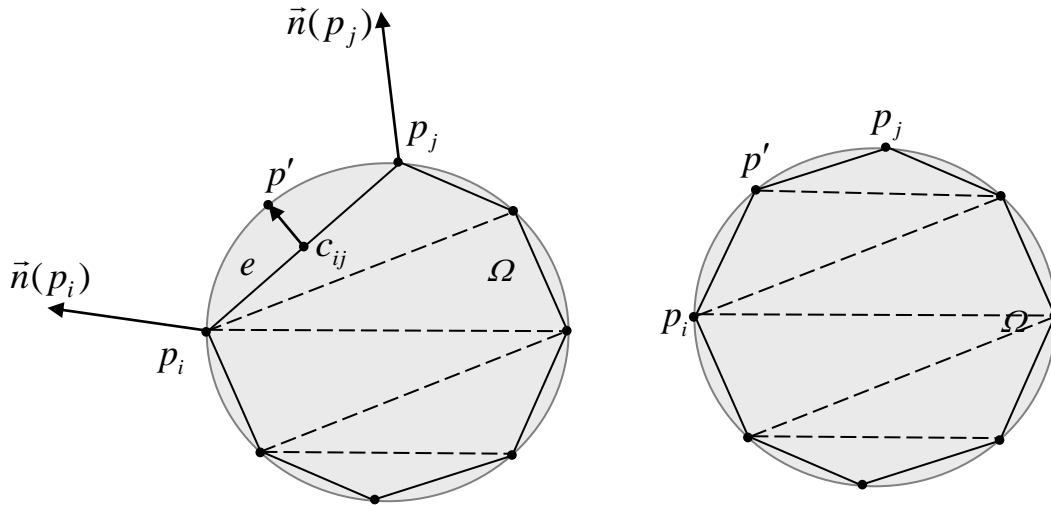


Рисунок 3.6 – Вставка вузлів на границі геометричного об'єкта

Виконавши оцінку та розбиття всіх ребер $e \in L$, одержимо множину нових вузлів P^* у наступному вигляді

$$P^* = \left\{ p : p = \text{proj}_{\partial\Omega}^{\vec{n}(e)} \left(\frac{p_i + p_j}{2} \right), \varepsilon_k(e) < 0, e \in L \right\}. \quad (3.15)$$

де p_i, p_j – пара вузлів що утворюють ребро e .

Множину нових вузлів необхідно поповнювати доти, поки не буде досягнуто достатньої кількості вузлів на криволінійних ділянках границі. Вставка нових вузлів спричинить локальну перебудову сітки M , яку можемо представити у вигляді операції додавання виду

$$M' = M(P) + M(P^*), \quad (3.16)$$

де M' – сітка, побудована на новому наборі опорних вузлів.

Вставку множини нових вузлів (3.15) у сітку M можна виконати використовуючи замість $\varepsilon_\kappa(e)$ критерій виду

$$\varepsilon_{edge}(e) = \max \Delta(e, \partial\Omega), \quad e \in L, \quad (3.17)$$

де $\Delta(e, \partial\Omega)$ – відстань від ребра e до ділянки границі $\partial\Omega$, яка апроксимована ребром e .

Слушною буде наступна теорема.

Теорема 3.1. Для довільного граничного ребра e сітки M можна шляхом вставки скінченного числа вузлів забезпечити виконання умови $\varepsilon_{edge}(e) \leq \varepsilon$ для довільного наперед заданого ε .

Доведення.

Нехай ε – мала величина, e – деяке граничне ребро, $h = \varepsilon_{edge}(e)$, і l довжина дуги ділянки границі, яку апроксимує ребром e (рис. 3.7). Очевидно що $h < l$. Додамо на границі $m = \left\lceil \frac{l}{h} \right\rceil \cdot \left\lceil \frac{h}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ вузлів, розбивши ділянку границі на $m+1$ рівних частин. Приєднавши ці вузли до сітки, одержимо, що довжина кожної нової ділянки границі не буде перевищувати ε , отже, максимальна відстань від ребер сітки до відповідних ділянок границі не буде перевищувати ε .

Теорема доведена.

Слушним наслідком теореми 3.1 є теорема 3.2.

Теорема 3.2. Для вихідної сітки M шляхом вставки скінченного числа вузлів можна забезпечити, щоб значення співвідношення

$$\varepsilon_{edge}(M) = \frac{1}{n} \sum_{e \in L} \max \Delta(e, \partial\Omega) \quad (3.18)$$

було менше кожного наперед заданого ε .

Доведення.

Нехай ε – мала величина, $e_i \in L$ – граничне ребро, $h_i = \varepsilon_{edge}(e_i)$, і l_i довжина дуги ділянки границі, яку апроксимує ребро e_i , $i = \overline{0, |L|}$. Очевидно, що $h_i < l_i$. Додамо на ділянці границі, яка апроксимує e_i $m_i = \left\lceil \frac{l_i}{h_i} \right\rceil \cdot \left\lceil \frac{h_i}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ вузлів, що розбивають ділянку границі на $m_i + 1$ рівних частин. Приєднавши ці вузли до сітки, отримаємо, що довжина кожної нової ділянки границі не буде перевищувати ε , і максимальна відстань від ребер сітки до відповідних ділянок границі не буде перевищувати ε . Отже, додавши таким чином, $m = \sum_i m_i$ нових вузлів, отримаємо, що середня максимальна відстань від ребер сітки до відповідних ділянок границі не буде перевищувати ε .

Теорема доведена.

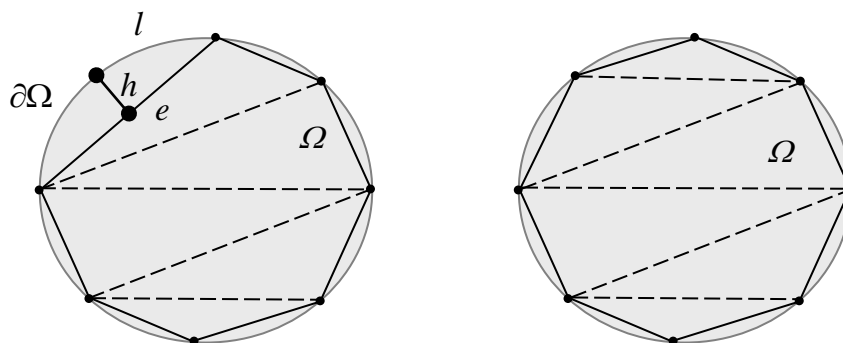


Рисунок 3.7 – Уточнення ділянки границі

На практиці оцінку виду (3.17) разом із критерієм (3.14) можна використовувати для оптимізації якості апроксимації геометричного об'єкта Ω . При цьому значення κ_n та ε повинен вибирати дослідник, виходячи з модельних обмежень.

Застосування операторів (3.6), (3.11), (3.13) і (3.16) оптимізує положення

вузлів сітки на границі геометричного об'єкта, при цьому форма й розміри елементів сітки, що покривають внутрішню частину об'єкта, не враховується. На практиці, особливо при використанні методу скінченних елементів, на форму й розміри елементів накладаються обмеження. Форма елементів, як правило, повинна бути наближеною до правильної, площа не повинна перевищувати наперед заданого значення, а сітка повинна згущатися в областях можливої концентрації напружень.

Для розв'язку такої задачі зручніше за все використовувати методи на основі критерію Делоне та методи додавання нових вузлів у вже існуючу сітку, такі як метод Рапперта та Off-center [135, 140].

Сітка задовольняє умові Делоне, якщо коло, описане навколо довільного трикутника, не включає жодного іншого вузла сітки. Така сітка може бути отримана, з будь-якої іншої, шляхом зміни діагоналей пари сусідніх трикутників (рис. 3.8).

Метод Рапперта складається з декількох основних дій.

1. На всіх граничних ребрах, як на діаметрах, будується коло. Якщо цьому колу належить будь-який інший вузол сітки, то ребро розбивається навпіл (рис. 3.9 а, б).

2. Для кожного трикутника визначається мінімальний кут і площа. Якщо кут або площа більше деяких наперед заданих значень, то в сітку додається вузол, який є центром описаної навколо поточного трикутника кола (рис. 3.9 в, г).

3. Для всіх знову доданих трикутників виконується перевірка критерію Делоне. Якщо критерій не виконується, застосовується метод зміни діагоналей

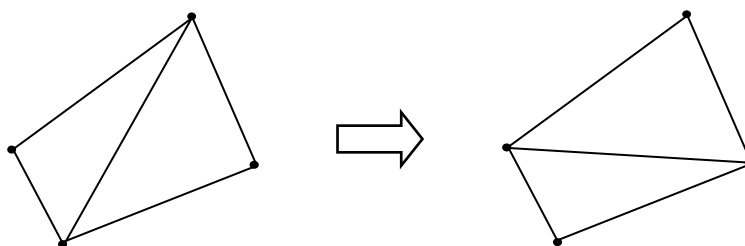


Рисунок 3.8 – Метод зміни діагоналей сусідніх трикутників сітки

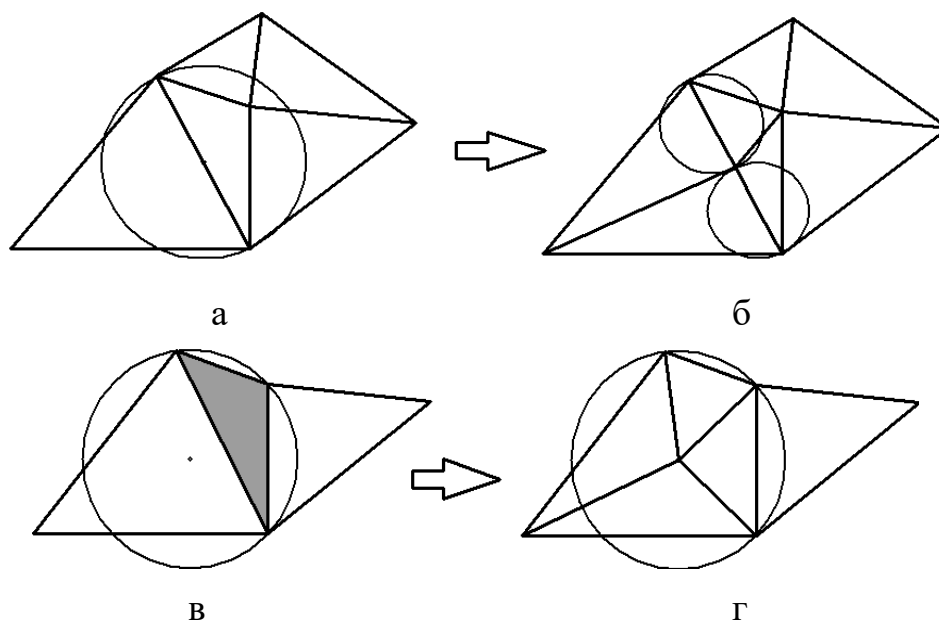


Рисунок 3.9 – Розбиття «неправильних» елементів сітки

Дії методу Рапперта повторюються доти, поки встановлені параметри значення мінімального кута й площі не будуть досягнуті.

У якості практичного прикладу скінченно-елементної сітки геометричного об'єкта заданого у функціональному вигляді розглянемо квадрат з колом у його центрі (рис. 3.10 а).

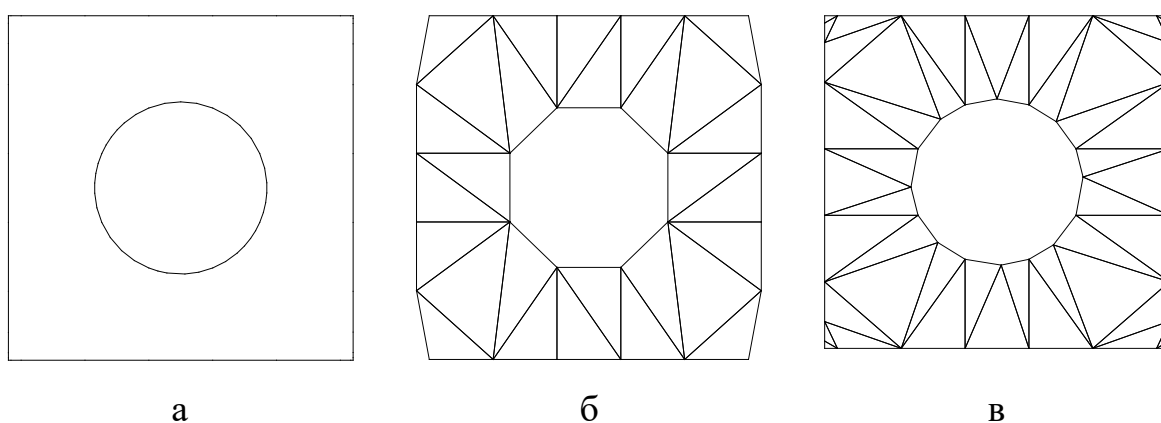


Рисунок 3.10 – Скінченно-елементна сітка геометричного об'єкта

Рівняння геометричного об'єкта, заданого стороною квадрата a та радіусом кола R , має вигляд

$$F(x, y, a, R) = F_{rect}(x, y, a) \wedge -F_{circle}(x, y, 0, 0, r). \quad (3.19)$$

Результат визначення множини опорних вузлів та скінченно-елементна сітка геометричного об'єкта (3.19) представлено на (рис. 3.10 б). Результат виконання оператора мінімізації відхилення нормалей і додавання нових вузлів на криволінійних ділянках границі дає сітку, представлену на (рис. 3.10 в). Застосування оптимізації на основі критерію Делоне та методу Рапперта з різними керуючими параметрами представлено на (рис. 3.11 а-в).

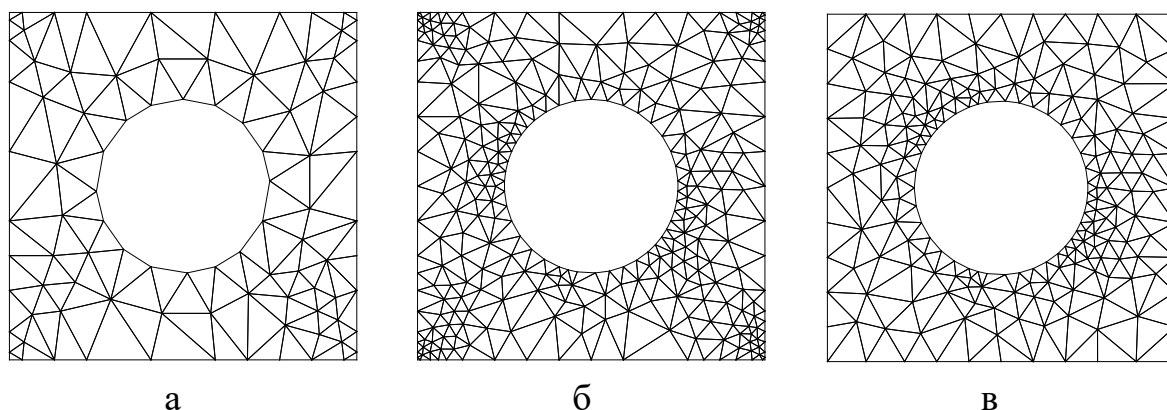


Рисунок 3.11 – Скінченно-елементна сітка геометричного об'єкта

3.3 Дискретне представлення тривимірних геометричних об'єктів

Множина опорних точок тривимірного геометричного об'єкта та початкова скінченно-елементна сітка може бути одержана шляхом застосовуючи методів на основі шаблонів, наприклад, таких як метод кубів, що марширують, або Скаила (Skala) [124, 142]. Оптимальним, з погляду кількості отриманих на поверхні об'єкта трикутників, є метод маршируючих кубів, але точність пошуку вузлів на поверхні геометричного об'єкта не перевищує половини від лінійних розмірів шаблонів, на базі яких працює метод. Тому даний метод можна доповнити

процедурою уточнення положення вузлів відносно вихідної поверхні.

Нехай MC – оператор отримання скінченно-елементної сітки на основі методу маршируючих кубів, тоді сітка у вигляді (3.4) для геометричного об'єкта, заданого у вигляді (3.1), буде мати вигляд

$$M = MC(\Delta C, \varepsilon_v), \quad (3.20)$$

де ΔC – лінійний розмір шаблону, який повинен бути менше будь-якої геометричної особливості геометричного об'єкта Ω ;

ε_v – точність пошуку вузлів на поверхні $\partial\Omega$.

Скінченно-елементну сітку у вигляді (3.20) можна з успіхом застосовувати для візуалізації тривимірних геометричних об'єктів (рис. 3.12).

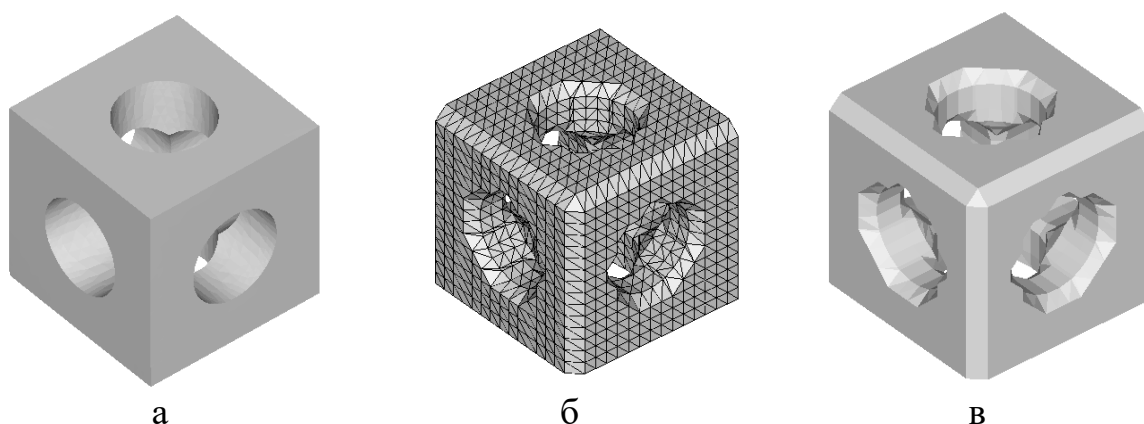


Рисунок 3.12 – Дискретна модель геометричного об'єкта

При практичному застосуванні з використанням обчислювальних методів сітку необхідно оптимізувати, тому що:

- спостерігається втрата ділянок границі, які відповідають геометричним особливостям (злами, кути, піки) (рис. 3.12 в);
- елементи сітки мають «погану» форму (багато «тонких» і «витягнутих» елементів) (рис. 3.12 б);
- відсутня залежність густоти сітки від кривини поверхні.

Для оптимізації сітки на поверхні тривимірних геометричних об'єктів можна використати узагальнення підходів, описаних для геометричних об'єктів на площині.

Відхилення між нормаллю трикутника сітки t та нормаллю до границі $\partial\Omega$ в центрі даного трикутника має вигляд

$$\begin{aligned}\vec{m}(t) &= -\frac{\Delta F(c)}{\|\Delta F(c)\|}, \\ \varepsilon &= 1 - (\vec{n}(t) \cdot \vec{m}(t))^2,\end{aligned}\tag{3.21}$$

де c – середина трикутника t ;

$\vec{n}(t)$ – нормаль до трикутника t ;

$\Delta F(c)$ – градієнт функцій в точці c .

Тоді середньоквадратичне відхилення для всіх трикутників сітки можна записати у вигляді

$$\varepsilon_n = \frac{1}{\sum_{t \in T} A(t)} \sum_{t \in T} A(t) (1 - (\vec{n}(t) \cdot \vec{m}(t))^2),\tag{3.22}$$

де $A(t)$ – площа трикутника t .

Аналогічно двомірному випадку, якщо значення оцінки (3.21) більше певної величини, то для вузлів сітки, розташованих на поверхні геометричного об'єкта, необхідно застосувати оператор корекції (3.6), змінивши при цьому значення переміщення на вираз наступного виду

$$\Delta p = \frac{1}{\sum_{t \in B(p)} A(t)} \sum_{t \in B(p)} A(t) [(\vec{pc} \cdot \vec{m}(t)) \cdot \vec{m}(t)],\tag{3.23}$$

де \vec{pc} – вектор від вузла до центру трикутника;

$A(t)$ – площа трикутника t ;

$B(p)$ – множина трикутників, яким належить вузол p .

Подібно операторові, який корегує положення вузлів сітки, оцінюючи різницю нормалей до елементів сітки та до поверхні $\partial\Omega$, можна використати інший оператор корекції, заснований на мінімізації суми квадратів відстаней від вузла до дотичних площин, проведених до сусідніх вузлів двоїстої сітки.

Двоїстою будемо називати сітку, утворену шляхом з'єднання всіх вузлів, отриманих проектуванням центрів трикутників вихідної сітки на поверхню $\partial\Omega$ (рис. 3.13). Для кожного вузла p вихідної сітки, комірка двоїстої сітки може бути знайдена шляхом з'єднання деякої множини $D(p)$ вузлів двоїстої сітки, які отримані із центрів суміжних з вузлом p трикутників (мал. 3.12 б, г). Отже, множина $D(p)$ має вигляд

$$D(p) = \left\{ x : x = \text{proj}_{\partial\Omega}^{\vec{n}(t)}(c_t), t \in B(p) \right\}, \quad (3.24)$$

де $B(p)$ – множина суміжних з вузлом p трикутників;

c_t – центр трикутника t ;

$\text{proj}_{\partial\Omega}^{\vec{n}(t)}(c_t)$ – проекція c_t в напрямку вектора нормалі до трикутника $\vec{n}(t)$ на поверхню $\partial\Omega$.

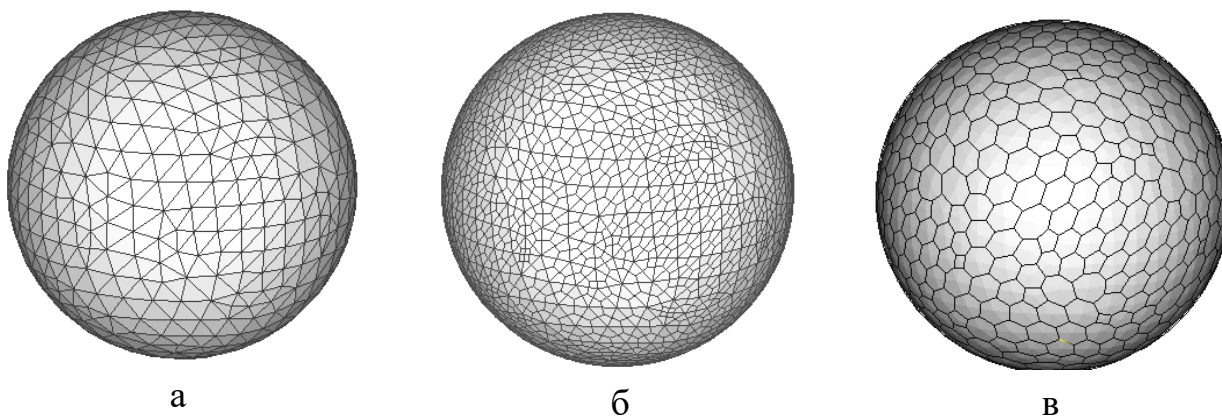


Рисунок 3.13 – Сітка на основі трикутників та двоїста до неї сітки

Для кожного вузла двоїстої сітки можна побудувати дотичну площину,

рівняння якої має вигляд

$$\vec{m}(p) = \frac{\Delta F(p)}{\|\Delta F(p)\|}, \quad (3.25)$$

$$l(p) = \vec{m}(p) \cdot (x - p) = 0.$$

Перетинання отриманих у такий спосіб площин дає деяку сітку, яка є дотичною та, в деяких випадках, більш якісно апроксимує ділянки границі, в яких існують геометричні особливості (рис 3.14).

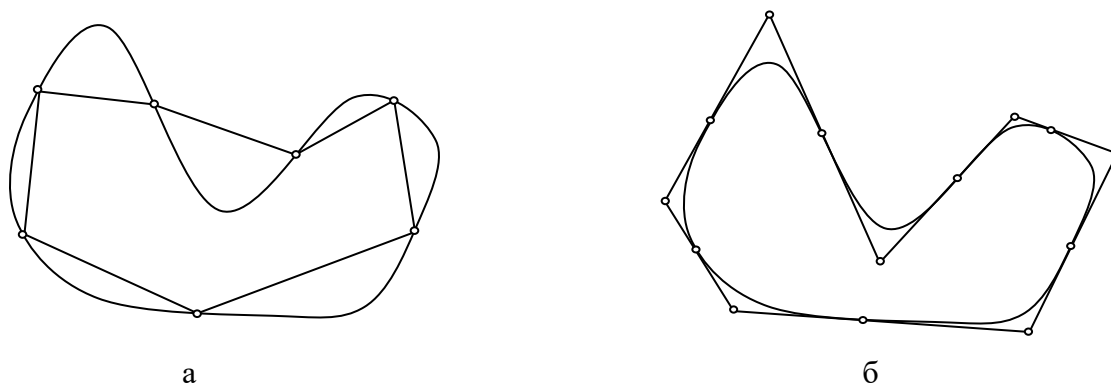


Рисунок 3.14 – Апроксимація границі різними методами

Відстань від довільної точки до площини може бути отримана шляхом підстановки її координат у рівняння площини виду (3.25). Отже, для довільного вузла $x \in P$ вихідної сітки у вигляді (3.6) можна визначити середньоквадратичне відхилення від дотичної сітки в наступному вигляді

$$\varepsilon_{\tau}(x) = \sum_{p \in D(p)}^{k-1} (\vec{m}(p) \cdot (x - p))^2. \quad (3.26)$$

Заздалегідь визначивши граничне значення середньоквадратичного відхилення виду (3.26), одержимо множину вузлів, положення яких необхідно скорегувати. Для обчислення оптимального положення вузла з визначеної

множини необхідно розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь третього порядку у наступному вигляді

$$\frac{d\varepsilon_\tau(x)}{dx} = 0. \quad (3.27)$$

Система рівнянь (3.27), у деяких випадках, може бути виродженою. Отже, якщо A – матриця коефіцієнтів системи рівнянь (3.27), тоді для її розв'язку можна використовувати різні методи:

- метод Гаусса, якщо визначник матриці A більше нуля;
- метод мінімізації нев'язки, якщо визначник матриці A менше нуля, наприклад, метод сингулярного розкладання матриці.

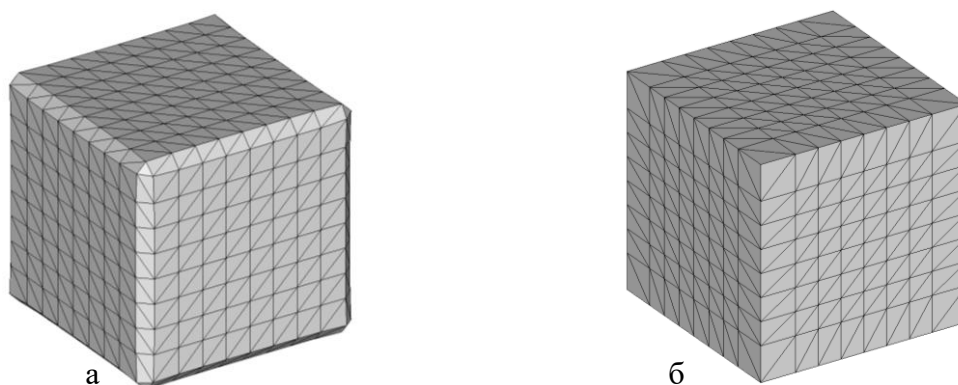
Таким чином, якщо $x(p) = (x_1, x_2, x_3)$ – розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь (3.27) для вузла сітки p , то можемо одержати новий оператор корегування положення вузлів сітки M у вигляді

$$N_2(P): p' \leftarrow p + \Delta p, \quad p \in P, \quad (3.28)$$

де $\Delta p = x(p) - p$.

На практиці оператор виду (3.28), як правило, за одну ітерацію визначає оптимальне положення вузлів сітки (рис 3.15 а, б).

У деяких випадках оператор може виконувати помилкове корегування положення вузлів, породжуючи елементи та геометричні особливості, які відсутні на вихідній границі $\partial\Omega$. Причиною таких помилок, як правило, є низька якість вихідної апроксимації, скінченними елементами сітки та накопичувальні обчислювальні похибки. Тому оператор виду (3.28) застосовується не як самостійне перетворення, а як один з етапів комплексу перетворень у яким, крім оператора (3.6), можуть входити такі оператори як згущення сітки, проектування та згладжування вузлів.



а – вихідна сітка; б – оптимізована сітка

Рисунок 3.15 – Застосування оператора корегування вузлів сітки

Операцію згладжування всіх, без винятку вузлів сітки M можна використовувати як процедуру підготовки сітки для роботи інших операторів. Аналогічно двовимірному випадку оператор згладжування для всіх вузлів сітки може бути записаний у наступному вигляді

$$R_{all}(P): p' \leftarrow p + \Delta u(p), p \in P, \quad (3.29)$$

де $\Delta u(p)$ – величина переміщення вузла яка визначається на основі згладжування та залежить від елементів пов'язаних з вузлом p .

Якщо $B(p)$ – множина вузлів суміжних з p , а n – його потужність, то переміщення вузла, на основі згладжування Лапласа матиме вигляд

$$U(p) = \frac{1}{n} \sum_{q \in B(p)} q - p.$$

Оскільки даний варіант згладжування може порушувати структуру сітки у випадку не опуклого околу точки p , то на практиці частіше застосовують згладжування з ваговим коефіцієнтом, згідно з яким величина зсуву $\Delta u(p)$

прийме вигляд

$$\begin{aligned} u(p) &= (1 - \omega)p + \omega U(p) - p, \\ \Delta u(p) &= c \cdot (u(p) - (u(p) \cdot \vec{n}(p))\vec{n}(p)), \end{aligned} \quad (3.30)$$

де ω й c – вагові коефіцієнти із проміжку $[0; 1]$.

Для довільної точки поверхні геометричного об'єкта, заданого у вигляді (3.1), складно визначити геометричні характеристики такі як: нормаль, дотична площина, параметри кривини. Тому можемо визначити необхідні властивості наближеним способом.

Апроксимація значення нормалі до поверхні, для кожного з вузлів сітки M , має наступний вигляд

$$\vec{n}(p) = \frac{1}{\left\| \sum_{t \in B(p)} \omega_t \vec{n}(t) \right\|} \sum_{t \in B(p)} \omega_t \vec{n}(t), \quad (3.31)$$

де $B(P)$ – множина сусідніх з вузлом p трикутників;

ω_t – ваговий коефіцієнт;

$\vec{n}(t)$ – нормаль до площини трикутника.

Ваговий коефіцієнт ω_t можна зв'язати з різними параметрами сітки, наприклад, ω_t може дорівнювати площі трикутника або зворотній до нього величині.

Середня кривина поверхні, визначена в деякому вузлі p , сітки M , може бути отримана в наступному виді [102]

$$\begin{aligned} K(p) &= \frac{3}{4A} \sum_{q \in B(p)} (ctg \alpha_q + ctg \beta_q)(p - q), \\ k_M(p) &= \frac{1}{2} \left\| \vec{K}(p) \right\|, \end{aligned} \quad (3.32)$$

де $\vec{K}(p)$ – нормаль середньої кривини;

α_q і β_q – два кути протилежні ребру, утвореному вузлами p та q (рис. 3.16 а);

$B(p)$ – множина вузлів сусідніх з вузлом p ;

A – сума площ сусідніх з вузлом p трикутників.

Наближене значення кривини Гауса в точці поверхні p має вигляд [102]

$$k_G(p) = \frac{3}{A} \left(2\pi - \sum_{t \in T(p)} \theta_t \right), \quad (3.33)$$

де $T(p)$ – множина сусідніх з вузлом p трикутників;

θ_t – кут трикутника при вершині p (рис. 3.16 б);

A – сума площ сусідніх з вузлом p трикутників.

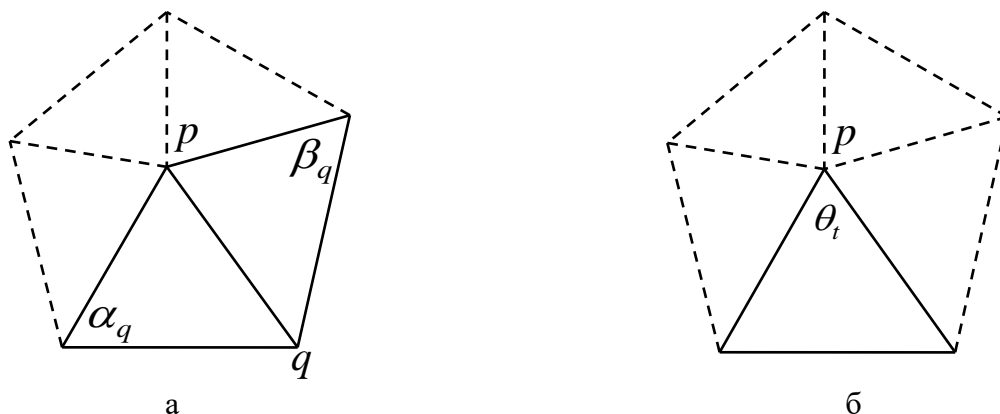


Рисунок 3.16 – Визначення кривини поверхні

Якщо k_1 й k_2 – максимальна та мінімальна кривина, то виходячи з того, що

$k_M = \frac{(k_1 + k_2)}{2}$ та $k_G = k_1 k_2$, можемо одержати їхні значення, на основі виразів

(3.32) й (3.33), у наступному вигляді

$$\begin{aligned} k_1(p) &= k_M(p) + \sqrt{\Delta(p)}, \\ k_2(p) &= k_M(p) - \sqrt{\Delta(p)}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

де $\Delta(p) = \max(k_M^2(p) - k_G(P), 0)$.

Таким чином, для кожного вузла сітки може бути визначена множина $C(P)$ у вигляді

$$C(P) = \{(k_1(p), |k_2(p)|) : p \in P\}, \quad (3.35)$$

та, аналогічним методом, множина $G(p)$, відповідно до модулів Гаусової кривини, у вигляді

$$G(P) = \{|k_G(p)| : p \in P\}. \quad (3.36)$$

Множини (3.35) та (3.36) приблизно визначають основні параметри кривини поверхні у всіх граничних вузлах сітки, на основі яких можемо розділити множину всіх вузлів сітки на три складових:

- множина вузлів, які є вершинами P_{corner} – окремі особливі точки моделі (наприклад вершини кубу);
- множина вузлів, які належать ребрам P_{edge} – криві утворені особливими точками моделі (наприклад ребра куба);
- множина звичайних (регулярних) вузлів $P_{regular}$.

При цьому $p \in P_{corner}$ будуть відповідати найбільші значення із множини $G(P)$, яку можна записати у вигляді (3.37).

Для множини вузлів, якій належать вузли ребер, характерним є великі значення максимальної кривини та, в той же час, малі значення мінімальної. Якщо вважати пари множини $C(P)$ точками двомірного простору, то формально

МОЖЕМО записати множину P_{edge} у вигляді (3.38).

$$\begin{aligned}\mu_{corner}^{(t+1)} &= \frac{1}{|P_{corner}^{(t)}|} \sum_{p \in P_{corner}^{(t)}} |k_G(p)|, \\ \mu_{noncorner}^{(t+1)} &= \frac{1}{|P_{noncorner}^{(t)}|} \sum_{p \in P_{noncorner}^{(t)}} |k_G(p)|, \\ P_{corner}^{(t)} &= \{p : \|k(p) - \mu_{corner}^{(t)}\| < \|k(p) - \mu_{noncorner}^{(t)}\|, p \in P\}, \\ P_{noncorner}^{(t)} &= \{p : \|k(p) - \mu_{noncorner}^{(t)}\| < \|k(p) - \mu_{corner}^{(t)}\|, p \in P\},\end{aligned}\tag{3.37}$$

де $\mu_{corner}^0 = \max(|k_G(p)|), p \in P$ – початкове положення центру мас абсолютних значень кривизни Гауса у вузлах $p \in P_{corner}$;

$\mu_{noncorner}^0 = \min(|k_G(p)|), p \in P$ – початкове положення центру мас абсолютних значень кривизни Гауса у вузлах $p \in P_{noncorner}$.

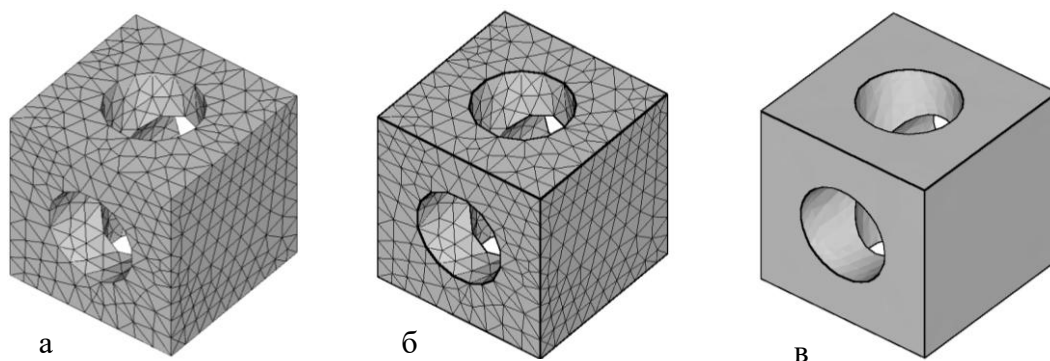
$$\begin{aligned}\mu_{edge}^{(t+1)} &= \frac{1}{|P_{edge}^{(t)}|} \sum_{p \in P_{edge}^{(t)}} (k_1(p), |k_1(p)|), \\ \mu_{nonedge}^{(t+1)} &= \frac{1}{|P_{nonedge}^{(t)}|} \sum_{p \in P_{nonedge}^{(t)}} (k_1(p), |k_1(p)|), \\ P_{edge}^{(t)} &= \{p : \|k(p) - \mu_{edge}^{(t)}\| < \|k(p) - \mu_{nonedge}^{(t)}\|, p \in P\}, \\ P_{nonedge}^{(t)} &= \{p : \|k(p) - \mu_{nonedge}^{(t)}\| < \|k(p) - \mu_{edge}^{(t)}\|, p \in P\},\end{aligned}\tag{3.38}$$

де $\mu_{edge}^0 = \left(\max_{p \in P} (k_1(p)), \min_{p \in P} (|k_2(p)|) \right)$ – початкове положення центру мас пар, отриманих згідно значень максимальної та мінімальної кривизни, що відповідають вузлам $p \in P_{edge}$;

$\mu_{nonedge}^0 = \left(\min_{p \in P} (k_1(p)), \min_{p \in P} (|k_2(p)|) \right)$ – початкове положення центру мас пар, отриманих згідно значень максимальної та мінімальної кривизни, що відповідають вузлам $p \in P_{nonedge}$.

Множина регулярних вузлів є об'єднанням множин $P_{noncorner}$ та $P_{nonedge}$.

Практичний приклад, виділення на сітці особливих точок і пов'язаних з ними ребер представлено на (рис. 3.17).



а – скінченно-елементна сітка; б та в – відображення особливих точок на границі геометричного об'єкта

Рисунок 3.17 – Визначення особливих вузлів та ребер

Для різних ділянок границі геометричного об'єкта можливе застосування різних методів оптимізації. Для згладжування регулярних вузлів сітки можна застосовувати оператор згладжування у вигляді

$$R_{regular}(P): p' \leftarrow p + \Delta u(p), p \in P_{regular}, \quad (3.39)$$

де $\Delta u(p)$ – аналогічне виразу (3.30).

Очевидно, що вузли множини вершин сітки мають фіксоване положення. Для виконання згладжування множини вузлів, яка належать ребрам геометричного об'єкта, розглянемо локальну ділянку границі, утворену вузлом $p \in P_{edge}$ та парою сусідніх з ним вузлів $p_i, p_j \in P_{edge}$. Трійка обраних вузлів апроксимує деяку ділянку кривої в просторі, тому корекція положення вузла p повинна залежати тільки від сусідніх вузлів $p_i, p_j \in P_{edge}$, нормалі до кривої $\vec{n}_2(p)$ й дотичного вектора $\vec{\tau}(p)$ (рис. 3.18 а, б).

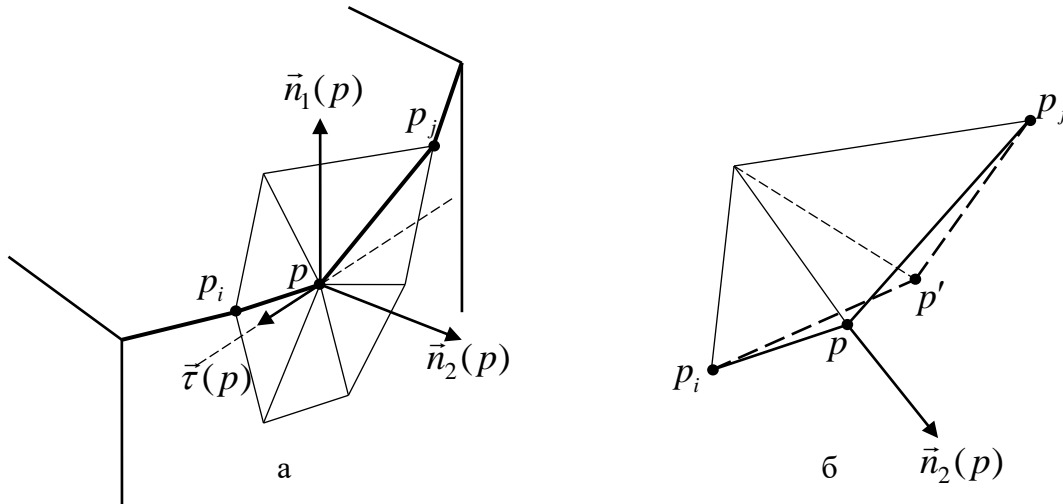


Рисунок 3.18 – Корегування положення вузла сітки на кривій що утворена особливими точками геометричного об'єкта

Нехай нове положення p' вузла p буде розташовуватися в середині відрізка $p_i p_j$. Якщо трійка вузлів апроксимує пряму ділянку границі, то положення p' є правильним, інакше необхідно скорегувати його положення на величину $(p' - p) \cdot \vec{n}_2(p)$ в напрямку вектора $\vec{n}_2(p)$. Таким чином, можемо записати зсув вузла $\Delta u(p)$ у вигляді

$$\begin{aligned}
 \vec{n}_1(p) &= (p_j - p) \times (p_i - p), \\
 \vec{\tau}(p) &= (p_i - p_j), \\
 \vec{n}_2(p) &= \tau(p) \times n_1(p), \\
 u(p) &= \frac{p_i + p_j}{2} - p, \\
 \gamma(p) &= (p_j - p) \cdot (p - p_i), \\
 \Delta u(p) &= \begin{cases} u(p), & \gamma(p) = 0 \\ c(u(p) - (u(p) \cdot \vec{n}(p)) \cdot \vec{n}(p)), & \gamma(p) \neq 0 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

де c – постійна із проміжку $[0;1]$.

Отже, оператор згладжування вузлів розташованих на ребрах буде мати

ВИГЛЯД

$$R_{edge}(P): p' \leftarrow p + \Delta u(p), p \in P_{edge}, \quad (3.41)$$

де $\Delta u(p)$ визначається згідно виразу (3.41).

Аналогічно, двовимірному випадку, якість апроксимації поверхні тривимірного геометричного об'єкта може бути поліпшене шляхом додавання в сітку нових вузлів. Множина нових вузлів у вигляді (3.15) може бути отримана на основі критерію кількості точок на радіус кривини поверхні (3.14) або на основі критерію про максимальну відстань від ребра до границі об'єкта (3.17).

Критерій (3.17), у тривимірному випадку, можна застосувати до трикутних граней. Для кожного трикутника сітки визначимо величину наступного виду

$$\varepsilon_{triangel}(t) = \max \Delta(t, \partial\Omega), t \in T, \quad (3.42)$$

де $\Delta(t, \partial\Omega)$ – відстань від трикутника t до ділянки границі $\partial\Omega$, яку апроксимує трикутник t .

Тоді, на основі (3.42) можемо сформулювати теорему.

Теорема 3.3. Для вихідної сітки M шляхом вставки скінченного числа вузлів можна забезпечити, щоб значення співвідношення

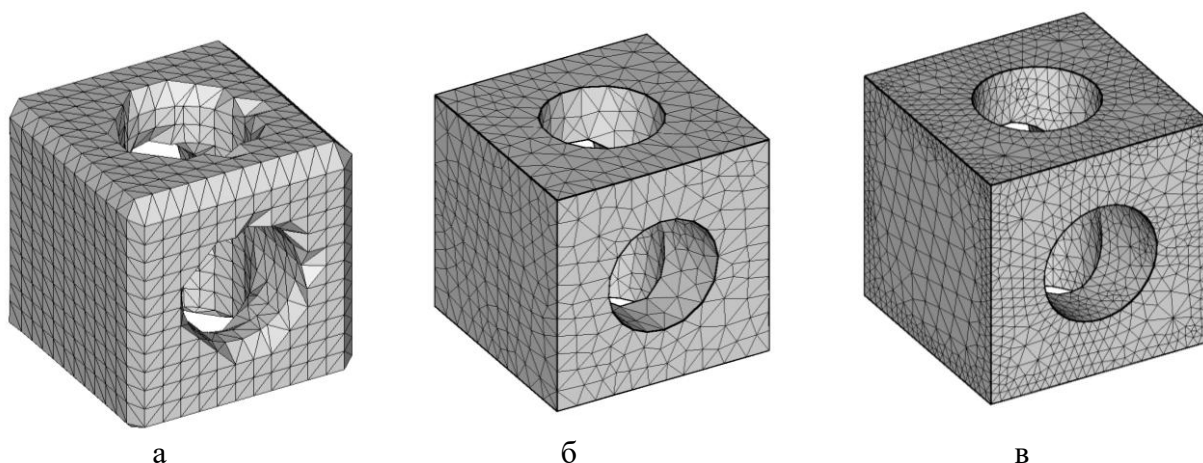
$$\varepsilon_{triangle}(M) = \frac{1}{n} \sum_{t \in T} \max \Delta(t, \partial\Omega), \quad (3.43)$$

було менше кожного наперед заданого ε .

Доведення даної теореми виконується шляхом узагальнення доведення теореми 3.2 (з корегуванням на тривимірний випадок).

Як приклад практичного використання розглянемо геометричний об'єкт (куб із парою циліндричних отворів) для якого застосуємо описані оператори

оптимізації (рис. 3.19).



а – початкова дискретна модель; б – оптимізована модель з визначеними особливими точками; в – згущення сітки у околі особливих точок об'єкта

Рисунок 3.19 – Приклад дискретної математичної моделі геометричного об'єкта

3.4 Методи перетворення сітки на основі трикутних скінченних елементів у двовимірному та тривимірному просторах

Крім якості апроксимації елементи сітки, як правило, не повинні мати форму близьку до виродженої (трикутники одна зі сторін яких значно менше інших сторін або трикутники з малими значеннями кутів). На практиці, для визначення якості елементів існує ряд критеріїв, кожен з яких має ідеальне значення в тому випадку, якщо трикутні елементи сітки мають правильну форму. Будемо визначати якість трикутника $t \in T$ у вигляді

$$Q_t = \alpha \frac{h_{\max}}{\rho_t} = \alpha \frac{h_{\max} p_t}{S_t}, \quad (3.44)$$

де h_{\max} – довжина максимального ребра;

ρ_t – радіус уписаного кола;

p_t – півпериметр;

S_t – площа трикутника;

α – коефіцієнт, який вибирається таким чином, щоб показник якості для рівностороннього трикутника дорівнював одиниці.

Отже, середня якість усіх трикутників сітки визначається у вигляді

$$\bar{Q}_t = \frac{1}{|T|} \sum_{t \in T} Q_t. \quad (3.45)$$

До основних методів, які використовуються на практиці та дозволяють підвищити якість сітки, можна віднести:

- зміна положення вузлів сітки;
- видалення ребер;
- розбиття ребер;
- обмін діагоналей;

Зміна положення вузлів сітки у вигляді локальних операторів згладжування (3.11) або (3.28) прагне придати всім елементам сітки правильну форму, тобто прагне щоб вираз (3.46) дорівнював одиниці.

Видалення ребра – метод загрублення сітки, що базується на різних варіантах видалення ребра суміжних трикутників. На практиці, видалення ребра відбувається для трикутників, у яких одна зі сторін значно менше двох інших. Операція видаляє один вузол, ребро й два трикутники сітки (рис. 3.20). При цьому положення вузла, що залишився (із трьох можливих) визначається, виходячи із середньої найкращої якості всіх сусідніх із цим вузлом трикутників.

Розбиття ребра – метод подрібнення сітки шляхом додавання нового вузла в середину ребра. Дане перетворення змінює пару суміжних трикутників сітки чотирма новими за рахунок додавання нового вузла (рис. 3.21). Як правило,

розбиття ребер виконують у парі з операцією зміни діагоналей, що приводить до подрібнення сітки, схожому з роботою відомих алгоритмів подрібнення, наприклад, *RGB* (Red Green Blue) [146].

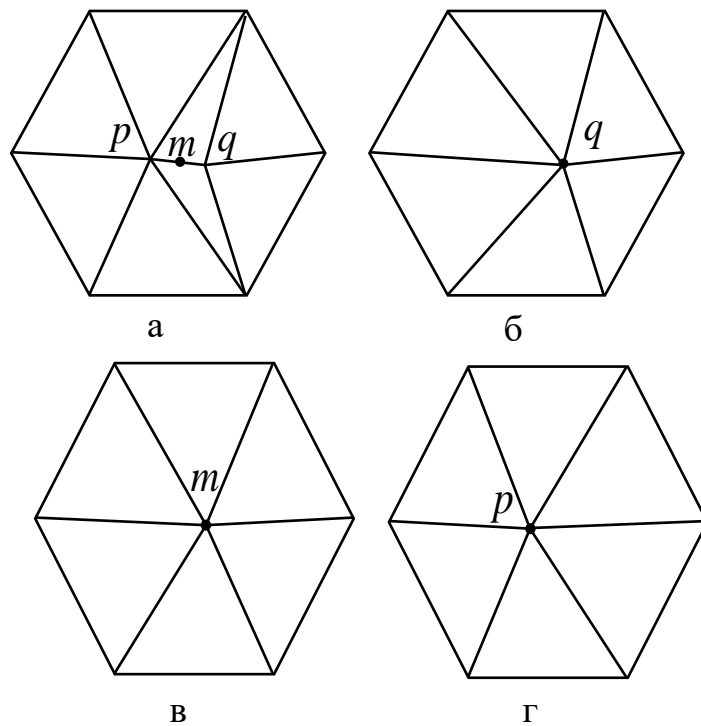


Рисунок 3.20 – Різні варіанти видалення ребра PQ

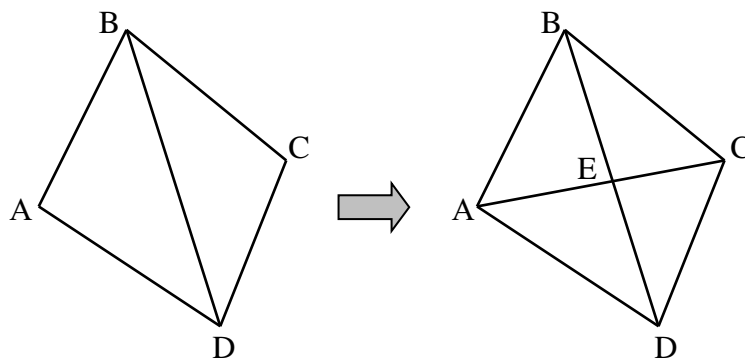


Рисунок 3.21 – Розбиття ребра BD шляхом вставки нового вузла E

Обмін діагоналей – метод зміни зв'язків між вузлами сітки, який, як правило, виступає в складі інших оптимізаційних операцій (видалення вузла або

грані, розбиття ребра). Нехай t_1 і t_2 – пара трикутників на поверхні геометричного об'єкта із загальним ребром e (рис. 3.22), тоді зміна діагоналей можлива при виконанні наступних умов:

- 1) чотирикутник, утворений трикутниками, є опуклим;
- 2) вузли, що утворюють ребро e , не належать множині особливих точок;
- 3) якість апроксимації нових трикутників краще, ніж поточних.

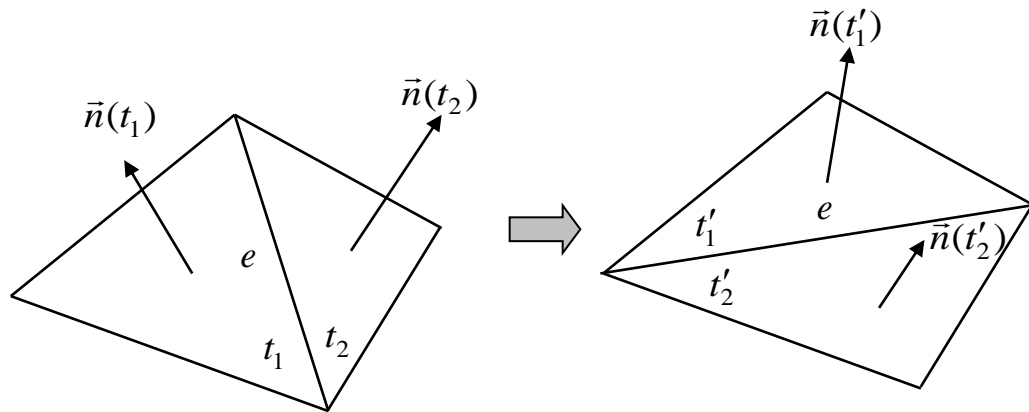


Рисунок 3.22 – Зміна діагоналей суміжних трикутників

3.5 Висновки

Таким чином, у третьому розділі розроблений підхід, що дозволяє автоматично будувати дискретні моделі геометричних об'єктів що представлені функціонально. При цьому запропонований підхід, з огляду на універсальність послідовності операцій, може бути застосований для розв'язку як двовимірних, так і тривимірних задач.

У розділі доведені теореми про можливість досягнення наперед заданої точності побудови дискретних моделей на базі розроблених підходів.

Запропоновані підходи до оптимізації дискретних моделей на базі трикутних скінченних елементів, засновані на локальному перетворенні елементів сітки, яке прагне апроксимувати особливі точки об'єкта, опираючись

на аналіз диференціальних характеристик його границі. У результаті застосування таких підходів може бути отримана дискретна модель із нерівномірною сіткою на основі трикутних елементів, яка подрібнюється в областях з найбільшою кривиною.

Основні наукові й практичні результати даного розділу опубліковані в роботах [17, 45, 47, 48, 92, 93].

РОЗДІЛ 4

АВТОМАТИЗАЦІЯ ПОБУДОВИ ДИСКРЕТНИХ МОДЕЛЕЙ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

4.1 Об'єктно-орієнтована модель інструментальної системи побудови дискретних моделей геометричних об'єктів на базі трикутних скінченних елементів

У процесі проектування програмної системи необхідно, у першу чергу, визначити предметну область, вимоги й принципи роботи, призначення й умови експлуатації, яким вона повинна задовольняти. На цій стадії здійснюється вибір парадигм і технологій, на основі яких проводиться декомпозиція предметної області та, потім, будується модель програмної системи.

Однією з найпоширеніших на сьогоднішній день є парадигма об'єктно-орієнтованого програмування, при використанні якої програмна система розглядається як модель взаємодіючих об'єктів різних типів (сутностей, класів), характерних для предметної області. При практичній побудові таких моделей активно використовують уніфіковану мову програмування (Unified Modeling Language, UML) [4], яка базується на застосуванні спеціальної графічної нотації для відображення класів об'єктів і характеру відносин між ними.

Аналізуючи предмет дослідження – методи й підходи побудови математичних моделей геометричних об'єктів, можна побачити, що словник предметної області становлять такі поняття як сітка, вузол (вершина), ребро, трикутник, координати точок. Найбільш загальним і ємним, у контексті термінів предметної області виступає поняття скінченно-елементної сітки (клас TMesh на рис. 4.1). Сітка знаходиться у відношенні композиції з об'єктом, що є абстракцією поняття трикутник (Triangle). Аналізуючи кратність такого відношення, можна побачити, що трикутник може належати тільки одній сітці, а сітка, у свою чергу, повинна складатися мінімум з одного трикутника.

Кожний трикутник складається із трьох ребер (є їхньою агрегацією). При цьому кожне ребро може бути або суміжним для двох трикутників (внутрішні ребра), або належати одному трикутнику (граничні ребра на площині).

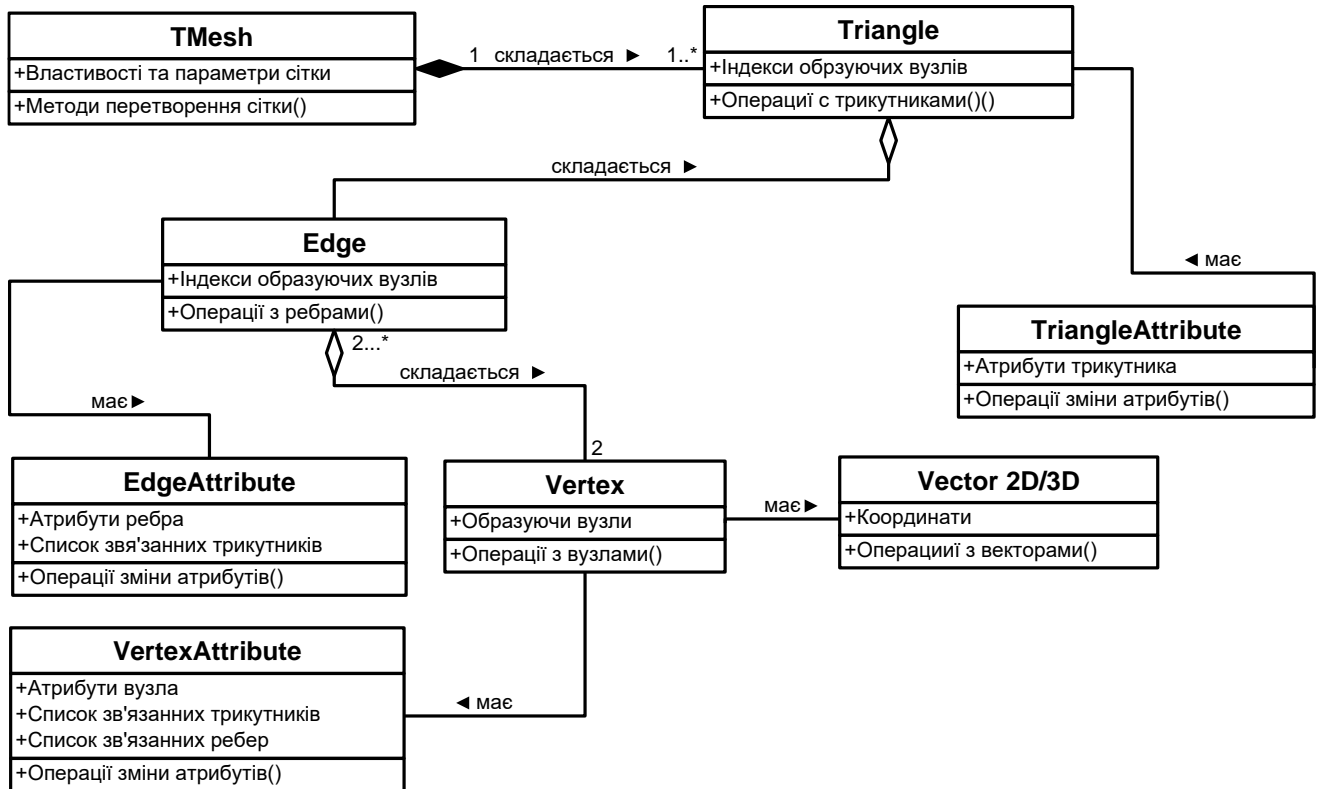


Рисунок 4.1 – Діаграма структури сітки

Кожне ребро складається з двох вершин, при цьому з вершиною суміжними є мінімум два ребра. Кожна вершина має (асоціативно зв'язана) координати.

З метою спрощення навігації між елементами топології сітки й доступу до деяких модельно-специфічних властивостей перерахованих абстракцій у модель можна ввести сутності, призначені для зберігання атрибутів відповідних елементів: VertexAttribute – властивості вершини, EdgeAttribute – властивості ребер, TriangleAttribute – властивості трикутника.

Слушним доповненням наведеної вище моделі обчислювального блоку програмної системи, є набір сутностей, що забезпечують зв'язок з уведенням-вивиденням інформації та графічним інтерфейсом користувача (рис. 4.2):

T MainForm – абстракція головної форми інтерфейсу користувача (основні операції та параметри програмної системи); T GobjectModelForm – абстракція, відповідальна за введення та виведення властивостей і параметрів а також візуалізацію моделі геометричного об’єкта; T PropertiesForm – абстракція 2D/3D – специфічних параметрів.



Рисунок 4.2 – Зв’язок обчислювального блоку та інтерфейсу користувача

4.2 Оцінка обчислювальної складності

Для оцінки обчислювальної складності запропонованого підходу для одержання дискретного представлення математичної моделі геометричного об’єкта розглянемо загальний алгоритм дискретизації (рис. 4.3). Необхідно врахувати, що при побудові дискретної моделі, самою вибагливою операцією є обчислення значення функції, що відповідає моделі геометричного об’єкта.

Незалежно від розмірності моделі, першим кроком роботи методу є побудова регулярної сітки, яка повністю покриває поверхню об’єкта, що моделюється. Якщо кількість вузлів вихідної регулярної сітки N , тоді кількість вузлів на границі гарантовано буде меншою, або рівною N ($N = n \times t \times k$, де n, t, k – як правило, вибирає користувач, з огляду на модельні обмеження).

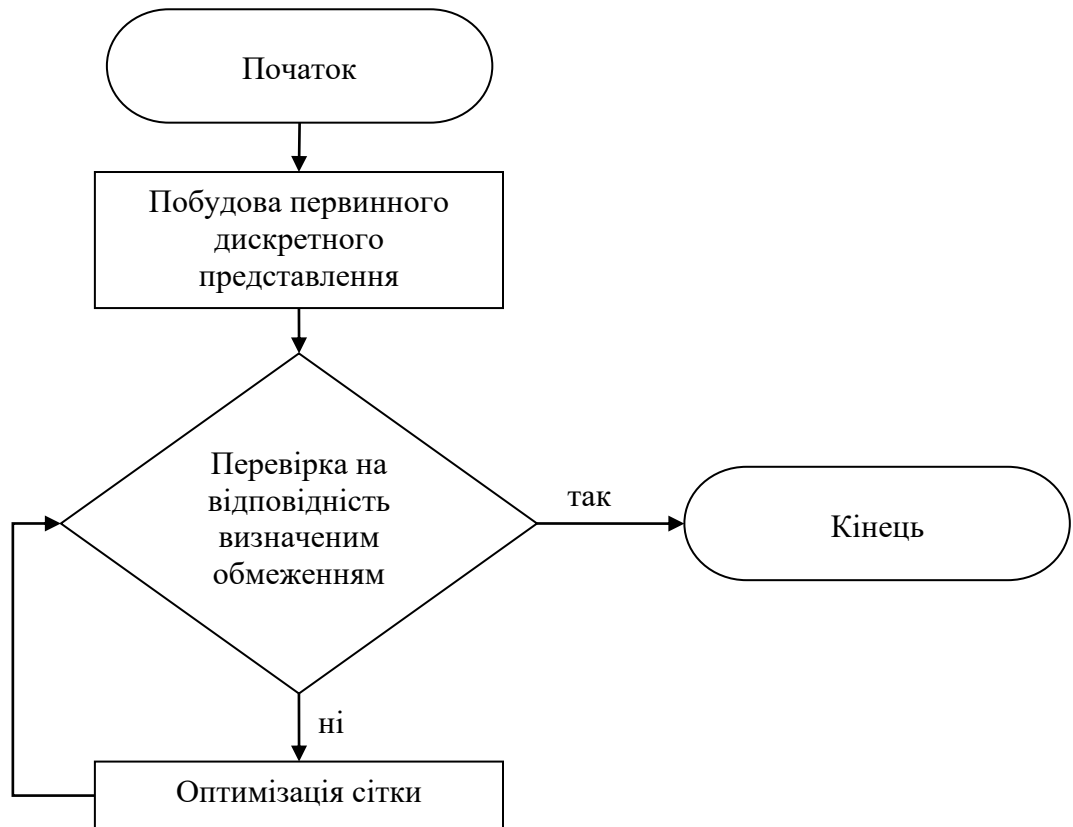


Рисунок 4.3 – Схема побудови дискретної моделі геометричного об’єкта

Для формування початкової сітки необхідно у всіх вузлах вихідної сітки обчислити значення функції, що відповідає моделі геометричного об’єкта, та, потім, уточнити їхнє положення. Операція уточнення зводиться до пошуку точок перетинання ребра регулярної сітки із границею геометричного об’єкта, і може бути виконана, наприклад, методом золотого перетину. При цьому якщо потрібно досягнення точності ε , то кількість обчислень значення функції не буде перевищувати $\log_2 \frac{h}{2\varepsilon}$, де h – довжина ребра. При цьому максимальна

довжина ребра не буде перевищувати значення $h_{\max} = \sqrt{\left(\frac{a}{n}\right)^2 + \left(\frac{b}{m}\right)^2 + \left(\frac{c}{k}\right)^2}$, де

a, b, c – розміри сторін прямокутного паралелепіпеда, на основі якого будується регулярна сітка.

Таким чином, кількість операцій обчислення R-функції можна оцінити

величиною $N + \log_2 \frac{h_{\max}}{2\varepsilon}$. Отже, кількість операцій обчислення R-функції даного кроку можна оцінити величиною $O(N)$.

При визначенні диференціальних характеристик сітки необхідно знати координати векторів нормалі до вузлів сітки геометричного об'єкта. Для їх визначення використанні різницевої методи. Отже, операція визначення нормалей еквівалентна величині $O(N)$.

При оптимізації сітки обчислення значень вихідної функції потрібно тільки при операції проектування вузлів сітки на границю геометричного об'єкта, яка аналогічна пошуку точок перетинання ребра регулярної сітки із границею геометричного об'єкта. Виконання операцій локальної оптимізації (згладжування, пошук особливих точок, додавання нових вузлів) еквівалентно виконанню $O(N)$ арифметичних операції й операцій запити до пам'яті для одержання координат потрібних вузлів і зв'язків між ними.

Таким чином, обчислювальна складність основних етапів алгоритму оцінена величиною $O(N)$ кількості операцій обчислення значень функції, що відповідає геометричному об'єкту, що моделюється. Отже, запропонований підхід до одержання дискретного представлення геометричного об'єкта, заданого функціонально з використанням R-функцій, може бути реалізований алгоритмом, у якому кількість операцій обчислення значень функції лінійно залежить від кількості вузлів вихідної сітки.

4.3 Оцінка точності

Побудова дискретної моделі геометричного об'єкта виконується з певною точністю, яка залежить від двох основних параметрів: 1) кількості елементів у вихідній сітці; 2) точності розташування вузлів сітки щодо границі вихідного геометричного об'єкта.

Довільна точність, згідно сформульованих у попередньому розділі теорем, може бути досягнута шляхом здрібнювання сітки, що з одного боку буде поліпшувати апроксимацію шляхом покращення співвідношення розмірів нелінійних елементів границі до розмірів апроксимуючих лінійних елементів, а з іншого – буде збільшувати кількість необхідної пам'яті й машинного часу для обробки результуючих дискретних моделей. При цьому на точність моделі також буде впливати накопичення обчислювальної похибки.

Використання неявних функцій для математичного моделювання геометричних об'єктів не дає можливості отримати єдину аналітичну оцінку точності відповідних дискретних моделей. Тому для загальної оцінки точності дискретних моделей можна використати порівняння площі, що утворена дискретною апроксимацією, з її точним значенням. При цьому для плоских геометричних об'єктів можна порівнювати площу області, що обмежена границею об'єкта, а в тривимірному випадку – площу поверхні.

Оцінка точності апроксимації деяких розповсюджених геометричних об'єктів наведена в (табл. 4.1).

Крім того, розглянемо геометричний об'єкт креслення якого представлений на (рис. 4.4), для якого встановимо наступні значення розмірних параметрів: $R1 = 3, R2 = 2, R3 = 1, d1 = 4, d2 = 1, d3 = 2$.

Для побудови дискретної моделі на основі методу кубів, що марширують, використовуємо регулярну сітку з розміром гнізда 0,35 умовних одиниць (рис. 4.5 а). У даній сітці загублені ділянки границі й спостерігається велика кількість елементів «поганої» форми.

Застосовуючи методи відновлення ділянок границі й локальні перетворення сітки, одержимо оптимізовану дискретну скінченно-елементну сітку геометричного об'єкта, представлену на (рис. 4.5 б).

Розподіл якості елементів дискретної моделі до й після оптимізації (рис. 4.6), показує явне підвищення якості елементів після виконання оптимізації. Точність апроксимації моделі зросла від похибки в 6.5 %, вихідної апроксимації, до 0,18 % після оптимізації. Крім того, кількість трикутників після

оптимізації скоротилося з 1648 до 1026, що відповідає більш ніж 30 % економії пам'яті для зберігання моделі.

Таблиця 4.1 – Оцінка точності

Геометричний об'єкт	Дискретна модель				
	Точне значення, ум. одиниць	Оптимізація	Дискретна модель		
			Кількість елементів	Площа, ум. одиниць	ε , %
Круг, обмежений одиничним колом	3.141593	Ні	56	3,063125	2,5
		Так	200	3,133959	0,24
Еліпс, півосі: $a = 2$, $b = 3$	18,849556	Ні	42	18,50953	1,8
		Так	141	18,7657	0,44
Квадрат зі стороною $a = 1$	1	Ні	20	0,944444	5,56
		Так	23	1	0
Квадрат зі стороною $a = 4,5$ і круглим отвором радіуса $r = 1$	17,10840734	Ні	100	17,12435	0,09
		Так	382	17,10436	0,05
Куля, обмежена одиничною сферою	12,56637061	Ні	380	12,2719	2,34
		Так	1520	12,5103	0,43
Циліндр висоти $h = 2$, у основі якого коло радіуса $r = 1$	18,84955592	Ні	412	17,4453	7,45
		Так	1132	18,7351	0.61
Циліндр висоти $h = 8$, у основі якого коло радіуса $r = 1.5$, об'єднаний з кубом зі стороною $a = 5$	178,2743339	Ні	3644	171,654	3,71
		Так	3,146	178,249	0,01

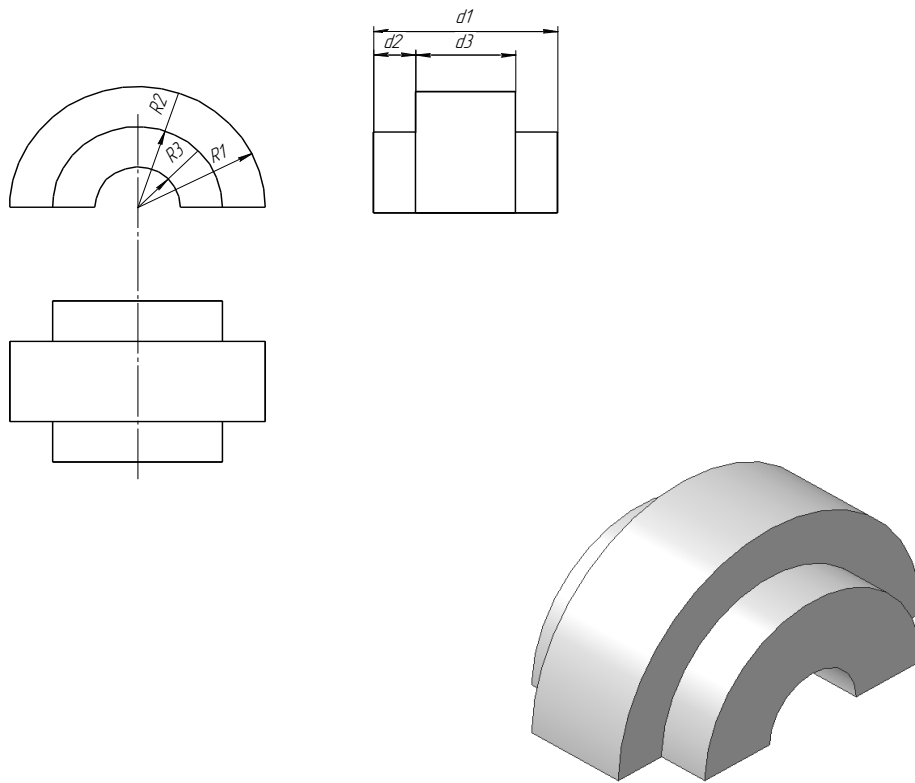


Рисунок 4.4 – Креслення геометричного об'єкта

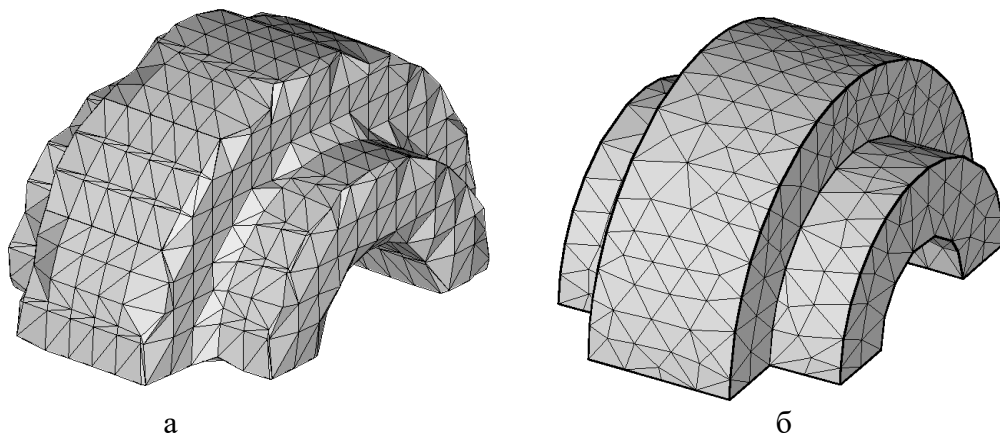


Рисунок 4.5 – Дискретна модель геометричного об'єкта

Таким чином, можна зробити висновок, що запропоновані методи та підходи оптимізації дозволяють підвищити показники якості елементів сітки й точність апроксимації з відносною погрешністю, що не перевищує одного відсотка, що, як правило, у кілька раз краще початкової дискретизації, отриманої з використанням, наприклад, методу кубів, що марширують.

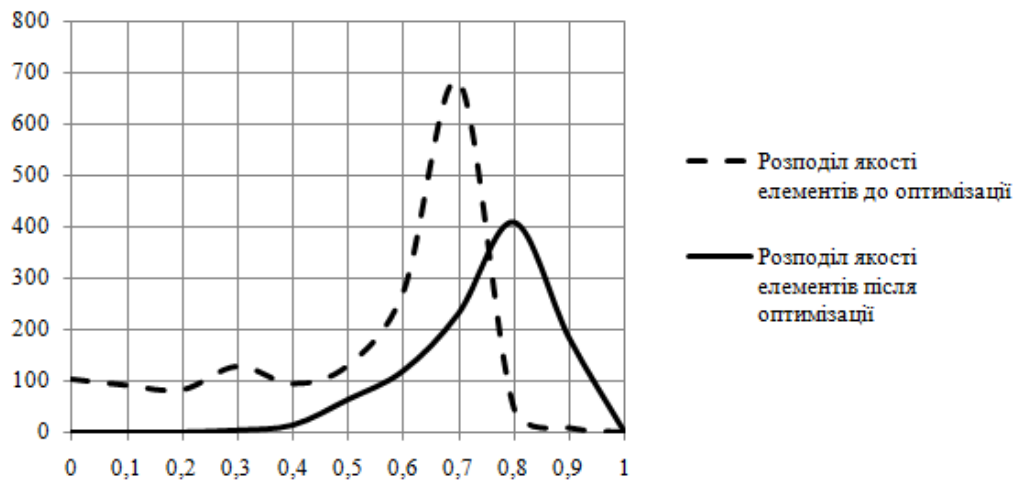


Рисунок 4.6 – Розподіл якості елементів сітки

4.4 Приклади формалізації й дискретизації математичних моделей

Розглянемо зубчастий диск, креслення якого зображений на рис. 4.7. Його функціональне представлення можна одержати шляхом перетинання внутрішньої частини кола радіуса R_2 , зовнішньої частини кола діаметром D_1 і віднімання трьох секторів кіл діаметром D_2 , із центрами, зміщеними відносно початку координат на величину R_1 .



Рисунок 4.7 – Зубчастий колесо та його дискретна модель

Таким чином, запишемо функціональний вираз зубчастого колеса в

наступному вигляді

$$\begin{aligned}
 x_i &= x \cos\left(\frac{2\pi}{3}i\right) + y \sin\left(\frac{2\pi}{3}i\right), \\
 y_i &= -x \sin\left(\frac{2\pi}{3}i\right) + y \cos\left(\frac{2\pi}{3}i\right), \\
 f_i(x, y) &= \left(\left(\frac{D_2}{2}\right)^2 - x_i^2 - (y_i + R_1)^2 \right) \wedge (R_1 + y_i), \\
 C1(x, y) &= R_2^2 - x^2 - y^2, \\
 C2(x, y) &= x^2 + y^2 - \left(\frac{D_1}{2}\right)^2, \\
 F(x, y) &= C_1(x, y) \wedge C_2(x, y) \wedge f_0(x, y) \wedge f_1(x, y) \wedge f_2(x, y).
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Формальний опис проблемно-орієнтованою мовою FORTU буде мати вигляд, представлений на (рис. 4.8.)

```

argument x, y
constant R1=2
constant R2=6
constant R3=2.5
constant R4=4
constant Pi=3.141592
constant Tau = 2*Pi/3
function f1, f2, f3, f4, f5, f6, f7, f8
function X, X1, Y, Y1, f, f9
    X= x*cos(Tau )+y*sin(Tau )
    Y= -x*sin(Tau )+y*cos(Tau )
    X1=x*cos(2*Tau)+y*sin(2*Tau)
    Y1=-x*sin(2*Tau)+y*cos(2*Tau)
    f1 = R3-x^2-(y+R4)^2
    f2 = R4+y
    f3 = R3-X^2-(Y+R4)^2
    f4 = R4+Y
    f5 = R3-X1^2-(Y1+R4)^2
    f6 = R4+Y1
    f7=R1-x^2-y^2
    f8=R2-x^2-y^2
    f9=f8&-f7
    f=(-((f1&-f2)|(f3&-f4)|(f5&-f6)))&f9
return f

```

Рисунок 4.8 – Опис зубчатого диска мовою FORTU

Дискретна математична модель гайки із кресленням, представленим на рис. 2.12 та описана рівнянням (2.50), представлена на рис. 4.9 у двох варіантах:

1) модель із дискретною скінченно-елементною сіткою, яка близька до рівномірної сітки (рис. 4.9 а);

2) модель, сітка якої згущається в областях з особливими точками (рис. 4.9 б).

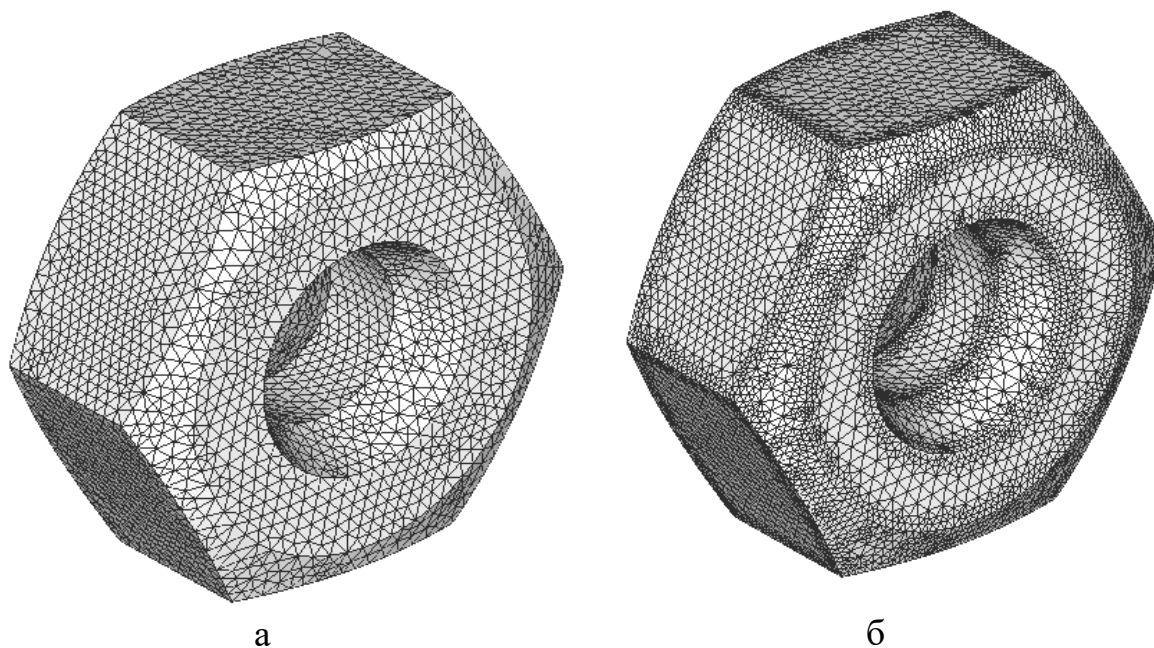


Рисунок 4.9 – Дискретна модель гайки

Розглянемо деталь складної форми – колінчатий вал, який є основним елементом обладнання, що перетворює поступальний (прямолінійний, зворотно-поступальний) рух в обертовий рух. Колінчатий вал складається з одного або декількох колін і декількох співвісних корінних шийок, що опираються на підшипниках. Кожне коліно має дві щоки й одну шийку для приєднання шатуна. Осі шатунних шийок зміщені відносно осі обертання колінчатого вала. На кінцях колінчатого вала, як правило, є посадкові місця для зняття крутного моменту. Колінчатий вал застосовується в поршневих двигунах, насосах, компресорах, пресових машинах тощо.

Побудуємо функціональний опис і дискретну математичну модель колінчатого вала, креслення якого представлений на рис. 4.10.

Нехай осі колінчатого вала відповідає вісь Ox , а основними параметрами є: діаметр щічок, що визначається величиною D_1 , діаметр шийки шатуна D_2 , діаметр корневих шийок D_3 і зміщення cD шатунної шийки щодо осі корінних шийок.

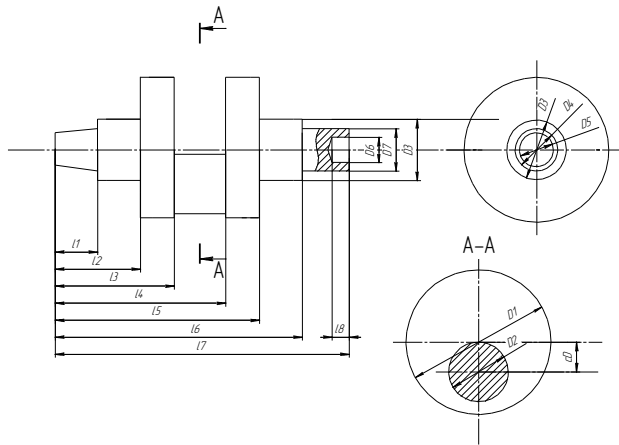


Рисунок 4.10 – Креслення моделі колінчатого вала

Використовуючи параметризацію, уведену на кресленні, можемо записати рівняння утворюючих елементів колінчатого вала:

$$f_1 = \left(\frac{D_1}{2} - z^2 - y^2 \right) \wedge \left(\frac{(l_5 - l_2)^2}{4} - x^2 \right) \wedge \left(x^2 - \frac{(l_4 - l_3)^2}{4} \right) - \text{права та ліва щічки};$$

$$f_2 = \left(\frac{D_3}{2} - z^2 - y^2 \right) \wedge \left(\frac{(l_6 - l_1)^2}{4} - x^2 \right) \wedge \left(x^2 - \frac{(l_5 - l_3 + 0.5(l_3 - l_2))^2}{4} \right) - \text{корінні шийки};$$

$$f_3 = \left(\frac{D_2}{2} - (z - cD)^2 - y^2 \right) \wedge \left(\frac{(l_6 - l_4 + 0.5(l_3 - l_2))^2}{4} - x^2 \right) - \text{шатунна шийка};$$

$$f_4 = \left(\frac{D_7}{2} - z^2 - y^2 \right) \wedge \left(\frac{l_7^2}{4} - x^2 \right) \wedge (x - l_5 + l_4) - \text{праве кріплення для зняття}$$

навантаження;

$$f_5 = \left(\frac{D_6}{2} - z^2 - y^2 \right) \wedge \left(x - \left(\frac{l_6 - l_1}{2} + l_7 - l_6 - l_8 \right) \right) - \text{отвір у правому кріпленні}$$

для зняття навантаження;

$$f_6 = \left(\frac{(x + dx)^2}{h^2} - \frac{4z^2}{D_5^2} - \frac{4y^2}{D_5^2} \right) - \text{формула конічної поверхні лівого кріплення,}$$

у якому $h = \frac{l_1 \cdot D_5}{D_4 - D_5}$, а $dx = h + \frac{l_4 - l_3}{2} + l_4 - l_1$;

$$f_7 = f_6 \wedge \left(x + l_3 + \frac{l_4 - l_3}{2} \right) \wedge \left(l_1 - x - \frac{l_2 + l_4}{2} \right) - \text{ліве конічне кріплення для}$$

зняття навантаження.

Таким чином, виконуючи композицію утворюючих елементів, можемо одержати рівняння колінчатого вала в наступному вигляді

$$f = f_1 \vee f_2 \vee f_3 \vee (f_4 \wedge -f_5) \vee f_7. \quad (4.2)$$

Дискретна математична модель геометричного об'єкта у вигляді (4.2) представлена на рис. 4.11, а її опис проблемно-орієнтованою мовою FORTU презентовано на рис. 4.12.

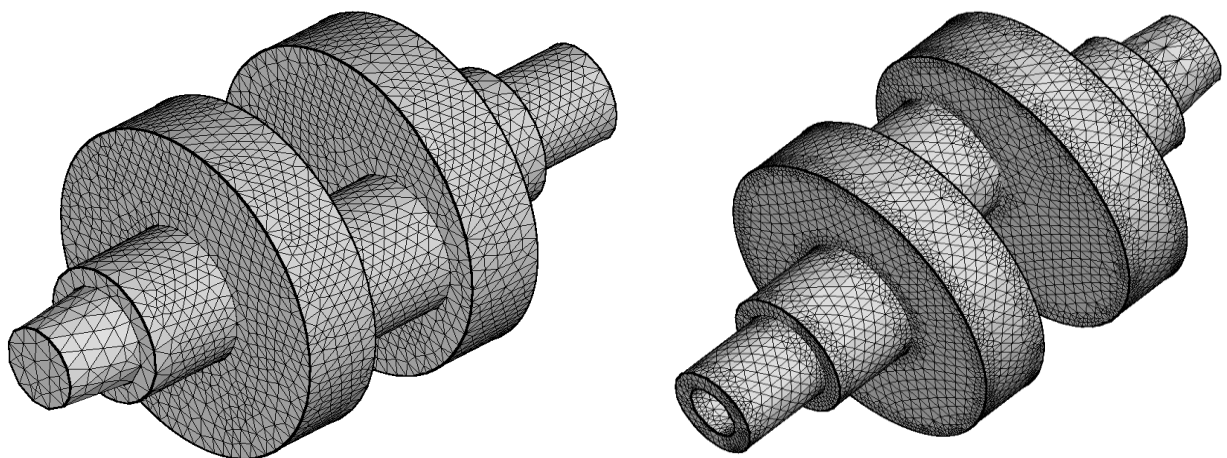


Рисунок 4.11 – Дискретна модель гайки

```

argument x,y,z
!Радиус щечек коленвала
constant R1 = 4.25
!Радиус шейки шатуна
constant R2 = 1.75
!Радиус шеек коленвала
constant R3 = 1.75
!Большой радиус конического крепления
constant R4 = 1.25
!Малый радиус конического крепления
constant R5 =0.75
!Радиус отверстия правого крепления
constant R6 =1
!Радиус правого крепления
constant R7 =1.25
constant DC = 1.75
constant L1 = 2.5
constant L2 = 5
constant L3 = 7
constant L4 = 10
constant L5 = 12
constant L6 = 14.5
constant L7 = 17.25
constant L8 = 2
!Щечки коленвала
function f1 = (R1^2-z^2-y^2) & (0.25*(L5-L2)^2-x^2) & (x^2-0.25*(L4-L3)^2)
!Шейки коленвала
function f2 = (R3^2-z^2-y^2) & (0.25*(L6-L1)^2-x^2) & (x^2-0.25*(L5-
L3+0.5*(L3-L2))^2)
!Внутренняя шейка
function f3 = (R2^2-(z-DC)^2-y^2) & (0.25*(L6-L4+0.5*(L3-L2))^2-x^2)
!Правое крепление
function f4 = (R7^2-z^2-y^2) & (0.25*L7^2-x^2) & (x-(L5-L4))
function f5 = (R6^2-z^2-y^2) & (x-(0.5*(L6-L1)+(L7-L6)-L8))
!Левое крепление
function h= L1*R5/(R4-R5)
function dx = h+(L4-L1)+0.5*(L4-L3)
function f6=(x+dx)^2/h^2-z^2/R5^2-y^2/R5^2
function f7=f6&(x+L3+0.5*(L4-L3)) &- (x+L3-L1-0.5*(L3-L2)+0.5*(L4-L3))

function f=f1|f2|f3|(f4&-f5)|f7

return f

```

Рисунок 4.12 – Опис колінчатого вала мовою FORTU

4.5 Висновки

Таким чином, у четвертому розділі розроблена й описана модель автоматизованої системи математичного моделювання геометричних об'єктів. Представлена модель може бути використана як для побудови самостійної

програмної системи, так і для побудови препроцесорів для існуючих систем аналізу напружено-деформованого стану з використанням МСЕ, наприклад, системи FORTU-FEM.

Досліджено основні практичні аспекти, пов'язані з обчислювальною складністю й точністю при побудові дискретних моделей нетривіальних геометричних об'єктів. Зокрема, показано, що обчислювальна складність розроблених методів і підходів має величину порядку $O(N)$, а відносна похибка результатів моделювання не перевищує 1%.

Основні наукові й практичні результати даного розділу опубліковані в роботах [17, 45, 47, 48, 92, 93].

ВИСНОВКИ

Таким чином, у дисертаційній роботі отримано результати, які є розв'язком важливої науково-технічної задачі розробки методів і підходів до формалізації опису математичних моделей геометричних об'єктів на базі теорії R-функцій та побудови відповідних дискретних моделей, що засновані на використанні трикутних скінченних елементів.

У роботі отримано такі основні результати:

– отримав розвиток метод математичного моделювання геометричних об'єктів на базі теорії R-функцій у галузі розробки нових тривимірних моделей складних об'єктів, що спрощує процес математичного моделювання;

– отримав розвиток метод формального опису математичних моделей геометричних об'єктів на базі проблемно-орієнтованої мови в галузі врахування властивостей моделювання на базі теорії R-функцій, що дозволяє автоматизувати процес побудови моделей;

– отримали розвиток методи побудови дискретних моделей, що ґрунтуються на трикутних скінченних елементах, для аналітичних моделей геометричних об'єктів на базі теорії R-функцій, що дозволяє спростити процес моделювання за рахунок підвищення якості та швидкості візуалізації результатів;

– уперше запропоновано методи оптимізації дискретних моделей шляхом урахування диференціальних характеристик границі геометричного об'єкта, представленого R-функцією, що дозволяє підвищити точність математичного моделювання за рахунок покращення апроксимації границі.

У процесі розв'язку задач дисертаційного дослідження розроблено й апробовано модель програмної системи для автоматизованої побудови дискретних моделей геометричних об'єктів, що може бути використана для реалізації самостійної програмної системи або виступати препроцесором відомих систем аналізу напружено-деформованого стану, наприклад, системи FORTU-FEM.

Практичні результати представлені візуальними прикладами, що підтверджують можливості розробленого апарату. Точність і вірогідність результатів підтверджується порівняльним аналізом.

Запропоновані підходи та методи підвищують якість математичного моделювання геометричних об'єктів, особливо в частині покращення можливостей візуалізації та підвищення точності обчислювальних експериментів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Басов К. А. ANSYS в примерах и задачах / К. А. Басов. – М. : КомпьютерПресс, 2002. – 224 с.
2. Бреббия К. Методы граничных элементов: Пер. с англ. / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. – М. : Мир, 1987. – 524 с.
3. Бувайло Д. П. FORTU – мова опису схем розв’язання задач математичної фізики / Д. П. Бувайло, С. І. Гоменюк, В. О. Толок // Вісник Запорізького державного університету. – 2000. – № 1. – С. 19–25.
4. Буч Г. Язык UML. Руководство пользователя / Г. Буч, Д. Рамбо, И. Якобсон – М. : ДМК Пресс, 2006. – 496 с.
5. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. – М. : Физматгиз, 1963. – 872 с.
6. Вятчинин Д. А. Нечёткие методы автоматической классификации / Д.А. Вятчинин. – Минск: Технопринт, 2004. – 219 с.
7. Галанин М. П. Разработка и реализация алгоритмов трехмерной триангуляции сложных пространственных областей: итерационные методы / М. П. Галанин, И. А. Щеглов. – М. : ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2006. – № 9. – 32 с. – (Препринт / ИПМ им. М. В. Келдыша РАН).
8. Галанин М. П. Разработка и реализация алгоритмов трехмерной триангуляции сложных пространственных областей: прямые методы / М. П. Галанин, И. А. Щеглов. – М. : ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2006. – № 10. – 32 с. – (Препринт / ИПМ им. М. В. Келдыша РАН).
9. Ганин Н. Б. Проектирование в системе Компас-3D / Н. Б. Ганин. – М. : ДМК Пресс, 2009. – 437 с.
10. Голованов Н. Н. Геометрическое моделирование / Н. Н. Голованов. – М. : Физматлит, 2002. – 472 с.
11. Гоменюк С. И. Геометрическое моделирование объектов сложной формы с использованием R-функций / С. И. Гоменюк, А. А. Лисняк,

С. В. Чопоров // Труды Первой международной конференции «Трёхмерная визуализация научной, технической и социальной реальности» (4-6 февраля 2009, Ижевск, Удмуртская республика, Россия). – Ижевск: Удмуртский государственный университет, 2009. – С. 132–136.

12. Гоменюк С. И. Методы описания геометрических областей в САПР / С. И. Гоменюк, Д. Н. Морозов, Ю. А. Сысоев, А. А. Лисняк // Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – 2008. – № 2. – С. 36–44.

13. Гоменюк С. И. Объектно-ориентированные модели и методы анализа механических процессов / С. И. Гоменюк. – Никополь: Никопольская коммунальная типография, 2004. – 316 с.

14. Гоменюк С. И. Применение инструментальной системы FORTU для исследования задач механики композитов / С. И. Гоменюк // Тезисы докладов международной конференции «Dynamical system modeling and stability investigation». – К.: Вестник Киевского национального университета им. Тараса Шевченко, 2003. – С. 295.

15. Гоменюк С. И. Универсальная система автоматизации проектирования инженерных конструкций и сооружений FORTU-FEM / С. И. Гоменюк // Технологические системы. – 2004. – № 3. – С. 92–95.

16. Гоменюк С. И. Компактная схема решения сверхбольших систем линейных алгебраических уравнений в задачах механики / С. И. Гоменюк, В. А. Толок, В. В. Киричевский [и др.] // Складні системи і процеси. – Запоріжжя: ЗІДМУ, 2003. – № 1. – С. 15–20.

17. Гоменюк С. И. Методы описания геометрических областей в САПР / С. И. Гоменюк, Д. Н. Морозов, Ю. А. Сысоев, А. А. Лисняк // Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – 2008. – № 2. – С. 36–44.

18. Городецкий А. С. Информационные технологии расчета и проектирования строительных конструкций: Учебное пособие / А. С. Городецкий, В. С. Шмуклер, А. В. Бондарев – Х.: НТУ «ХПИ», 2004. –

888 с.

19. Громадка Т. Комплексный метод граничных элементов в инженерных задачах / Т. Громадка, Ч. Лей. – М. : Мир, 1990. – 308 с.

20. Гучек П. Й. Геометричне конструювання базису дискретного елемента з 8 вузлами у полярній системі координат / П. Й. Гучек, О. І. Литвиненко, А. Н. Хомченко // Вестник Херсонського національного технічного університета. – Херсон : ХНТУ, 2011. – № 2(41). – С. 300–303.

21. Девятков С. Программы семейства COSMOS – универсальный инструмент конечно-элементного анализа (серия вторая) / Сергей Девятков // CADmaster. – 2002. – № 1. – С. 17–23

22. Девятков С. Программы семейства COSMOS – универсальный инструмент конечно-элементного анализа / Сергей Девятков // CADmaster. – 2002. – № 1. – С. 17–23.

23. Делоне Б. Н. О пустоте сферы / Б. Н. Делоне // Известия АН СССР. – М. : ОМОН, 1934. – № 4. – С. 793–800.

24. Дубинский С. ANSYS 8.0: обзор новых возможностей / С. Дубинский // САПР и графика. – 2003. – № 11. – С. 42–44.

25. Дубинский С. Программный комплекс ANSYS/LS-DYNA 8.0 // САПР и графика. – 2004. – № 3. – С. 34–38.

26. Дударева Н. Самоучитель SolidWorks 2007 / Н. Дударева, С. Загайко. – СПб : БХВ, 2007. – 1312 с.

27. Дюран Б. Кластерный анализ / Б. Дюран, П. Одел. – М. : Статистика, 1977. – 128 с.

28. Жуков Д. Геометрическое ядро APM Engine – современный инструмент трехмерного моделирования объектов / Дмитрий Жуков, Владимир Сидоренко, Юрий Шатохин // САПР и графика – 2002. – № 3. – С. 58–65.

29. Зенкевич О. Метод конечных элементов в теории сооружений и механике сплошной среды / О. Зенкевич, И. Чанг. – М. : Недра, 1974. – 238 с.

30. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М. : Мир, 1975. – 541 с.

31. Каплун А. Б. ANSYS в руках инженера. Практическое руководство / А. Б. Каплун, Е. М. Морозов, М. А. Олферьева. – Едиториал УРСС, 2003. – 272 с.
32. Киричевский В. В. Метод конечных элементов в механике разрушения эластомеров / В. В. Киричевский, Б. М. Дохняк, Ю. Г. Козуб. – К. : Наукова думка, 1998. – 200 с.
33. Киричевский В. В. Метод конечных элементов и суперэлементов в приложении к трехмерным задачам механики / В. В. Киричевский, В. А. Толоч. – К. : Наук. думка, 2001. – 364 с.
34. Киричевский В. В. Система «КОДЕТОМ» для исследования высокоэластичных массивных конструкций на основе МКЭ / В. В. Киричевский // Комплексный расчет зданий и сооружений с применением ЭВМ. – К. : КИСИ, 1978. – С. 142–148.
35. Костромин К. А. SolidEdge Intergraph – система твердотельного моделирования / К. А. Костромин // Автоматизация проектирования. – 1997. – № 3. – С 35–48.
36. Красковский Д. Г. AutoCAD 2000 для всех (русская и английская версии). – 2-е изд. / Д. Г. Красковский, А. В. Виноградов. – М. : КомпьютерПресс, 1999. – 272 с.
37. Кудрявцев Е. М. КОМПАС-3D V7. Наиболее полное руководство / Е. М. Кудрявцев. – М. : ДМК Пресс, 2005. – 664 с.
38. Кудрявцев Е. М. КОМПАС-3D V8. Наиболее полное руководство / Е. М. Кудрявцев. – М. : ДМК Пресс, 2009. – 664 с.
39. Куценко Л. М. Застосування чотиримісних R-операцій для опису геометричних об'єктів / Л. М. Куценко // Прикладна геометрія та інженерна графіка: Міжвідомчий науково-технічний збірник. – К. : КНУБА, 2001. – № 69. – С.17–20.
40. Лавров С. С. Программирование. Математические основы, средства, теория / С. С. Лавров. – М. : ВНУ, 2001. – 320 с.
41. Лавров С. С. Основные понятия и конструкции языков программирования / С. С. Лавров. – М. : Финансы и статистика, 1982. – 80 с.

42. Ли К. Основы САПР (CAD/CAM/CAE) / К. Ли. – СПб. : Питер, 2004. – 560 с.
43. Лисняк А. А. Использование аппарата R-функций для описания топологии и дискретизации сложных геометрических областей / А. А. Лисняк, С. И. Гоменюк // Тезисы докладов международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и механики» (23-26 октября 2006 г., г. Харьков). – Харьков : Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, – 2006. – С. 17–18.
44. Лисняк А. А. Алгоритм поиска точек на нулевой границе R-функции / А. А. Лисняк // Тези доповідей конференції молодих вчених та спеціалістів Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України «Сучасні проблеми машинобудування» (3-6 грудня 2007 р., Харків). – Харків : Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України, 2007. – С. 22–23.
45. Лисняк А. А. Методика визуализации геометрических объектов, описанных с помощью R-функций. / А. А. Лисняк, С. В. Чопоров, С. И. Гоменюк // Вісник Запорізького національного університету : Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – 2010. – № 1. – С. 88–97.
46. Лисняк А. А. Моделирование геометрических объектов при помощи R-функций / А. А. Лисняк, С. И. Гоменюк // Збірник тез доповідей четвертої регіональної наукової конференції молоді дослідників «Актуальні проблеми математики та інформатики» (27-28 квітня 2006 р., м. Запоріжжя). – Запоріжжя : «Запорізький національний університет» Міністерства освіти і науки України, 2006. – С. 48–49.
47. Лисняк А. А. Обзор методов дискретизации плоских областей / А. А. Лисняк, С. И. Гоменюк // Вісник Запорізького національного університету : Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – 2006. – № 1. – С. 87–91.
48. Лисняк А. А. Применение R-функций для геометрического моделирования объектов сложной формы / А. А. Лисняк, С. И. Гоменюк // Радіоелектроніка. Інформатика. Управління. – 2009.– № 2. – С. 76–81.

49. Лисняк А. А. Применение аппарата R-функций для моделирования и дискретизации инженерных конструкций нестандартной формы / А. А. Лисняк, С. И. Гоменюк // Тези доповідей міжнародної науково-технічної конференції «Інтегровані комп'ютерні технології в машинобудуванні ІКТМ-2006». – Харків : Національний аерокосмічний університет «Харківський авіаційний інститут», 2006. – С. 87–89.

50. Лисняк А. А. Применение теории R-функций для построения геометрических моделей в системах автоматизированного проектирования / А. А. Лисняк, С. И. Гоменюк // Тези доповідей конференції молодих вчених та спеціалістів Інституту проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України «Сучасні проблеми машинобудування» (4-7 грудня 2006 р., Харків). – Харків : Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України, 2007. – С. 28–29.

51. Максименко-Шейко К. В. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей / К. В. Максименко-Шейко. – Харьков : ИПМаш НАН Украины, 2009. – 306 с.

52. Максименко-Шейко К. В. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов в 3D по информации в 2D / К. В. Максименко-Шейко, Т. И. Шейко // Вісник Запорізького національного університету : Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – 2010. – №1. – С. 98–104

53. Максименко-Шейко К. В. Решение обратной задачи аналитической геометрии в трехмерном пространстве / К. В. Максименко-Шейко, Т. И. Шейко // Труды Первой международной конференции «Трехмерная визуализация научной, технической и социальной реальности. Кластерные технологии моделирования», 2009. – Т. 2 – С 71–74.

54. Максименко-Шейко К. В. R-функции в математическом моделировании объектов, обладающих симметрией / К. В. Максименко-Шейко, Т. И. Шейко // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 6. – С. 75–83.

55. Максименко-Шейко К. В. R-функции и аналитическое описание поверхностей геометрических объектов в трехмерном пространстве /

К. В. Максименко-Шейко, А. М. Мацевитый, Т. И. Шейко // Проблемы машиностроения. – 2007. – Т. 10. – № 2. – С. 59–67.

56. Максименко-Шейко К. В. Конструктивные средства метода R-функций для автоматизации построения уравнений сложных геометрических объектов / К. В. Максименко-Шейко, А. М. Мацевитый, А.В. Толок, Т.И. Шейко // Вісник Запорізького державного університету : Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – 2004. – № 2. – С. 66–76

57. Михайленко В. Е. Геометрическое моделирование и машинная графика в САПР / В. Е. Михайленко, В. Н. Кислокий, А. А. Лященко [и др.]. – К. : Высшая школа, 1991. – 374 с.

58. Михайленко В.Є Інженерна та комп'ютерна графіка / В. Є. Михайленко, В. В. Ванін, С. М. Ковальов. – К. : Каравела, 2003. – 344 с.

59. Михалкин К. КОМПАС-3D V6. Практическое руководство / К. Михалкин, С. Хазаров. – М. : ООО «БИНОМ-Пресс», 2004. – 288 с.

60. Михайленко В. М. Вступ до комп'ютерних інформаційних технологій / В. М. Михайленко, М. З. Згуровський, І. І. Коваленко. – К. : Видавництво Європейського університету, 2002. – 265 с.

61. Моссаковский В. И. Контактные задачи теории оболочек и стержней / В. И. Моссаковский, В. С. Гудрамович, Е. М. Макеев. – М. : Машиностроение, 1978. – 248 с.

62. На Ц. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач / Ц. На. – М. : Мир – 1982. – 296 с.

63. Пожуев В. І. Ефективна реалізація алгоритму генерації сіток на основі узагальненого алгоритму триангуляції Делоне / В. І. Пожуєв, С. А. Тарасов // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь. – 2001. – Т. 14. – С. 31–35.

64. Потемкин А. Трехмерное твердотельное моделирование / А. Потемкин. – М. : КомпьютерПресс, 2002. – 296 с.

65. Потишко А. В. Справочник по инженерной графике / А. В. Потишко, Д.П. Крушевская. – К. : Будівельник, 1983. – 264 с.

66. Рвачев В. Л. Автоматизация программирования в краевых задачах / В. Л. Рвачев, Г. П. Манько. – К. : Наукова думка, 1983. – 229 с.
67. Рвачев В. Л. Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах / В. Л. Рвачев, А. П. Слесаренко. – К. : Наукова думка, 1976. – 287 с.
68. Рвачев В. Л. Проблемно-ориентированные языки и системы для инженерных расчетов / В. Л. Рвачев, А. Н. Шевченко. – К. : Техніка, 1988. – 198 с.
69. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения / В. Л. Рвачев. – К. : Наукова думка, 1982. – 106 с.
70. Рейуорд-Смит В. Дж. Теория формальных языков / Вводный курс В. Дж. Рейуорд-Смит. – М. : Радио и связь, 1988. – 128 с.
71. Сахаров А. С. Метод конечных элементов в механике твердых тел / А. С. Сахаров, В. Н. Кислокий, В. В. Киричевский [и др. под редакцией А. С. Сахарова и И. Альтенбаха]. – К. : Вища школа, 1982. – 480 с.
72. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд [пер. с англ. А. А. Шестакова, под редакцией Б. Е. Победри]. – М. : Мир, 1979. – 392 с.
73. Система «МІРЕЛА» для исследования прочности, долговечности и разрушения конструкций из эластомерных композитных материалов в условиях нелинейного деформирования на основе метода конечных элементов / В. В. Киричевский, Б. М. Дохняк, Ю. Г. Козуб [и др.] // Труды Междунар. конф. «Прогрессивная техника и технология машиностроения и сварочного производства». – К. : КПИ, 1998. – Т. 3. – С. 136–139.
74. Скворцов А. В. Триангуляция Делоне и ее применение / А. В. Скворцов. – Томск : Из-во Том. ун-та, 2002. – 128 с.
75. Скворцов А. В. Эффективные алгоритмы построения триангуляции Делоне / А. В. Скворцов, Ю. Л. Костюк // Геоинформатика. Теория и практика. – Томск : Изд-во Томского ун-та, 1998. – Т. 1. – С. 22–47.
76. Соколова Т. Ю. AutoCAD 2009 для студента. Самоучитель / Т. Ю. Соколова. – М. : Питер, 2008. – 384 с.

77. Степанов А. В. Книга Pro/ENGINEER: специальный справочник / А. В. Степанов. – СПб. : Питер, 2001. – 624 с.

78. Талалай П. Г. Компьютерный курс начертательной геометрии на базе КОМПАС-3D / П. Г. Талалай. – СПб : BHV, 2010. – 608 с.

79. Толок А. В. Алгоритм итерационного уточнения области исследования поверхности / А. В. Толок, В. В. Мухин // Вісник Запорізького державного університету. – 1998. – № 2. – С. 90–97.

80. Толок А. В. Аппарат визуализации форм поверхности результатов расчета методом конечных элементов / А. В. Толок, В. В. Мухин // Тези доповідей наукових конференцій викладачів і студентів університету. – Запоріжжя: Запорізький державний університет. – 1995. – С. 74–75.

81. Толок А. В. Исследование функции одной переменной с помощью графических образов / А. В. Толок, В. В. Мухин // Вісник Запорізького державного університету. – 1999. – № 1. – С.108–112.

82. Толок А. В. Метод определения образа частных производных для поверхности, заданной аналитическим способом // Вісник Запорізького державного університету. – 1999. – № 2. – С. 148–153.

83. Толок А. В. Определение касательной плоскости на участке триангулированной поверхности / А. В. Толок // Вісник Запорізького державного університету. – 1998. – № 2. – С. 139–144.

84. Толок А. В. Рекурсивный алгоритм разбиения области с дополнительными параметрами уточнения / А. В. Толок, В. В. Мухин // Вестник Херсонского государственного университета. – 2003. – № 3(19). – С. 312–314.

85. Толок В. А. Алгоритмическая система для решения задач теории упругости и пластичности / В. А. Толок, И. К. Кабулов // Вопросы вычислительной и прикладной математики. – Ташкент : ИК с ВЦ АН УзССР, – 1970. – Вып. 4.

86. Толок В. А. Инструментальная система решения и анализа задач математической физики методами конечных элементов / В. А. Толок, С. И. Гоменюк // Математика. Физика: Сборник научных трудов, посвященных

10-летию университета / Запорожский государственный университет. – Запорожье, 1995. – С. 75–81.

87. Толок В. А. Формульный язык задания схем решения задач математической физики методами конечных элементов / В. А. Толок, С. И. Гоменюк // Тези доповідей наук. конф. викладачів і студентів університету / Запорізький державний університет. – Запоріжжя, 1995. – Т. 5. – № 1. – С. 50–55.

88. Хилл Ф. OpenGL. Программирование компьютерной графики. Для профессионалов / Ф. Хилл. – СПб. : Питер, 2002. – 1088 с.

89. Хомченко А. Н. Геометрическое моделирование дискретных элементов с криволинейными границами / А. Н. Хомченко, Н. А. Козуб // ААЭКС. – № 1 (21). – Херсон : ХНТУ, 2008. – С. 24–27.

90. Хомченко А. Н. Приближения функций полиномами серендипова семейства: интегральные критерии гармоничности / А. Н. Хомченко // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. – 2010. – № 2. – С. 145–148.

91. Хомченко А. Н. Геометрия модели Морли / А. Н. Хомченко, Н. В. Колеснікова, Н. А. Козуб // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь : ТДАТА, 2007. – Т. 35. – № 4. – С. 63–68.

92. Чопоров С. В. Дискретизация геометрических областей, заданных R-функциями, на четырехугольные конечные элементы / С. В. Чопоров, А. А. Лисняк, С. И. Гоменюк // Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – 2009. – № 1. – С. 199–207.

93. Чопоров С. В. Использование функций В. Л. Рвачева для геометрического моделирования областей сложной формы / С. В. Чопоров, А. А. Лисняк, С. И. Гоменюк // Прикладная информатика. – 2010. – № 2(26). – С. 109–122.

94. Agoston M. K. Computer graphics and geometric modeling: implementation and algorithms / Max K. Agoston. – London : Springer-Verlag, 2005. – 959 p.

95. Agoston M. K. Computer graphics and geometric modelling: mathematics /

Max K. Agoston. – Springer, 2005. – 973 p.

96. Armstrong C. G. Modeling Requirements for Finite-element Analysis / C.G Armstrong // Computer-Aided Design. – 1994. – V. 26. – № 7. – P. 573–578.

97. Arthurand D. K-means lower bound implementation / David Arthurand, Sergei Vassilvitskii. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.stanford.edu/~darthur/kMeansLbTest.zip

98. Bai Y. Octree-Based Topology-Preserving Isosurface Simplification / Ying Bai, Xiao Han, J. L. Prince // Computer Vision and Pattern Recognition Workshop. – 2006. – P. 81–89.

99. Chernyaev E. V. Marching Cubes 33: Construction of Topologically Correct Isosurfaces / Evgeni V. Chernyaev // Computer Graphics and Visualization: GRAPHICON'95, 3-7 July. 1995. – Saint-Petersburg, 1995 – С. 21–29.

100. Dey K. Curve and Surface Reconstruction: Algorithms with Mathematical Analysis / Tamal K. Dey. – Cambridge University Press, 2006. – 232 p.

101. Dey K. Defining and computing curve-skeletons with medial geodesic function / T. K. Dey, J. Sun // Proc. Sympos. Geometry Processing (SGP 2006). – 2006. – P. 143–152.

102. Discrete Differential-Geometry Operators for Triangulated 2-Manifolds / Mark Meyer, Mathieu Desbrun, Peter Schröder, Alan H. Barr // Visualization and Mathematics III (Eds.). – 2003. – №12. – P. 35– 59.

103. Edelsbrunner H. Geometry and Topology for Mesh Generation (Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics) / Herbert Edelsbrunner. – Cambridge University Press, 2006. – 190 p.

104. Efficient Implementation of Marching Cubes Cases with Topological Guarantees / Thomas Lewiner, Hélio Lopes, Antonio Wilson Vieira, Geovan Tavares // Journal of Graphics Tools. – 2003. – V. 8. – № 2 – P. 1–15.

105. Farin G. Handbook of computer-aided geometric design / G. Farin, J. Hoschek, M. S. Kim. – Amsterdam : Elsevier Science B.V., 2002. – 848 p.

106. Freitag L. A. Tetrahedral Mesh Improvement Using Swapping and Smoothing / L. A. Freitag, C. Ollivier-Gooch // International Journal for Numerical

Methods in Engineering. – 1995. – № 40. – P. 3979–4002.

107. Frey P. J. Mesh Generation / Pascal Jean Frey, Paul-Louis George. – Wiley-ISTE, 2008. – 814 p.

108. Frey P. J. Mesh Generation: Application to finite elements / Pascal Jean Frey, Paul-Louis George. – ISTE Publishing Company, 2000. – 814 p.

109. George P. Delaunay Triangulation and Meshing. Application to Finite / P. George, H. Borouchaki. – Hermes Science Publications, 1998. – 413 p.

110. George P. L. Tet meshing : construction, optimization and adaptation / P. L. George // Proceedings of 8th International Meshing Roundtable. – 1999. – P. 133–141.

111. Gomenyuk S. I. Geometrical Modeling and Discretization of Complex Solids on the Basis of R-functions / S. I. Gomenyuk, S. V. Choprov, A. O. Lisnyak // Proceedings of «IEEE East-West Design & Test Symposium» (18-21 September 2009, Moscow, Russia). – Moscow : Moscow State Institute of Electronics and Mathematics, 2009. – P. 313–315.

112. Hjelle Ø. Triangulations and Applications (Mathematics and Visualization) / Øyvind Hjelle, Morten Dæhlen. – Springer, 2006. – 234 p.

113. Hoffman C. M. Geometric and solid modeling / C. M. Hoffman. – London : Springer-Verlag, 1998 – 344 p.

114. Hoffmann C. M. Geometric and Solid Modeling: An Introduction / Christoph M. Hoffman. – Morgan Kaufmann Pub, 1989. – 338 p.

115. Ito Y. Octree-based reasonable-quality hexahedral mesh generation using a new set of refinement templates / Yasushi Ito, Alan M. Shih, Bharat K. Soni // International journal for numerical methods in engineering. – 2008. – P. 24–50.

116. Joe B. Construction of three-dimensional improved-quality triangulations using local transformations / B. Joe // SIAM J. Sci. Comput. – 1995. – V. 16. – № 6. – P. 1292–1307.

117. Karkanis T. Curvature-dependent triangulation of implicit surfaces / Tasso Karkanis, A. James Stewart // IEEE Computer Graphics and Applications. – 2001. – V. 22. – № 2. – P. 60–69.

118. Lacourse D. E. Handbook of solid modeling / Donald E. Lacourse. – McGraw-Hill, 1995. – 512 p.

119. Lawson C. L. Software for C1 surface interpolation / C. L. Lawson // Mathematical Software III: Proceedings of a Symposium Conducted by the Mathematics Research Center (March 28-30, 1977, New York). – New York : University of Wisconsin - Madison, 1977. – P. 161–194.

120. Lawson C. L. Transforming triangulations / C. L. Lawson // Discrete Mathematics. – 1972. – № 3. – P. 365–372.

121. Liseikin V. D. Grid generation methods. Second edition / Vladimir D. Liseikin. – Spring, 2010. – 390 p.

122. Lohner R. Extensions and improvements of the advancing front grid generation technique / R. Lohner // Communications in Numerical Methods in engineering. – John Wiley & Sons, Ltd, 1996. – № 12. – P. 683–702.

123. Lorensen W. E. Marching Cubes: A High-Resolution 3D Surface Construction Algorithm / W. E. Lorensen, H. E. Cline // Computer Graphics. – 1987. – V. 21. – № 4. – P. 163–169.

124. Marching Cubes without Skinny Triangles / C. A. Dietrich, C. E. Scheidegger, L. D. Comba [and other] // Computing in Science and Engineering. – 2009. – V. 11. – № 2. – P. 82–87.

125. Moller P. On advancing front mesh generation in three dimensions / P. Moller, P. Hansbo // Int J for Num Meth in Eng. – 1995. – V. 38. – № 21. – P. 3551–3569.

126. Montani C. A modified look-up table for implicit disambiguation of Marching Cubes / Claudio Montani, Riccardo Scateni, Roberto Scopigno // The Visual Computer. – 1994. – V. 10. – № 6. – P. 353–355.

127. Owen S. J. Quad-Morphing: Advancing Front Quad Meshing Using Triangle Transformations / Steven J. Owen, Matthew L. Staten, Scott A. Canann, S. Saigal // Int. J. Numer. Meth. Engng. – 1999. – № 44. – P. 1317–1340.

128. Patera J. A comparison of fundamental methods for ISO surface extraction / Jan Patera, Václav Skala // Machine Graphics & Vision International Journal. – 2004.

– V. 13. – № 4. – P. 329–343.

129.Puppo E. RGB subdivision / E. Puppo, D. Panozzo // IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics. – 2009. – V. 15. – № 2. – P. 295–310.

130.Puppo E. Selectively refinable subdivision meshes / E. Puppo // Symposium on Geometry Processing 2010. – 2010. – P. 153–162.

131.Rebay S. Efficient Unstructured Mesh Generation by Means of Delaunay Triangulation and Bowyer-Watson Algorithm // Journal Of Computational Physics. – 1993. – № 106. – P. 125–138.

132.Reem D. An algorithm for computing Voronoi diagrams of general generators in general normed spaces / Daniel Reem // Proceedings of the sixth International Symposium on Voronoi Diagrams in science and engineering. – 2009. – P. 144–152.

133.Requicha A. G. Geometric Modeling: A First Course [Электронный ресурс] / A.G. Requicha. – 2011. – Режим доступа: <http://www-pal.usc.edu/~requicha/book.html>

134.Requicha A. G. Representations for Rigid Solids: Theory, Methods, and Systems / Ari G. Requicha // Computing Surveys. – 1980. – V. 12. – № 4. – P. 437–464.

135.Ruppert J. A Delaunay Refinement Algorithm for Quality 2-Dimensional Mesh Generation / Jim Ruppert // Journal of Algorithms. – 1995. – V. 18. – № 3. – P. 548–585.

136.Rypl D. Triangulation of 3D Surfaces Recovered from STL Grids / D. Rypl, Z. Bittnar // Acta Polytechnica. – 2004. – V. 44. – № 5. – P. 61–68.

137.Sarfraz M. Advances in Geometric Modeling / M. Sarfraz. – Wile, 2004 – 319 p.

138.Shapiro V. Real functions for representation of rigid solids / V. Shapiro // Computer Aided Geometric Design. – 1994. – № 11. – P. 153–175.

139.Shapiro V. Semi-analytic geometry with R-functions / V. Shapiro, dedicated to V. L. Rvachev // Acta Numerica. – 2007. – № 16. – P. 239–303.

140.Shewchuk J. Delaunay Refinement Algorithms for Triangular Mesh

Generation / J. Shewchuk // Computational Geometry: Theory and Applications. – 2002. – V. 22. – № (1-3). – P. 21–74.

141. Shewchuk J. Delaunay Refinement Mesh Generation: PhD thesis, School of Computer Science / J. Shewchuk. – Pittsburgh : Carnegie Mellon University, 1997. – 207 p.

142. Skala V. Precision of iso-surface extraction from volume data and visualization / Václav Skala // Proceedings of ALGORITMY 2000: Conference on Scientific Computing. – 2000. – P. 368–378.

143. Stroud I. Boundary Representation Modelling Techniques / I. Stroud. – Springer. – 2006. – 808 p.

144. Thompson J. F. Hand book of grid generation / Joe F. Thompson, Bharat K. Soni, Nigel P. Weatheril. – New York : CRC Press, 1999. – 1200 p.

145. Thompson J. F. Numerical grid generation: foundations and applications / Joe F. Thompson, Z.U.A. Warsi, C. Wayne Mastin. – New York : Elsevier North-Holland, Inc., 1985. – 483 p.

146. Warren J. Subdivision Methods for Geometric Design: A Constructive Approach / Joe Warren, Henrik Weimer. – Morgan Kaufmann. – 2001. – 320 P.

147. Watson D. F. Computing the n-dimensional Delaunay tessellation with application to Voronoi polytopes / D. F. Watson // The Computer Journal. – 1981. – V. 24 – № 2. – P. 167–172.

Додаток А

Акт про впровадження в початковий процес Запорізького національного
університету

“ЗАТВЕРДЖУЮ”

в.о. ректора Державного вищого
навчального закладу

“Запорізький національний університет”

Міністерства освіти і науки,
молоді та спорту України

О.Г. Бондар

2012 р.



АКТ

про впровадження результатів кандидатської дисертації
ЛІСНЯКА АНДРІЯ ОЛЕКСАНДРОВИЧА «Трикутні скінченні елементи
у математичному моделюванні геометричних об’єктів на базі теорії R-функцій»

Комісія в складі: проректора з наукової роботи, завідувача кафедри прикладної математики та механіки д.т.н., професора Грищака В.З., д.ф.-м.н., професора Тамурова Ю.М., завідувача кафедри математичного моделювання к.т.н., доцента Гребенюка С.М. склала теперішній акт про те, що наукові дослідження, виконані Лісняком А.О. у кандидатській дисертації, впроваджені в навчальний процес і дипломне проектування студентів Запорізького національного університету. Результати досліджень використовуються при викладанні спецкурсів "Математичне моделювання задач математичної фізики" та "Метод скінчених елементів" для студентів спеціальності 7.080202 – "Прикладна математика".

Члени комісії:

Проректор з наукової роботи,
зав. кафедрою прикладної
математики та механіки,
д.т.н., професор

Грищак В.З.

Професор кафедри математичного
моделювання
д.ф.-м.н., професор

Тамуров Ю.М.

Зав. кафедрою математичного
аналізу
к.т.н., доцент

Гребенюк С.М.