Володимир Кігель

Оптимізація фінансових рішень

Навчальний посібник

Київ
2010

УДК ___________

ББК ____________

Кігель В. Оптимізація фінансових рішень. Навчальний посібник. К.: Дорадо-Друк.-2010.- 172 с.

ISBN __________________

За сучасних ринкових умов обачне фінансове планування є вагомим чинником зміцнення фінансово-економічної безпеки як окремих суб'єктів господарювання, так і держави в цілому. У навчальному посібнику опрацьовано детерміновані оптимізаційні задачі фінансового менеджменту: календарного планування проектів реального інвестування, багатокритеріального вибору найкращого з кількох однотипних альтернативних інвестиційних проектів, визначення ефективної системи оподаткування суб'єктів господарювання тощо. Наведено теоретичні основи оптимізації за умов ризику, обґрунтовано способи оцінювання випадкового доходу з огляду на індивідуальне ставлення до ризику та методи обчислення детермінованого еквіваленту випадкового доходу, охарактеризовано властивості пропорції оптимального розподілу капіталу за активним і пасивним напрямами інвестування, показано ефект диверсифікації вкладень за ризиковими напрямами інвестування, наведено метод оцінювання чистого зведеного доходу фінансового проекту за умов ризику Опрацьовано недетерміновані оптимізаційні задачі управління портфелем фінансових активів, формування календарного плану реального інвестування за умов ризику, оптимізації розміру страхової суми, управління валютним резервом, формування кредитного портфелю банку тощо. Задачі проілюстровано конкретними числовими прикладами. Показано способи використання інструменту "Пошук рішення" електронної таблиці Excel для виконання необхідних оптимізаційних розрахунків.

Навчальний посібник розрахований на студентів – майбутніх спеціалістів і магістрів з фінансового менеджменту. Посібник буде також корисний практикам і науковцям, які опрацьовують проблеми, пов'язані з оптимізацією фінансових рішень.

УДК _____________

ББК _____________

ISBN ______________

Зміст

Вступ

Оптимізаційні задачі фінансового менеджменту бувають однокритеріальними або багатокритеріальними, детермінованими або недетермінованими. В однокритеріальних задачах рішення обирається згідно одного, в багатокритеріальних – згідно кількох критеріїв оптимальності. В детермінованих задачах кінцевий результат однозначно визначається обраним рішенням. Навпаки, в недетермінованих задачах враховується, що на кінцевий результат, окрім управлінських дій, впливатимуть і некеровані чинники, тобто в момент прийняття рішення кінцеві показники можна розглядати лише або як невизначені, або як випадкові величини. Вибір рішення багатокритеріальних та недетермінованих задач має здійснюватися з урахуванням особливостей системи переважань особи, яка обирає рішення (ОПР). ОПР – це фізична або юридична особа, яка має компетенцію та повноваження на прийняття відповідних рішень, особисто зацікавлена у результатах та несе відповідальність за наслідки обраного нею рішення. З метою підтримки процесів прийняття фінансових рішень доцільно використовувати спеціальні економіко–математичні методи моделювання та оптимізації.

Навчальний посібник складається з трьох розділів.

У першому розділі окреслено основні показники економічної ефективності інвестицій, опрацьовано детерміновані оптимізаційні задачі фінансового менеджменту: календарного планування проектів реального інвестування, багатокритеріального вибору найкращого з кількох однотипних альтернативних інвестиційних проектів, визначення ефективної системи оподаткування суб’єктів господарювання тощо.

У другому розділі наведено теоретичні основи оптимізації за умов ризику, обґрунтовано способи оцінювання випадкового доходу з огляду на індивідуальне ставлення до ризику та методи обчислення детермінованого еквіваленту випадкового доходу, охарактеризовано властивості пропорції оптимального розподілу капіталу за активним і пасивним напрямами інвестування, показано ефект диверсифікації вкладень за ризиковими напрямами інвестування, наведено метод оцінювання чистого зведеного доходу фінансового проекту за умов ризику.

В третьому розділі опрацьовано недетерміновані оптимізаційні задачі управління портфелем фінансових активів, формування календарного плану реального інвестування за умов ризику, оптимізації розміру страхової суми, управління валютним резервом, формування кредитного портфелю банку тощо.

Задачі та методи, що розглядаються у навчальному посібнику, проілюстровано конкретними числовими прикладами. Показано способи використання інструменту "Пошук рішення" електронної таблиці Excel для виконання необхідних оптимізаційних розрахунків. Кожний підрозділ містить також вправи для самостійного опрацювання студентами.

Формули, таблиці та рисунки занумеровані послідовно в межах кожного розділу; номер формули (таблиці або рисунку) складається з номера розділу та порядкового номера в розділі цього об’єкту. Приклади та вправи занумеровані послідовно межах кожного підрозділу; їх номер містить номер підрозділу та відповідний порядковий номер у підрозділі.

Навчальний посібник розрахований на студентів – майбутніх спеціалістів і магістрів з фінансового менеджменту. Відзначимо, що обачне планування за сучасних ринкових умов невизначеності та/або ризику є вагомим чинником зміцнення фінансово-економічної безпеки як окремих суб’єктів господарювання, так і держави в цілому. Тому сподіваємося, що посібник буде також корисний практикам і науковцям, які опрацьовують проблеми, пов’язані з оптимізацією фінансових рішень.

Мета, завдання та тематичний план дисципліни

Мета та завдання навчальної дисципліни. Метою навчальної дисципліни "Оптимізація фінансових рішень" є оволодіння студентами сучасними методами прийняття фінансових рішень та опрацювання основних оптимізаційних задач фінансового менеджменту: однокритеріальних та багатокритеріальних, детермінованих та недетермінованих.

Зокрема, студенти досліджують фундаментальні показники економічної ефективності фінансових проектів, будують економіко–математичні моделі, досліджують, розв’язують та аналізують розв’язки детермінованих оптимізаційних задач: календарного планування проектів реального інвестування, багатокритеріального вибору найкращого інвестиційного проекту, визначення ефективної системи оподаткування тощо.

Студенти ґрунтовно вивчають теоретичні основи оптимізації за умов ризику, способи оцінювання випадкового доходу з огляду на індивідуальне ставлення до ризику ОПР, властивості пропорції оптимального розподілу капіталу за активним і пасивним напрямами інвестування, ефект диверсифікації вкладень за ризиковими напрямами інвестування, метод оцінювання чистого зведеного доходу фінансового проекту за умов ризику.

Прикладні аспекти оптимізації фінансових рішень за недетермінованих умов студенти опрацьовують на задачах управління портфелем фінансових активів, формування календарного плану реального інвестування за умов ризику, оптимізації розміру страхової суми, управління валютним резервом, формування кредитного портфелю банку тощо.

Тематичний план дисципліни та орієнтовний розподіл навчального часу за модулями та темами і видами навчальної роботи студентів:

<table>
<tr><th rowspan="2">Змістовні модулі та теми навчальної дисципліни</th><th colspan="5">Обсяг, годин</th></tr>
<tr><th>Разом</th><th>Лекцій</th><th>Практичних занять</th><th>Самостійної роботи студентів</th><th>Консультацій</th></tr>
<tr><td>Вступ. Предмет дисципліни. Класифікація та приклади задач. Загальні методика розв’язування оптимізаційних задач з використанням математичних методів моделювання та оптимізації, сучасних програмних засобів</td><td>4</td><td>2</td><td></td><td>1</td><td>–</td></tr>
<tr><td colspan="6">Модуль 1. Детерміновані оптимізаційні задачі</td></tr>
<tr><td>Тема 1. Дисконтування фінансових потоків. Основні показники економічної ефективності фінансового проекту</td><td>6</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td rowspan="5">2</td></tr>
<tr><td>Тема 2. Оптимізація плану створення нових виробничих потужностей</td><td>6</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Тема 3. Формування оптимального портфелю реальних інвестицій</td><td>6</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Тема 4. Багатокритеріальний вибір інвестиційного проекту</td><td>6</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Тема 5. Визначення ефективної системи оподаткування суб’єктів господарювання</td><td>6</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr>
</table>

Модуль 2. Теоретичні основи оптимізації фінансових рішень за умов ризику					
Тема 6. Оцінювання випадкового доходу з огляду на індивідуальне ставлення до ризику	**12**	4	4	4	2
Тема 7. Наближене обчислення детермінованого еквіваленту випадкового доходу	**6**	2	2	2	
Тема 8. Місцезнаходження оптимального варіанту ризикового інвестування	**6**	2	2	2	
Тема 9. Визначення та властивості пропорції оптимального розподілу капіталу за активним та пасивним напрямами інвестування	**6**	2	2	1	
Тема 10. Наслідки диверсифікації вкладень за ризиковими напрямами інвестування	**6**	2	2	1	
Тема 11. Оцінювання чистого зведеного доходу фінансового проекту за умов ризику	**6**	2	2	2	
Модуль 3. Недетерміновані оптимізаційні задачі					
Тема 12. Оптимальне управління портфелем фінансових активів	**6**	2	2	2	2
Тема 13. Формування оптимального календарного плану реального інвестування за умов ризику	**6**	2	2	1	
Тема 14. Оптимізація розміру страхової суми	**6**	2	2	1	
Тема 15. Оптимальне управління валютним резервом	**6**	2	2	2	
Тема 16. Формування оптимального кредитного портфелю	**8**	2	4	2	
УСЬОГО:	**108**	**36**	**36**	**30**	**6**

Розділ 1. Детерміновані оптимізаційні задачі

1.1. Дисконтування фінансових потоків. Основні показники економічної ефективності фінансового проекту

Дисконтування. Численні проблеми прийняття фінансових рішень стосуються випадків, коли витрати та доходи розподілені в часі. Кожний фінансовий проект характеризується певними витратами $V_1, \dots, V_t, \dots, V_T$ та доходами $D_1, \dots, D_t, \dots, D_T$, де T – довжина (тривалість) планового періоду, а V_t і D_t – витрати та доходи упродовж окремого t–го проміжку часу з цього періоду ($t \in \{1, ..., T\}$), які у сукупності складають, відповідно:

- потік витрат $V = (V_1, \dots, V_t, \dots, V_T)$,
- потік доходів $D = (D_1, \dots, D_t, \dots, D_T)$,

а також утворюють

- потік прибутків $P = (P_1, \dots, P_t, \dots, P_T)$,

де $P_t = D_t - V_t$, $t = 1, .., T$.

Найперша задача полягає у тому, щоб визначити узагальнений показник цього потоку прибутків. Необхідність вирішення цієї задачі обумовлена тим, що одні й ті самі грошові суми прибутку, але отримані в різні моменти часу, мають різну цінність для фінансового менеджера (власника капіталу, інвестора, особи, яка приймає відповідні фінансові рішення, ОПР тощо).

Відомо, що за цінністю одна гривня сьогодні та одна гривня завтра, як правило, різняться. Причинами цього, зокрема, є майбутні інфляційно–дефляційні процеси на товарних та фінансових ринках, можливості отримати в майбутньому певні результати (позитивні чи негативні) від сьогоднішніх інвестиційних вкладень, а також зміни у часі індивідуальних переважань ОПР, викликані об’єктивними закономірностями та суб’єктивними чинниками.

Нехай λ_t – визначений ОПР коефіцієнт еквівалентного заміщення одиниці прибутку у проміжку часу t прибутком у попередньому проміжку часу $(t-1)$. Тоді величина загального, зведеного до початку планового періоду, прибутку – N – дорівнюватиме:

$$N = \lambda_1 P_1 + ... + (\lambda_1 \cdot ... \cdot \lambda_t) P_t + ... + (\lambda_1 \cdot ... \cdot \lambda_T) P_T .$$

Якщо коефіцієнт λ_t еквівалентного заміщення одиниці прибутку у проміжку часу t прибутком у попередньому проміжку часу $(t-1)$ не залежить від t, тобто весь час залишається сталим та дорівнює λ, отримаємо таку формулу зведення потоку прибутків:

$$N = \sum_{t=1}^{T} \lambda^t P_t ,$$

де множники λ^t називаються коефіцієнтами дисконтування (зведення), а N – дисконтованою (зведеною до початку планового періоду) величиною грошового потоку прибутків $P = (P_1, \ldots, P_t, \ldots, P_T)$.

Формулу зведення часто подають через норму (або ставку) дисконту $r = \frac{1}{\lambda} - 1$:

$$N = \sum_{t=1}^{T} \frac{P_t}{(1+r)^t}.$$

У наведеній формулі замість дисконтних множників $\lambda_t = \lambda^t$, які використовувалися раніше, акцент зроблено на ставці дисконту r:

$$\lambda_t = \frac{1}{(1+r)^t}, \ t = \overline{1, T}.$$

Приклад 1.1.1. Якщо розглядати два потоки прибутків $P^A = \left(2, 5, 7\right)$ і $P^B = \left(4, 4, 6\right)$, тоді за норми дисконту $r = 0.2$ розміри зведених до початку планового періоду прибутків за цими потоками дорівнюватимуть:

$$N^A = \frac{2}{1+0.2} + \frac{5}{(1+0.2)^2} + \frac{7}{\left(1+0.2\right)^3} = 1.67 + 3.47 + 4.05 = 9.19,$$

$$N^B = \frac{4}{1+0.2} + \frac{4}{(1+0.2)^2} + \frac{6}{\left(1+0.2\right)^3} = 3.33 + 2.78 + 3.47 = 9.58,$$

тобто другий потік прибутків є більшим (більш прибутковим), аніж перший.

Показники економічної ефективності фінансового проекту. В світовій та вітчизняній практиці фінансового менеджменту та інвестиційного оцінювання знайшли використання, передусім, наступні чотири показники економічної ефективності інвестиційних (фінансових) проектів:

- чистий зведений дохід (NPV, net present value),
- термін окупності (PP, pay–back period),
- внутрішня норма дохідності (IRR, internal rate of return),
- індекс рентабельності інвестицій (PI, profitability index).

Як зазначають Р.Брейлі та С.Майєрс[1], принцип чистої зведеної вартості для оцінювання тривалих інвестиційних проектів було запропоновано І.Фішером у 1930 році у його книзі "The Theory of Interest". Питання про термін окупності інвестицій, який розраховуватиметься з урахуванням ставки дисконту, починає обговорюватися з опублікованої в "Journal of Business" (1955, № 28) статті М.Гордона "The Pay–Off Period and the Rate of Profit". З 1955 р. розпочинається також дослідження запропонованого Дж.М.Кейнсом показника внутрішньої норми дохідності (Ж.Лоріе та Л.Севаж, Е.Соломон, А.Алчіан тощо). Індекс рентабельності інвестицій досліджується, зокрема,

[1] Брейли Р., Майерс С. Принципы корпоративных финансов: Пер. с англ. – М.: ЗАО «Олимп–Бизнес», 1997. – XXXI, 1120 с.

починаючи із статті Б.Шваба та П.Ластінга, надрукованої у 1969 р. у "Journal of Finance" (№ 24).

Науковці, хоч і не заперечують проти комплексного оцінювання інвестиційних проектів за усіма вищезазначеними критеріями, віддають перевагу показнику чистого зведеного доходу. Цей показник обчислюється за формулою:

$$N = \sum_{t=1}^{T} \frac{D_t - V_t}{(1+r)^t},$$

де:

N – чистий дохід за проектом, зведений до початку планового періоду;
T – тривалість планового періоду (життєвого циклу проекту);
t – номер окремого часового проміжку з планового періоду ($t = \overline{1, T}$);
D_t – вартісна оцінка поточних результатів (доходів), пов'язаних із проектом, у t – му часовому проміжку;
V_t – вартісна оцінка поточних інвестиційних та неінвестиційних витрат, пов'язаних із реалізацією проекту, у t – му часовому проміжку;
r – нормативний коефіцієнт економічної ефективності інвестицій (ставка або норма дисконту).

Наступним важливим показником оцінювання інвестиційних проектів є строк окупності інвестицій S. Він являє собою такий мінімальний момент часу від початку планового періоду, починаючи з якого інтегральний ефект від реалізації проекту стає невід'ємним, причому залишається невід'ємним і надалі. Для обчислення строку окупності S можна скористатися формулами:

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^{S-1} \frac{D_t - V_t}{(1+r)^t} < 0, \\ \sum_{t=1}^{k} \frac{D_t - V_t}{(1+r)^t} \geq 0 \ \text{ для всіх } \quad k = S, S+1, ..., T. \end{cases}$$

В свою чергу, показник внутрішньої норми дохідності i інвестиційного проекту показує на таку ставку дисконту, за якою зведені до початку планового періоду доходи дорівнюватимуть зведеним до початку планового періоду витратам:

$$\sum_{t=1}^{T} \frac{D_t}{(1+i)^t} = \sum_{t=1}^{T} \frac{V_t}{(1+i)^t}.$$

Отже, зведений за внутрішньою нормою дохідності до початку планового періоду прибуток інвестиційного проекту дорівнює нулю. Тому внутрішня норма дохідності обчислюється як корінь рівняння:

$$\sum_{t=1}^{T} \frac{P_t}{(1+i)^t} = 0.$$

Нарешті, індекс рентабельності інвестицій π являє собою відношення зведеного на початок планового періоду потоку прибутків до зведеного на початок планового періоду потоку витрат:

$$\pi = \frac{\sum_{t=1}^{T} \frac{P_t}{(1+r)^t}}{\sum_{t=1}^{T} \frac{V_t}{(1+r)^t}}.$$

Приклад 1.1.2. Обчислимо показники економічної ефективності інвестиційного проекту тривалістю 12 місяців, якщо місячна ставка дисконту $r = 0.02$. Вихідні дані для розрахунків наведено в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1. Щомісячні витрати та доходи за інвестиційним проектом, тис. грн.

Щомісячні поточні:	Місяць життєвого циклу проекту											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
• витрати	10	8	7	6	6	5	5	4	5	5	6	7
• доходи	1	2	5	8	9	11	11	12	13	13	14	14

Для обчислення показника чистого зведеного доходу N за інвестиційним проектом знайдемо, виходячи з місячної ставки дисконту $r = 0.02$, дисконтні множники (показані в останньому – довідковому рядку таблиці 1.2) та розрахуємо за даними таблиці 1 щомісячні дисконтовані витрати, доходи та прибутки (показані в основній частині таблиці 1.2). Підсумовуванням елементів відповідних рядків таблиці 1.2 знаходимо, що загальні зведені витрати складатимуть 65.904 тис. грн., загальний зведений дохід – 96.583 тис. грн., загальний зведений прибуток, тобто зведений чистий дохід за інвестиційним проектом дорівнює 30.679 тис. грн.

Таблиця 1.2. Щомісячні зведені до початку планового періоду витрати, доходи та прибутки за інвестиційним проектом (місячна ставка дисконту $r = 0.02$),

тис. грн.

Показник	Місяць життєвого циклу проекту												Разом
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
• витрати	9,804	7,689	6,596	5,543	5,434	4,440	4,353	3,414	4,184	4,102	4,826	5,519	65,904
• доходи	0,980	1,922	4,712	7,391	8,152	9,768	9,576	10,242	10,878	10,665	11,260	11,039	96,583
• прибутки	-8,824	-5,767	-1,885	1,848	2,717	5,328	5,223	6,828	6,694	6,563	6,434	5,519	30,679
Довідково: дисконтні множники	*0,980*	*0,961*	*0,942*	*0,924*	*0,906*	*0,888*	*0,871*	*0,853*	*0,837*	*0,820*	*0,804*	*0,788*	

Таблиця 1.3. Щомісячні накопичені чисті зведені доходи за інвестиційним проектом

тис. грн.

Місяць життєвого циклу проекту											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
-8,824	-14,591	-16,475	-14,627	-11,910	-6,582	-1,359	5,469	12,163	18,726	25,160	30,679

Щоб знайти строк окупності S інвестиційного проекту, обчислимо накопичені щомісячні чисті зведені доходи, починаючи з першого місяця життєвого циклу нашого проекту (таблиця 1.3). Помічаємо, що мінімальний момент часу, починаючи з якого накопичений щомісячний чистий зведений дохід від реалізації проекту стає та залишається надалі невід'ємним, дорівнює 8 місяців. Отже, термін окупності інвестиційного проекту – в межах до 8 місяців, що проілюстровано рисунком 1.1.

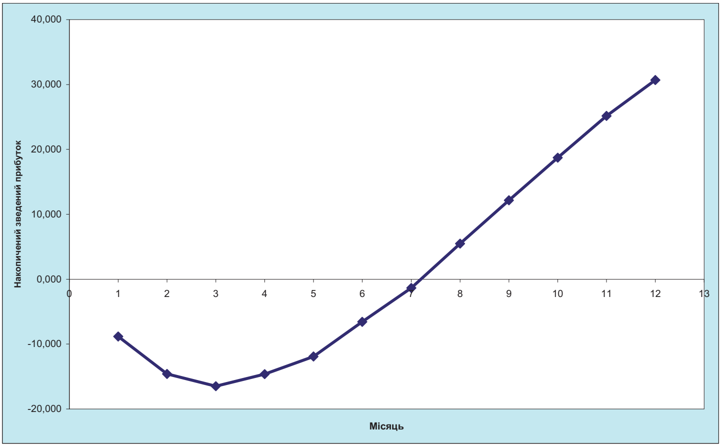


Рис. 1.1. Динаміка накопиченого щомісячного зведеного прибутку упродовж життєвого циклу інвестиційного проекту

Для наближеного обчислення внутрішньої норми дохідності i доцільно побудувати графік залежності чистого зведеного доходу N від розміру місячної ставки дисконту r (рис. 1.2). Внутрішня норма дохідності відповідає нульовому рівню чистого зведеного доходу: $i \approx 0.2$. Це означає, що проект може виявитися збитковим лише тоді, коли нормативна місячна ставка дисконту r перевищуватиме це значення. /Нагадаємо, що визначена інвестором нормативна місячна ставка дисконту дорівнює 0.02, тобто що її припустимі варіації, скажімо в межах від 0.01 до 0.04, не призводитимуть до радикальної втрати прибутковості цього проекту./

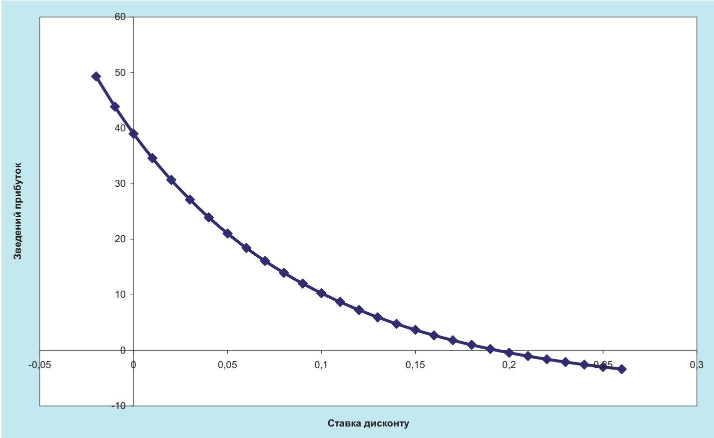


Рис. 1.2. Залежність чистого зведеного прибутку
від розміру місячної ставки дисконту

Нарешті, для обчислення індексу рентабельності інвестицій π скористаємося підсумковими значеннями зведених до початку планового періоду прибутків та витрат, наведеними в останньому стовпчику таблиці 1.2:

$$\pi = \frac{30.679}{65.904} = 0.4655.$$

Приклад закінчено.

Вправи до підрозділу 1.1

Вправа 1.1.1. Інвестиційний проект, який розрахований на 6 років, характеризується наступними показниками щорічних доходів та витрат (тисяч грошових одиниць):

Показник	Рік життєвого циклу інвестиційного проекту					
	1	2	3	4	5	6
Доходи	0	0	200	250	300	400
Витрати	150	130	100	100	80	70

Обчислити основні показники економічної ефективності інвестиційного проекту, якщо річна ставка дисконту (нормативний коефіцієнт економічної ефективності інвестицій) $r = 0.25$:

- чисту зведену вартість проекту станом на початок його життєвого циклу;
- термін окупності інвестицій;
- індекс рентабельності;
- внутрішню ставку дохідності.

Вправа 1.1.2. Фінансовий проект A розрахований на 5 років, а проект B – на 6 років. Ці проекти мають такі показники щорічних доходів та витрат (тисяч грошових одиниць):

Проект	**Показник**	Рік життєвого циклу інвестиційного проекту					
		1	2	3	4	5	6
A	Доходи	70	120	150	180	200	–
	Витрати	120	110	100	100	80	–
B	Доходи	240	360	470	500	620	700
	Витрати	900	900	800	100	100	100

Порівняти терміни окупності за цими проектами, якщо річна ставка дисконту $r = 0.15$:

Вправа 1.1.3. Побудувати та проаналізувати графік залежності чистої зведеної вартості N фінансового проекту від ставки дисконту r:

$$N = N(r), \quad 0.1 \le r \le 0.3,$$

якщо відомі щорічні витрати та щорічні доходи за цим проектом (тисяч грошових одиниць):

Показник	Рік життєвого циклу фінансового проекту					
	1	2	3	4	5	6
Витрати	230	270	250	200	200	180
Доходи	50	350	380	450	480	500

Які висновки можна зробити щодо показника внутрішньої ставки дохідності цього фінансового проекту?

Вправа 1.1.4. Підприємець отримав у банку кредит у розмірі 480 тис. грн. терміном на 10 років. Позику (тіло кредиту) він повинен повертати щомісяця однаковими за розміром платежами. Окрім цього, він кожного місяця повинен сплачувати відсотки за кредит, які нараховуються щомісяця на залишок боргу за місячної відсоткової ставки у розмірі 1 %. Обчислити для банку показники економічної ефективності надання цього кредиту, якщо визначена банком місячна нормативна ставка дисконту $r = 0.012$.

1.2. Оптимізація плану створення нових виробничих потужностей

Головною метою реалізації багатьох проектів реального інвестування є введення до дії нових або розширення, реконструкція чи технічне переозброєння існуючих виробничих потужностей. На жаль, у процесах реального інвестування часто спостерігається явище довгобуду та консервації об'єктів будівництва. Однією з причин цього є практика прийняття рішень стосовно початку будівництва нових виробничих об'єктів з урахуванням лише тимчасових (сьогоденних) можливостей. Щоб уникнути довгобуду та консервації процесів створення нових виробничих потужностей, слід впроваджувати лише такі плани, які були б повністю забезпечені необхідними фінансовими, матеріально–технічними та трудовими ресурсами на протязі усього періоду будівництва та подальшого функціонування кожного виробничого об'єкту. Ефективним засобом обачного планування є використання методів економіко–математичного моделювання на етапі розробки перспективних планів капітального будівництва. Розглянемо задачу оптимізації плану створення нових виробничих потужностей на прикладі об'єднання, яке надає послуги з технічного обслуговування та ремонту автотранспорту.

Постановка задачі. Потрібно визначити календарні терміни будівництва трьох станцій технічного обслуговування та ремонту автомобілів (СТО). Проектні показники кожної станції наведено в таблиці 1.4.

Таблиця 1.4. Основні проектні техніко–економічні показники СТО

Номер СТО	Потужність, машин за квартал	Тривалість будівництва, кварталів	Кошторисна вартість будівництва, млн. грн.					
			Усього	У тому числі за кварталами будівництва				
				I	II	III	IУ	У
1	200	4	12	3	3	3	3	–
2	150	3	12	3	4	5	–	–
3	300	5	15	2	2	3	4	4

Щоквартально для будівництва виробниче об'єднання може виділяти до 8 млн. грн. У якому кварталі слід починати будівництво кожної зі станцій, щоб загальні можливості об'єднання щодо технічного обслуговування та ремонту автомобілів були якомога більшими?

Дослідження задачі та побудова економіко–математичної моделі. Зрозуміло, що чим раніше розпочнеться будівництво кожної СТО, тим раніше ці станції будуть введені в дію і тим більшими будуть загальні можливості виробничого об'єднання щодо технічного обслуговування та ремонту автомобілів. Тому, здавалося б, що слід розпочинати будівництво всіх трьох станцій одночасно в першому кварталі. Але для цього обсяги капіталовкладень мають становити 8 млн. грн. у першому кварталі, 9 – у другому, 11 – у третьому, 7 – у четвертому та 4 млн. грн. у п'ятому кварталі. Бачимо, що розпочати одночасно з I кварталу будівництво всіх трьох станцій неможливо, оскільки другий та третій квартали не будуть фінансово забезпечені.

Перенесення терміну початку будівництва на один квартал, наприклад першої СТО, призведе до зменшення потенційно максимальної потужності об'єднання на 200 машин, перенесення на два квартали – до зменшення на 400 машин і т.д. Яку зі станцій, з огляду на поквартальні ліміти капіталовкладень, слід починати будувати раніше, а яку пізніше і коли саме, щоб загальне зниження потужностей було якнайменшим? /Саме в такому разі загальні можливості виробничого об'єднання щодо технічного обслуговування та ремонту автомобілів будуть якнайбільшими/.

Позначимо через M_j відому щоквартальну виробничу потужність j-ї СТО, а через θ_j – невідомий поки що номер кварталу, з якого розпочнеться її будівництво. Тоді цільова функція, яка відповідає критерію максимізації загальних виробничих потужностей об'єднання, може бути записана так:

$$Z = \sum_{j=1}^{3} M_j (\theta_j - 1) \to \min .$$

Уведемо логічні змінні x_{jt}, які показуватимуть, чи розпочнеться будівництво j–ї СТО в t–му кварталі, чи ні:

$$x_{jt} = \begin{cases} 1, & \text{якщо будівництво } j-\text{ї СТО} \\ & \text{розпочинається з } t-\text{го кварталу}; \\ 0, & \text{у противному разі}. \end{cases}$$

Умови фінансування дозволяють організувати послідовне будівництво кожної з трьох станцій. Отже, максимально можливий період будівництва T (розрахунковий період) можна взяти таким, що дорівнює сумі проектних термінів будівництва кожної з станцій – T_j ($j = 1, 2, 3$):

$$T = \sum_{j=1}^{3} T_j \, .$$

У нашому прикладі $T = 4 + 3 + 5 = 12$ (кварталів).

Значення індексу t для змінної x_{jt} перебуватиме в межах від 1 до $\left(T + 1 - T_j\right)$. Отже, маємо обмеження на ці змінні:

$$x_{jt} \in \{\, 0; 1 \,\}, \quad t = \overline{1, (T + 1 - T_j)}\,, \quad j = 1, 2, 3 \, .$$

Оскільки ввести в дію потрібно всі три станції, причому будівництво кожної з них не може розпочинатись двічі, вводимо такі обмеження:

$$\sum_{t=1}^{T+1-T_j} x_{jt} = 1 \, , \quad j = 1, 2, 3 \, .$$

Уведені раніше цілочислові змінні θ_j пов'язані з логічними змінними x_{jt} залежностями:

$$\theta_j = \sum_{t=1}^{T+1-T_j} t x_{jt}, \quad j = 1, 2, 3,$$

тобто відносно наших логічних змінних цільова функція задачі набирає вигляду:

$$Z = \sum_{j=1}^{3} M_j \sum_{t=1}^{T+1-T_j} t x_{jt} - \sum_{j=1}^{3} M_j \to \min .$$

Визначимо тепер обмеження, які враховують щоквартальні ліміти можливих капіталовкладень у будівництво. Позначимо через K_{jt} невідомі обсяги капіталовкладень, які потрібні в t-му календарному кварталі для будівництва j-ї СТО ($t = \overline{1, T}$), а через $C_{j\tau}$ – відомі для періоду будівництва τ щоквартальні обсяги кошторисної вартості будівництва цієї станції ($\tau = \overline{1, T_j}$). Використавши змінні x_{jt}, залежність між цими величинами можна описати так:

$$K_{jt} = \sum_{\tau=1}^{\min\{t;\, T_j\}} C_{j\tau} x_{j,\, t+1-\tau}, \quad t = \overline{1, T}, \quad j = 1, 2, 3 .$$

Щоб пояснити цю формулу, наведемо кілька прикладів.

Так, при $t = 1$ маємо:

$$K_{j1} = C_{j1} x_{j1}, \quad j = 1, 2, 3;$$

при $t = 2$:

$$K_{j2} = C_{j1} x_{j2} + C_{j2} x_{j1}, \quad j = 1, 2, 3;$$

при $t = 10$ та $j = 2$ (нагадаємо, що $T_2 = 3$):

$$K_{2,10} = C_{21} x_{2,10} + C_{22} x_{29} + C_{23} x_{28} .$$

Оскільки щоквартально на будівництво може бути виділено до 8 млн. грн., потрібні обмеження щодо інвестиційних витрат наберуть вигляду:

$$\sum_{j=1}^{3} K_{jt} \le 8, \quad t = \overline{1, T} .$$

Якщо вилучити допоміжні змінні K_{jt}, остаточно можна записати:

$$\sum_{j=1}^{3} \sum_{\tau=1}^{\min\{t;\, T_j\}} C_{j\tau} x_{j,\, t+1-\tau} \le 8, \quad t = \overline{1, T} .$$

Зібравши разом усі потрібні співвідношення, дістанемо таку економіко–математичну модель задачі оптимізації календарного плану введення в дію нових виробничих потужностей:

$$\left.\begin{array}{c}
Z = \sum_{j=1}^{3} M_j \sum_{t=1}^{T+1-T_j} t x_{jt} - \sum_{j=1}^{3} M_j \to \min , \\
\sum_{j=1}^{3} \sum_{\tau=1}^{\min\{t;\, T_j\}} C_{j\tau} x_{j,\, t+1-\tau} \le 8, \quad t = \overline{1, T}, \\
\sum_{t=1}^{T+1-T_j} x_{jt} = 1, \quad j = 1, 2, 3, \\
x_{jt} \in \{0; 1\}, \quad t = \overline{1, (T+1-T_j)}, \quad j = 1, 2, 3 .
\end{array}\right\}$$

Отримали задачу цілочислового програмування лінійного типу з логічними змінними x_{jt}, загальна кількість яких дорівнює:

$$(T+1-T_1)+(T+1-T_2)+(T+1-T_3)=2T+3=27.$$

Кількість основних обмежень задачі, в свою чергу, дорівнює: $T+3=15$.

Розв’язування задачі. Для пошуку розв’язку скористаємося інструментом "Пошук рішення" електронної таблиці Excel. Щоб спростити підготовку робочого листа Excel, замість наведеного скороченого запису задачі, в якому відсутні проміжні розрахункові змінні K_{jt} ($j=1,2,3$, $t=\overline{1,T}$) та θ_j ($j=1,2,3$), доцільно скористатися розгорнутим записом задачі, передбачивши на робочому листі клітинки для значень відповідних проміжних розрахункових показників. Створений нами робочий лист Excel для розв’язування задачі оптимізації календарного плану введення в дію нових виробничих потужностей показано на рис. 1.3.

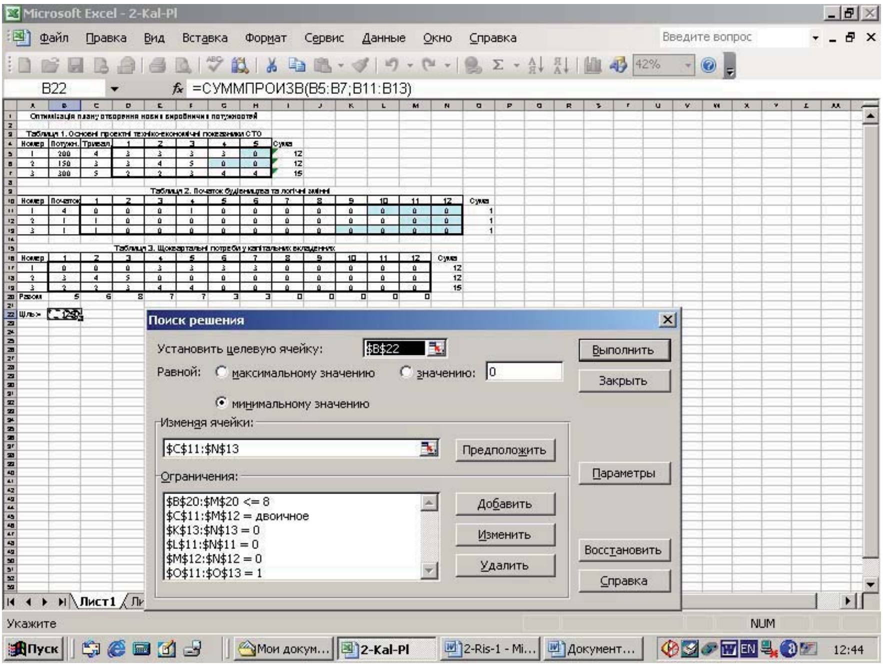


Рис. 1.3. Робочий лист Excel для оптимізації календарного плану будівництва станцій технічного обслуговування автомобілів

Оптимальний план будівництва та введення до дії станцій технічного обслуговування автомобілів передбачає розпочати з першого кварталу планового періоду будівництво другої та третьої СТО, а будівництво першої СТО почати лише з четвертого кварталу (таблиця 1.5).

Таблиця 1.5. Оптимальні початки будівництва СТО
та відповідні оптимальні значе5ння логічних змінних

Номер СТО	Початок будівництва (квартал)	Значення логічних змінних за кварталами розрахункового періоду											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблиця 1.6. Щоквартальні потреби у капітальних вкладеннях,
млн. грн.

Номер СТО	Квартал розрахункового періоду											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	0	0	**3**	**3**	**3**	**3**	0	0	0	0	0
2	**3**	**4**	**5**	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	**2**	**2**	**3**	**4**	4	0	0	0	0	0	0	0
Разом:	5	6	8	7	7	3	3	0	0	0	0	0

Роботи за знайденим планом на кожній СТО вестимуться без перерв та будуть у кожному кварталі повністю забезпечені необхідними фінансовими ресурсами (таблиця 1.6).

Аналіз розв’язку. Реалізація наведеного у таблицях 1.5–1.6 оптимального календарного плану будівництва та введення до дії станцій технічного обслуговування автомобілів забезпечує мінімально можливі "втрати" загальних виробничих потужностей у кількості 600 машин /ми "втрачаємо" перших три квартали на першій СТО (з проектною потужністю обслуговування 200 машин на квартал) у зв’язку з початком її будівництва лише у ІУ кварталі: 3*200=600 (машин)./

Подальше дослідження задачі дозволило знайти альтернативний оптимальний план, за яким потрібно з першого кварталу почати будівництво першої та третьої СТО, а будівництво другої СТО розпочати з п’ятого кварталу (таблиця 1.7).

Таблиця 1.7. Щоквартальні потреби у капітальних вкладеннях за альтернативним календарним планом зведення СТО, млн. грн..

Номер СТО	Квартал розрахункового періоду											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	**3**	**3**	**3**	**3**	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	**3**	**4**	**5**	0	0	0	0	0
3	**2**	**2**	**3**	**4**	4	0	0	0	0	0	0	0
Разом:	5	5	6	7	7	4	5	0	0	0	0	0

За альтернативним планом "втрати" виробничих потужностей теж складатимуть 600 машин, оскільки проектна потужність другої СТО, будівництво якої починається лише з У кварталу, дорівнює 150 машин на квартал.

Загальні капітальні витрати на реалізацію першого або альтернативного календарних планів будівництва станцій технічного обслуговування однакові і складають 39 млн. грн. Тому для подальшого порівняння цих планів обчислимо зведені до початку планового періоду розміри відповідних потоків витрат (дивись таблицю 1.8).

Таблиця 1.8. Потоки капітальних витрат за першим та альтернативним календарними планами зведення СТО, млн. грн.

План	Щоквартальні потреби у капітальних вкладеннях											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Перший	5	6	8	7	7	3	3	0	0	0	0	0
Другий	5	5	6	7	7	4	5	0	0	0	0	0

Для квартальної ставки дисконту, що дорівнює, скажімо, 0.06: $r = 0.06$, загальні зведені розміри капітальних вкладень складатимуть (млн. грн.):

- за першим планом:

$$V^1 = \frac{5}{1.06} + \frac{6}{1.06^2} + \frac{8}{1.06^3} + \frac{7}{1.06^4} + \frac{7}{1.06^5} + \frac{3}{1.06^6} + \frac{3}{1.06^7} = 31.659;$$

- а за другим планом:

$$V^2 = \frac{5}{1.06} + \frac{5}{1.06^2} + \frac{6}{1.06^3} + \frac{7}{1.06^4} + \frac{7}{1.06^5} + \frac{4}{1.06^6} + \frac{5}{1.06^7} = 31.125,$$

тобто другий план є економічно вигіднішим у порівнянні із першим.

Для остаточних висновків побудуємо графіки залежностей загальних зведених капітальних витрат за кожнім із планів від розміру квартальної ставки дисконту r в достатньо широких межах її можливої варіації, наприклад від –0.01 до +0.10 (рис. 1.4).

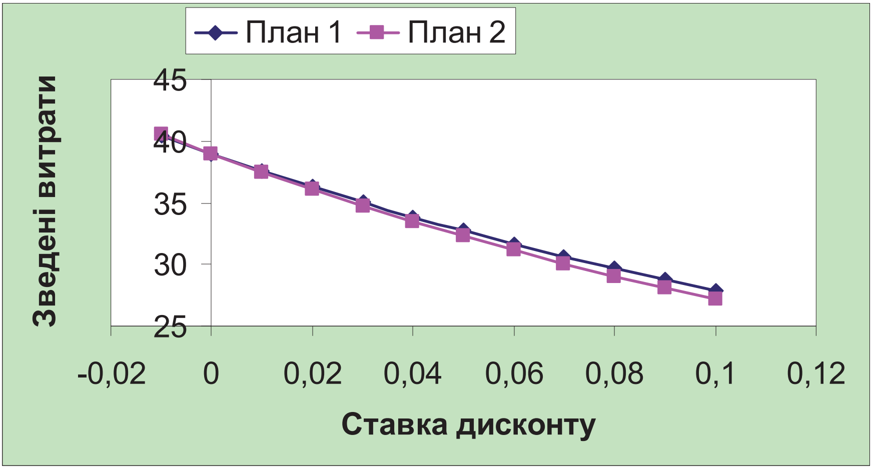


Рис. 1.4. Залежність загальних зведених капітальних витрат за альтернативними варіантами календарних планів від розміру квартальної ставки дисконту

Аналіз графіків, наведених на рис. 1.4, показує, що другий календарний план будівництва СТО вимагатиме менших зведених капітальних витрат, аніж перший план, практично за будь якого з можливих припустимих значень квартальної ставки дисконту. Отже, для реалізації слушно рекомендувати саме другий календарний план будівництва та введення до дії станцій технічного обслуговування автомобілів.

Вправи до підрозділу 1.2

Вправа 1.2.1. Маємо щомісячний календарний план введення до дії трьох нових магазинів торгівельного об'єднання в розрізі необхідних витрат (тисяч грошових одиниць):

Магазин	Місяць планового періоду												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
№1	600	650	400	500									
№2					450	700	300	600	500				
№3										700	600	400	500
Щомісячні витрати, разом	600	650	400	500	450	700	300	600	500	700	600	400	500

Проаналізувати цей план на оптимальність за критерієм мінімізації загальних зведених витрат, якщо значення місячної нормативної ставка дисконту – в межах від 0.01 до 0.02. Врахувати, що кожний проект від початку його реалізації має бути повністю забезпечений необхідними фінансовими ресурсами, причому щомісячні витрати торгівельного об’єднання не повинні перевищувати 700 тис. грошових одиниць.

Вправа 1.2.2. Щомісячний товарообіг кожного з магазинів (дивись вправу 1.2.1), за оцінками фахівців, становитиме (тис. грошових одиниць): магазин №1 – 400, магазин №2 – 500, магазин №3 – 300. Знайти календарний план введення до дії цих магазинів за критерієм максимізації загального товарообігу торгівельного об’єднання. Чи зміниться цей план, якщо показник загального товарообігу обчислювати з урахуванням ставки дисконту?

1.3. Формування оптимального портфелю реальних інвестицій

Важливим чинником ефективної інвестиційної діяльності є належне формування портфелю та календарного плану виконання проектів реального інвестування. Такий план у кожний період часу повинен бути збалансованим щодо необхідних та наявних інвестиційних ресурсів. Це дозволить здійснювати безперервну реалізацію кожного з обраних до портфелю інвестиційних проектів. Оптимізаційна спрямованість розрахунків забезпечуватиме визначення такого з допустимих планів, який характеризується найкращими економічними показниками, очікуваними від реалізації обраного комплексу інвестиційних проектів в цілому.

Основними показниками окремого інвестиційного проекту у детермінованому випадку є такі:

1) некеровані параметри:

T – тривалість виконання (життєвого циклу) інвестиційного проекту, в межах якого через τ позначимо номер окремого часового проміжку з життєвого циклу проекту ($\tau = \overline{1, T}$);

I_τ – інвестиційні ресурси, необхідні для виконання проекту в τ–му часовому проміжку його життєвого циклу;

V_τ – вартісна оцінка поточних (неінвестиційних) витрат, пов'язаних з реалізацією проекту, у τ–му часовому проміжку;

D_τ – вартісна оцінка поточних результатів (доходів), пов'язаних із функціонуванням проекту, у τ–му часовому проміжку;

N – чистий, зведений до початку життєвого циклу, дохід за проектом:

$$N = \sum_{\tau=1}^{T} \frac{D_\tau - V_\tau - I_\tau}{(1+r)^\tau},$$

де r – нормативний коефіцієнт економічної ефективності інвестицій (ставка дисконту).

2) керовані змінні:

x_t – логічна змінна, яка відбиває факт вибору проекту та початку його реалізації у t–му часовому проміжку планового періоду:

$$x_t = \begin{cases} 1, & \textit{якщо інвестиційний проект буде обрано} \\ & \textit{та розпочато у } t-\textit{му проміжку}, \\ 0, & \textit{у супротивному випадку}; \end{cases}$$

N_0 – чистий, зведений до початку планового періоду, дохід за проектом:

$$N_0 = N \sum_{t=1}^{T_0 - T + 1} \frac{x_t}{(1+r)^{t-1}},$$

де T_0 – тривалість горизонту планування ($T_0 > T$), t – номер окремого проміжку часу з планового горизонту ($t = \overline{1, T_0}$).

Наведемо пояснення щодо цієї формули обчислення чистого, зведеного до початку планового періоду, доходу за проектом.

Приклад 1.3.1. Припустимо, що потенційний інвестиційний проект має життєвий цикл тривалістю 5 років та характеризується такими показниками (таблиця 1.9).

Таблиця 1.9. Економічні показники інвестиційного проекту, млн. грн.

Показник	Рік життєвого циклу проекту				
	1	2	3	4	5
Інвестиційні витрати	50	40	30	–	–
Поточні витрати	20	80	100	150	200
Поточні результати	–	20	400	600	800

Нехай ставка дисконту $r = 0.2$. Тоді зведений до початку життєвого циклу чистий дохід за проектом складе (млн. грн.):

$$N = \frac{-20-50}{1+0.2} + \frac{20-80-40}{(1+0.2)^2} + \frac{400-100-30}{(1+0.2)^3} + \frac{600-150}{(1+0.2)^4} + \frac{800-200}{(1+0.2)^5} = 486.613.$$

Якщо цей проект буде розпочато одразу ж ($x_1 = 1$), зведений до початку планового періоду чистий дохід за проектом збігатиметься з N:

$$N_0 = \frac{1}{(1+0.2)^0} N = 486.613 \text{ (млн. грн.)}.$$

Якщо ж проект буде розпочато, скажімо, з третього року планового періоду ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$), зведений до початку планового періоду чистий дохід за цим проектом, за рахунок дисконтування з додатною ставкою дисконту, буде дещо меншим:

$$N_0 = \frac{1}{(1+0.2)^2} N = 337.926 \text{ (млн. грн.)}.$$

Приклад закінчено.

Задача про формування інвестиційного портфеля та календарного плану його виконання у детермінованому випадку. Нехай є n потенційних інвестиційних проектів, кожний з яких характеризується наступними показниками (j – номер окремого проекту, $j = \overline{1, n}$):

T_j – тривалість життєвого циклу проекту;

$I_{j\tau}$ – необхідні інвестиційні витрати у τ–му часовому проміжку життєвого циклу;

$V_{j\tau}$ та $D_{j\tau}$ – відповідно, поточні витрати та результати у τ–му часовому проміжку життєвого циклу;

N_j – чистий, зведений до початку життєвого циклу, дохід:

$$N_j = \sum_{\tau=1}^{T_j} \frac{D_{j\tau} - V_{j\tau} - I_{j\tau}}{(1+r)^\tau}.$$

Невідомими виступають логічні змінні:

$$x_{jt} = \begin{cases} 1, & \textit{якщо } j - \textit{й проект буде обрано та розпочато} \\ & \textit{у } t - \textit{му часовому проміжку планового періоду}, \\ 0, & \textit{у супротивному випадку}. \end{cases}$$

/Значення індексу t для змінної x_{jt} перебуває в межах від 1 до $T_0 - T_j + 1$, де T_0 – тривалість планового горизонту./

Інвестиційний портфель та календарний план його реалізації слід сформувати з урахуванням лімітів інвестиційних ресурсів. Позначимо через K_t ліміт інвестицій на t–й часовий проміжок планового горизонту ($t = \overline{1, T_0}$, де $T_0 > \max\limits_{j=\overline{1,n}} T_j$). Потрібно врахувати критерій оптимальності – щоб загальний зведений чистий дохід N_Σ за усіма обраними проектами був якнайбільшим.

Економіко–математична модель задачі формування інвестиційного портфеля та календарного плану його виконання у детермінованому випадку набирає такого вигляду:

$$\left.\begin{array}{l} N_\Sigma = \sum\limits_{j=1}^{n} N_j \sum\limits_{t=1}^{T_0 - T_j + 1} \dfrac{x_{jt}}{(1+r)^{t-1}} \to \max, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{\tau=1}^{\min\{t, T_j\}} I_{j\tau} x_{j,t+1-\tau} \le K_t, \quad t = \overline{1, T_0}, \\ \sum\limits_{t=1}^{T_0 - T_j + 1} x_{jt} \le 1; \quad x_{jt} \in \{0; 1\}, \quad t = \overline{1, T_0 - T_j + 1}; \quad j = \overline{1, n}. \end{array}\right\}$$

Маємо задачу цілочислового лінійного програмування з логічними змінними. Її розв’язування здійснюється з використанням відповідних оптимізаційних методів та програмних засобів.

Приклад 1.3.2. Нехай є 5 потенційних інвестиційних проектів, інформація про які наведена у таблиці 1.10 (інформація про перший проект відповідає даним таблиці 1.9).

Таблиця 1.10. Економічні показники потенційних інвестиційних проектів, млн. грн.

Номер проекту	Тривалість, років	Чистий дохід, зведений до початку виконання проекту	Щорічні інвестиційні витрати протягом життєвого циклу						
			1	2	3	4	5	6	7
1	5	486,613	50	40	30	–	–	–	–
2	4	547,311	100	150	50	–	–	–	–
3	6	284,192	40	70	100	–	–	–	–
4	5	315,640	60	120	–	–	–	–	–
5	7	459,811	70	80	50	–	–	–	–

Вважатимемо горизонт планування таким, що дорівнює 10 років. Щорічний ліміт інвестицій вважатимемо таким, що дорівнює 150 млн. грн. кожні перші два роки та 180 млн. грн. у кожний з наступних років. Нормативний коефіцієнт економічної ефективності інвестицій – 20 %.

Складемо математичну модель задачі за наведеними даними:

$$N_{\Sigma} = 486.613\sum_{t=1}^{6}\frac{x_{1t}}{1.2^{t-1}} + 547.311\sum_{t=1}^{7}\frac{x_{2t}}{1.2^{t-1}} + 284.192\sum_{t=1}^{5}\frac{x_{3t}}{1.2^{t-1}} +$$

$$+ 315.640\sum_{t=1}^{6}\frac{x_{4t}}{1.2^{t-1}} + 459.811\sum_{t=1}^{4}\frac{x_{5t}}{1.2^{t-1}} \to \max ,$$

$$50x_{11} + 100x_{21} + 40x_{31} + 60x_{41} + 70x_{51} \le 150 ,$$

$$50x_{12} + 40x_{11} + 100x_{22} + 150x_{21} + 40x_{32} + 70x_{31} +$$

$$+ 60x_{42} + 120x_{41} + 70x_{52} + 80x_{51} \le 150 ,$$

$$50x_{1,t} + 40x_{1,t-1} + 30x_{1,t-2} + 100x_{2,t} + 150x_{2,t-1} + 50x_{2,t-2} + 40x_{3,t} + 70x_{3,t-1} +$$

$$+ 100x_{3,t-2} + 60x_{4,t} + 120x_{4,t-1} + 70x_{5,t} + 80x_{5,t-1} + 50x_{5,t-2} \le 180 , \quad t = \overline{3,10} ,$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} \le 1 , \quad x_{17} = x_{18} = x_{19} = x_{1,10} = 0 ,$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} \le 1 , \quad x_{28} = x_{29} = x_{2,10} = 0 ,$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} \le 1 , \quad x_{36} = x_{37} = x_{38} = x_{39} = x_{3,10} = 0 ,$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{46} \le 1 , \quad x_{47} = x_{48} = x_{49} = x_{4,10} = 0 ,$$

$$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} \le 1 , \quad x_{55} = x_{56} = x_{57} = x_{58} = x_{59} = x_{5,10} = 0 ,$$

$$x_{jt} \in \{0; 1\} , \quad t = \overline{1, 11 - T_j} , \quad j = \overline{1, 5} .$$

Щоб знайти розв’язок цієї задачі скористаємося інструментом “Пошук рішення” табличного процесору Excel. Результати розрахунків наведено у таблиці 1.11. Зверніть увагу, що на початку планового періоду – через обмеженість інвестиційних ресурсів – можна розпочати лише два проекти: перший та п’ятий. Починаючи з третього року можна підключити до виконання четвертий проект, з четвертого року – третій, а другий проект можна буде розпочати останнім – починаючи з сьомого року. Такий календарний план забезпечить безперервне виконання кожного з проектів та максимально можливий загальний зведений чистий дохід у сумі 1513,375 млн. грн., але лише за відсутності ризику щодо можливих відхилень некерованих параметрів від їх проектних значень.

Детерміновану задачу про формування портфелю та календарного плану реального інвестування розв’язано.

Таблиця 1.11. Основні економічні показники оптимального портфелю та календарного плану виконання комплексу інвестиційних проектів у детермінованому випадку, млн. грн.

Проект	Рік		Чистий дохід, зведений до початку планового періоду	Щорічні інвестиційні витрати упродовж планового періоду									
	Початку	Закінчення		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	5	486,613	50	40	30	0	0	0	0	0	0	0
2	7	10	183,293	0	0	0	0	0	0	100	150	50	0
3	4	9	164,463	0	0	0	40	70	100	0	0	0	0
4	3	7	219,194	0	0	60	120	0	0	0	0	0	0
5	1	7	459,811	70	80	50	0	0	0	0	0	0	0
Разом:			**1513,375**	**120**	**120**	**140**	**160**	**70**	**100**	**100**	**150**	**50**	**0**
Довідково: щорічний ліміт інвестиційних ресурсів				150	150	180	180	180	180	180	180	180	180

Приклад 1.3.2 закінчено.

Вправи до підрозділу 1.3

Вправа 1.3.1. Побудувати цільову функцію, яка відбиває вимогу мінімізації загальних зведених інвестиційних витрат при формуванні портфелю та календарного плану реального інвестування.

Вправа 1.3.2. Проаналізувати, чи залишатиметься наведений в таблиці 1.11 план оптимальним за критерієм мінімізації загальних зведених інвестиційних витрат.

Вправа 1.3.3. Порівняти показники зведеного чистого доходу та зведених інвестиційних витрат для плану, показаного у таблиці 1.11, та плану, що відповідає мінімальним зведеним інвестиційним витратам. Зробити висновки.

1.4. Багатокритеріальний вибір інвестиційного проекту

Оцінювання економічної ефективності альтернативних проектів реального інвестування з метою визначення для реалізації якнайкращого часто потрібно здійснювати з одночасним врахуванням кількох критеріїв оптимальності. До основних показників економічної ефективності інвестиційного проекту відносять наступні: чистий зведений дохід, термін окупності, внутрішня норма дохідності, індекс рентабельності інвестицій тощо. Тому першочерговим завданням ОПР є визначення переліку та оптимізаційного спрямування кожного з критеріальних показників, за якими визначатиметься найкращий інвестиційний проект. Вважатимемо, що ОПР визначила декілька критеріїв оптимальності для вибору найкращого інвестиційного проекту.

Опрацюємо методику багатокритеріального вибору на прикладі визначення якнайкращого з восьми однотипних інвестиційних проектів за критеріями максимізації чистого зведеного доходу та мінімізації терміну окупності інвестицій. Вихідні дані до цієї задачі наведено у таблиці 1.12.

Таблиця 1.12. Критеріальні показники альтернативних інвестиційних проектів

Показник	Проект							
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
Чистий зведений дохід, грошових одиниць	150	200	120	170	140	100	150	110
Термін окупності, років	6	6	3	5	4	7	3	5

Методика може бути використаною за будь–якої кількості критеріїв оптимальності. Проте двокритеріальну задачу зручно проілюструвати графічно, побудувавши діаграму оцінок альтернатив (рис. 1.5).

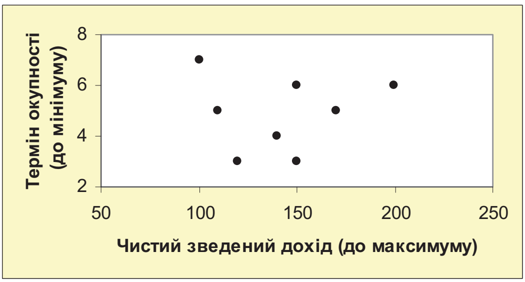


Рис. 1.5. Діаграма критеріальних оцінок альтернативних інвестиційних проектів

Кожна з альтернатив на діаграмі оцінок подана крапкою, координати якої являють собою значення кожного з критеріальних показників, що відповідають цій альтернативі.

У разі багатокритеріального оцінювання всі альтернативи розподіляються на дві підмножини альтернатив: ефективних та неефективних (це загальновживані в теорії багатокритеріальній оптимізації назви відповідних підмножин). Неефективною називається альтернатива, яку можна замінити на іншу альтернативу так, щоб покращити показник хоча б за одним з критеріїв оптимальності і, водночас, щоб значення кожного з інших критеріїв оптимальності принаймні не погіршилися б. Навпаки, при заміні ефективної альтернативи на будь-яку іншу якщо хоча б один з критеріальних показників покращиться, тоді принаймні один з решти критеріальних показників обов'язково погіршиться.

З цих означень випливає, що неефективні альтернативи не можна обирати за розв'язок багатокритеріальної задачі. Вибір слід робити лише з множини ефективних альтернатив.

В нашому прикладі ефективними є альтернативи B, D, та G, неефективними – всі інші альтернативи: A, C, E, H і F.

Лише інколи оцінки всіх ефективних альтернатив можуть збігатися – тоді за найкращу обиратимемо довільну з ефективних альтернатив (у цьому випадку ефективні альтернативи називаються також абсолютно оптимальними). Але типовим є інший випадок – коли серед оцінок ефективних альтернатив є різні, тобто коли множина абсолютно оптимальних альтернатив порожня (зараз маємо якраз цей випадок). Саме у такому випадку для вибору найкращої з альтернатив потрібна додаткова інформація про переважання ОПР.

Діалог з ОПР може бути побудованим у такий спосіб.

1-й крок. ОПР отримує інформацію про найкращі та найгірші значення кожного з критеріальних показників (таблиця 1.13), а також повідомлення про відсутність серед наявних альтернатив абсолютно оптимальної.

Таблиця 1.13. Межі варіації критеріальних показників на множині допустимих альтернатив

Показник	Значення	
	найкраще	найгірше
Чистий зведений дохід (N), грошових одиниць	200	100
Термін окупності (S), років	3	7

ОПР повинна повідомити, яка, на її думку, мінімальна величина скорочення терміну окупності ΔS може компенсувати зменшення чистого зведеного доходу на одиницю?

Відповідь на це питання дозволяє побудувати допоміжний адитивний критерій оптимальності:

$$z = \alpha \frac{N - N^0}{N^* - N^0} + \beta \frac{S^0 - S}{S^0 - S^*} \to \max,$$

де N і S – поточні значення відповідних критеріальних показників;
N^0, N^*, S^0 та S^* – відповідно, найгірші та найкращі значення окремо кожного з критеріальних показників на множині допустимих альтернатив;
α і β – додатні вагомі множники частинних критеріїв оптимальності.

З використанням загальновживаної умови нормування $(\alpha + \beta = 1)$ узагальнений адитивний критерій оптимальності, побудований на основі інформації про значення ΔS, набирає вигляду:

$$z = \frac{\Delta S(N - N^0) + (S^0 - S)}{\Delta S(N^* - N^0) + (S^0 - S^*)} \to \max.$$

Користуючись наведеними у таблиці 1.13 граничними значеннями кожного з критеріальних показників, одержимо:

$$z = \frac{\Delta S(N - 100) + (7 - S)}{\Delta S(200 - 100) + (7 - 3)} \to \max.$$

Процес обчислення узагальненої оцінки кожної з альтернатив при $\Delta S = 0.03$ показано у таблиці 1.14. У цій таблиці перші два рядки містять вихідну інформацію про інвестиційні проекти, яку було наведено у таблиці 1.12.

Альтернатива, яка отримає найбільшу узагальнену оцінку, буде рекомендованою для вибору першою.

Таблиця 1.14. Узагальнені оцінки альтернативних інвестиційних проектів ($\Delta S = 0.03$)

Показник	Проект							
	A	B	C	D	E	F	G	H
N	150	200	120	170	140	100	150	110
S	6	6	3	5	4	7	3	5
$\Delta S(N - N^0)$	1,5	3	0,6	2,1	1,2	0	1,5	0,3
$(S^0 - S)$	1	1	4	2	3	0	4	2
z	0,357	0,571	0,657	0,586	0,600	0,000	0,786	0,329

2-й крок. ОПР отримує рекомендацію обрати за найкращий проект G, який отримав максимальну узагальнену оцінку:

$$G = \begin{bmatrix} 150 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Якщо ОПР погоджується з цією рекомендацією, пошук закінчено.

У супротивному випадку, якщо ОПР не задоволена досягнутими рівнями критеріальних показників, вона повинна вказати за кожним з критерії рівні, які вона вважає гранично припустимими. Нехай ОПР вказала на такі гранично припустимі для неї рівні чистого зведеного доходу N_0 та терміну окупності S_0:

$$N_0 = 175 \text{ грошових одиниць,}$$
$$S_0 = 4{,}7 \text{ роки.}$$

Оскільки ці рівні одночасно можуть виявитися недосяжними, для визначення реальних гранично припустимих рівнів можна скористатися допоміжною оптимізаційною задачею:

$$\begin{cases} t \to \max, \\ N \ge N_0 + t, \\ S \le S_0 - \Delta S \cdot t, \end{cases}$$

де векторні оцінки (N, S) відповідають наявним інвестиційним проектам.

Позначимо розв'язок цієї задачі через t^*. Можливі три випадки:

1) $t^* = 0$. Це означає, що гранично припустимі для ОПР рівні чистого зведеного доходу N_0 та терміну окупності S_0 виявилися досяжними, але одночасне покращення цих рівнів є неможливим;

2) $t^* > 0$. У такому випадку гранично припустимі для ОПР рівні чистого зведеного доходу N_0 та терміну окупності S_0 не лише є одночасно досяжними, а також можуть бути дещо покращені;

3) $t^* < 0$. Цей результат свідчить, що вказаних ОПР гранично припустимих рівнів чистого зведеного доходу N_0 та терміну окупності S_0 одночасно досягти неможливо, але є певні інші одночасно досяжні рівні, які визначатимуться знайденим значенням t^*.

Далі за узагальненою адитивною оцінкою визначається найцінніша альтернатива серед тих, що задовольняють критеріальні обмеження:

$$N \ge N_0 + t^*,$$
$$S \le S_0 - \Delta S \cdot t^*.$$

Ця альтернатива є ефективною; умову ефективності забезпечує узагальнений адитивний критерій оптимальності. Вона буде запропонована ОПР.

В нашому прикладі маємо 8 альтернатив. Тому допоміжна задача набирає вигляду:

$$\begin{cases} t \to \max, \\ \sum_{j=1}^{8} N_j x_j \ge N_0 + t, \\ \sum_{j=1}^{8} S_j x_j \le S_0 - \Delta S \cdot t, \\ \sum_{j=1}^{8} x_j = 1, \\ x_j \in \{0;1\}, \quad j = \overline{1,8}. \end{cases}$$

Потрібно знайти розв'язок цієї простої задачі частково цілочислового лінійного програмування з логічними змінними, поклавши $\Delta S = 0.03$ (це значення було отримано від ОПР на першому кроці) та $N_0 = 175$ і $S_0 = 4.7$ (ці значення було отримано на другому кроці).

Користуючись інструментом "Пошук рішення", знаходимо: $t^* = -10$. Це означає, що запропоновані ОПР гранично припустимі рівні чистого зведеного доходу та терміну окупності S_0 виявилися одночасно недосяжними. Але одночасно досяжними є рівні чистого зведеного доходу у розмірі 165 грошових одиниць та терміну окупності 5 років. Найціннішою з альтернатив, які відповідають зазначеним межам, є альтернатива D.

<u>3-й крок</u>. ОПР отримує рекомендацію обрати за найкращий проект D:

$$D = \begin{bmatrix} 170 \\ 5 \end{bmatrix},$$

який менше відрізняється від гранично припустимих для ОПР рівнів $\begin{bmatrix} N_0 \\ S_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 175 \\ 4.7 \end{bmatrix}$, аніж перший варіант $G = \begin{bmatrix} 150 \\ 3 \end{bmatrix}$. Отже, якщо переважання ОПР не зміняться, проект D буде визнано нею за найкращий.

Задачу багатокритеріального вибору розв’язано.

На закінчення звернемо увагу, що наведена методика поєднує два підходи до розв’язування задач багатокритеріального вибору. Перший підхід полягає у побудові допоміжного узагальненого адитивного критерію оптимальності, а другий підхід – у залученні до задачі додаткових обмежень щодо гранично припустимих для ОПР рівнів критеріальних показників. Це дозволяє краще враховувати переважання ОПР, а також уникати проблем, пов’язаних з топологічними особливостями множини оцінок допустимих альтернатив.

Серед інших підходів до вирішення проблем багатокритеріального вибору зазначимо на метод аналізу ієрархій (МАІ), запропонований Т.Сааті[1]. Пропонуємо опрацювати МАІ самостійно.

Вправи до підрозділу 1.4

Вправа 1.4.1. Визначити, які з наведених десяти інвестиційних проектів є ефективними, а які – неефективними, якщо фінансовий менеджер бере до уваги наступні три критерії оптимальності:

- зведений прибуток N – до максимуму;
- внутрішня норма дохідності i – до максимуму;
- індекс рентабельності інвестицій π – до максимуму.

[1] Дивись, наприклад: Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий: Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1993. – 320 с.; Саати Т. Принятие решений при зависимостях и обратных связях: Аналитические сети: Пер. с англ. – М.: Издательство ЛКИ, 2008. – 360 с.

Показник	Інвестиційний проект									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N	24	32	15	18	27	34	42	28	14	31
i	0,11	0,12	0,09	0,21	0,14	0,17	0,22	0,08	0,18	0,16
π	0,24	0,36	0,19	0,31	0,27	0,33	0,24	0,29	0,32	0,21

Вправа 1.4.2. Побудувати узагальнений адитивний критерій оптимальності $z = z(N, i, \pi)$ для визначеного найкращого з інвестиційних проектів за критеріями, наведеними у вправі 1.4.1, якщо ОПР вважає, що зменшення індексу рентабельності інвестицій на 0,01 може бути компенсоване або збільшенням внутрішньої ставки дохідності на 0,02, або ж збільшенням зведеного прибутку на 5 грошових одиниць. Показати варіант спрощення формули узагальненого критерію, якщо відмовитись від умови нормування вагових множників частинних критеріїв.

Вправа 1.4.3. Користуючись розглянутою методикою багатокритеріальної оптимізації визначити найкращий з інвестиційних проектів (вправа 1.4.1), виходячи з Ваших власних переважань. Чи зміниться Ваш вибір, якщо скористатися МАІ?

1.5. Визначення ефективної системи оподаткування суб'єктів господарювання

Питання про визначення нормативів оподаткування, які б поряд з фіскальною одночасно виконували і стимулюючу функцію, є актуальним. Серед різноманітних систем оподаткування широкого поширення здобули, насамперед, три: пропорційна, прогресивна та регресивна. У пропорційній системі норматив оподаткування залишається сталим незалежно від розміру бази, що оподатковується. За прогресивної системи норматив оподаткування збільшується із зростанням оподатковуваної бази. Нарешті, за регресивної системи норматив оподаткування із збільшенням оподатковуваної бази зменшується.

Проблеми оподаткування постійно привертають до себе увагу фахівців – науковців і практиків, оскільки оподаткування не лише забезпечує державу засобами фінансування суспільно необхідних витрат, а є одночасно одним з найдійовіших важелів державного регулювання економіки, особливо за умов ринку. Практично усіма дослідниками відзначається, що стимулююча функція є однією з найголовніших функцій системи оподаткування. Зазначаються недоліки прогресивної системи оподаткування, досліджуються шляхи вдосконалення пропорційної системи – передусім скороченням нормативу оподаткування, запровадженням в окремих випадках спрощених систем або спеціальних режимів оподаткування та певних податкових пільг. Проте майже не досліджується регресивна система оподаткування, хоч саме ця система, як буде показано далі, може найефективніше виконувати, поряд із фіскальною та регулюючою, і стимулюючу функцію.

Висновок про те, що із зростанням нормативу оподаткування розмір податкових надходжень спочатку збільшуватиметься, але потім зменшуватиметься, є загальновідомим. Принципово новим є висновок, що оптимальний норматив податкових відрахувань, який забезпечуватиме максимальний розмір податкових надходжень до бюджету, повинен узгоджуватися з рівнем економічної ефективності діяльності конкретного суб'єкта господарювання. А саме: більш високій економічній ефективності виробництва має відповідати менший норматив оподаткування. Це означає, що із зростанням величини доходу (прибутку) суб'єкта господарювання норматив оподаткування доходу (прибутку) повинен зменшуватися. Економічні переваги регресивної системи оподаткування доходів та прибутку суб'єктів господарювання полягають у тому, що вона виконує стимулюючу функцію щодо діяльності суб'єктів господарювання і, водночас, забезпечує максимум податкових надходжень до бюджету.

<u>Прогресивність регресивної системи оподаткування доходів суб'єктів господарювання</u>. Виробничу діяльність суб'єкта господарювання можна досить адекватно описати степеневою виробничою функцією:

$$y = ax^{\mu}, \quad x \geq 0,$$

яка показує залежність доходу y, отриманого внаслідок реалізації вироблених товарів та наданих послуг, від загальних виробничих витрат x суб'єкта господарювання.

Вважається, що із зростанням виробничих витрат обсяг виготовленої та реалізованої продукції (у вартісному вимірі) зростає, проте гранична продуктивність виробничої діяльності зменшується. Тому параметри a і μ виробничої функції задовольняють умови:

$$a > 0, \quad 0 < \mu < 1.$$

Параметр μ виробничої функції характеризує рівень ефективної організації виробництва суб'єктом господарювання, оскільки він дорівнює еластичності $\varepsilon_x(y)$ доходу y за витратами x:

$$\varepsilon_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{y(x)} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \left(\ln y(x)\right)' \cdot x = \mu .$$

Таким чином, зростання параметра μ свідчить про підвищення рівня ефективної організації виробництва суб'єктом господарювання.

Нехай π – норматив оподаткування доходу ($0 < \pi < 1$). Тоді загальна сума податку на дохід складе величину πy, а чистий дохід z суб'єкта господарювання – як різниця між доходом та податками – дорівнюватиме:

$$z = y - \pi y = ax^{\mu}(1-\pi).$$

Чистий прибуток p виробника, у свою чергу, дорівнюватиме різниці між чистим доходом та витратами:

$$p = z - x = ax^{\mu}(1-\pi) - x .$$

Спостерігаємо, що із збільшенням виробничих витрат чистий прибуток спочатку зростає, але потім буде зменшуватися (рис. 1.6).

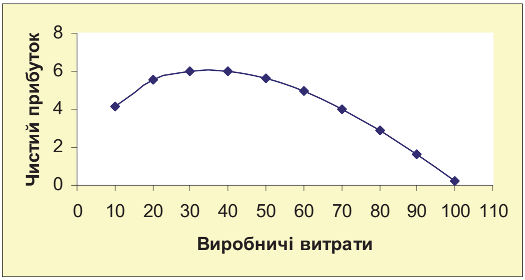


Рис.1.6. Залежність чистого прибутку p суб'єкта господарювання від розміру виробничих витрат x ($p = 2x^{0.85} - x$, $10 \le x \le 100$)

Метою виробничої діяльності суб'єкта господарювання є максимізація чистого прибутку. Тому оптимальні виробничі витрати x^*, які визначають масштаби виробничої діяльності, відповідатимуть нульовому рівню граничного чистого прибутку:

$$p'_x = a\mu x^{\mu-1}(1-\pi) - 1 = 0$$

З рівняння отримуємо:

$$x^* = (a\mu(1-\pi))^{\frac{1}{1-\mu}}.$$

/Для прикладу, наведеного на рис. 1.6, $x^* = 1.7^{\frac{1}{0.15}} = 34.38$./

Тепер маємо можливість обчислити надходження d від оподаткування доходів суб'єкта господарювання залежно від нормативу оподаткування π:

$$d = a^{\frac{1}{1-\mu}} \mu^{\frac{\mu}{1-\mu}} \pi (1-\pi)^{\frac{\mu}{1-\mu}}.$$

Ця залежність показує, що із зростанням нормативу оподаткування розмір податкових надходжень спочатку збільшуватиметься, але потім – зменшуватиметься (рис. 1.7).

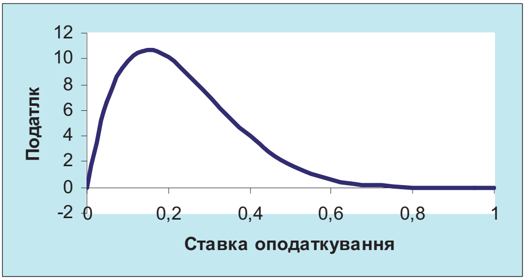


Рис.1.7. Залежність розміру податкових надходжень від ставки оподаткування

Оптимальний розмір π^* нормативу оподаткування, який забезпечуватиме максимум податкових надходжень, визначається умовою $d'_\pi = 0$, тобто:

$$(1-\pi)^{\frac{\mu}{1-\mu}} - \frac{\mu}{1-\mu}\pi(1-\pi)^{\frac{\mu}{1-\mu}-1} = 0.$$

З цього рівняння остаточно знаходимо:

$$\pi^* = 1-\mu.$$

/В нашому прикладі $\mu = 0.85$, тому $\pi^* = 0.15$./

Дійшли висновку, що максимальний розмір податкових надходжень буде отримано тоді, коли норматив оподаткування доходів π^* узгоджуватиметься з показником рівня ефективної організації виробництва суб'єктом господарювання μ, а саме: більш ефективній організації виробництва має відповідати менший норматив оподаткування. Зростання рівня ефективної організації виробництва означає, що при однакових витратах дохід суб'єкта господарювання збільшуватиметься. Отже, оподаткування доходів суб'єктів господарювання доцільно здійснювати за регресивною системою: із зростанням доходу норматив оподаткування доходу повинен зменшуватися.

Прогресивність регресивної системи оподаткування прибутку суб’єктів господарювання. Регресивна система оподаткування є ефективною і по відношенню до прибутку суб’єктів господарювання. Обґрунтуємо це.

Знову подамо виробничу діяльність суб’єкта господарювання степеневою функцією залежності доходу суб’єкта господарювання y від його загальних виробничих витрат x: $y = ax^{\mu}$, $x \geq 0$. Нагадаємо, що параметри a і μ цієї функції задовольняють умови: $a > 0$, $0 < \mu < 1$, причому параметр μ характеризує рівень ефективної організації виробництва суб’єктом господарювання: зростання параметру свідчить про підвищення цього рівня та означає, що за інших сталих умов дохід та прибуток – як результати виробничої діяльності підприємства – збільшуються.

Зараз через π позначимо норматив оподаткування прибутку: $0 < \pi < 1$. Тоді загальна сума податку на прибуток складе величину $\pi(y - x)$, а чистий прибуток p суб’єкта господарювання – як частина прибутку, що лишається у нього після сплати податків, – дорівнюватиме: $p = (1 - \pi)(ax^{\mu} - x)$.

Для суб’єкта господарювання корисність u результатів його виробничої діяльності залежить як від розміру чистого прибутку p, так і від величини виробничих витрат x. Показник корисності досить добре апроксимується лінійною функцією:

$$u = p - kx = (1 - \pi)(ax^{\mu} - x) - kx, \qquad k > 0,$$

де конкретне значення дійсного числа k визначається індивідуальними особливостями системи переважань відповідної ОПР.

Отже, із збільшенням виробничих витрат корисність результатів виробничої діяльності для підприємства спочатку зростає, але потім буде зменшуватися. Тому оптимальні виробничі витрати x^* відповідатимуть нульовому рівню граничної корисності:

$$u'_x = (1 - \pi)\left(\frac{a\mu}{x^{1-\mu}} - 1\right) - k = 0,$$

або

$$\frac{a\mu}{x^{1-\mu}} = \frac{k + 1 - \pi}{1 - \pi},$$

тобто

$$x^* = \left[\frac{a\mu(1-\pi)}{k+1-\mu}\right]^{\frac{1}{1-\mu}}.$$

Обчислимо тепер бюджетні надходження d від оподаткування прибутку суб’єкта господарювання:

$$d = \pi\left[a(x^*)^{\mu} - x^*\right] = \pi x^*\left[a(x^*)^{\mu-1} - 1\right] = \pi\left[\frac{a\mu(1-\pi)}{k+1-\pi}\right]^{\frac{1}{1-\mu}}\left[\frac{k+1-\pi}{\mu(1-\pi)} - 1\right],$$

тобто, остаточно,

$$d=\pi\left[\frac{a\mu(1-\pi)}{k+1-\pi}\right]^{\frac{1}{1-\mu}}\left[\frac{k+(1-\pi)(1-\mu)}{\mu(1-\pi)}\right].$$

Наведена залежність загальної величини податкових надходжень d від нормативу оподаткування прибутку π показує, що із зростанням нормативу оподаткування розмір податкових надходжень спочатку збільшуватиметься, але потім – зменшуватиметься. Тому оптимальний розмір π^* нормативу оподаткування прибутку, який забезпечуватиме максимум податкових надходжень, визначається умовою: $d'_\pi = 0$. /З метою спрощення розрахунків замість цієї умови скористаємося рівносильною до неї умовою: $(\ln d)'_\pi = 0$./

Маємо:

$$\ln d = \ln\pi + \frac{1}{1-\mu}\big(\ln(a\mu)+\ln(1-\pi)-\ln(k+1-\pi)\big)+$$
$$+\ln(k+(1-\pi)(1-\mu))-\ln\mu-\ln(1-\pi).$$

Отже, дістанемо рівняння:

$$(\ln d)'_\pi = \frac{1}{\pi}+\frac{1}{1-\mu}\left(-\frac{1}{1-\pi}+\frac{1}{k+1-\pi}\right)+\frac{-(1-\mu)}{k+(1-\pi)(1-\mu)}+\frac{1}{1-\pi}=$$
$$=\frac{1}{\pi(1-\pi)}-\frac{k}{(1-\mu)(1-\pi)(k+1-\pi)}-\frac{1-\mu}{k+(1-\pi)(1-\mu)}=$$
$$=\frac{k+(1-\pi)^2(1-\mu)}{\pi(1-\pi)(k+(1-\pi)(1-\mu))}-\frac{k}{(1-\mu)(1-\pi)(k+1-\pi)}=0,$$

або:

$$\frac{k+(1-\pi)^2(1-\mu)}{k+(1-\pi)(1-\mu)}=\frac{k\pi}{(1-\mu)(k+1-\pi)}.$$

Уведемо нові змінні: $1-\pi=s$, $1-\mu=t$. Тоді умова оптимальності загальної величини податкових надходжень набере вигляду:

$$\frac{k+s^2t}{k+st}=\frac{k(1-s)}{t(k+s)},$$

або

$$F(s,t)=s^3t^2+ks^2t^2+ks^2t+k^2s+k^2t-k^2=0.$$

З останнього рівняння, яке неявно визначає залежність між змінними s і t в околі оптимуму нормативу податкових відрахувань π^*, за теоремою про похідну неявної функції обчислюємо:

$$s'_t=-\frac{F'_t(s,t)}{F'_s(s,t)}=-\frac{2s^3t+2ks^2t+ks^2+k^2}{2s^2t^2+2kst^2+2kst+k^2}<0.$$

Від’ємна похідна свідчить, що залежність змінної $s=1-\pi^*$ за змінною $t=1-\mu$ в околі оптимуму нормативу податкових відрахувань π^* є спадною. Отже, спадною є і залежність оптимального нормативу податкових відрахувань π^* від рівня ефективної організації виробництва суб'єктом господарювання μ.

Таким чином, максимальний розмір податкових надходжень буде отримано тоді, коли норматив оподаткування прибутку π^* узгоджуватиметься з показником рівня ефективної організації виробництва μ, а саме: більш ефективній організації виробництва має відповідати менший норматив оподаткування.

Врахуємо тепер, що із зростанням рівня ефективної організації виробництва прибуток суб'єкта господарювання збільшуватиметься. З цього випливає висновок про доцільність запровадження саме регресивної системи оподаткування прибутку: із зростанням величини прибутку норматив оподаткування прибутку повинен зменшуватися.

Запровадження регресивної системи оподаткування стимулюватиме суб'єктів господарювання як до підвищення рівня ефективної організації виробництва, так і до збільшення виробничих витрат. Це сприятиме зростанню обсягів виробництва, стримуватиме перетік капіталів до тіньової сфери, забезпечуватиме підвищення загальних обсягів податкових надходжень. Тому регресивну систему оподаткування можна вважати прогресивною, такою, яка відповідає завданням забезпечення економічного зростання України.

Вправи до підрозділу 1.5

Вправа 1.5.1. Побудувати порівняльну таблицю переваг та недоліків прогресивної, пропорційної та регресивної систем оподаткування суб'єктів господарювання за такою формою:

Система оподаткування		
Прогресивна	**Пропорційна**	**Регресивна**
Позитивні риси: (назвати)	Позитивні риси: (назвати)	Позитивні риси: (назвати)
Негативні риси: (назвати)	Негативні риси: (назвати)	Негативні риси: (назвати)

Проаналізувати побудовану порівняльну таблицю та зробити висновки.

Вправа 1.5.2. Навести приклади можливого практичного використання висновків щодо переваг та недоліків альтернативних систем оподаткування у внутрішньому фінансовому менеджменті банку, страхової компанії, виробничого підприємства тощо.

Розділ 2. Теоретичні основи оптимізації фінансових рішень за умов ризику

2.1. Оцінювання випадкового доходу з огляду на індивідуальне ставлення до ризику

У випадку ризику майбутній дохід вважається випадковою величиною. Постає проблема оцінювання такого випадкового доходу. Позначатимемо через x – детермінований (визначений, невипадковий), а через ξ – випадковий дохід із можливими значеннями в межах від a до b грошових одиниць ($a < b$), через p – деяку імовірність: $0 \le p \le 1$.

Оцінювання дискретного випадкового доходу. Дискретну випадкову величину доходу можна розглядати як лотерею. Найпростіша з лотерей має лише два можливих наслідки. Наведемо відповідне означення.

Лотереєю $< a, p, b >$ називатимемо випадкову величину доходу ξ, яка з імовірністю $(1-p)$ може набрати гірше значення a та з імовірністю p – краще значення b.

Дохід $\hat{x}_p$ називатимемо детермінованим еквівалентом лотереї $< a, p, b >$, якщо він є рівноцінним до цієї лотереї:

$$\hat{x}_p : \quad \hat{x}_p \sim < a, p, b >.$$

Для довільної імовірності $p \in [0,1]$ детермінований еквівалент $\hat{x}_p$ завжди існує, причому $\hat{x}_0 = a$, $\hat{x}_1 = b$, а залежність $\hat{x}_p$ від p є неперервно зростаючою. Це означає, що для довільного детермінованого рівня доходу $\hat{x} \in [a, b]$ існує така імовірність $p_{\hat{x}}$, за якої $\hat{x}$ є детермінованим еквівалентом лотереї $< a, p_{\hat{x}}, b >$:

$$p_{\hat{x}} : \quad \hat{x} \sim < a, p_{\hat{x}}, b >,$$

причому $p_a = 0$, $p_b = 1$, а залежність $p_{\hat{x}}$ від $\hat{x}$ є неперервно зростаючою на відрізку $[a, b]$.

Покладемо для довільного детермінованого рівня доходу $x \in [a, b]$ $f(x) = p_x$. Визначена у такий спосіб числова функція f:

$$u = f(x), \quad x \in [a, b],$$

називається функцією корисності доходу. Ця функція є неперервно зростаючою на відрізку $[a, b]$ та нормованою значеннями 0 (найменше, відповідає найгіршому рівню доходу) та 1 (найбільше значення функції корисності, відповідає найкращому рівню доходу). Причому, за побудовою, вона має властивість:

$$x \sim < a, f(x), b > \text{ для довільного } x \in [a, b].$$

Корисність $f(\hat{x}_p)$ детермінованого еквіваленту $\hat{x}_p$ лотереї $< a, p, b >$ саме й визначає корисність цієї лотереї. Отже, корисність лотереї – це корисність її детермінованого еквіваленту.

Розглянемо, далі, лотерею $L = < \frac{x_1}{p_1}, \quad \ldots, \frac{x_m}{p_m} >$, в якій випадкова величина доходу ξ може набирати значень $x_i \in [a, b]$ з ймовірностями, відповідно, $p_i \ge 0$ ($i = \overline{1, m}$), де $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$. Потрібно визначити детермінований еквівалент та корисність такої лотереї.

Примітка. Проста лотерея $< a, p, b >$, яка була уведена першою, у новій формі запису виглядала б так: $< \frac{a}{1-p}, \quad \frac{b}{p} >$.

Вивчимо лотерею L. Кожний з можливих наслідків x_i цієї лотереї є рівноцінним до лотереї $< a, f(x_i), b >$:

$$x_i \sim < a, f(x_i), b >, \; i = \overline{1, m},$$

– це випливає з визначення функції корисності f.

Тому лотерея L є тотожною до лотереї L_1, де

$$L_1 = < \frac{< a, f(x_1), b >}{p_1}, \quad \ldots, \frac{< a, f(x_m), b >}{p_m} >,$$

тобто детермінований еквівалент $\hat{x}_L$ лотереї L є одночасно і детермінованим еквівалентом лотереї L_1.

В кожній з лотерей $< a, f(x_i), b >$ кращий наслідок b може статися з імовірністю $f(x_i)$, $i = \overline{1, m}$. Тому в лотереї L_1 цей наслідок b може статися з імовірністю p_L, що дорівнює:

$$p_L = \sum_{i=1}^{m} f(x_i) p_i .$$

Отже, лотерея L_1 є, фактично, лотереєю $< a, p_L, b >$, корисність якої дорівнює p_L. Тому детермінований еквівалент $\hat{x}_L$ і лотереї L_1, і тотожної до неї вихідної лотереї L ми можемо знайти за функцією корисності доходу f з рівняння:

$$f(\hat{x}_L) = p_L .$$

Остаточно для лотереї $L = < \frac{x_1}{p_1}, \quad \ldots, \frac{x_m}{p_m} >$ маємо рівність:

$$f(\hat{x}_L) = \sum_{i=1}^{m} f(x_i) p_i , \tag{2.1}$$

яка свідчить, що <u>корисність лотереї дорівнює очікуваній корисності її можливих наслідків</u>.

В свою чергу, детермінований еквівалент $\hat{x}_L$ лотереї $L = < \frac{x_1}{p_1}, \quad \ldots, \frac{x_m}{p_m} >$ дорівнює:

$$\hat{x}_L = f^{-1}\left(\sum_{i=1}^{m} f(x_i) p_i \right),$$

де f^{-1} – це функція, яка є оберненою до функції корисності доходу f.

Оцінювання неперервного випадкового доходу. Коли майбутній дохід розглядається як неперервна випадкова величина ξ, що має на відрізку $[a,b]$ функцію щільності розподілу імовірностей $p(x)$:

$$p(x) \geq 0,\ x \in [a,b];\ \int_a^b p(x)dx = 1,$$

детермінований еквівалент $\hat{x}_\xi$ такого неперервного випадкового доходу, за аналогією до дискретного випадку, визначається рівнянням:

$$f(\hat{x}_\xi) = \int_a^b f(x)p(x)dx, \qquad (2.2)$$

де f, як і раніше, – функція корисності детермінованого доходу x, визначена відрізку $[a,b]$, а $f(\hat{x}_\xi)$, відповідно, – корисність випадкового доходу ξ.

Формули (2.1) та (2.2) називають також формулами очікуваної корисності випадкового доходу ξ, а результат обчислення за цими формулами позначають через $\overline{u}$, щоб змістовно розрізняти очікувану корисність випадкового доходу та корисність u детермінованого доходу.

Помічаємо, що рівності (2.1) та (2.2) не порушуватимуться, якщо щодо функції корисності доходу f виконати позитивне лінійне перетворення:

$$f \to Af + B,\ \text{де}\ A > 0,$$

в якому A і B – деякі сталі дійсні числа (вимога $A > 0$ потрібна, щоб перетворена функція $Af(x) + B$ зберігалася зростаючою на відрізку $[a,b]$). Це означає, що у разі потреби введені раніше умови нормування функції корисності доходу можна замінити на інші, підбираючи при оцінюванні корисності доходу початок відліку (значенням B) та масштаб вимірювань (значенням A) зручними для оперування з відповідними числами.

Теорему про існування, неперервність та єдиність с точністю до довільного позитивного лінійного перетворення функції корисності було сформульовано та доведено Нейманом і Моргенштерном[1], які вважаються засновниками сучасної теорій корисності у прийнятті рішень за умов ризику.

Загальний висновок щодо оцінювання випадкового доходу. Довільний (дискретний або неперервний) випадковий дохід ξ може оцінюватися або його детермінованим еквівалентом $\hat{x}_\xi$, або ж корисністю цього детермінованого еквіваленту $f(\hat{x}_\xi)$, яка обчислюється за формулами очікуваної корисності (2.1) або (2.2). Результати оцінювання залежать як від закону (функції щільності) розподілу імовірностей випадкового доходу ξ,

[1] Нейман фон Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение: Пер. с англ. – М.: Наука, 1970. – 700 с.

так і від функції корисності f, яка відтворює індивідуальні переважання ОПР за умов ризику, тобто індивідуальне ставлення ОПР до ризику. Отже, при оцінюванні випадкового доходу потрібно враховувати індивідуальне ставлення до ризику конкретної ОПР.

Основні типи індивідуального ставлення до ризику. Розрізняють, виходячи з особливостей ставлення ОПР до ризику, три основних типи індивідуальних переважань:

- нейтральність,
- несхильність,
- схильність.

ОПР вважається нейтральною до ризику, якщо для двох довільних рівнів доходу x' та x'' і для довільної імовірності p $(0 < p < 1)$ детермінований еквівалент $\hat{x}_p$ лотереї $< x', p, x'' >$ збігається з очікуваним рівнем доходу у цій лотереї $\bar{x}_p$:

$$\hat{x}_p = \bar{x}_p,$$

де:

$$\bar{x}_p = (1 - p)x' + px''.$$

ОПР вважається несхильною до ризику, якщо для двох довільних рівнів доходу x' та x'' і для довільної імовірності p $(0 < p < 1)$ детермінований еквівалент $\hat{x}_p$ лотереї $< x', p, x'' >$ завжди є меншим від очікуваного рівня доходу $\bar{x}_p$ у цій лотереї:

$$\hat{x}_p < \bar{x}_p.$$

Нарешті, ОПР вважається схильною до ризику, якщо для двох довільних рівнів доходу x' і x'' та для довільної імовірності p $(0 < p < 1)$ детермінований еквівалент $\hat{x}_p$ лотереї $< x', p, x'' >$ завжди є більшим від очікуваного рівня доходу $\bar{x}_p$ у цій лотереї.

$$\hat{x}_p > \bar{x}_p.$$

Враховуючи, що функція корисності доходу f є зростаючою, наведені означення основних типів індивідуального ставлення до ризику можна сформулювати у такий спосіб.

ОПР є нейтральною до ризику тоді і тільки тоді, коли для двох довільних рівнів доходу x' і x'' та для довільного числа λ $(0 < \lambda < 1)$ корисність детермінованого еквіваленту лотереї $< x', \lambda, x'' >$, яка дорівнює $(1-\lambda) f(x') + \lambda f(x'')$, збігається з корисністю $f((1-\lambda)x' + \lambda x'')$ очікуваного доходу цієї лотереї, тобто коли для функції корисності f завжди справджується рівність:

$$(1-\lambda) f(x') + \lambda f(x'') = f((1-\lambda)x' + \lambda x'').$$

ОПР є несхильною до ризику тоді і тільки тоді, коли для двох довільних рівнів доходу x' і x'' та для довільного числа λ $(0<\lambda<1)$ завжди справджується нерівність:

$$(1-\lambda)f(x')+\lambda f(x'') < f((1-\lambda)x'+\lambda x'').$$

І, нарешті, ОПР є схильною до ризику тоді і тільки тоді, коли для двох довільних рівнів доходу x' і x'' та для довільного числа λ $(0<\lambda<1)$ завжди справджується нерівність:

$$(1-\lambda)f(x')+\lambda f(x'') > f((1-\lambda)x'+\lambda x'').$$

Таким чином, за нейтрального ставлення ОПР до ризику її функція f корисності $u=f(x)$ доходу x є лінійною: $u=Ax+B$, за несхильного – вгнутою, за схильного – опуклою. Причому у випадках, коли ставлення ОПР до ризику відрізняється від нейтрального, слушно користуватися експоненційними залежностями: $u=Ae^{cx}+B$ $(c\neq 0)$.

Отже, коли дохід x змінюється в межах від a до b грошових одиниць $(a<b)$, нормована на відрізку $[a,b]$ функція корисності доходу матиме наступний аналітичний вигляд:

$$u=f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a}{b-a}, & \textit{за нейтрального ставлення ОПР до ризику};\\[2ex] \dfrac{e^{cx}-e^{ca}}{e^{cb}-e^{ca}}, c\neq 0, & \textit{за відмінного від нейтрального ставлення ОПР до ризику}.\end{cases}$$

Знак параметру c в нормованій експоненційній залежності відповідає типу індивідуальних переважань ОПР:

$$\begin{cases} c<0, & \textit{якщо ОПР несхильна до ризику};\\ c>0, & \textit{якщо ОПР схильна до ризику}.\end{cases}$$

Типові графіки нормованих функцій корисності доходу на множині можливих значень доходу від 100 до 1000 грошових одиниць, які відповідають різним типам переважань ОПР, наведені на рис. 2.1.

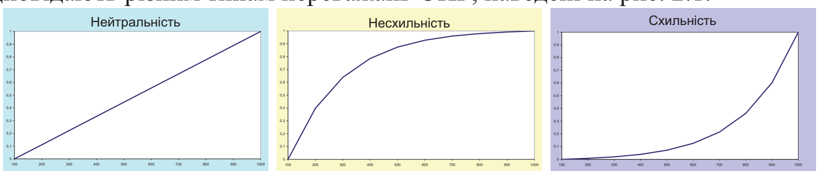


Рис. 2.1. Функція корисності доходу за нейтрального, несхильного або схильного ставлення ОПР до ризику

Ідентифікація індивідуальної функції корисності доходу. Щоб визначити тип ставлення ОПР до ризику та кількісно оцінити значення параметру c у випадках, коли ставлення до ризику відрізняється від нейтрального, потрібно отримати відповідну інформацію про переважання ОПР. Найпростіше опитування полягає у такому. Запитаємо, чому дорівнює, на думку ОПР, детермінований еквівалент $\hat{x}_{0.5}$ лотереї $L = < a; b >$ з двома однаково імовірними рівнями доходу: або a, або b (з ймовірностями по ½).

Можливі варіанти відповіді ОПР характеризують її ставлення до ризику:

$$\begin{cases} \hat{x}_{0.5} \approx \dfrac{a+b}{2}, \quad \textit{якщо ОПР ставиться до ризику нейтрально}; \\ a < \hat{x}_{0.5} < \dfrac{a+b}{2}, \quad \textit{якщо ОПР несхильна до ризику}; \\ \dfrac{a+b}{2} < \hat{x}_{0.5}^{\;0.5} < b, \quad \textit{якщо ОПР є схильною до ризику}. \end{cases}$$

Корисність $f(\hat{x}_{0.5})$ детермінованого еквіваленту $\hat{x}_{0.5}$ лотереї $L = < a; b >$, можливі наслідки a або b якої є однаково імовірними, дорівнює $\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$. Тому, якщо ставлення ОПР до ризику відрізняється від нейтрального, тобто коли $\hat{x}_{0.5} \neq \dfrac{a+b}{2}$, для оцінювання параметру c експоненційної функції корисності $f(x) = Ae^{cx} + B$ $(c \neq 0)$ маємо рівняння:

$$e^{c\hat{x}_{0.5}} = \frac{e^{cb} + e^{ca}}{2},$$

з якого випливає, що:

$$2e^{c\hat{x}_{0.5}} = e^{ca} + e^{cb}.$$

Уведемо замість невідомої величини c нову невідому величину t:

$$e^{c\frac{b-a}{2}} = t,$$

тобто виконаємо заміну змінної:

$$c = \frac{2\ln t}{b-a}.$$

Крім цього, подамо $\hat{x}_{0.5}$ у вигляді:

$$\hat{x}_{0.5} = \frac{a+b}{2} \mp q\frac{b-a}{2},$$

де $0 < q < 1$ (чим більшим є значення q, тим сильніше ставлення ОПР до ризику відрізняється від нейтрального), знак "–" відповідає несхильності до ризику (коли $a < \hat{x}_{0.5} < \dfrac{a+b}{2}$), а знак "+" – схильності до ризику (коли $\dfrac{a+b}{2} < \hat{x}_{0.5} < b$).

Тоді щодо нової змінної t рівняння набере вигляду:

$$2t^{\mp q} = t + \frac{1}{t}.$$

Для знаходження нетривіальних (що відрізняються від 1) коренів t цього рівняння, які відповідають різним можливим значенням q, пропонуємо скористатися таблицею 2.1, у якій ми з навели значення коренів відповідних рівнянь, обчислені з точністю для трьох знаків після коми, що є цілком достатнім для практичного використання.

Таблиця 2.1. Нетривіальний корінь t рівняння $t + \frac{1}{t} = 2t^q$,

залежно від значення параметра q $(0 < q < 1)$

q	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
t	1,223	1,508	1,895	2,461	3,383	5,158	9,733	31,843	1023,990

Приклад 2.1.1. Якщо схильна до ризику особа детермінованим еквівалентом $\hat{x}_{0.5}$ лотереї $L =< 100; 1000 >$ вважає дохід у розмірі 685 грошових одиниць, тоді:

$$q = \frac{2\hat{x}_{0.5} - (a+b)}{b-a} = \frac{2*685 - (100+1000)}{1000-100} = 0.3 .$$

З таблиці 2.1 знаходимо, що $t = 1.895$. Тому обчислення параметру c здійснюватиметься за формулою:

$$c = \frac{2\ln t}{b-a} = \frac{2*\ln(1.895)}{1000-100} = 0.00142 .$$

Коли ОПР несхильна до ризику та вважає, що детермінований еквівалент $\hat{x}_{0.5}$ лотереї $L =< 100; 1000 >$ дорівнює 325 грошових одиниць, тоді:

$$q = \frac{(a+b) - 2\hat{x}_{0.5}}{b-a} = \frac{(100+1000) - 2*325}{1000-100} = 0.5 ,$$

$$t = 3.383 ,$$

тобто остаточно, з використанням знаку "–" для несхильної до ризику ОПР:

$$c = -\frac{2\ln t}{b-a} = -\frac{2*\ln(3.383)}{1000-100} = -0.00271 .$$

Графіки відповідних нормованих на відрізку $[a, b]$ функцій корисності доходу (для яких $f(a) = 0$, $f(b) = 1$) подано на рис. 2.2. Зверніть увагу, що при використанні нормованих функцій корисність детермінованого еквіваленту $\hat{x}_{0.5}$ простої лотереї з однаково імовірними найгіршим та найкращим наслідками в точності дорівнює 0.5.

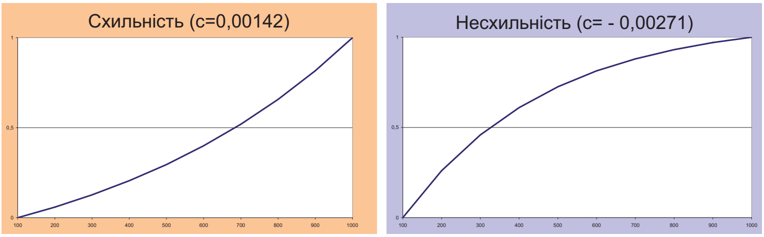


Рис. 2.2. Функції корисності доходу двох ОПР з різним ставленням до ризику, знайдені за значеннями детермінованих еквівалентів лотереї $L = <100; 1000>$ (в першому випадку $\hat{x}_{0.5} = 685$, в другому – $\hat{x}_{0.5} = 325$)

Зауважимо, що чим більше детермінований еквівалент $\hat{x}_{0.5}$ відрізняється від середнього значення доходу $\dfrac{a+b}{2}$ в простій лотереї $L = <a; b>$, тим більшим за абсолютною величиною буде значення параметру c і тим сильніше графік функції корисності відрізнятиметься від лінійної залежності (рисунки 2.3, 2.4).

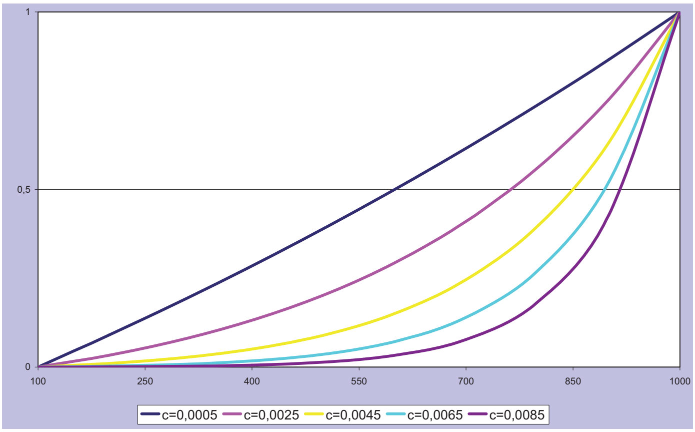


Рис. 2.3. Графіки експоненційних функцій корисності доходу <u>схильної</u> до ризику ОПР при різних значеннях параметру c

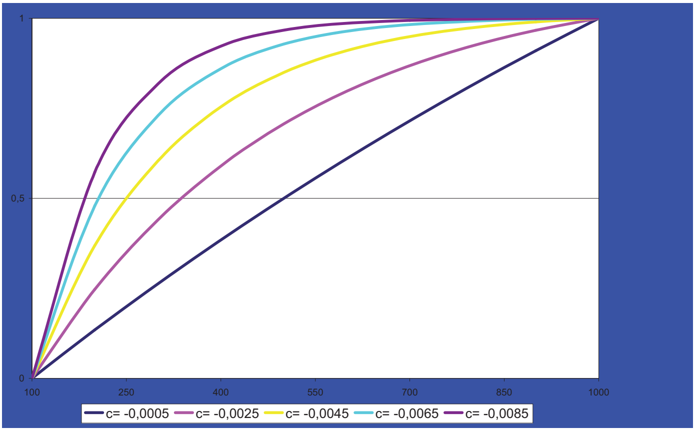


Рис. 2.4. Графіки експоненційних функцій корисності доходу несхильної до ризику ОПР при різних значеннях параметру c

Ще один спосіб визначення параметру c експоненційної функції корисності $u = Ae^{cx} + B$ окреслено у вправі 2.1.3.

Ідентифікація функції корисності дозволяє в подальшому обчислювати суб'єктивну оцінку доходу у випадку, якщо він розглядається як випадкова величина.

Визначення детермінованого еквіваленту випадкового доходу. Спочатку опрацюємо випадок, коли дохід є дискретною випадковою величиною, яка має певний закон розподілу ймовірностей (рис. 2.5).

Можливий рівень доходу	x_1	$\ldots$	x_i	$\ldots$	x_m
Ймовірність	p_1		p_i		p_m

Рис. 2.5. Загальний вигляд опису закону розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини рівня доходу

Детермінований еквівалент $\hat{x}$ цього випадкового доходу визначається рівнянням:

$$f(\hat{x}) = \sum_{i=1}^{m} f(x_i) p_i ,$$

де f – функція корисності доходу, яка відповідає індивідуальним переважанням ОПР.

За *нейтрального* ставлення ОПР до ризику її функція корисності є лінійною, тому

$$\frac{\hat{x} - a}{b - a} = \sum_{i=1}^{m} \frac{x_i - a}{b - a} p_i ,$$

звідки:

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^{m} x_i p_i$$

– детермінований еквівалент випадкового доходу за нейтрального ставлення ОПР до ризику збігається з математичним сподіванням рівня цього доходу.

Якщо ставлення ОПР до ризику є *відмінним від нейтрального*, для детермінованого еквіваленту випадкового дискретного доходу матимемо рівняння:

$$\frac{e^{c\hat{x}} - e^{ca}}{e^{cb} - e^{ca}} = \sum_{i=1}^{m} \frac{e^{cx_i} - e^{ca}}{e^{cb} - e^{ca}} p_i ,$$

тобто:

$$e^{c\hat{x}} = \sum_{i=1}^{m} e^{cx_i} p_i .$$

Остаточно маємо:

$$\hat{x} = \frac{1}{c} \ln(\sum_{i=1}^{m} e^{cx_i} p_i) ,$$

де параметр c відповідає індивідуальним переважанням ОПР.

Приклад 2.1.2. Розглянемо проміжок значень доходу від 100 до 1000 грошових одиниць та вважатимемо, що випадковий дохід має закон розподілу ймовірностей саме такий, що наведено у таблиці 2.2.

Таблиця 2.2. Приклад закону розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини рівня доходу

Можливий рівень доходу	200	350	500	650	800
Ймовірність	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Для *нейтральної* щодо ризику ОПР детермінований еквівалент цього випадкового доходу дорівнюватиме:

$$\hat{x} = 200 \cdot 0.1 + 350 \cdot 0.2 + 500 \cdot 0.3 + 650 \cdot 0.3 + 800 \cdot 0.1 = 515 .$$

Для *схильної* до ризику ОПР (скажімо, при $c = 0.00142$) або для *несхильної* до ризику особи (припустимо, $c = -0.00271$) процес обчислення детермінованих еквівалентів показано у таблиці 2.3.

Таблиця 2.3. Приклади обчислення детермінованого еквіваленту випадкового дискретного доходу у випадках, коли ставлення ОПР до ризику відрізняється від нейтрального

1. Схильність до ризику ($c = 0.00142$)					
i	1	2	3	4	5
x_i	200	350	500	650	800
e^{cx_i}	1,328433	1,643783	2,033991	2,516830	3,114286
p_i	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1
$e^{cx_i} p_i$	0,132843	0,328757	0,610197	0,755049	0,311429
$\Sigma = 2{,}138275$		$\ln(\Sigma) = 0{,}759999$		$\hat{x} = 535{,}2108$	

2. Несхильність до ризику ($c = -0.00271$)					
i	1	2	3	4	5
x_i	200	350	500	650	800
e^{cx_i}	0,581584	0,387322	0,257947	0,171787	0,114406
p_i	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1
$e^{cx_i} p_i$	0,058158	0,077464	0,077384	0,051536	0,011441
$\Sigma = 0{,}275984$		$\ln(\Sigma) = -1{,}28741$		$\hat{x} = 475{,}0604$	

Як і слід було очікувати, у разі схильності ОПР до ризику детермінований еквівалент випадкового доходу є більшим від математичного очікування рівня цього доходу, а у разі несхильності до ризику детермінований еквівалент випадкового доходу є меншим від очікуваного рівня цього доходу.

Приклад 2.1.2 закінчено.

Можливість обчислювати детермінований еквівалент випадкового доходу дозволяє порівнювати альтернативи за умов ризику – краща альтернатива має більший детермінований еквівалент випадкового доходу, аніж гірша.

Приклад 2.1.3. Припустимо, що є 5 альтернатив, вихідна інформація про які наведена у таблиці 2.4. Альтернативи A, C та E мають по 5 імовірних значень рівня доходу, а альтернативи B та D – по 6 значень.

Таблиця 2.4. Можливі рівні доходу та відповідні імовірності за кожною з альтернатив

Альтернатива	**Рівні доходу та імовірності**						
A	Дохід	200	350	500	650	800	
	Імовірність	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1	
B	Дохід	100	300	500	700	800	900
	Імовірність	0,1	0,3	0,2	0,2	0,1	0,1
C	Дохід	100	400	600	800	1000	
	Імовірність	0,15	0,3	0,4	0,1	0,05	
D	Дохід	150	400	600	750	800	1000
	Імовірність	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1	0,1
E	Дохід	350	450	550	650	750	
	Імовірність	0,3	0,1	0,3	0,2	0,1	

Помічаємо, що мінімально можливий рівень доходу складає 100 грошових одиниць (відповідає альтернативам B або C), а максимально можливий рівень доходу дорівнює 1000 грошових одиниць (може досягатися при виборі альтернатив C або D). Тому за проміжок можливих значень рівня доходу оберемо інтервал від 100 до 1000 грошових одиниць. Саме на цьому інтервалі будуватимемо функцію корисності доходу, що відбиватиме переважання ОПР.

Припустимо, що детермінованим еквівалентом $\hat{x}_{0.5}$ лотереї $L = < 100; 1000 >$ з двома однаково ймовірними рівнями доходу – або 100, або 1000 грошових одиниць – ОПР–1 вважає дохід у розмірі 550 грошових одиниць, тобто ОПР–1 є нейтральною до ризику. Припустимо також, що ОПР–2 детермінованим еквівалентом цієї найпростішої лотереї вважає дохід у розмірі 685 грошових одиниць (тобто що вона схильна до ризику), а ОПР–3 визначила детермінований еквівалент цієї ж лотереї у розмірі 325 грошових одиниць (це свідчить про несхильність до ризику ОПР–3).

Інформація про значення детермінованих еквівалентів найпростішої лотереї дозволяє знайти індивідуальні функції корисності (таблиця 2.5), графіки яких було наведено на рис. 2.1 (перший графік) та рис. 2.2.

Таблиця 2.5. Індивідуальні функції корисності доходу

ОПР–1	$u = \dfrac{x-100}{900}$, $100 \le x \le 1000$	
ОПР–2	$u = \dfrac{e^{cx} - e^{100c}}{e^{1000c} - e^{100c}}$, $100 \le x \le 1000$	$c = 0.00142$
ОПР–3	$u = \dfrac{e^{cx} - e^{100c}}{e^{1000c} - e^{100c}}$, $100 \le x \le 1000$	$c = -0.00271$

Користуючись знайденими функціями корисності, обчислимо детерміновані еквіваленти випадкових доходів за кожною з альтернатив (таблиця 2.6). /Процес обчислень для альтернативи A було докладно показано вище – дивись таблиці 2.2–2.3/.

Таблиця 2.6. Детерміновані еквіваленти випадкових доходів альтернатив, що відповідають переважанням кожної ОПР

Альтернатива	ОПР–1	ОПР–2	ОПР–3
A	515	535,2108	475,0604
B	510	552,7409	430,8901
C	505	541,7830	432,9837
D	525	574,5083	437,9226
E	520	532,8569	495,9834

Значення детермінованих еквівалентів випадкових доходів усіх альтернатив дозволяють зробити висновок про упорядкування альтернатив за пере важністю кожною з ОПР:

- ОПР–1: $D \succ E \succ A \succ B \succ C$;
- ОПР–2: $D \succ B \succ C \succ A \succ E$;
- ОПР–3: $E \succ A \succ D \succ C \succ B$.

Таким чином, за умов ризику індивідуальні переважання ОПР істотно впливають як на упорядкування альтернатив, так і на кінцевий вибір найкращої альтернативи.

Приклад 2.1.3 закінчено.

Тепер звернемося до ситуації, коли дохід розглядається як неперервна випадкова величина. Обмежимося випадком *рівномірного* закону розподілу цієї випадкової величини на проміжку від a до b ($a < b$). Це означає, що функція щільності розподілу ймовірностей $p(x)$ рівнів доходу x є сталою на цьому проміжку та має вигляд:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{якщо} \quad a \le x \le b; \\ 0, & \text{якщо} \quad x < a \quad \text{або} \quad x > b \end{cases}$$

Нехай $u = f(x)$, $x \in [a; b]$ – функція корисності доходу, яка відповідає переважанням ОПР. Тоді детермінований еквівалент $\hat{x}$ випадкового доходу обчислюватиметься як корінь рівняння:

$$f(\hat{x}) = \int_a^b f(x)p(x)dx,$$

оскільки корисність детермінованого еквіваленту збігається з очікуваною корисністю випадкового доходу.

За нейтрального ставлення ОПР до ризику її індивідуальна функція корисності є лінійною:

$$u = Ax + B.$$

Тому для обчислення детермінованого еквіваленту випадкового доходу дістанемо рівняння:

$$A\hat{x} + B = \frac{1}{b-a}\int_a^b (Ax + B)dx\,,$$

з якого отримаємо:

$$\hat{x} = \frac{a+b}{2}\,.$$

Переважання ОПР, якщо її ставлення до ризику відрізняється від нейтрального, моделюватимемо експоненційною функцією корисності доходу:

$$u = Ae^{cx} + B\,.$$

Отже, очікувана корисність випадкового рівномірно розподіленого на відрізку $\left[\,a\,;b\,\right]$ доходу дорівнюватиме:

$$\overline{u} = \frac{1}{b-a}\int_a^b (Ae^{cx} + B)dx = A\frac{e^{cb} - e^{ca}}{c(b-a)} + B\,.$$

Тобто дістанемо наступне рівняння для обчислення детермінованого еквіваленту випадкового неперервного рівномірно розподіленого доходу:

$$e^{c\hat{x}} = \frac{e^{cb} - e^{ca}}{c(b-a)}\,,$$

з якого остаточно випливає:

$$\hat{x} = \frac{1}{c}\ln\left[\frac{e^{cb} - e^{ca}}{c(b-a)}\right].$$

<u>Приклад 2.1.4</u>. Якщо $a = 200$, $b = 800$, детермінований еквівалент неперервного випадкового рівномірно розподіленого на проміжку $\left[\,a\,;b\,\right]$ доходу дорівнюватиме:

- $\hat{x} = 500$, якщо ОПР ставиться до ризику нейтрально;
- $\hat{x} = 521.1726$, якщо ОПР є схильною до ризику ($c = 0.00142$);
- $\hat{x} = 460.2098$, якщо ОПР є несхильною до ризику ($c = -\,0.00271$).

Приклад закінчено.

Звернемо увагу, що за нейтрального ставлення ОПР до ризику детермінований еквівалент випадкового доходу завжди збігатиметься з очікуваним рівнем цього випадкового доходу, незалежно від закону (функції щільності) розподілу ймовірностей його можливих значень. За схильного ставлення до ризику детермінований еквівалент випадкового доходу є більшим, аніж очікуваний рівень доходу, а за несхильного ставлення до ризику – меншим.

У випадку, коли ставлення ОПР до ризику відрізняється від нейтрального, детермінований еквівалент випадкового доходу визначається не лише переваженнями ОПР, а також і конкретною аналітичною формою закону (функції щільності) розподілу ймовірностей випадкового доходу.

Обчислення детермінованого еквіваленту може ґрунтуватися на експоненційному перетворенні $T_x(c)$ для щільності розподілу $p(x)$:

$$T_x(c) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{cx} p(x) dx .$$

Дійсно, коли використовуємо експоненційну функцію корисності $u = Ae^{cx} + B$ та знаємо, що випадковий дохід x має функцію щільності розподілу ймовірностей $p(x)$, для детермінованого еквіваленту $\hat{x}$ випадкового доходу має справджуватися рівняння:

$$\overline{u} \equiv Ae^{c\hat{x}} + B = \int_{-\infty}^{+\infty} (Ae^{cx} + B) p(x) dx = AT_x(c) + B ,$$

звідки дістанемо, що:

$$e^{c\hat{x}} = T_x(c),$$

тобто

$$\hat{x} = \frac{1}{c} \ln T_x(c) .$$

Р.Л.Кіні та Х.Райфа наводять результати експоненційного перетворення для поширених імовірнісних розподілів – бета, біноміального, Коші, показникового, гамма, геометричного, нормального, Пуассона, рівномірного тощо ([2], с.192–193). Водночас практичне використання відповідних формул часто може бути досить складним. Тому доцільно мати прості інструменти наближеного оцінювання детермінованого еквіваленту випадкового доходу та знати інші методи порівняння альтернативних випадкових доходів з метою підтримки процесів прийняття фінансових рішень за умов ризику.

<u>Детермінований еквівалент суми випадкових доходів</u>. Для довільної випадкової величини доходу ξ її детермінований еквівалент $\hat{x}_\xi$, з урахуванням (2.1), (2.2), задовольняє, залежно від ставлення ОПР до ризику, рівняння:

- або $\hat{x}_\xi = \overline{\xi}$ – за нейтрального ставлення до ризику, оскільки відповідні переважання відтворюються лінійною функцією корисності доходу $u = Ax + B$;
- або $e^{c\hat{x}_\xi} = \overline{\eta}$, ($c \neq 0$), де $\eta = e^{c\xi}$ – допоміжна випадкова величина, залежна від випадкової величини ξ, якщо ставлення ОПР до ризику відрізняється від нейтрального та її переважання відтворюються експоненційної функцією корисності доходу $u = Ae^{cx} + B$.

/У наведених рівняннях через $\overline{\xi}$ та $\overline{\eta}$ позначено математичні очікування відповідних випадкових величин./

---

[2] Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения: Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1981. – 560 с.

Розглянемо тепер випадковий дохід $\xi = \xi_1 + \xi_2$, який є сумою двох випадкових доходів ξ_1 і ξ_2, очікувані значення та детерміновані еквіваленти яких, відповідно, дорівнюють $\overline{\xi_1}$ і $\overline{\xi_2}$ та $\hat{x}_{\xi_1}$ і $\hat{x}_{\xi_2}$.

За нейтрального ставлення до ризику детермінований еквівалент $\hat{x}_{\xi}$ збігатиметься з $\overline{\xi}$, а детерміновані еквіваленти $\hat{x}_{\xi_1}$ і $\hat{x}_{\xi_2}$ збігатимуться, відповідно, з $\overline{\xi_1}$ і $\overline{\xi_2}$. З використанням теореми про математичне очікування суми випадкових величин одержимо:

$$\hat{x}_{\xi} = \overline{\xi} = \overline{\xi_1} + \overline{\xi_2} = \hat{x}_{\xi_1} + \hat{x}_{\xi_2},$$

причому цей результат має місце як у випадку незалежних, так і у випадку залежних між собою випадкових величин ξ_1 і ξ_2.

Коли ставлення до ризику відрізняється від нейтрального, поряд з новими випадковими величинами $\eta_1 = e^{c\xi_1}$ і $\eta_2 = e^{c\xi_2}$, які своїми очікуваними значеннями $\overline{\eta_1}$ і $\overline{\eta_2}$ визначають детерміновані еквіваленти $\hat{x}_{\xi_1}$ і $\hat{x}_{\xi_2}$: $e^{c\hat{x}_{\xi_1}} = \overline{\eta_1}$, $e^{c\hat{x}_{\xi_2}} = \overline{\eta_2}$, розглянемо третю нову випадкову величину $\eta = e^{c(\xi_1+\xi_2)}$. Очікуване значення $\overline{\eta}$ цієї випадкової величини визначатиме детермінований еквівалент $\hat{x}_{\xi}$ рівністю: $e^{c\hat{x}_{\xi}} = \overline{\eta}$.

За означенням, $\eta = e^{c\xi_1} e^{c\xi_2} = \eta_1 \eta_2$. Врахуємо, що при $c \neq 0$ із незалежності між собою випадкових величин ξ_1 і ξ_2 випливає незалежність між собою випадкових величин η_1 і η_2. Тому для обчислення $\overline{\eta}$ зараз скористаємося теоремою про математичне очікування добутку незалежних випадкових величин: $\overline{\eta} = \overline{\eta_1} \cdot \overline{\eta_2}$.

Остаточно маємо: $e^{c\hat{x}_{\xi}} = \overline{\eta} = \overline{\eta_1} \cdot \overline{\eta_2} = e^{c\hat{x}_{\xi_1}} e^{c\hat{x}_{\xi_2}} = e^{c(\hat{x}_{\xi_1} + \hat{x}_{\xi_2})}$, звідки:

$$\hat{x}_{\xi} = \hat{x}_{\xi_1} + \hat{x}_{\xi_2},$$

але зараз цей результат має місце, якщо випадкові доходи ξ_1 і ξ_2 є незалежними між собою.

Користуючись методом математичної індукції, отримані результати можна узагальнити висновком, що детермінований еквівалент суми незалежних випадкових доходів дорівнює сумі детермінованих еквівалентів окремо кожного з випадкових доходів – складових загального випадкового доходу.

Вправи до підрозділу 2.1

Вправа 2.1.1. Нехай ξ – випадковий прибуток, що може набирати значень з множини $[\alpha, \beta]$. Обґрунтувати, що існує детермінований еквівалент $\hat{x}$ цього випадкового прибутку.

Вправа 2.1.2. Показати, що коли за довільних рівнів доходу a та b детермінований еквівалент $\hat{x}_{0.5}$ простої лотереї $L = \langle a; b \rangle$ з однаково ймовірними альтернативами a і b завжди дорівнює $\frac{a+b}{2}$ грошових одиниць, тоді і тільки тоді функція корисності доходу є лінійною.

Вправа 2.1.3. Позначимо через $L(a, p, b)$ лотерею з двома альтернативними рівнями доходу a та b грошових одиниць ($a < b$), в якій більший рівень доходу b може статися з імовірністю p, а менший рівень доходу a – відповідно – з імовірністю $(1-p)$.

Припустимо, що ОПР може визначити імовірність p, за якої детермінований еквівалент $\hat{x}_p$ лотереї $L(a, p, b)$ дорівнюватиме $\frac{a+b}{2}$. Який аналітичний вигляд набере функція корисності доходу у такому випадку?

Вказівка. Показати, що при $p \neq \frac{1}{2}$ для експоненційної функції корисності $u = Ae^{cx} + B$, де $a \le x \le b$, справджуватиметься рівність:

$$c = \frac{2\ln\frac{1-p}{p}}{b-a}.$$

Побудувати графіки відповідних функцій корисності для наведених нижче значень імовірності p:

- 0,2; 0,3; 0,45 (випадки схильності ОПР до ризику);
- 0,5 (нейтральність до ризику);
- 0,6; 0,8; 0,9 (можливі випадки несхильності ОПР до ризику).

Вправа 2.1.4. Навести типові графіки та вказати властивості функції корисності витрат та детермінованого еквіваленту випадкових витрат, залежно від особливостей індивідуального ставлення ОПР до ризику щодо розміру майбутніх витрат.

Вправа 2.1.5. З'ясувати, за яких умов справджується наступне твердження:

Якщо всі можливі рівні випадкового доходу ξ одночасно збільшити на h грошових одиниць: $\xi \to \xi + h$ (де h – деяка стала детермінована величина), тоді детермінований еквівалент $\hat{x}_\xi$ випадкового доходу ξ теж збільшиться на h: $\hat{x}_\xi \to \hat{x}_\xi + h$.

Вправа 2.1.6. З'ясувати, коли справджується твердження:

Якщо всі можливі рівні випадкового доходу ξ одночасно змінити у k раз: $\xi \to k\xi$ (де $k \neq 0$ – деяка детермінована стала), тоді детермінований еквівалент $\hat{x}_\xi$ випадкового доходу ξ теж зміниться у k раз: $\hat{x}_\xi \to k\hat{x}_\xi$.

2.2. Наближене обчислення детермінованого еквіваленту випадкового доходу

За умов ризику щодо майбутнього доходу доцільно керуватися або показником детермінованого еквіваленту майбутнього випадкового доходу, або показником очікуваної корисності цього випадкового доходу. При визначенні таких показників одночасно враховуються як індивідуальні переважання ОПР (для цього слугує функція корисності), так і закон (функція щільності) розподілу імовірностей значень відповідного випадкового доходу. Проте практичне використання зазначених показників ускладнюється або унеможливлюється через похибки, які притаманні як функції корисності (через неможливість абсолютно точного визначення індивідуальних переважань), так і імовірнісному закону (функції щільності) розподілу ймовірностей, що використовується (оскільки йдеться про розвиток відповідних економічних процесів у майбутньому). Поширена на практиці формула "Очікуване значення – Дисперсія", заснована на використанні коефіцієнта Пратта–Ерроу, має до того ж методичні вади через несумірність одиниць виміру його окремих складових. Позбутися зазначених недоліків можна з використанням формули "Очікуване значення – Стандартне відхилення", але такий підхід вимагає належного теоретичного обґрунтування.

Обґрунтування формули "Очікуване значення – Стандартне відхилення". До формули наближеного обчислення детермінованого еквіваленту випадкового доходу "Очікуване значення – Стандартне відхилення" можна дійти, виходячи з наступних міркувань і припущень.

Припущення 1. Детермінований еквівалент $\hat{x}$ випадкового доходу ξ визначається індивідуальними переважаннями ОПР – функцією φ – залежно від очікуваного рівня $\bar{x}$ цього випадкового доходу та стандартного відхилення σ випадкового доходу ξ від його очікуваного рівня: $\hat{x} = \varphi(\bar{x}, \sigma)$.

Припущення 2. Для безризикового доходу (коли $\xi \equiv \bar{x}$ та $\sigma = 0$) детермінований еквівалент $\hat{x}$ збігається з рівнем цього доходу: $\varphi(\bar{x}, 0) = \bar{x}$.

Далі припустимо, що від однієї одиниці виміру доходу ми перейшли до іншої, тобто скористалися пропорційним перетворенням розміру доходу: $x \to tx$, де $t > 0$. Тоді очікуваний рівень, стандартне відхилення та детермінований еквівалент випадкового доходу теж мають змінитися у t раз: $\bar{x} \to t\bar{x}$, $\sigma \to t\sigma$, $\hat{x} \to t\hat{x}$. Ці міркування дають підставу ввести наступне припущення.

Припущення 3. Функція φ обчислення детермінованого еквіваленту $\hat{x}$ випадкового доходу є позитивно однорідною першого порядку функцією відносно своїх аргументів $\bar{x}$ і σ: $\varphi(t\bar{x}, t\sigma) = t\varphi(\bar{x}, \sigma)$ для довільного $t > 0$.

З теореми Ейлера про однорідні функції робимо висновок, що для функції φ обчислення детермінованого еквіваленту випадкового доходу справджується рівність:

$$\varphi(\bar{x}, \sigma) = \bar{x} \frac{\partial \varphi(\bar{x}, \sigma)}{\partial \bar{x}} + \sigma \frac{\partial \varphi(\bar{x}, \sigma)}{\partial \sigma}. \qquad (2.3)$$

Припущення 4. Якщо всі можливі рівні випадкового доходу ξ одночасно збільшити на детерміновані δx грошових одиниць, тоді детермінований еквівалент $\hat{x}$ теж збільшиться на δx грошових одиниць.

Звернемо увагу, що при одночасній зміні всіх можливих рівнів випадкового доходу ξ на детерміновану величину δx очікуваний рівень доходу $\bar{x}$ теж зміниться на δx грошових одиниць, у той час коли стандартне відхилення σ випадкового доходу від очікуваного рівня залишиться без змін. Тому припущення 4 означає, що справджується рівність:

$$\varphi(\bar{x} + \delta x, \sigma) = \varphi(\bar{x}, \sigma) + \delta x \qquad (2.4)$$

і, зокрема, що:

$$\varphi(0 + \delta x, \sigma) = \varphi(0, \sigma) + \delta x. \qquad (2.5)$$

З рівності (2.4) випливає, що частинна похідна функції φ за змінною $\bar{x}$ не залежить від σ та дорівнює 1. Дійсно, покладаючи $\delta x = \Delta \bar{x}$, матимемо:

$$\frac{\partial \varphi(\bar{x}, \sigma)}{\partial \bar{x}} = \lim_{\Delta \bar{x} \to 0} \frac{\varphi(\bar{x} + \Delta \bar{x}, \sigma) - \varphi(\bar{x}, \sigma)}{\Delta \bar{x}} =$$

$$= \lim_{\Delta \bar{x} \to 0} \frac{\varphi(\bar{x}, \sigma) + \Delta \bar{x} - \varphi(\bar{x}, \sigma)}{\Delta \bar{x}} = \lim_{\Delta \bar{x} \to 0} \frac{\Delta \bar{x}}{\Delta \bar{x}} = 1.$$

Зауважимо, що отриманий висновок і рівність (2.3) повністю узгоджуються з припущенням 2. Окрім цього, з (2.3) і (2.4) випливає, що $\varphi(\bar{x}, \sigma) = \bar{x} + \sigma \frac{\partial \varphi(\bar{x}, \sigma)}{\partial \sigma}$, а також, зокрема, що: $\varphi(0, \sigma) = \sigma \frac{\partial \varphi(0, \sigma)}{\partial \sigma}$.

Покладемо $\varphi(0; 1) = k$. Значення k визначається індивідуальними переважаннями ОПР, причому $k = 0$, якщо ОПР є нейтральною до ризику, $k < 0$, якщо вона є несхильною до ризику, $k > 0$, якщо ОПР є схильною до ризику. Тоді з умови позитивної однорідності (припущення 3), матимемо рівність: $\varphi(0, \sigma) = k\sigma$.

Дійсно, $\varphi(0, \sigma) = \varphi(0; 1 \cdot \sigma) = \varphi(0; 1) \cdot \sigma = k\sigma$.

Використовуючи цей результат і рівність (2.5) при $\delta x = \bar{x}$, остаточно одержимо:

$$\varphi(\bar{x}, \sigma) = \varphi(0 + \bar{x}, \sigma) = \varphi(0, \sigma) + \bar{x} = \bar{x} + k\sigma.$$

Отже, детермінований еквівалент $\hat{x}$ випадкового доходу ξ наближено можна обчислити за формулою:

$$\hat{x} = \bar{x} + k\sigma, \qquad (2.6)$$

де:

$\bar{x}$ – очікуваний рівень (математичне сподівання) майбутнього випадкового доходу ξ,

σ_x – стандартне відхилення випадкового доходу ξ від його очікуваного рівня,

k – множник, значення якого визначається індивідуальним ставленням ОПР до ризику. А саме:

- $k = 0$, якщо ОПР нейтральна щодо ризику,
- $k < 0$, якщо вона несхильна до ризику,
- $k > 0$, якщо ОПР схильна до ризику.

Пропонуємо використовувати наступні значення цього множника:

- $\pm 0,2..0,3$, якщо ставлення ОПР до ризику дещо відрізняється від нейтрального;
- $\pm 0,5..0,6$, якщо ставлення до ризику впевнено відрізняється від нейтрального;
- $\pm 0,9...$, якщо ставлення ОПР до ризику значно відрізняється від нейтрального.

Бачимо, що для практичного використання формули (2.6) з метою порівняння ризикових альтернатив потрібно, крім переважань ОПР, оцінити лише математичне сподівання та стандартне відхилення випадкових доходів за кожною з допустимих альтернатив. Тобто докладної інформації про закони (функції щільності) розподілу ймовірностей цих випадкових величин використовувати не потрібно.

У першому наближенні обчислити математичне сподівання $\bar{x}$ та стандартне відхилення σ випадкового доходу для конкретної альтернативи можна, керуючись рекомендаціями розробників системи ПЕРТ[1] (PERT, Program Evaluation and Research Task):

$$\bar{x} = \frac{x^{\min} + 4x^{\mathrm{mod}} + x^{\max}}{6},$$

$$\sigma = \frac{x^{\max} - x^{\min}}{6},$$

де $x^{\min}$, x^{mod} та $x^{\max}$ – відповідно, мінімальний, модальний (найімовірніший) та максимальний рівні майбутнього випадкового доходу за конкретною альтернативою, оцінювати які значно легше, аніж знаходити закони (функції щільності) розподілу ймовірностей можливих значень випадкового доходу.

Приклад 2.2.1. Знайдемо найприбутковіший з чотирьох інвестиційних проектів за даними, що наведені в таблиці 2.7.

---

[1] Кофман А., Дебазей Г. Сетевые методы планирования: Применение системы ПЕРТ и ее разновидностей при управлении производственными и научно–исследовательскими проектами: Пер. с фр. – М.: Прогресс, 1968. – 180 с.

Таблиця 2.7. Оцінки рівнів випадкового чистого зведеного доходу альтернативних інвестиційних проектів, тис. грн.

Рівень	Проект			
	A	*B*	*C*	*D*
Мінімальний	100	80	60	50
Модальний	130	125	120	110
Максимальний	190	200	210	230

Спочатку обчислимо основні статистичні характеристики випадкового чистого зведеного доходу за кожним з інвестиційних проектів та зведемо результати у таблицю 2.8.

Таблиця 2.8. Статистичні характеристики випадкового чистого зведеного доходу альтернативних інвестиційних проектів, тис. грн.

Показник	Проект			
	A	*B*	*C*	*D*
Очікуваний рівень	135	130	125	120
Стандартне відхилення	15	20	25	30

Далі, для обчислення за формулою (2.6) детермінованих еквівалентів випадкового чистого зведеного доходу за кожним з інвестиційних проектів, потрібно визначити переважання ОПР та оцінити індивідуальне значення множника k. Оскільки ставлення ОПР до ризику можна визначити лише наближено, вважаємо за доцільне побудувати допоміжні графіки відповідних лінійних залежностей від k детермінованих еквівалентів випадкових прибутків $\hat{x}$ кожного з інвестиційних проектів на множині значень k, скажімо, від –1,5 до 1,5 (рис. 2.6). Від'ємні значення цього множника відповідають несхильній до ризику ОПР, нульове – нейтральній, додатні – схильній до ризику ОПР. Такі графіки допоможуть ОПР порівняти прибутковість ризикових альтернатив за переважністю.

Помічаємо (дивись рис. 2.6), що переважна більшість ОПР найприбутковішим вважатиме інвестиційний проект A, оскільки найчастіше особи виявляють несхильність або нейтральність до ризику (при $k < 1$ лінія детермінованого еквіваленту випадкового доходу за проектом A розташована вище за інші). Водночас ОПР з надзвичайно високою схильністю до ризику за найприбутковіший визнає проект D, який у порівнянні з проектом A має гірші показники модального та очікуваного рівнів випадкового чистого зведеного доходу, але характеризується вдвічі більшим значенням показника стандартного відхилення цього випадкового доходу. Проекти B або C, скоріше за все, найприбутковішими не будуть визнані за будь-якого ставлення ОПР до ризику.

Приклад 2.2.1 закінчено.

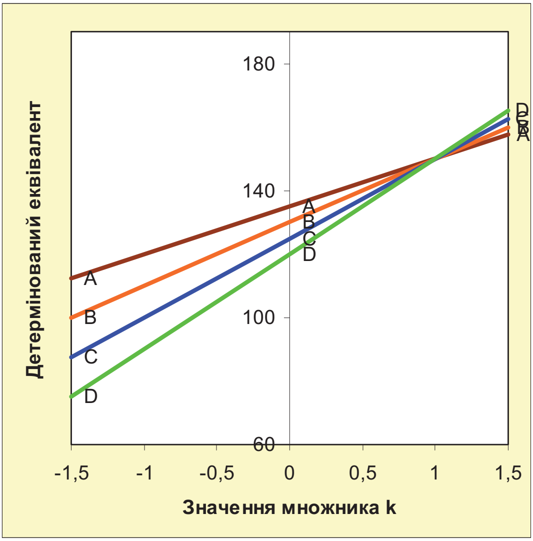


Рис. 2.6. Залежність детермінованих еквівалентів випадкового доходу за кожним з альтернативних інвестиційних проектів від індивідуального ставлення ОПР до ризику (відбивається значенням множника k)

Обґрунтування формули "Очікуване значення – Дисперсія". Іншу, більш поширену, формулу наближеного обчислення детермінованого еквіваленту випадкового доходу – "Очікуване значення – Дисперсія" – можна отримати у такий спосіб.

Розглянемо для функції корисності f її розвинення за формулою Тейлора із залишковим членом у формі Пеано у точці $\bar{x}$:

$$u = f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x-\bar{x}) + \frac{1}{2} f''(\bar{x})(x-\bar{x})^2 + o(x-\bar{x})^2,$$

де залишковий член $o(x-\bar{x})^2$ при $x \to \bar{x}$ є нескінченно малою порядку вище другого: $\lim\limits_{x\to\bar{x}} \frac{o(x-\bar{x})^2}{(x-\bar{x})^2} = 0$.

Якщо вихідну функцію корисності f замінити її квадратичною апроксимацією f_q:

$$u = f(x) \approx f_q(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x-\bar{x}) + \frac{1}{2} f''(\bar{x})(x-\bar{x})^2,$$

для очікуваної корисності $\bar{u}$ випадкового доходу ξ одержимо наступний апроксимуючий вираз:

$$\overline{u} \approx \int_a^b [f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(x-\overline{x}) + \frac{1}{2} f''(\overline{x})(x-\overline{x})^2] p(x)dx =$$

$$= f(\overline{x}) + f'(\overline{x}) \int_a^b xp(x)dx - f'(\overline{x})\overline{x} + \frac{1}{2} f''(\overline{x}) \int_a^b (x-\overline{x})^2 p(x)dx =$$

$$= f(\overline{x}) + \frac{1}{2} f''(\overline{x})\sigma^2 .$$

де $\overline{x} = \int_a^b xp(x)dx$ – очікуване значення, а $\sigma^2 = \int_a^b (x-\overline{x})^2 p(x)dx$ – дисперсія неперервного випадкового доходу ξ, що набирає значень з відрізку $[a;b]$ із щільністю розподілу ймовірностей $p(x)$.

Нехай $\hat{x}$ – детермінований еквівалент, корисність якого збігається з очікуваною корисністю випадкового доходу:

$$f(\hat{x}) = \overline{u} .$$

Наближено значення $f(\hat{x})$ оцінюємо за формулою:

$$f(\hat{x}) \approx f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(\hat{x}-\overline{x}) .$$

Отже, із системи рівнянь

$$\left.\begin{aligned} f(\hat{x}) &\approx f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(\hat{x}-\overline{x}) , \\ f(\hat{x}) &\approx f(\overline{x}) + \frac{1}{2} f''(\overline{x})\sigma^2 \end{aligned}\right\}$$

остаточно одержимо:

$$\hat{x} \approx \overline{x} - \frac{1}{2} s\sigma^2 , \qquad (2.7)$$

де $s = -\frac{f''(\overline{x})}{f'(\overline{x})}$ – коефіцієнт несхильності–схильності інвестора до ризику в точці очікуваного рівня $\overline{x}$ майбутнього випадкового доходу; цей множник s має також назву коефіцієнта Пратта–Ерроу.

Зауважимо, що формула (2.7) замість наближеної стає точною, якщо закон розподілу ймовірностей випадкового доходу нормальний та переважання ОПР відтворюються експоненційною функцією корисності доходу $u = Ae^{cx} + B$.

<u>Повернення до формули "Очікуване значення – Стандартне відхилення"</u>. Продовжимо дослідження, виходячи з формули (2.7). Якщо в околі очікуваного доходу $\overline{x}$ коефіцієнт s несхильності–схильності до ризику вважати сталим, систему переважань ОПР в цьому околі можна відтворити або лінійною, або експоненційною функцією корисності доходу:

$$u = f(x) = \begin{cases} Ax + B , & \textit{якщо} \quad s = 0 , \\ Ae^{-sx} + B , & \textit{якщо} \quad s \neq 0 , \end{cases}$$

де A і B – деякі сталі числа, причому $A \neq 0$. Випадок $s = 0$ означає нейтральність ОПР щодо ризику. Випадок $s \neq 0$ охоплює ситуації, коли ставлення ОПР до ризику відрізняється від нейтрального; а саме: $s > 0$ відповідає несхильності, а $s < 0$ – схильності до ризику.

Щоб оцінити значення параметру s, оберемо $\Delta x > 0$ та розглянемо допоміжну лотерею $< \bar{x} - \Delta x, \bar{x} + \Delta x >$ із двома однаково імовірними наслідками: $(\bar{x} - \Delta x)$ або $(\bar{x} + \Delta x)$, кожний з яких може статися у цій лотереї із імовірністю ½. Позначимо через $\tilde{x}$ детермінований еквівалент такої лотереї, який визначимо згідно переважань ОПР.

Якщо $\tilde{x} \approx \bar{x}$, робимо висновок про нейтральне ставлення ОПР до ризику; отже $s = 0$.

У разі, якщо $\tilde{x} \neq \bar{x}$, для параметра s несхильності–схильності ОПР до ризику матимемо рівняння:

$$\frac{1}{2}(Ae^{-s(\bar{x}-\Delta x)} + B) + \frac{1}{2}(Ae^{-s(\bar{x}+\Delta x)} + B) = Ae^{-s\tilde{x}} + B,$$

або, остаточно:

$$e^{s\Delta x} + e^{-s\Delta x} = 2e^{-s(\tilde{x}-\bar{x})}. \qquad (2.8)$$

Для опрацювання цього рівняння розглянемо спочатку випадок, коли ОПР є несхильною до ризику. У такому разі $s > 0$ та $\bar{x} - \Delta x < \tilde{x} < \bar{x}$. Розрізнятимемо три рівні несхильності: помірний, коли $\bar{x} - \tilde{x} = 0.2\Delta x$; середній, коли $\bar{x} - \tilde{x} = 0.5\Delta x$, та високий, коли $\bar{x} - \tilde{x} = 0.8\Delta x$. Тоді рівняння (2.8) для обчислення параметру s зводиться до рівняння:

$$t + \frac{1}{t} = 2t^q, \qquad (2.9)$$

де $t = e^{s\Delta x}$ – нова невідома змінна; q – показник рівня несхильності, який набуває одного з трьох значень: 0,2, 0,5 або 0,8.

Для випадку, коли інвестор виявляє схильність до ризику: $s < 0$, $\bar{x} < \tilde{x} < \bar{x} + \Delta x$, також розглянемо три рівні: помірної схильності, коли $\tilde{x} - \bar{x} = 0{,}2\Delta x$; середньої схильності, коли $\tilde{x} - \bar{x} = 0{,}5\Delta x$; високої схильності, коли $\tilde{x} - \bar{x} = 0{,}8\Delta x$. Зараз залучимо нову змінну $t = e^{-s\Delta x}$. Тоді для визначення параметра s з рівняння (2.8) знову отримаємо рівняння (2.9), у якому q тепер характеризуватиме рівень схильності інвестора до ризику (із відповідними значеннями 0,2, 0,5 або 0,8).

Нехай маємо нетривіальний (що відрізняється від 1) розв'язок t_0 рівняння (2.9), який визначається рівнем відхилення q системи переважань інвестора від нейтрального ставлення до ризику. Тоді параметр s несхильності–схильності інвестора до ризику обчислюватиметься за формулою:

$$s = \pm \frac{1}{\Delta x} \ln t_0,$$

у якій знак "+" відповідає несхильному, а знак "–" – схильному ставленню до ризику.

Якщо показник варіації доходу Δx в допоміжній лотереї покласти таким, що дорівнює стандартному відхиленню випадкового доходу σ:

$$\Delta x = \sigma,$$

формула (2.7) наближеного обчислення детермінованого еквіваленту $\hat{x}$ випадкового доходу набере вигляду:

$$\hat{x} = \bar{x} \mp \frac{1}{2}\sigma \ln t_0 .$$

Для практичного використання наведеної формули подамо її у вигляді:

$$\hat{x} = \bar{x} \mp k\sigma(x),$$

де знак "–" відповідатиме несхильному, знак "+" – схильному ставленню до ризику, а множник $k = \frac{1}{2}\ln t_0(q)$ визначатиметься рівнем відхилення q системи переважань інвестора від нейтрального типу ставлення до ризику (таблиця 2.9).

Таблиця 2.9. Значення множника $k = \frac{1}{2}\ln t_0(q)$ залежно від рівня q несхильності або схильності інвестора до ризику

Показник	Рівень несхильності або схильності до ризику:								
	помірний			середній			високий		
q	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
k	0,10	0,21	0,32	0,45	0,61	0,82	1,14	1,73	3,47

Таким чином, ми знову повернулися до формули (2.6) наближеного обчислення детермінованого еквіваленту випадкового доходу "Очікуване значення – Стандартне відхилення", але додатково отримали обґрунтування щодо можливих значення множника k залежно від рівня відхилення системи переважань ОПР від нейтрального ставлення до ризику:

- 0,2..0,3 – за помірного відхилення,
- 0,5..0,6 – за середнього відхилення,
- 0,9 і вище – у разі значного відхилення.

Насамкінець щодо формули (2.6) "Очікуване значення – Стандартне відхилення" зазначимо, що коли критеріальний показник порівняння альтернатив має оптимізаційне спрямування не до максимуму (коли йдеться про дохід чи прибуток), а до мінімуму (коли йдеться, скажімо, про витрати), значення множника k, що використовується у цій формулі для обчислення детермінованого еквіваленту, потрібно брати додатним у разі несхильності ОПР до ризику, а у разі схильності до ризику – від'ємним. Причому, незалежно від оптимізаційного спрямування критеріального показника, за абсолютним значенням множник k є нульовим за нейтрального ставлення ОПР до ризику, але тим більше відрізняється від нуля, чим більше ставлення ОПР до ризику відрізняється від нейтрального.

Вправи до підрозділу 2.2

Вправа 2.2.1. Нагадаємо, що випадковий дохід ξ є бета–розподіленим на відрізку $[a,b]$, якщо функція щільності розподілу його ймовірностей $p(x)$ має вигляд:

$$p(x)=\begin{cases}\beta(x-a)^{\alpha}(b-x)^{\gamma}, & \textit{якщо} \quad a\le x\le b\,;\\ 0, & \textit{якщо} \quad x<a \quad \textit{або} \quad x>b\,,\end{cases}$$

де $\alpha>-1$, $\gamma>-1$, $\beta=\dfrac{1}{\int\limits_a^b (x-a)^{\alpha}(b-x)^{\gamma}\,dx}$.

Очікуване значення $\bar{x}$ і стандартне відхилення σ бета–розподіленої випадкової величини визначаються формулами:

$$\bar{x}=\frac{a+b+\gamma a+\alpha b}{\alpha+\gamma+2},$$

$$\sigma=\frac{(b-a)\sqrt{(\alpha+1)(\gamma+1)}}{(\alpha+\gamma+2)\sqrt{\alpha+\gamma+3}}.$$

Модальне (найімовірніше) значення x^{mod} бета–розподіленої випадкової величини дорівнює:

$$x^{\text{mod}}=\frac{\gamma a+\alpha b}{\alpha+\gamma},$$

тобто можемо очікуване значення цієї випадкової величини подати залежністю від модального:

$$\bar{x}=\frac{a+b+(\alpha+\gamma)x^{\text{mod}}}{\alpha+\gamma+2}.$$

/Зокрема, в методі ПЕРТ покладають $\alpha=2\pm\sqrt{2}$, $\gamma=2\mp\sqrt{2}$, звідки $\bar{x}=\dfrac{a+4x^{\text{mod}}+b}{6}$, $\sigma=\dfrac{b-a}{6}$/.

1). Побудувати графік функції щільності розподілу ймовірностей випадкового доходу, який є бета–розподіленим на множині значень від 100 до 1000 грошових одиниць, якщо $\alpha=0.5$ і $\gamma=3.5$.

2). Обчислити середнє та модальне значення і стандартне відхилення для цієї випадкової величини доходу.

3). Проаналізувати, як змінюватиметься значення x^{mod} залежно від співвідношення між значеннями параметрів α та γ.

Вправа 2.2.2. Відомо, що прибуток за інвестиційним проектом A вважається бета–розподіленою випадковою величиною на множині значень від 400 до 1000 грошових одиниць з параметрами функції щільності ймовірностей $\alpha=0.8$, $\gamma=1.7$. За інвестиційним проектом B прибуток вважається бета–розподіленим на відрізку від 100 до 1600 грошових одиниць з параметрами функції щільності ймовірностей $\alpha = 2.2$, $\gamma = 4.3$. Нарешті, за проектом C випадковий прибуток вважається рівномірно розподіленим на множині значень від 200 до 1200 грошових одиниць.

Визначити, яким буде упорядкування цих проектів за показником прибутку залежно від особливостей ставлення ОПР до ризику.

2.3. Місцезнаходження оптимального варіанту ризикового інвестування

Вивчимо питання про можливе місцезнаходження оптимального варіанту інвестування у випадку ризику. Припустимо, що є деяка множина альтернативних варіантів ризикового інвестування, кожний із яких характеризується певними значеннями очікуваного прибутку $\bar{x}$ і дисперсії прибутку σ^2. Множину пар цих статистичних оцінок усіх варіантів ризикового інвестування позначимо через Ω:

$$\Omega = \{(\bar{x}; \sigma^2)\}.$$

Тоді задача вибору найкращого для ОПР варіанта інвестування, з урахуванням апроксимуючого виразу щодо очікуваної корисності прибутку, набирає вигляду:

$$\left.\begin{array}{c} \bar{u}_q = f(\bar{x}) + \dfrac{1}{2} f''(\bar{x})\sigma^2 \to \max, \\ (\bar{x}; \sigma^2) \in \Omega. \end{array}\right\} \qquad (2.10)$$

Позначимо розв’язок цієї задачі через $(\bar{x}_*, \sigma_*^2)$ та з’ясуємо його можливе місцезнаходження на множині Ω.

Оскільки апроксимуючий вираз для очікуваної корисності $\bar{u}_q$ містить у якості аргументу значення другої похідної f'' функції корисності прибутку при середньому значенні прибутку $\bar{x}$, доцільно уточнити властивості цієї другої похідної. Наявна досі інформація стосується поки що її знаковизначеності: за нейтрального ставлення ОПР до ризику f'' дорівнює нулю, за несхильного f'' від'ємна, а у разі схильності до ризику є додатною.

За нейтрального ставлення ОПР до ризику друга похідна функції корисності прибутку є сталою (друга похідна лінійної функції завжди дорівнює нулю). Якщо ставлення ОПР до ризику відрізняється від нейтрального, ми залучаємо експоненційні функції корисності. Третя похідна таких функцій завжди є додатною[1], тому друга похідна є зростаючою функцією як у випадку несхильності, так і у випадку схильності ОПР до ризику. Надалі вважатимемо, що друга похідна f'' функції корисності прибутку є принаймні неспадною.

Доведемо тепер такі твердження щодо місцезнаходження оптимального варіанту інвестування у випадку ризику:

---

[1] Для експоненційної та зростаючої функції $f(x) = Ae^{cx} + B$ за довільного значення $c \neq 0$ маємо: $f'(x) = cAe^{cx} > 0$, $f''(x) = c^2 Ae^{cx}$, тому $f'''(x) = c^3 Ae^{cx} > 0$.

Твердження 1. Якщо ОПР ставиться до ризику нейтрально, множина розв'язків задачі (2.10) збігається з множиною розв'язків задачі максимізації очікуваного прибутку:

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &\to \max\,, \\ (\bar{x};\sigma^2) &\in \Omega\,. \end{aligned}\right\}$$

Це твердження стає очевидним, якщо врахувати, що функція корисності прибутку є зростаючою, причому у випадку нейтрального ставлення ОПР до ризику друга похідна цієї функції дорівнює нулю.

Твердження 2. Якщо ОПР ставиться до ризику несхильно, множина розв'язків задачі (2.10) міститься серед ефективних планів двокритеріальної задачі:

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &\to \max\,, \\ \sigma^2 &\to \min\,, \\ (\bar{x};\sigma^2) &\in \Omega\,. \end{aligned}\right\}$$

Доведення. Нагадаємо, що ефективним планом багатокритеріальної задачі називається такий її допустимий план, який не можна покращити за будь яким із критеріїв оптимальності, не допускаючи при цьому погіршення показників по жодному з інших критеріїв. Скористаємося тепер методом "від супротивного". Припустимо, що деякий оптимальний план $(\bar{x}_*,\sigma_{\wedge}^2)$ задачі (2.10) не є ефективним планом нашої двокритеріальної задачі. Це означає, що існує такий план $(\bar{x}_1,\sigma_1^2)\in\Omega$, при якому або $\bar{x}_1 > \bar{x}_*$ і $\sigma_1^2 \le \sigma_*^2$, або ж $\bar{x}_1 \ge \bar{x}_*$ і $\sigma_1^2 < \sigma_*^2$. Оскільки функція корисності прибутку є зростаючою, причому за несхильності до ризику $f''(\bar{x}_*) < 0$, у довільному із зазначених двох випадків одержуємо:

$$[f(\bar{x}_1) - f(\bar{x}_*)] + (-\frac{1}{2} f''(\bar{x}_*)) \cdot [\sigma_*^2 - \sigma_1^2] > 0\,,$$

тобто, що

$$f(\bar{x}_1) + \frac{1}{2} f''(\bar{x}_*)\sigma_1^2 > f(\bar{x}_*) + \frac{1}{2} f''(\bar{x}_*)\sigma_*^2\,.$$

Друга похідна функції корисності прибутку є неспадною. Тому із нерівності $\bar{x}_1 \ge \bar{x}_*$ випливає, що $f''(\bar{x}_1) \ge f''(\bar{x}_*)$. Отже, оскільки $\sigma_1^2 \ge 0$, справджується нерівність:

$$f(\bar{x}_1) + \frac{1}{2} f''(\bar{x}_1)\sigma_1^2 \ge f(\bar{x}_1) + \frac{1}{2} f''(\bar{x}_*)\sigma_1^2\,.$$

Остаточно одержуємо:

$$f(\bar{x}_1) + \frac{1}{2} f''(\bar{x}_1)\sigma_1^2 > f(\bar{x}_*) + \frac{1}{2} f''(\bar{x}_*)\sigma_*^2\,.$$

Ця нерівність суперечить умові оптимальності плану $(\bar{x}_*,\sigma_*^2)$ в задачі (2.10). Твердження доведено.

Твердження 3. Якщо ОПР є схильною до ризику, множина розв'язків задачі (2.10) міститься серед ефективних планів двокритеріальної задачі:

$$\left.\begin{array}{r}\bar{x} \to \max ,\\ \sigma^2 \to \max ,\\ (\bar{x};\sigma^2) \in \Omega .\end{array}\right\}$$

Доведення твердження 3 здійснюється за аналогією до доведення твердження 2. Потрібно тільки врахувати, що при схильності ОПР до ризику $f''(\bar{x}_*) > 0$.

Підсумовує доведені твердження про місцезнаходження оптимального варіанту ризикового інвестування рисунок 2.7.

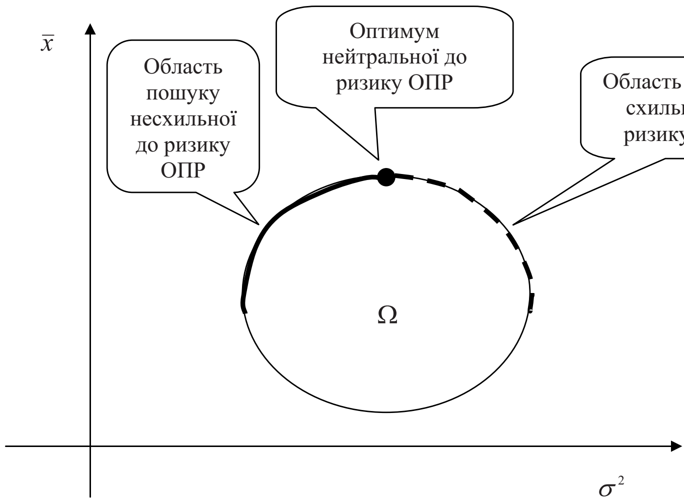


Рис. 2.7. Місцезнаходження оптимального варіанту інвестування на множині $\Omega = \{(\bar{x}, \sigma^2)\}$ залежно від типу ставлення ОПР до ризику

Беручи до уваги зв'язок задачі про визначення оптимального варіанту ризикового інвестування з відповідною однокритеріальною або двокритеріальною задачею, можна запропонувати наступний спосіб вирішення проблеми, якщо ставлення ОПР до ризику відрізняється від нейтрального. Спочатку ОПР повинна отримати інформацію про діапазони зміни показників $\bar{x}$ і σ^2 на такій підмножині множини Ω, що відповідає її типу ставлення до ризику – $[\bar{x}_{\min}; \bar{x}_{\max}]$ та $[\sigma^2_{\min}; \sigma^2_{\max}]$. Звертаємо увагу, що ці діапазони встановлюються не для всієї множини Ω, а лише для її або північно–західної, або північно–східної межі, залежно від типу ставлення ОПР до ризику (відповідно, або несхильності, або схильності). Якщо нижня границя відповідного інтервалу збігається з верхньою, це означає, що коливання кожної із двох цільових функцій на множині ефективних варіантів інвестування дорівнюють нулю, причому усі ефективні варіанти рішень мають однакові значення показників очікуваного прибутку і дисперсії прибутку, тобто є однаково прийнятними для ОПР.

У супротивному випадку ОПР повинна зазначити прийнятне для неї значення одного з критеріальних показників, після чого остаточний результат визначатиметься оптимізацією другого показника при додатковій умові, щоб значення першого показника було не гіршим, аніж прийнятне.

Наприклад, якщо ОПР за обмежувальну використовує умову $\bar{x} \geq \bar{x}_0$ (де $\bar{x}_0 \in [\bar{x}_{\min}; \bar{x}_{\max}]$), тоді оптимум при <u>несхильності</u> до ризику визначається таким ефективним планом, який є розв'язком задачі:

$$\left.\begin{array}{c} \sigma^2 \to \min, \\ \bar{x} \geq \bar{x}_0, \\ (\bar{x}; \sigma^2) \in \Omega, \end{array}\right\}$$

а при <u>схильності</u> до ризику – розв'язком задачі:

$$\left.\begin{array}{c} \sigma^2(x) \to \max, \\ \bar{x} \geq \bar{x}_0, \\ (\bar{x}; \sigma^2) \in \Omega. \end{array}\right\}$$

Ці дві задачі різняться між собою спрямованістю цільової функції. При однаковому прийнятному рівні очікуваного прибутку ОПР, яка несхильна до ризику, прагне мінімізувати дисперсію прибутку, у той час коли схильна до ризику ОПР намагається досягти максимуму дисперсії прибутку.

Коли ж ОПР зазначає прийнятне значення σ_0^2 дисперсії прибутку ($\sigma_0^2 \in [\sigma_{\min}^2; \sigma_{\max}^2]$), за її <u>несхильності</u> до ризику оптимум відповідає такому ефективному плану, який є розв'язком задачі:

$$\left.\begin{array}{c} \bar{x} \to \max, \\ \sigma^2 \leq \sigma_0^2, \\ (\bar{x}; \sigma^2) \in \Omega, \end{array}\right\}$$

а у разі <u>схильності</u> до ризику – ефективному плану, що відповідає розв'язку задачі

$$\left.\begin{array}{c} \bar{x} \to \max, \\ \sigma^2 \geq \sigma_0^2, \\ (\bar{x}; \sigma^2) \in \Omega. \end{array}\right\}$$

Останні дві задачі різняться обмежувальною умовою: у випадку несхильності ОПР до ризику показник дисперсії повинний бути не вищим від прийнятного рівня, а за умов схильності ОПР до ризику – не нижчим від прийнятного рівня.

Можна скористатися також і іншими методами розв'язування двокритеріальних задач (дивись підрозділ 1.4).

Вправи до підрозділу 2.3

Вправа 2.3.1. Довести твердження 3 про місцезнаходження оптимального варіанту ризикового інвестування у випадку, коли ОПР є схильною до ризику.

Вправа 2.3.2. Довести, що в двокритеріальній задачі з критеріальними показниками очікуваного прибутку та дисперсії прибутку показник дисперсії можна замінити на показник стандартного відхилення, оскільки така заміна на впливатиме на множину ефективних варіантів ризикового інвестування.

Вправа 2.3.3. Знайти ефективні та неефективні варіанти ризикового інвестування серед 10 альтернативних проектів, якщо для кожного з них відомі показники очікуваного прибутку та стандартного відхилення прибутку від його очікуваного рівня (млн. грн.):

Показник прибутку	**Проект**									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Очікуваний рівень	12	8	4	9	7	6	5	14	9	6
Стандартне відхилення	0,3	0,2	0,1	0,3	0,2	0,8	0,6	0,4	0,3	0,5

Вправа 2.3.4. Визначити межі варіації показників очікуваного прибутку та стандартного відхилення прибутку на множині ефективних варіантів ризикового інвестування, визначеній у вправі 2.3.3.

2.4. Визначення та властивості пропорції оптимального розподілу капіталу за активним та пасивним напрямами інвестування

Практика управління фінансовими активами має як приклади надзвичайно ефектного інвестування, так і випадки серйозних фінансових втрат. Ризик, або можливість втратити капітал, є постійним атрибутом фінансової діяльності. Особи, які приймають фінансові рішення, ставляться до ризику по–різному. Несхильність до ризику характерна для більшості випадків, коли мова йде про довгострокову перспективу і значні суми капіталу. У той же час на короткострокових періодах і при малих відносних розмірах інвестицій вагомою стає питома вага осіб, схильних до ризику, особливо при наявності напрямів інвестування з надзвичайно високою можливою дохідністю. Методика підтримки прийняття фінансових рішень повинна враховувати особливості індивідуального ставлення інвестора до ризику.

Таким чином, фінансове інвестування практично завжди пов'язане із ризиком отримати у майбутньому дохід, що відрізняється від запланованого. Зрозуміло, що існують окремі майже безризикові напрями інвестування. Але рівень безризикової гарантованої дохідності є не завжди прийнятним для інвесторів. Це спонукає їх вкладати частину власного капіталу за більш ризиковими напрямами, майбутня дохідність за якими видається привабливішою. У таких випадках фінансовий капітал I розподіляється на активну A та пасивну P частини:

$$I = A + P.$$

Вивчимо питання про визначення та властивості оптимальної пропорції такого розподілу.

Вважатимемо, що активний напрям інвестування характеризується майбутньою дохідністю ξ, яка є випадковою величиною з очікуваним значенням $\overline{\xi}$ та стандартним відхиленням σ_ξ. Пасивний напрям інвестування вважатимемо позбавленим ризику та таким, що забезпечує дохідність на детермінованому рівні d. Підлягатиме визначенню величина $\alpha \in [0; 1]$ – частка активного капіталу у фінансовому портфелі інвестора.

Якщо $A = \alpha I$ та $P = (1-\alpha)I$ – обсяги активних та пасивних інвестицій, дохід $D(\alpha)$ інвестора складе величину:

$$D(\alpha) = \xi A + dP = (\alpha\xi + (1-\alpha)d)I,$$

яка залежить від параметра α поділу цього капіталу на активну та пасивну частини. При $\alpha > 0$ цей дохід є недетермінованим, оскільки він залежить від випадкової величини ξ – майбутньої дохідності за ризиковим напрямом інвестування.

Основними статистичними характеристиками випадкової величини доходу D інвестора слугують:

- очікуваний дохід – $\overline{D}$,
- стандартне відхилення доходу від очікуваного рівня – $\sigma(D)$.

Ці показники теж є функціями α:

$$\overline{D}(\alpha) = (\alpha\overline{\xi} + (1-\alpha)d)I\ ,$$

$$\sigma(D(\alpha)) = \alpha\sigma_{\xi} I\ .$$

Дослідження на основі формули "Очікуване значення – Стандартне відхилення". Детермінований еквівалент $\hat{D}$ майбутнього випадкового доходу інвестора, за яким порівнюються альтернативні варіанти ризикового інвестування, теж залежить від параметру поділу інвестиційного портфеля на активну та пасивні частини α:

$$\hat{D}(\alpha) = \overline{D}(\alpha) + k\sigma(D(\alpha)) = (\alpha\overline{\xi} + (1-\alpha)d + k\alpha\sigma_{\xi})I\ ,$$

де k – множник, який відбиває особливості індивідуального ставлення до ризику конкретного інвестора: дорівнює нулю у випадку нейтрального ставлення до ризику, від'ємний – за несхильності та додатний – у випадку схильності ОПР до ризику. За абсолютною величиною цей множник тим більший, чим сильніше ставлення інвестора до ризику відрізняється від нейтрального (таблиця 2.10).

Таблиця 2.10. Окремі орієнтовні значення множника k залежно від типу ставлення інвестора до ризику

Тип ставлення до ризику	Нейтральний	Відрізняється від нейтрального /несхильність (–), схильність (+)/:		
		Помірно	Середньо	Сильно
Значення множника k	0	$\mp$0,2..0,3	$\mp$0,5..0,6	$\mp$0,9…

Бачимо, що детермінований еквівалент $\hat{D}$ майбутнього випадкового доходу D має, насамперед, такі властивості:

1) якщо інвестор нейтральний до ризику, детермінований еквівалент майбутнього випадкового доходу збігається з очікуваним рівнем цього доходу;

2) несхильний до ризику інвестор вважає детермінований еквівалент майбутнього випадкового доходу меншим від очікуваного рівня цього доходу;

3) інвестор, який схильний до ризику, вважає детермінований еквівалент майбутнього випадкового доходу більшим за очікуване значення цього доходу;

4) із зростанням відхилення системи переважань інвестора від нейтрального типу (у бік несхильності або, навпаки, у бік схильності до ризику) детермінований еквівалент майбутнього випадкового доходу все більше відрізнятиметься від очікуваного рівня цього доходу.

Тепер задачу про визначення оптимальної частки α^* активного капіталу у фінансовому портфелі інвестора можна подати так:

$$\left.\begin{array}{c} \hat{D}(\alpha) = (d + \alpha(\overline{\xi} - d + k\sigma_{\xi})I \to \max\ , \\ 0 \le \alpha \le 1\ . \end{array}\right\}$$

Цільова функція цієї задачі є лінійною за керованим параметром α. Отже, розв'язок задачі та оптимальна поведінка інвестора визначатимуться наступним чином:

1) якщо $\dfrac{\bar{\xi}-d}{\sigma_\xi} > -k$, тоді $\alpha^* = 1$ – весь обсяг інвестицій слід спрямувати за активним напрямом;

2) якщо $\dfrac{\bar{\xi}-d}{\sigma_\xi} < -k$, тоді $\alpha^* = 0$ – потрібно зовсім відмовитися від ризикового інвестування;

3) якщо $\dfrac{\bar{\xi}-d}{\sigma_\xi} = -k$, тоді α^* – довільне число з проміжку $[0;1]$, тобто можна сформувати фінансовий портфель із будь–якою пропорцією між його активною та пасивною частинами.

Зауважимо, що множник k, який відбиває суб'єктивне ставлення інвестора до ризику, можна вважати відомим лише наближено. До того ж і статистичні характеристики $\bar{\xi}$ та σ_ξ майбутньої випадкової дохідності недоцільно вважати відомими з абсолютною точністю. Це означає, що отримані результати про оптимальну пропорцію α^* поділу фінансового портфеля інвестора за активною та пасивною частинами мають скоріше не кількісний, а якісний характер, а саме:

1) нейтральний до ризику інвестор ($k = 0$) звертатиметься до ризикового інвестування лише за умов, що очікувана дохідність цього напряму перевищуватиме дохідність безризикового інвестування;

2) якщо інвестор є несхильним до ризику, при малій очікуваній дохідності ризикового інвестування у порівнянні з безризиковою він відмовиться від фінансування ризикових напрямів. Намір ризикового інвестування може з'явитися у нього лише при високих рівнях очікуваної дохідності ризикового інвестування порівняно до безризикового, але із збільшенням стандартного відхилення майбутньої дохідності ризикового інвестування від її очікуваного рівня цей намір послаблюватиметься і може зникнути зовсім;

3) схильний до ризику інвестор завжди братиме участь у ризиковому інвестуванні, тільки-но очікувана дохідність за цим напрямом перевищуватиме дохідність безризикових вкладань. Якщо ж очікувана дохідність ризикового інвестування є меншою від безризикової дохідності, він обиратиме ризиковий напрям інвестування лише за умов досить великого стандартного відхилення майбутньої дохідності ризикового інвестування від її очікуваного рівня.

<u>Дослідження на основі формули "Очікуване значення – Дисперсія"</u>. Для подальшого вивчення питання про оптимальну пропорцію між активною та пасивною частинами інвестиційного портфеля скористаємося формулою

наближеного обчислення детермінованого еквівалента $\hat{D}$ майбутнього випадкового доходу з використанням коефіцієнта Пратта–Ерроу:

$$\hat{D}(\alpha) \approx \overline{D}(\alpha) - \frac{1}{2} s\sigma^2 (D(\alpha)) = (\alpha\overline{\xi} + (1-\alpha)d)I - \frac{1}{2} s\alpha^2 \sigma_\xi^2 I^2,$$

де $s = -\frac{f''(\overline{D}(\alpha))}{f'(\overline{D}(\alpha))}$ – коефіцієнт Пратта–Ерроу, який характеризує особливості індивідуального ставлення до ризику (нульовий, якщо інвестор нейтральний до ризику; додатний у випадку несхильності та від'ємний у випадку схильності інвестора до ризику).

У першому наближенні коефіцієнт Пратта–Ерроу можна вважати сталим. Тоді розв'язок задачі інвестора визначатиметься співвідношеннями між значеннями некерованих параметрів d, I, $\overline{\xi}$, σ_ξ та s. Охарактеризуємо цей розв'язок.

Стратегія нейтрального до ризику інвестора очевидна: брати до уваги ризиковий напрям інвестування лише за умови, що $\overline{\xi} \ge d$. Тому розглянемо далі випадки, коли ставлення інвестора до ризику відрізняється від нейтрального, тобто коли $s \ne 0$.

1). У випадку несхильного ставлення до ризику ($s > 0$):

- $\alpha^* = \frac{\overline{\xi} - d}{s\sigma_\xi^2 I}$, якщо $0 \le \frac{\overline{\xi} - d}{s\sigma_\xi^2 I} \le 1$;
- $\alpha^* = 0$, якщо $\frac{\overline{\xi} - d}{s\sigma_\xi^2 I} \le 0$;
- $\alpha^* = 1$, якщо $\frac{\overline{\xi} - d}{s\sigma_\xi^2 I} \ge 1$.

Таким чином, за несхильного ставлення до ризику при $\overline{\xi} \le d$ доцільно відмовитися від ризикового інвестування. Активні напрями інвестування слід взяти до уваги лише при $\overline{\xi} > d$. Причому із зростанням або фінансового капіталу I, або стандартного відхилення σ_ξ майбутньої випадкової дохідності ξ від її очікуваного рівня $\overline{\xi}$, або із зростанням несхильності інвестора до ризику s оптимальна частка α^* активного капіталу у фінансовому портфелі інвестора зменшуватиметься.

2). У випадку схильності до ризику ($s < 0$) розв'язок задачі інвестора визначатиметься таким чином:

- $\alpha^* = 0$, якщо $\overline{\xi} - d < \frac{1}{2} s\sigma_\xi^2 I$;
- $\alpha^* = 1$, якщо $\overline{\xi} - d > \frac{1}{2} s\sigma_\xi^2 I$.

Таким чином, схильний до ризику інвестор буде вкладати кошти у ризикове інвестування за умов або досить великої очікуваної дохідності $\overline{\xi}$

відповідного напряму, або досить великого стандартного відхилення σ_ξ майбутньої випадкової дохідності ризикового інвестування, або за умов наявності фінансового капіталу I у значних розмірах, або, нарешті, за умов значної схильності до ризику (досить великих значень $|s|$).

Ще однією особливістю схильної до ризику ОПР є те, що вона не орієнтується на "половинчасті" рішення: весь капітал спрямовуватиметься нею або лише за активним, або, навпаки, лише за пасивним напрямом інвестування. Зауважимо, що вважати цей висновок абсолютно точним не слід, оскільки квадратична функціональна залежність детермінованого еквівалента $\hat{D}(\alpha)$ майбутнього випадкового доходу від пропорції α, яка визначає розподіл інвестиційного портфеля на активну та пасивну частини, лише наближено відбиває переважання інвестора. /До того ж, і припущення про сталість коефіцієнта Пратта–Ерроу теж не завжди відповідає реальній ситуації./

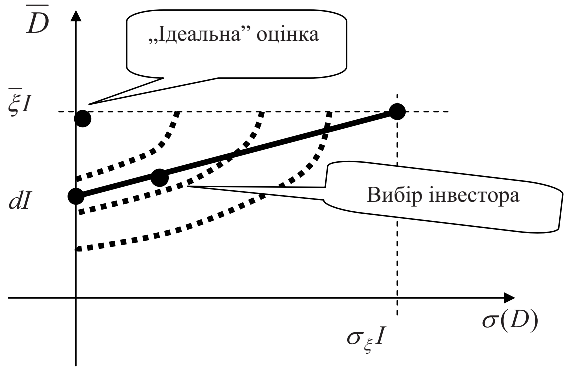
Дослідження на основі зв'язку між задачею інвестора з двокритеріальною задачею. Тепер скористаємося тим фактом, що оптимальна поведінка схильного або несхильного до ризику інвестора визначається певним ефективним планом двокритеріальної задачі:

$$\left.\begin{aligned} \overline{D}(\alpha) = (\alpha\overline{\xi} + (1-\alpha)d)I \to \max\,, \\ \sigma(D(\alpha)) = \alpha\sigma_\xi I \to \max\,(\min)\,, \\ 0 \le \alpha \le 1\,, \end{aligned}\right\}$$

в якій оптимізаційна спрямованість другої цільової функції (показника стандартного відхилення майбутнього випадкового доходу) залежить від типу ставлення ОПР до ризику: "$\to \min$" – за несхильності та, навпаки, "$\to \max$" – у випадку схильності.

У просторі $\{(\sigma(D), \overline{D})\}$ множині оцінок допустимих планів двокритеріальної задачі відповідатиме відрізок від точки $(0, dI)$ до точки $(\sigma_\xi I, \overline{\xi}I)$. Для несхильної до ризику ОПР при $\overline{\xi} > d$ всі допустимі оцінки є ефективними. Конкретний вибір серед них здійснює ОПР, намагаючись якомога ближче наблизитися до "ідеальної" оцінки – точки $(0, \overline{\xi}I)$, згідно її власної системи переважань (рис. 2.8а). Навпаки, при $\overline{\xi} < d$ ефективна оцінка єдина: $(0, dI)$. Вона відповідає рішенню відмовитися від ризикового інвестування (рис. 2.8б).

а) очікувана дохідність ризикового інвестування вища за дохідність безризикового інвестування



б) очікувана дохідність за ризиковим напрямом є меншою від дохідності безризикового інвестування

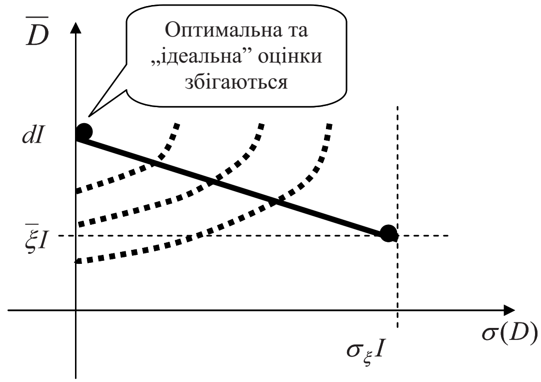
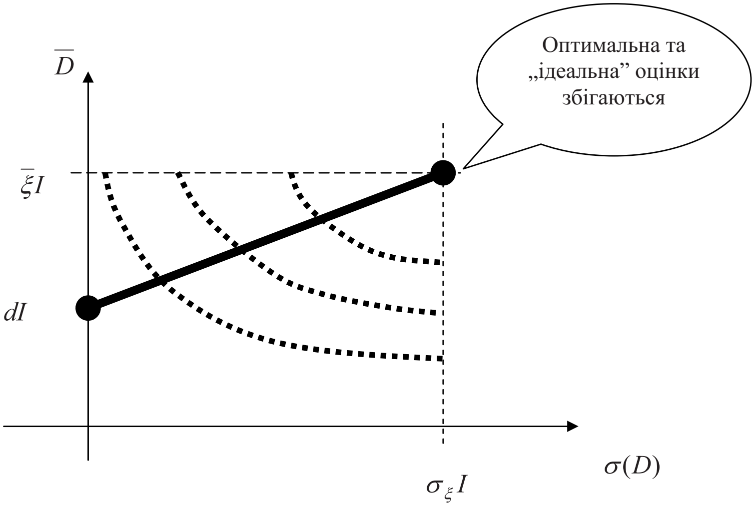


Рис. 2.8. Множина оцінок допустимих планів розподілу фінансового капіталу та оптимальний вибір інвестора за несхильності до ризику (пунктиром показані лінії рівня функції корисності ОПР)

а) очікувана дохідність ризикового інвестування перевищує дохідність безризикового інвестування



б) очікувана дохідність за ризиковим напрямом є меншою від дохідності безризикового інвестування

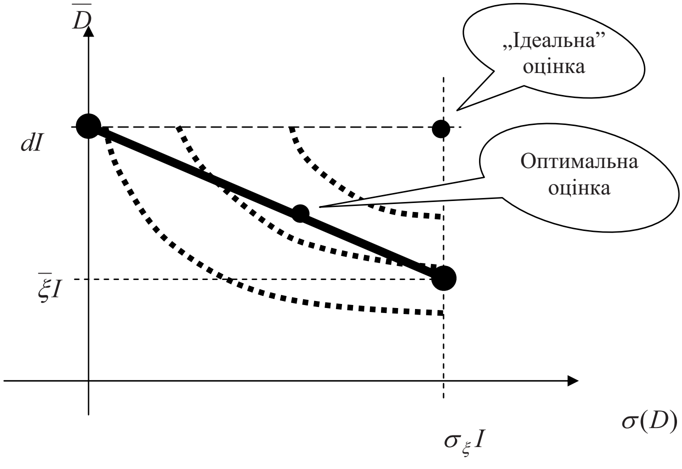


Рис. 2.9. Множина оцінок допустимих планів розподілу фінансового капіталу та оптимальний вибір схильного до ризику інвестора (пунктиром показані лінії рівня функції корисності ОПР)

Схильний до ризику інвестор при $\overline{\xi} > d$ досягає "ідеальної" для нього оцінки – точки $(\sigma_{\xi} I, \overline{\xi} I)$, тому в такому разі він вкладатиме всі кошти за активним напрямом (рис. 2.9а). Навпаки, при $\overline{\xi} < d$ "ідеальна" для нього оцінка – точка $(\sigma_{\xi} I, dI)$ – є недосяжною, тому він обиратиме найкращу по відношенню до неї точку, згідно його власних переважань (рис. 2.9б). Причому не виключено, що оптимальною для нього може бути і внутрішня точка відрізка $[(0, dI); (\sigma_{\xi} I, \overline{\xi} I)]$. Таким чином, схильний до ризику інвестор також може обирати мішаний фінансовий портфель, який міститиме як активні (ризикові), так і пасивні (безризикові) інвестиції.

Щоб допомогти ОПР визначити оптимальну частку α^* активного капіталу у фінансовому портфелі, вважаємо за доцільне за відомими параметрами d, I, $\overline{\xi}$ та σ_{ξ} побудувати графіки залежностей очікуваного доходу $\overline{D}(\alpha)$ та стандартного відхилення майбутнього доходу $\sigma(D(\alpha))$ на множині значень змінної α від 0 до 1 (рис. 2.10а, 2.10б), а також верхньої $D^*(\alpha)$ та нижньої $D^0(\alpha)$ меж симетричного відносно $\overline{D}(\alpha)$ проміжку, до якого значення майбутнього випадкового доходу $D(\alpha)$ належатиме із наперед заданою імовірністю p (рис. 2.10в). Ці межі у першому наближення можна обчислити за формулами:

$$D^*(\alpha) = \overline{D}(\alpha) + \sigma(D(\alpha))\Phi^{-1}\left(\frac{p}{2}\right),$$

$$D^0(\alpha) = \overline{D}(\alpha) - \sigma(D(\alpha))\Phi^{-1}\left(\frac{p}{2}\right),$$

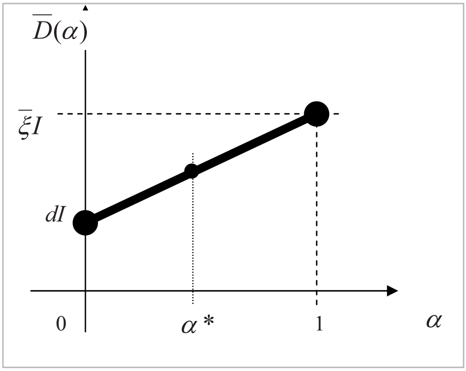
де Φ^{-1} – функція, обернена до функції Лапласа.

Наприклад, при $p = 0{,}95$ матимемо: $\Phi^{-1}(0{,}475) \approx 1{,}97$, внаслідок чого для обчислення меж матимемо наступні співвідношення:

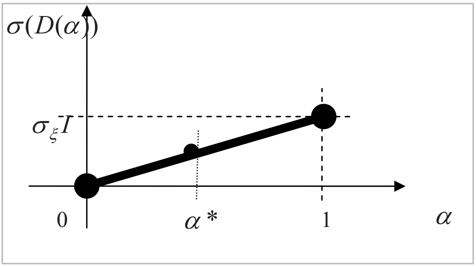
$$D^*(\alpha) = (\alpha\overline{\xi} + (1-\alpha)d)I + 1{,}97\alpha\sigma_{\xi} I = (d + (\overline{\xi} - d + 1{,}97\sigma_{\xi})\alpha)I\,,$$

$$D^0(\alpha) = (\alpha\overline{\xi} + (1-\alpha)d)I - 1{,}97\alpha\sigma_{\xi} I = (d + (\overline{\xi} - d - 1{,}97\sigma_{\xi})\alpha)I\,.$$

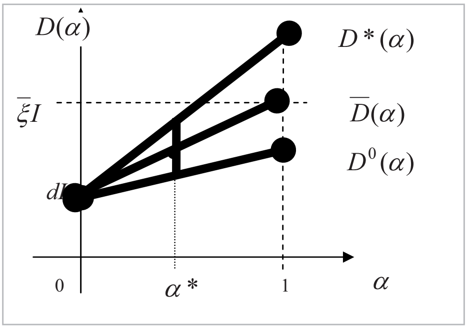
Досліджуючи графіки, наведені на рис. 2.10а–в, інвестор самостійно визначає частку α^* активного капіталу у власному фінансовому портфелі, виходячи з особистих переважань.



а)



б)



в)

Рис. 2.10. Очікуваний дохід $\overline{D}(\alpha)$, стандартне відхилення $\sigma(D(\alpha))$ та проміжок можливих значень $[D^0(\alpha); D^*(\alpha)]$ майбутнього випадкового доходу $D(\alpha)$ залежно від α. Оптимальну частку активного капіталу α^* інвестор визначає самостійно, згідно його власної системи переважань

Підсумуємо результати дослідження. Наявний фінансовий капітал інвестори часто розподіляють між активними та пасивними напрямами. Ця пропорція, тобто частка активного капіталу у фінансовому портфелі інвестора, визначається як об'єктивними, так і суб'єктивними чинниками. За несхильності до ризику доцільність ризикових інвестицій може з'явитися тоді, коли очікувана дохідність таких вкладань значно вища, аніж дохідність безризикового інвестування. Із зростанням очікуваної дохідності ризикового напряму інвестування ця частка збільшується, проте із зростанням дисперсії дохідності цих вкладань частка активного капіталу зменшуватиметься. Зменшення частки активних інвестицій відбувається також при зростанні рівня несхильності інвестора до ризику, а також із зростанням наявного у інвестора фінансового капіталу. Схильний до ризику інвестор може взяти участь у ризиковому інвестуванні і за умов, коли очікувана дохідність є меншою від гарантованої безризикової дохідності. Але це відбуватиметься, якщо майбутня випадкова дохідність має досить велику варіацію або коли інвестор володіє значною величиною фінансового капіталу.

Вправи до підрозділу 2.4

Вправа 2.4.1. Особа, яка має капітал у розмірі 100 грошових одиниць, може або покласти гроші на депозитний рахунок у банк під 15 % річних, або придбати акції, річна прибутковість яких вважається випадковою величиною, що може набирати значень в межах від 0,1 до 0,3 та має бета–розподіл з параметрами $\alpha = 1.5$, $\gamma = 3.5$. Дослідити, яку частину капіталу доцільно покласти на депозит, а яку витратити на придбання акцій, залежно від особливостей ставлення цієї особи до ризику. Який фінансовий план у цій ситуації оберете Ви, виходячи з власних переважань?

Вправа 2.4.2. Підприємство через три місяці має сплатити імпортеру 130 тис. євро за поставку комплектуючих. Воно може або придбати валюту сьогодні за поточним курсом гривні щодо євро 10:1, та розмістити цю валюту на депозитному валютному рахунку терміном на три місяці з квартальною відсотковою ставкою 2,5 %, або ж купити валюту через три місяці за рахунок наявного гривневого депозиту, відсотки на який банк нараховує щомісяця у розмірі 1 %. від поточного розміру депозиту. Майбутній (через 3 місяці) курс гривні щодо євро вважається випадковою величиною, що має рівномірний розподіл в межах від 9,5 до 11,5. Який із способів конвертації гривні (сьогодні або через три місяці) є вигіднішим підприємству для здійснення розрахунків з імпортером? Чи є сенс у комбінованому використанні зазначених двох способів обміну гривні?

2.5. Наслідки диверсифікації вкладень за ризиковими напрямами інвестування

Коли особа може вкладати кошти одночасно за кількома ризиковими напрямами інвестування, у неї з'являється можливість керувати ризиком щодо розміру майбутнього загального доходу належним вибором пропорції розподілу капіталу за окремими напрямами.

Щоб побачити ефект диверсифікації вкладень розглянемо спочатку два ризикових напрями інвестування, кожний з яких характеризується випадковими дохідностями, відповідно, ξ_1 і ξ_2, що мають очікувані значення $\bar{\xi}_1$ і $\bar{\xi}_2$ та стандартні відхилення σ_1 і σ_2.

Якщо інвестор наявний у нього капітал у розмірі I грошових одиниць розподілить за напрямами інвестування у обсягах, відповідно, x_1 і x_2:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 = I \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}\right\},$$

його майбутній дохід D у момент прийняття рішення являтиме випадкову величину, лінійно залежну від випадкових дохідностей ξ_1 і ξ_2:

$$D = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 .$$

Знайдемо основні статистичні характеристики цієї випадкової величини:

- очікуваний загальний дохід $\bar{D}$ є сумою очікуваних доходів окремо за кожним із напрямів інвестування:
$$\bar{D} = \bar{\xi}_1 x_1 + \bar{\xi}_2 x_2 ;$$
- дисперсія загального доходу $\sigma^2(D)$ визначається дисперсіями доходів за кожним із напрямів, а також коефіцієнтом кореляції ρ між випадковими дохідностями ξ_1 і ξ_2 цих напрямів:
$$\sigma^2(D) = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + 2\rho\sigma_1 x_1 \sigma_2 x_2 .$$

Проаналізуємо залежності очікуваного рівня $\bar{D}$ та дисперсії $\sigma^2(D)$ загального доходу D від обсягу інвестицій за першим напрямком x_1, покладаючи $x_2 = I - x_1$:

$$\bar{D} = \bar{\xi}_1 x_1 + \bar{\xi}_2 (I - x_1),$$
$$\sigma^2(D) = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 (I - x_1)^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 x_1 (I - x_1),$$
$$0 \leq x_1 \leq I .$$

Типові графіки таких залежностей показано на рис. 2.11.

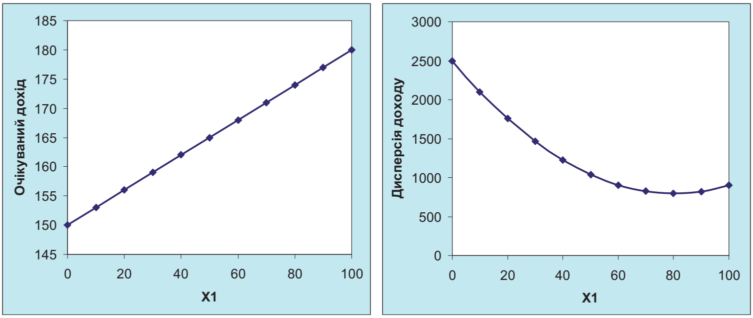


Рис. 2.11. Залежність очікуваного доходу та дисперсії доходу від розміру вкладень x_1 за першим напрямом інвестування
($0 \le x_1 \le I$, $I = 100$, $\xi_1 = 1.8$, $\xi_2 = 1.5$, $\sigma_1 = 0.3$, $\sigma_2 = 0.5$, $\rho = 0.25$)

Бачимо, що довільне з припустимих значень x_1 не може забезпечити очікуваний дохід меншим, аніж $I \min\{\xi_1, \xi_2\}$, та більшим, аніж $I \max\{\xi_1, \xi_2\}$ грошових одиниць. Причому максимальне значення очікуваного доходу досягатиметься вкладенням усього наявного капіталу I за напрямом інвестування з більшою очікуваною дохідністю.

Що стосується дисперсії доходу, то її максимально можливе значення дорівнює $(I \max\{\sigma_1, \sigma_2\})^2$ та досягатиметься при вкладанні усього капіталу за напрямом, у якого стандартне відхилення дохідності є більшим. Водночас мінімальне значення дисперсії $\sigma^2(D)$ може бути і меншим, аніж найменша з величин $(I\sigma_1)^2$ та $(I\sigma_2)^2$. Наприклад, якщо коефіцієнт кореляції ρ між випадковими дохідностями ξ_1 і ξ_2 дорівнює нулю, мінімум дисперсії доходу досягатиметься при $x_1 = \dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} I$ та дорівнюватиме $\dfrac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} I^2$, що є меншим і від $\sigma_1^2 I^2$, і від $\sigma_2^2 I^2$, тільки-но $\sigma_1 \sigma_2 > 0$. Більш того, якщо коефіцієнт кореляції ρ між випадковими дохідностями ξ_1 і ξ_2 дорівнює -1, тоді при $x_1 = \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} I$ дисперсія доходу дорівнюватиме нулю, тобто відповідним чином диверсифіковане інвестування стає практично безризиковим.

Типові залежності між очікуваним доходом $\overline{D}$ та стандартним відхиленням $\sigma(D)$ випадкового доходу на множині допустимих портфелів (x_1, x_2) при різних значеннях коефіцієнту кореляції ρ між випадковими дохідностями ξ_1 і ξ_2 напрямів ризикового інвестування наведено на рис. 2.12.

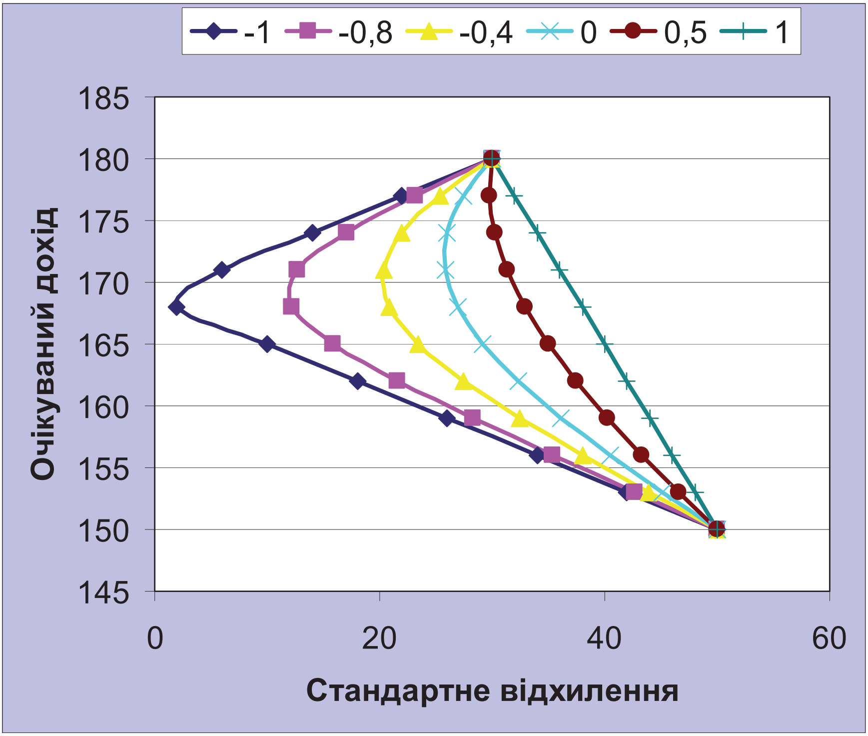


Рис. 2.12. Зв'язок між очікуваним доходом та стандартним відхиленням випадкового доходу на множині інвестиційних портфелів залежно від коефіцієнту кореляції ρ між випадковими дохідностями двох напрямів ризикового інвестування ($I = 100$, $\xi_1 = 1.8$, $\xi_2 = 1.5$, $\sigma_1 = 0.3$, $\sigma_2 = 0.5$)

Отже, якщо серед потенційних напрямів ризикового інвестування є такі, коефіцієнт кореляції між випадковими дохідностями за якими близький до -1, інвестор має можливість належним розподілом вкладень за цими напрямами сформувати портфель, дохід за яким буде практично позбавленим ризику.

Ще один ефект диверсифікації вкладень можемо побачити на прикладі ситуації, коли є дуже велика кількість напрямів ризикового інвестування, випадкові дохідності за якими попарно незалежні (усі коефіцієнти парної кореляції між дохідностями за різними напрямами дорівнюють нулю), а також мають приблизно однакові очікувані рівні $\bar{\xi}$ та приблизно однакові стандартні відхилення σ.

Якщо інвестор весь наявний у нього капітал I розподілить порівну між усіма n напрямами інвестування, очікуваний дохід $\overline{D}$ інвестора дорівнюватиме:

$$\overline{D} = n \cdot (\frac{I}{n}\overline{\xi}) = \overline{\xi} I ,$$

тобто не залежить від кількості n задіяних напрямів інвестування.

Навпаки, для дисперсії майбутнього випадкового доходу інвестора спостерігаємо іншу ситуацію:

$$\sigma^2(D(n)) = n \cdot \left(\frac{I}{n}\sigma\right)^2 = \frac{\sigma^2 I^2}{n},$$

тобто при збільшення кількості задіяних напрямів інвестування n дисперсія доходу диверсифікованого портфеля зменшується, причому при дуже великій кількості напрямів інвестування, що використовуватимуться, фінансовий портфель інвестора стає практично безризиковим, оскільки $\sigma^2(D(n)) \to 0$ при $n \to +\infty$.

Зрозуміло, що при розв'язуванні задач оптимізації фінансових рішень потрібно враховувати ефекти диверсифікації вкладень за різними напрямами ризикового інвестування.

Вправи до підрозділу 2.5

Вправа 2.5.1. Визначити, який фінансовий портфель (x_1, x_2) забезпечує мінімальний рівень дисперсії доходу при інвестування капіталу I за двома напрямами, дохідності ξ_1 і ξ_2 за якими вважаються випадковими та мають очікувані значення $\overline{\xi}_1$ і $\overline{\xi}_2$ та стандартні відхилення σ_1 і σ_2, якщо коефіцієнт кореляції між випадковими дохідностями ξ_1 і ξ_2 дорівнює ρ? Чому дорівнює цей мінімальний рівень дисперсії доходу? За яких умов цей мінімальний рівень дисперсії доходу є меншим, аніж найменша з величин $(I\sigma_1)^2$ та $(I\sigma_2)^2$?

Вправа 2.5.2. Побудувати в просторі $\sigma(D) \times \overline{D}$ графіки зв'язку між очікуваним рівнем $\overline{D}$ та стандартним відхиленням $\sigma(D)$ випадкового доходу на множині допустимих портфелів (x_1, x_2) при інвестуванні за двома напрямами за різних співвідношеннях між $\overline{\xi}_1$ і $\overline{\xi}_2$ та σ_1 і σ_2 та при різних значеннях ρ. Наявний капітал інвестора в кожному з випадків покласти $I = 100$ грошових одиниць.

2.6. Оцінювання чистого зведеного доходу фінансового проекту за умов ризику

Фінансова діяльність практично завжди пов'язана з ризиком. Майбутні фактичні результати та витрати, як правило, відрізняються від запроектованих. Щоб врахувати чинник ризику, формулу обчислення зведеного чистого доходу коригують. Поширеного вжитку здобув метод корекції ставки дисконту. А.Домодаран, наприклад, зазначає, що "ставка дисконтування є функцією ризику очікуваних грошових потоків. При цьому більш високі ставки приписуються більш ризикованим проектам, а зменшені – проектам з більшою безпекою" [1, с. 15], тобто "очікувана дохідність дорівнює безризиковій ставці плюс премії за ризик" [теж там, с. 208]. Отже, згідно цього методу, нормативний коефіцієнт економічної ефективності r, який використовується для безризикового інвестування, слід замінити на коефіцієнт економічної ефективності e ризикових інвестицій: $e = r + \pi$, де π – це премія (або надбавка) за ризик. Існує й альтернативний метод оцінювання фінансового проекту – за показником детермінованого еквіваленту зведеного чистого доходу за проектом, який було запропоновано А.Робішеком та С.Майєрсом у статті "Conceptual Problems in the Use of Risk–Adjusted Discount Rates", надрукованій в 1966 р. у "Journal of Finance" (№ 21). Проте, як пишуть Ю.Бригхем та Л.Гапенски, "хоч метод безризикового еквіваленту і має певні переваги, але популярнішим є метод корекції ставки дисконту" [2, т. 1, с. 306].

Вважаємо, що метод корекції ставки дисконту є менш обґрунтованим, аніж метод детермінованого еквіваленту чистого зведеного доходу ризикового інвестування, та доведемо перевагу останнього методу.

Розглянемо найпростіший фінансовий проект тривалістю один рік. Вважатимемо, що інвестиції у розмірі I грошових одиниць здійснюються у повному обсязі на початку року та є детермінованими, а майбутній чистий поточний дохід Q за проектом на кінець року, як різниця між результатами та неінвестиційними витратами, є випадковою величиною з очікуваним значенням $\overline{Q}$ та стандартним відхиленням $\sigma(Q)$ (грошових одиниць). Тоді очікуваний зведений чистий дохід $\overline{N_e}$ та стандартне відхилення $\sigma(N_e)$, відповідно, дорівнюватимуть (грошових одиниць):

$$\overline{N_e} = -I + \frac{\overline{Q}}{1+e},$$

---

[1] Дамодаран А. Инвестиционная оценка. Инструменты и техника оценки любых активов: Пер. с англ. – М.: Альпина Бизнес Букс, 2004. – ХУП+1342 с.

[2] Бригхем Ю., Гапенски Л. Финансовый менеджмент: Полный курс. В двух т.: Пер. с англ. – СПб.: Экономическая школа, 1997. – Т. 1 – XXX+497 с., т. 2 – 669 с.

$$\sigma(N_e) = \frac{\sigma(Q)}{1+e},$$

де e – річна ставка дисконту для інвестицій, пов'язаних із відповідним ризиком: $e = r + \pi$.

Звернемося тепер до детермінованого еквіваленту $\hat{Q}$ майбутнього випадкового чистого доходу. Нагадаємо, що детермінований еквівалент – це певна детермінована грошова сума, рівноцінна випадковому чистому доходу Q. Для обчислення детермінованого еквіваленту скористаємося наближеною формулою:

$$\hat{Q} = \overline{Q} + k\sigma(Q),$$

де множник k визначається особливостями індивідуального ставлення інвестора до ризику та відбиває, зокрема, такі властивості детермінованого еквівалента:

1) якщо інвестор нейтральний до ризику ($k = 0$), детермінований еквівалент $\hat{Q}$ майбутнього випадкового чистого доходу Q збігається з очікуваним значенням $\overline{Q}$: $\hat{Q} = \overline{Q}$;

2) несхильний до ризику інвестор ($k < 0$) вважає детермінований еквівалент меншим від очікуваного значення майбутнього випадкового чистого доходу: $\hat{Q} < \overline{Q}$;

3) інвестор, який схильний до ризику ($k > 0$), вважає детермінований еквівалент більшим за очікуване значення майбутнього випадкового чистого доходу: $\hat{Q} > \overline{Q}$;

4) із збільшенням відхилення системи переважань інвестора від нейтрального типу (або в бік несхильності до ризику, або ж в бік схильності до ризику) значення детермінованого еквівалента майбутнього випадкового чистого доходу все більше відрізняється від очікуваного рівня.

На основі детермінованого еквіваленту $\hat{Q}$ майбутнього випадкового чистого доходу обчислимо детермінований еквівалент $\hat{N}_r$ випадкового зведеного чистого доходу:

$$\hat{N}_r = -I + \frac{\hat{Q}}{1+r}$$

– для зведення детермінованих грошових потоків використовують безризикову ставку дисконту r.

Метою заміни нормативного коефіцієнта економічної ефективності безризикового інвестування r на ставку дисконту ризикових інвестицій e було визначення такої величини очікуваного чистого зведеного доходу $\overline{N_e}$, яка збігається з детермінованим еквівалентом $\hat{N}_r$ випадкового зведеного чистого доходу: $\overline{N_e} = \hat{N}_r$. Отже, маємо рівність:

$$\frac{\overline{Q}}{1+e} = \frac{\overline{Q} + k\sigma(Q)}{1+r},$$

яка дозволяє визначити залежність ризикової ставки дисконту e від безризикової дисконтної ставки r та параметра індивідуального ставлення до ризику k:

$$e = \frac{r - kv(Q)}{1 + kv(Q)},$$

де $v(Q) = \frac{\sigma(Q)}{\overline{Q}}$ – коефіцієнт варіації випадкового чистого поточного доходу Q.

Маємо рівняння, яке характеризує правило заміни безризикової ставки дисконту r ставкою дисконту ризикового інвестування e та дозволяє зробити наступні висновки:

1). Якщо фінансовий проект є безризиковим ($v(Q) = 0$), ставка дисконту не змінюється:

$$v(Q) = 0 \Rightarrow e = r.$$

Цей висновок є сподіваним. Але поряд з ним виявилися інші важливі висновки:

2). Якщо інвестор є нейтральним щодо ризику, безризикову ставку дисконту коригувати не треба:

$$k = 0 \quad \Rightarrow \quad e = r;$$

3). Ставка дисконту для ризикових інвестицій e відрізнятиметься від безризикової ставки дисконту r тоді і тільки тоді, коли фінансовий проект є ризиковим ($v(Q) \neq 0$), причому ставлення інвестора до ризику відрізняється від нейтрального ($k \neq 0$):

$$e \neq r \quad \Leftrightarrow \quad (v(Q) \neq 0) \wedge (k \neq 0);$$

4). При <u>помірному</u> відхиленні системи переважань інвестора від нейтрального типу ставлення до ризику безризикову ставку дисконту слід збільшити ($e > r$), якщо інвестор є несхильним до ризику (при $k < 0$). Коли ж інвестор схильний до ризику ($k > 0$), безризикову ставку дисконту слід зменшити ($e < r$);

5). При <u>надзвичайно високому</u> відхиленні системи переважань інвестора від нейтрального типу (коли $k < -\frac{1}{v(Q)}$ або коли $k > \frac{r}{v(Q)}$) коректність заміни безризикової ставки дисконту r ризиковою ставкою e зникає, оскільки остання починає набувати від'ємних значень, навіть менших від "-1", через що подальші розрахунки з використанням цієї величини втрачають економічний сенс.

Висновки "4" та "5" стосуються випадків, коли $v(Q) > 0$, тобто коли очікуваний чистий дохід $\overline{Q}$ за проектом є додатним, що можна вважати необхідною умовою беззбитковості проекту. Ці висновки проілюстровано на рисунку 2.13, на якому показано залежність ризикової ставки дисконту e від множника k, який відтворює індивідуальні особливості ставлення інвестора до ризику.

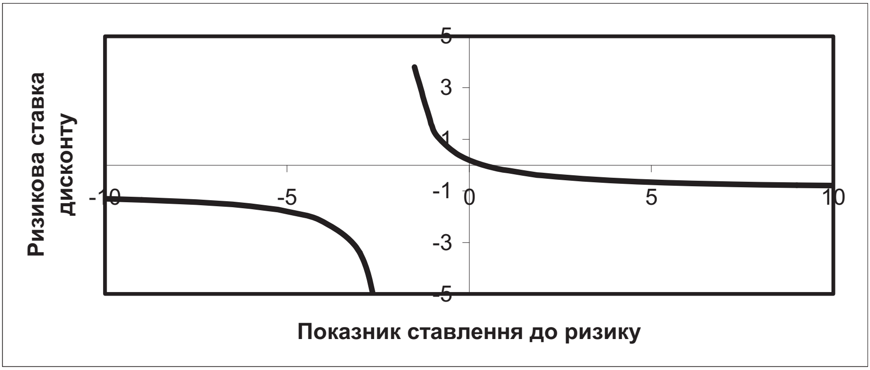


Рис. 2.13. Залежність ризикової ставки дисконту e від показника k – індикатора типу ставлення інвестора до ризику $/ r = 0.2 /$

6). У випадку несхильного ставлення інвестора до ризику ($k < 0$) ставка дисконту ризикового інвестування e зростає разом із зростанням варіації $v(Q)$ майбутнього випадкового чистого поточного доходу Q, причому у разі дуже високої варіації ($v(Q) > -\frac{1}{k}$) коректність використання показника ризикової ставки дисконту зникає – рисунок 2.14;

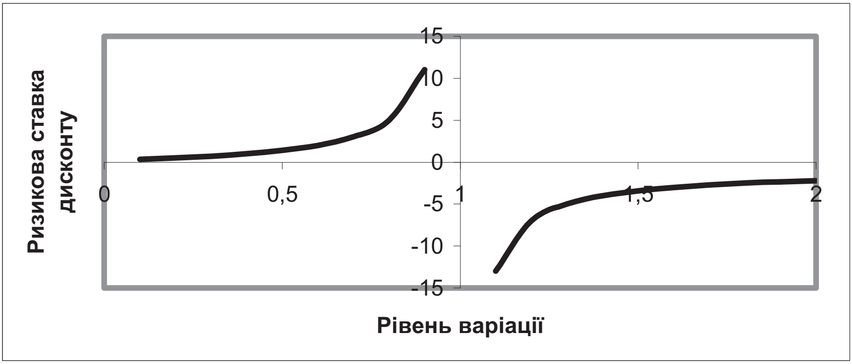


Рис. 2.14. Залежність ризикової ставки дисконту e від рівня варіації $v(Q)$ майбутнього випадкового доходу Q за несхильного ставлення до ризику

7). У випадку схильного ставлення інвестора до ризику ($k > 0$) ставка дисконту ризикового інвестування e спадає із зростанням варіації майбутнього доходу $v(Q)$, причому у випадку дуже високої варіації

($v(Q) > \frac{r}{k}$) набуватиме від'ємних значень, тобто коректність переходу до ставки дисконту ризикового інвестування e теж зникне – рисунок 2.15.

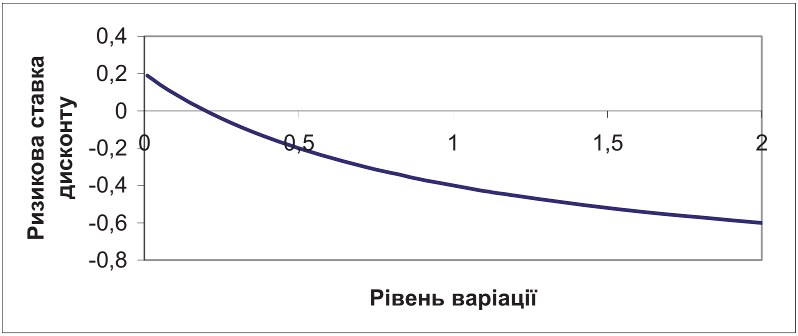


Рис. 2.15. Залежність ризикової ставки дисконту e від рівня варіації $v(Q)$ майбутнього випадкового доходу Q за схильного ставлення до ризику

Висновки "6" і "7" свідчать не лише про залежність ризикової ставки дисконту e від показника варіації $v(Q)$ майбутнього випадкового чистого поточного доходу Q, а також про некоректність переходу від безризикової до ризикової ставки дисконту, якщо варіація майбутнього чистого поточного доходу є помітною.

Результати проведеного дослідження показують, що у випадку ризикового інвестування корекцію формули обчислення зведеного чистого доходу шляхом заміни нормативного коефіцієнта економічної ефективності безризикових інвестицій r на коефіцієнт економічної ефективності ризикових інвестицій e робити неправильно.

Отже, у випадку ризику для оцінювання випадкової величини зведеного чистого доходу N потрібно звернутися до його детермінованого еквіваленту $\hat{N}$:

$$\hat{N} = \overline{N} + k\sigma(N).$$

Використання цієї формули є можливим за умови належного оцінювання очікуваного значення $\overline{N}$ та стандартного відхилення $\sigma(N)$ випадкової величини NPV.

Якщо припустити статистичну незалежність випадкових величин початкових інвестиційних витрат, загальних поточних витрат та поточних доходів в усіх часових проміжках, маємо можливість наближено обчислити очікуване значення $\overline{N}$ і стандартне відхилення $\sigma(N)$ випадкової величини зведеного чистого доходу за ризиковим проектом реального інвестування:

$$\overline{N} = -\overline{I}_0 + \sum_{t=1}^{T} \frac{\overline{D}_t - \overline{V}_t}{(1+r)^t},$$

$$\sigma^2(N)=\sigma^2(I_0)+\sum_{t=1}^{T}\frac{\sigma^2(D_t)+\sigma^2(V_t)}{(1+r)^{2t}}.$$

Зараз було використано таку формулу обчислення NPV:

$$N=-I_0+\sum_{t=1}^{T}\frac{D_t-V_t}{(1+r)^t},$$

де N – чистий дохід за проектом, зведений до початку планового періоду;
T – тривалість планового періоду (життєвого циклу проекту);
t – номер окремого часового проміжку з планового періоду ($t=\overline{1,T}$);
I_0 – початкові (стартові) інвестиційні витрати за проектом;
D_t – поточні результати (доходи), пов'язані із проектом, у $t-$му часовому проміжку;
V_t –поточні інвестиційні та неінвестиційні витрати, пов'язані із реалізацією проекту, у $t-$му часовому проміжку;
r – нормативний коефіцієнт економічної ефективності інвестицій (ставка або норма дисконту).

Для тривалих фінансових проектів випадкову величину NPV можна вважати нормально розподіленою. Це припущення, в свою чергу, дозволяє визначати ймовірність події, що проект виявиться беззбитковим:

$$P\{N\geq 0\}=P\left\{\frac{N-\overline{N}}{\sigma(N)}\geq-\frac{\overline{N}}{\sigma(N)}\right\}=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{1}{v(N)}\right),$$

де $v(N)=\dfrac{\sigma(N)}{\overline{N}}$ – коефіцієнт варіації випадкового NPV за проектом;
$\Phi(x)$ – функція Лапласа.

Імовірність беззбитковості проекту залежно від параметрів випадкового зведеного чистого доходу зручно обчислювати, користуючись стандартною функцією "НОРМРАСП" електронної таблиці Excel. Зазначимо, що із зростанням коефіцієнта варіації випадкового чистого зведеного доходу імовірність беззбитковості проекту зменшується (таблиця 2.11.).

Таблиця 2.11. Залежність імовірності P беззбитковості фінансового проекту від коефіцієнта варіації $v(N)$ випадкового зведеного чистого доходу N (очікуване значення NPV вважається додатним: $\overline{N}>0$)

$v(N)$	не перевищує 0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
P	практично 1,000	0,994	0,977	0,952	0,923	0,894	0,867	0,841

$v(N)$	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
P	0,818	0,798	0,779	0,762	0,748	0,734	0,722	0,711	0,701	0,691

Приклад 2.6.1. Розглянемо фінансовий проект, показники якого наведено у таблиці 2.12.

Таблиця 2.12. Вихідна інформація щодо економічних показників ризикового проекту реального інвестування (млн. грн.)

Показник	Оцінка		
	Оптимістична	Модальна	Песимістична
Стартові інвестиційні витрати	120	135	160

Показник	Оцінка	Рік життєвого циклу проекту						
		1	2	3	4	5	6	7
Щорічні поточні витрати	Оптимістична	55	75	80	120	150	200	210
	Модальна	70	80	100	150	200	250	270
	Песимістична	80	85	115	175	210	270	300
Поточні результати (доходи)	Оптимістична	40	170	250	400	430	450	410
	Модальна	20	120	180	250	290	340	400
	Песимістична	0	100	150	170	200	250	270

Вихідна інформація містить значення оптимістичної, модальної та песимістичної оцінок кожного з економічних показників фінансового проекту на весь період його життєвого циклу. Бачимо, зокрема, що оптимістичний варіант, у порівнянні до найімовірнішого, передбачає можливість отримання більшого прибутку. Песимістичний варіант передбачає можливість збільшення обсягів стартових інвестиційних вкладань, зростання загальних поточних витрат та зменшення доходів за проектом.

Основні статистичні характеристики усіх показників витрат та доходів, розраховані згідно рекомендацій розробників системи ПЕРТ, наведені у таблиці 2.13.

За даними таблиці 2.13, можемо обчислити очікуваний зведений чистий дохід за проектом та його стандартне відхилення, після чого – коефіцієнт варіації NPV /покладаємо $r = 0{,}2$/:

$$\overline{N} = 65.72 \text{ млн. грн.},$$
$$\sigma(N) = 32.76 \text{ млн. грн.},$$
$$v(N) = 0.498.$$

Знайдемо також імовірність беззбитковості проекту:

$$P\{N \geq 0\} = 1 - НОРМРАСП(0;\,65.72;32.76;\,1) = 0{,}978,$$

тобто проект є практично беззбитковим.

Таблиця 2.13. Статистичні характеристики економічних показників ризикового проекту реального інвестування (млн. грн.)

Показник	**Статистична характеристика**	
	Очікуване значення	Стандартне відхилення
Стартові інвестиційні витрати	**136,67**	**6,67**

Показник	**Статистична характеристика**	Рік життєвого циклу						
		1	2	3	4	5	6	7
Поточні витрати	Очікуване значення	**69,17**	**80,00**	**99,17**	**149,17**	**193,33**	**245,00**	**265,00**
	Стандартне відхилення	**4,17**	**1,67**	**5,83**	**9,17**	**10,00**	**11,67**	**15,00**
Поточні результати	Очікуване значення	**20,00**	**125,00**	**186,67**	**261,67**	**298,33**	**343,33**	**380,00**
	Стандартне відхилення	**6,67**	**11,67**	**16,67**	**38,33**	**38,33**	**33,33**	**23,33**

Коли б існував альтернативний проект з такими, наприклад, показниками:

$$\overline{N'} = 75.32 \text{ млн. грн.},$$
$$\sigma(N') = 49.53 \text{ млн. грн.},$$
$$v(N') = 0.658,$$

імовірність його беззбитковості складала б величину: $P\{N' \geq 0\} = 0.936$, яка є меншою від імовірності беззбитковості попереднього фінансового проекту.

Для порівняння наведених двох варіантів ризикового реального інвестування обчислимо детерміновані еквіваленти відповідних зведених чистих доходів. Особу, яка приймає рішення, вважатимемо несхильною до ризику, з середнім рівнем відхилення від нейтрального типу ставлення до ризику ($k = -0.61$). Тоді:

$$\hat{N} = 65.72 - 0.61 * 32.76 = 45.74,$$
$$\hat{N}' = 75.32 - 0.61 * 49.53 = 45.11 \text{ (млн. грн.)}.$$

Отже, за інших однакових умов, ОПР віддасть перевагу першому проекту, оскільки детермінований еквівалент зведеного чистого доходу за цим проектом вищий, аніж за другим проектом.

Навпаки, у разі нейтральності або схильності ОПР до ризику перевагу буде віддано другому проекту, який має більші показники очікуваного рівня та стандартного відхилення NPV.

Приклад закінчено.

Вправи до підрозділу 2.6

Вправа 2.6.1. Маємо інформацію про два альтернативних ризикових фінансових проекти (таблиця 2.14), життєвий цикл кожного з яких складає 5 років.

Таблиця 2.14. Статистичні характеристики економічних показників альтернативних ризикових фінансових проектів (млн. грн.)

Проект А						
Показник	**Статистична характеристика**					
	Очікуване значення			Стандартне відхилення		
Початкові витрати	**200**			**10**		
Показник	**Статистична характеристика**	Рік життєвого циклу				
		1	2	3	4	5
Поточні витрати	Очікуване значення	**120**	**150**	**80**	**90**	**100**
	Стандартне відхилення	**6**	**8**	**7**	**6**	**7**
Поточні результати	Очікуване значення	**100**	**120**	**150**	**180**	**200**
	Стандартне відхилення	**5**	**6**	**6**	**8**	**11**
Проект В						
Показник	**Статистична характеристика**					
	Очікуване значення			Стандартне відхилення		
Початкові витрати	**180**			**20**		
Показник	**Статистична характеристика**	Рік життєвого циклу				
		1	2	3	4	5
Поточні витрати	Очікуване значення	**100**	**150**	**100**	**100**	**100**
	Стандартне відхилення	**7**	**7**	**4**	**5**	**5**
Поточні результати	Очікуване значення	**80**	**110**	**150**	**140**	**180**
	Стандартне відхилення	**5**	**6**	**8**	**7**	**9**

Порівняти зазначені фінансові проекти за показником зведеного прибутку, залежно від індивідуального ставлення інвестора до ризику.

Вправа 2.6.2. Порівняти ймовірності беззбитковості фінансових проектів, наведених у вправі 2.6.1. Чи впливатимуть отримані значення цих імовірностей на кінцевий вибір найкращого проекту?

Розділ 3. Недетерміновані оптимізаційні задачі

3.1. Оптимальне управління портфелем фінансових активів

Дослідження з проблеми оптимізації портфелю ризикового інвестування було започатковано працями Г. Марковиця[1]. На сьогодні портфельній теорії та питанням оптимізації у сфері фінансового інвестування присвячено численну літературу. Більшість науковців враховують, що ставлення інвестора до ризику є індивідуальним. Проте часто дослідження обмежуються лише випадками, коли ставлення ОПР до ризику є або нейтральним, або несхильним. Водночас теорія прийняття рішень визначає не два, а три основних типи ставлення до ризику: нейтральність, несхильність та схильність. Тому опрацюємо задачу оптимального управління портфелем фінансових активів, враховуючи кожний з основних типів індивідуального ставлення ОПР до ризику.

Послідовно вивчимо ситуації прийняття рішень у детермінованих умовах, умовах ризику, а також за умов невизначеності щодо майбутньої дохідності різних фінансових інструментів. Для побудови відповідних економіко–математичних моделей уведемо наступні позначення.

Відомі величини:

n – кількість напрямів інвестування (видів цінних паперів, якими володіє або може володіти інвестор);

j – номер окремого напряму інвестування ($j=\overline{1,n}$);

a_j – кількість цінних паперів j–го виду, наявних у інвестора в поточний момент часу;

p_j – ціна реалізації інвестором одного свого j–го цінного паперу (за умови продажу в поточний момент часу);

q_j – ціна придбання інвестором однієї додаткової одиниці j–го цінного паперу в поточний момент часу;

r – процентна ставка за кредит у випадку залучення інвестором у поточний момент часу позикових коштів;

s – ставка банківського депозитного проценту;

I – розмір вільного капіталу інвестора в поточний момент часу.

Невідомі величини:

v – розмір позикових коштів, що доцільно залучити інвестору в поточний момент часу для переформування свого фінансового портфелю;

---

[1] Markowitz H.M. Portfolio Selection //Journal of Finance. – 1952. – # 7 (1). – Pp. 77–91.; Markowitz H.M. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments. – N.Y.: John Willey, 1959. – 758 p.

w – залишок вільного капіталу інвестора після переформування їм свого фінансового портфеля. Передбачається, що цей залишок буде розміщений на депозитному рахунку з процентною ставкою s;

x_j – кількість цінних паперів j–го виду (із наявних в інвестора), що підлягають реалізації в поточний момент часу;

y_j – кількість цінних паперів j–го виду, що інвестору доцільно придбати в поточний момент часу;

z – загальний дохід фінансового портфеля інвестора за плановий період.

Некеровані параметри:

d_j – дохід, який забезпечуватиме у плановому періоді один цінний папір j–го виду. Наприклад, якщо цінним папером є проста акція, то за умови виплати дивідендів до кінця планового періоду дохід за нею – це сума величини дивідендів і ціни реалізації даної акції наприкінці планового періоду.

У детермінованих умовах значення некерованих параметрів у момент прийняття рішення передбачаються відомими. За умов ризику вони розглядаються як випадкові величини з відомими їх деякими основними статистичними характеристиками. Нарешті, в умовах невизначеності некеровані параметри вважаються невизначеними в межах певних діапазонів їхніх можливих значень.

Співвідношення між відомими, невідомими величинами і некерованими параметрами:

1). Умова дотримання фінансового балансу при переформуванні фінансового портфеля:

$$I + \sum_{j=1}^{n} p_j x_j + v = \sum_{j=1}^{n} q_j y_j + w$$

– наявний вільний капітал плюс капітал, виручений від продажу власних цінних паперів, плюс позиковий капітал у сумі дорівнюють витратам на придбання нових фінансових активів плюс новий залишок вільного капіталу інвестора;

2). Правило обчислення загального доходу фінансового портфеля інвестора за плановий період:

$$z = \sum_{j=1}^{n} d_j (a_j - x_j + y_j) - (1+r)v + (1+s)w$$

– загальний дохід визначається дохідністю кожного з напрямів інвестування і кількістю відповідних цінних паперів, що міститимуться в переформованому фінансовому портфелі, мінус повернення позикових коштів, з урахуванням сплати процентів за цей кредит, плюс дохід від розміщення залишку вільного капіталу на депозит;

3). Обмеження на кількість цінних паперів, що підлягають реалізації в поточний момент часу із числа наявних у інвестора:

$$0 \le x_j \le a_j, \; j = \overline{1, n};$$

4). Природні умови невід'ємності інших основних керованих змінних:

$$y_j \geq 0,\; j = \overline{1,n};\; v \geq 0;\; w \geq 0.$$

Розв'язування задачі у детермінованому випадку. З урахуванням наведених співвідношень економіко–математична модель задачі оптимального управління портфелем фінансових активів у детермінованих умовах набирає такого виду:

$$\left.\begin{aligned}
& z = \sum_{j=1}^{n} d_j (a_j - x_j + y_j) - (1+r)v + (1+s)w \to \max, \\
& \qquad \sum_{j=1}^{n} (-p_j x_j + q_j y_j) - v + w = I, \\
& 0 \leq x_j \leq a_j, \quad y_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}; \quad v, w \geq 0.
\end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

Цільова функція цієї моделі відповідає вимозі вибору такого портфелю фінансових активів, що забезпечував би інвестору в плановому періоді якнайбільший загальний дохід. Обмеження моделі випливають із співвідношень між відомими величинами, невідомими величинами і некерованими параметрами.

Дослідження детермінованої задачі проведемо за таких припущень про співвідношення між відомими величинами задачі оптимального управління портфелем фінансових активів:

1). Кількість цінних паперів, наявних у інвестора, і його вільний капітал у поточний момент часу – невід'ємні:

$$a_j \geq 0,\; j = \overline{1,n}; \quad I \geq 0.$$

Дана умова означає, що інвестор на поточний момент часу вже сплатив свої боргові зобов'язання за минулий період, якщо такі мали місце раніше;

2). Ринкова вартість цінних паперів невід'ємна причому для інвестора ціна продажу своїх цінних паперів нижча, аніж ціна придбання їм аналогічних цінних паперів:

$$0 \leq p_j < q_j, \quad j = \overline{1,n}.$$

Дане припущення виключає ситуацію, коли інвестор може необмежено продавати свої цінні папери за рахунок одночасного придбання їм у ще більшій кількості таких же фінансових інструментів, але за меншу ціну;

3). Процентні ставки невід'ємні, причому ставка за позикові кошти вища, аніж ставка у випадку розміщення інвестором вільного капіталу на депозит:

$$0 \leq s < r.$$

Дане припущення виключає ситуацію, коли є можливість брати необмежений кредит і розміщати його на депозит під більш високий процент, чим ставка за кредит.

Можна переконатися, що при виконанні зазначених припущень поточний портфель фінансових активів інвестора є оптимальним, тобто не підлягає переформуванню, якщо виконуються нерівності:

$$(1+s)p_j \le d_j \le (1+s)q_j\,, \quad j=\overline{1,n}\,.$$

Це правило стає зрозумілим після вилучення з цільової функції задачі змінної w на основі основного обмеження–рівняння:

$$w = I + \sum_{j=1}^{n}(p_j x_j - q_j y_j) + v\,.$$

У результаті такого вилучення залежність доходу z інвестора від інших змінних набере вигляду:

$$z = \sum_{j=1}^{n} d_j a_j + (1+s)I + \sum_{j=1}^{n}((1+s)p_j - d_j)x_j +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}(d_j - (1+s)q_j)y_j + (s-r)v\,.$$

Бачимо, що при виконанні усіх припущень збільшення значення довільної із змінних x_j, y_j, ($j=\overline{1,n}$), або v не буде призводити до збільшення доходу z інвестора, тобто нульові значення цих змінних є оптимальними.

Доходимо висновку, що необхідність у переформуванні фінансового портфеля виникає тоді, коли:

- або є напрям інвестування j', що характеризується більш високою дохідністю, аніж розміщення капіталів на депозитному рахунку:

$$j' \in \{\overline{1,n}\}: \quad \frac{d_{j'}}{q_{j'}} > (1+s)\,;$$

- або дохідність наявних у інвестора цінних паперів виду j'' нижча, аніж дохідність від розміщення виручених у результаті реалізації цих активів коштів на депозитний рахунок:

$$j'' \in \{\overline{1,n}\}: \quad \frac{d_{j''}}{p_{j''}} < (1+s)\,.$$

Отже, якщо мають місце зазначені випадки, інвестору варто звернутися до пошуку рішення задачі оптимального управління портфелем фінансових активів (3.1). Вилучивши з її цільової функції сталий доданок $\sum_{j=1}^{n} d_j a_j$, перепишемо задачу у такий спосіб:

$$\left.\begin{aligned} z = -\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + \sum_{j=1}^{n} d_j y_j - (1+r)v + (1+s)w \to \max\,,\\ -\sum_{j=1}^{n} p_j x_j + \sum_{j=1}^{n} q_j y_j - v + w = I\,,\\ x_j \le a_j\,, \quad j=\overline{1,n}\,,\\ x_j\,, \quad y_j \ge 0\,, \quad j=\overline{1,n}\,; \quad v, w \ge 0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (3.2)$$

Маємо задачу лінійного програмування, яку можна розв’язати з використанням спеціалізованих програмних засобів, зокрема, підпрограмою

"Пошук рішення" табличного процесору Excel. Проте попередні висновки стають помітними в результаті застосування теорії двоїстості.

Двоїстою до задачі (3.2) слугує така задача лінійного програмування:

$$\left.\begin{aligned} &\gamma = I\alpha + \sum_{j=1}^{n} a_j \beta_j \to \min, \\ &-p_j\alpha + \beta_j \ge -d_j, \quad j=\overline{1,n}; \\ &q_j\alpha \ge d_j, \quad j=\overline{1,n}; \\ &(1+s) \le \alpha \le (1+r), \\ &\beta_j \ge 0, \quad j=\overline{1,n}, \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

де α, β_j, $j=\overline{1,n}$, – основні невідомі величини цієї задачі, а I; a_j, d_j, p_j, q_j, $j=\overline{1,n}$; r і s – ті ж відомі величини, що й у вихідній задачі (3.2).

Розв’язок двоїстої задачі можна записати явно:

$$\alpha^* = \min\{\max\{(1+s); \frac{d_j}{q_j}, j=\overline{1,n}\}; (1+r)\},$$

$$\beta_j^* = \max\{p_j\alpha^* - d_j; 0\}, \ j=\overline{1,n}.$$

Щодо оптимального значення α^* передусім помітні два варіанти, які ми охарактеризуємо докладніше.

<u>Варіант 1</u>. Припустимо, що $\alpha^* = (1+s)$. Цей випадок має місце, якщо дохідність від розміщення капіталів на депозит не нижча, аніж дохідність у результаті придбання яких–небудь цінних паперів:

$$\frac{d_j}{q_j} \le (1+s) \text{ для усіх } j=\overline{1,n}.$$

Зараз придбання додаткових цінних паперів є недоцільним, причому відсутня і необхідність у залученні позикових коштів:

$$y_j^* = 0, \quad j=\overline{1,n}; \quad v^* = 0.$$

Усі ті наявні у інвестора цінні папери, продаж яких із наступним розміщенням виручених коштів на депозит забезпечить дохід вище, чим володіння цими активами, підлягають реалізації:

$$p_{j''}(1+s) > d_{j''} \Rightarrow x_{j''}^* = a_{j''},$$

а виручений від цієї реалізації обсяг коштів повинний бути спрямований на приріст вільного капіталу, розміщуваного на депозитному рахунку:

$$w^* = I + \sum_{j=1}^{n} p_j x_j^*.$$

<u>Варіант 2</u>. Цей варіант виникає, коли дохідність за якимось із напрямів інвестування перевищує дохідність від розміщення капіталу на депозит. Нехай j' – напрямок інвестування з найбільшою дохідністю, тобто, для розглянутого випадку,

$$\frac{d_{j'}}{q_{j'}} = \max_{j \in \{1,\, n\}} \frac{d_j}{q_j} > (1+s).$$

Якщо при цьому $\frac{d_{j'}}{q_{j'}} > (1+r)$, тоді $\alpha^* = (1+r)$. Це свідчить про необхідність залучення позикових коштів ($v^* \ge 0$), причому весь капітал, включаючи і наявний вільний, доцільно вкласти в придбання активів виду j', оскільки $w^* = 0$.

Якщо ж $\frac{d_{j'}}{q_{j'}} < (1+r)$, тоді $(1+s) < \alpha^* = \frac{d_{j'}}{q_{j'}} < (1+r)$, тобто брати кредит недоцільно ($v^* = 0$). Залишати вільний капітал також недоцільно ($w^* = 0$), а усі кошти, із необхідним переформуванням фінансового портфеля, доцільно направити на придбання цінних паперів із якнайбільшою дохідністю.

Таким чином, якщо некеровані параметри d_j, $j = \overline{1, n}$, детерміновані, оптимальний план переформовування портфеля фінансових активів визначатиметься в результаті розв'язування відповідної задачі лінійного програмування (3.1).

Розв'язування задачі за умов ризику. Перейдемо тепер до дослідження задачі оптимального управління портфелем фінансових активів за умов ризику, коли некеровані параметри вважаються випадковими величинами з відомими принаймні їх основними статистичними характеристиками. Зараз вибір економіко–математичного інструментарію визначатиметься типом ставлення до ризику конкретного інвестора.

Якщо інвестор нейтральний до ризику, оптимальний план переформування його фінансового портфеля визначатиметься розв'язуванням задачі лінійного програмування:

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{z} = \sum_{j=1}^{n} \bar{d}_j (a_j - x_j + y_j) - (1+r)v + (1+s)w \to \max, \\
&\sum_{j=1}^{n} (-p_j x_j + q_j y_j) - v + w = I, \\
&0 \le x_j \le a_j, \quad y_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}; \quad v, w \ge 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (3.4)$$

де через $\bar{d}_j$ позначене очікуване значення доходу, який забезпечуватиме в плановому періоді одиниця цінного паперу j–го виду ($j = \overline{1, n}$), а через $\bar{z}$ – загальний очікуваний дохід фінансового портфеля інвестора (розраховується за правилом обчислення середнього значення суми випадкових величин).

Математично ця задача принципово не відрізняється від вже досліджуваної задачі для детермінованого випадку (3.1), за тим лише виключенням, що замість детермінованих значень показників дохідності різних фінансових інструментів використовуються математичні очікування відповідних випадкових величин.

Процес розв'язування задачі оптимального управління портфелем фінансових активів у випадках, коли ставлення інвестора до ризику відрізняється від нейтрального, дещо інший. Насамперед відзначимо, що найкращий для інвестора фінансовий портфель потрібно шукати серед ефективних планів двокритеріальної задачі:

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{z} = \sum_{j=1}^{n} \bar{d}_j (a_j - x_j + y_j) - (1+r)v + (1+s)w \to \max\,,\\
&\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j (a_i - x_i + y_i)(a_j - x_j + y_j) \to \min\,(\max)\,,\\
&\sum_{j=1}^{n} (-p_j x_j + q_j y_j) - v + w = I\,,\\
&0 \le x_j \le a_j\,,\quad y_j \ge 0\,,\quad j = \overline{1,n}\,;\quad v, w \ge 0\,,
\end{aligned}\right\} \qquad (3.5)$$

яка характеризується, у порівнянні з задачею (3.4), наявністю додаткової цільової функції. Новий критеріальний показник – σ^2 – це дисперсія загального доходу фінансового портфеля; оптимізаційна спрямованість цього показника (до мінімуму або, напроти, до максимуму) відповідає типу ставлення до ризику конкретного інвестора (несхильності або, навпаки, схильності).

Дисперсія σ^2 випадкової величини доходу z фінансового портфеля інвестора розраховується за формулою для дисперсії лінійної функції випадкових величин. У нашій задачі для запису цієї формули були використані такі позначення: ρ_{ij} – коефіцієнт кореляції між показниками доходів за цінними паперами видів i і j; σ_i (σ_j) – стандартне відхилення випадкового доходу одиниці i–го (j–го) цінного паперу ($i, j = \overline{1,n}$).

Розв'язок двокритеріальної задачі (3.5) визначається тією з її ефективних оцінок $(\bar{z}^*, \sigma^{2*})$, що найбільшою мірою відповідає переважанням інвестора. Для знаходження цього розв'язку можна скористатися наступною процедурою.

Етап 1. Визначаються діапазони зміни кожної із цільових функцій на множині ефективних планів відповідної двокритеріальної задачі – інтервали $[\bar{z}_{\min}; \bar{z}_{\max}]$ і $[\sigma^2_{\min}; \sigma^2_{\max}]$. Якщо хоча б один із них перетвориться в точку (при цьому другий інтервал також буде точкою), це означає, що всі ефективні плани рівноцінні, причому довільний з них може бути вибраний за рішення.

У більш типовому випадку кожний із виявлених інтервалів буде мати ненульову довжину, у зв'язку з чим для вирішення проблеми потрібні подальші розрахунки.

Етап 2. Будуємо узагальнену адитивну цільову функцію:

$$u = \frac{\bar{z}}{\bar{z}_{\max} - \bar{z}_{\min}} \mp \frac{\sigma^2}{\sigma^2_{\max} - \sigma^2_{\min}}$$

(знак між доданками відповідає типу ставлення інвестора до ризику: "–" – несхильності, "+" – схильності) і знаходимо на множині допустимих планів такий фінансовий портфель, що відповідає максимуму цієї функції. Цей план ефективний; його показники очікуваного доходу і дисперсії доходу повідомляються інвестору.

Етап 3. Якщо інвестор не погоджується з досягнутими рівнями очікуваного доходу і дисперсії доходу, він повинен вказати такі рівні цих критеріальних показників, які він вважає задовільними.

Етап 4. Встановлюється реальність указаних інвестором задовільних рівнів критеріальних показників. При необхідності здійснюється корекція рівнів – або у бік поліпшення, якщо рівні реальні, або у бік послаблення – щоб зробити реальними.

Етап 5. Визначається такий ефективний фінансовий портфель, критеріальні показники якого відповідають реальним (скоригованим) задовільним рівням. Інформація про нього передається інвестору.

Етап 6. Якщо інвестор не погоджується з черговою рекомендацією, він повинний внести корекцію в указані їм раніше рівні задовільних значень критеріальних показників, після чого варто повернутися до етапу 4.

Деяка складність у реалізації запропонованої методики полягає у тому, що задачі, які розв'язуються на етапах 1, 2, 4 і 5, є нелінійними. Ще однією особливістю методики є можливість виникнення необхідності кількаразової реалізації етапів 4 – 6, проте відомі прийоми, котрі забезпечують збіжність цього діалогу за скінчене, причому достатньо невелике число кроків.

Інший підхід до розв'язування задачі оптимального управління портфелем фінансових активів за умов ризику може полягати у використанні критерію максимізації детермінованого еквіваленту майбутнього випадкового доходу інвестора: $\hat{z} = \bar{z} \pm k \cdot \sigma(z)$, $k \geq 0$. Враховуючи можливість лише наближеного відбиття переважань ОПР, у тому числі і оцінювання значення k, припускаємо доцільність поєднання двох зазначених підходів з метою визначення найкращого плану переформовування наявного фінансового портфелю за умов ризику.

<u>Розв’язування задачі за умов невизначеності</u>. Звернемося тепер до випадку, коли оптимальне управління портфелем фінансових активів здійснюється в умовах невизначеності. Будемо вважати, що значення некерованих параметрів d_j – показників доходу, що забезпечується в плановому періоді одним цінним папером j–го виду – можна визначити лише з точністю до діапазонів $[d_j^{\min}; d_j^{\max}]$, де

$$0 < d_j^{\min} \leq d_j^{\max}, \ j = \overline{1, n}.$$

Поширеним для прийняття рішень за умов невизначеності є критерій якнайкращого гарантованого результату Вальда. Керуючись цим критерієм, задачу інвестора можна записати так:

$$[\min_{d \in D} z(d, x, y, v, w)] \xrightarrow[(x, y, v, w) \in \Omega]{} \max, \qquad (3.6)$$

де

$$d=(d_1,\ldots,d_n),\; x=(x_1,\ldots,x_n),\; y=(y_1,\ldots,y_n),$$

$$z(d,x,y,v,w)=\sum_{j=1}^{n}d_j(a_j-x_j+y_j)-(1+r)v+(1+s)w,$$

$$D=\{(d_1,\ldots,d_n)\,|\,d_j^{\min}\le d_j\le d_j^{\max},\; j=\overline{1,n}\},$$

а множина Ω задається системою обмежень:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}(-p_jx_j+q_jy_j)-v+w=I,\\&0\le x_j\le a_j,\;y_j\ge 0,\;j=\overline{1,n};\quad v,w\ge 0.\end{aligned}\right\}$$

Для пошуку розв'язку максимінної задачі (3.6) потрібно реалізувати два кроки.

На <u>*першому кроці*</u> необхідно при фіксованих $(x,y,v,w)\in\Omega$ розв'язати задачу:

$$\left.\begin{aligned}&z(d)=\sum_{j=1}^{n}d_j(a_j-x_j+y_j)-(1+r)v+(1+s)w\to\min,\\&d_j^{\min}\le d_j\le d_j^{\max},\quad j=\overline{1,n}.\end{aligned}\right\}\qquad(3.7)$$

Тут відповідь встановлюється так:

$$d_j{*}=\begin{cases}d_j^{\min},\quad \textit{якщо}\quad a_j-x_j+y_j>0;\\ \textit{довільне число з інтервалу}\;[d_j^{\min};d_j^{\max}],\\ \qquad\qquad\qquad \textit{якщо}\quad a_j-x_j+y_j=0\end{cases}$$

(випадок $a_j-x_j+y_j<0$ виключений через наявність в описі множини Ω обмежень $0\le x_j\le a_j$ та $y_j\ge 0$);

$$z(d)_{\min}=\sum_{j=1}^{n}d_j{*}(a_j-x_j+y_j)-(1+r)v+(1+s)w.$$

На <u>*другому кроці*</u> варто знайти найкращий за критерієм Вальда план переформування фінансового портфеля (x^*,y^*,v^*,w^*) – як результат розв'язування задачі:

$$\left.\begin{aligned}&z(x,y,v,w)=\sum_{j=1}^{n}d_j{*}(a_j-x_j+y_j)-(1+r)v+(1+s)w\to\max,\\&(x,y,v,w)\in\Omega.\end{aligned}\right\}\qquad(3.8)$$

Аналіз розв'язку задачі з першого кроку (3.7) дозволяє зробити висновок, що в цільовій функції задачі другого кроку у якості значень коефіцієнтів $d_j{*}$ можна обрати значення $d_j^{\min}$. Таким чином, для вирішення задачі оптимального управління портфелем фінансових активів в умовах невизначеності за критерієм Вальда приходимо до економіко–математичної моделі (3.1), що була побудована для детермінованого випадку, із тією лише особливістю, що за значення некерованих параметрів d_j у її цільовій функції варто взяти найгірші з їх можливих значень, тобто значення $d_j^{\min}$, $j = \overline{1, n}$.

Приклад 3.1.1. Опрацюємо спочатку детерміновану задачу оптимального управління портфелем фінансових активів (3.1) за даними, що наведені у таблиці 3.1. Вважатимемо, що вільний капітал інвестора $I = 1200$ грошових одиниць, процентна ставка за кредитом $r = 0.3$, а за депозитом $s = 0.2$.

Таблиця 3.1. Вихідні дані до детермінованої задачі
оптимального управління фінансовими активами

Показник активу	Вид активу (j)				
	1	2	3	4	5
Наявність (a_j)	120	200	150	100	250
Ціна продажу (p_j)	2	1,25	3,4	2	2,3
Ціна купівлі (q_j)	2,1	1,3	3,5	2,2	2,5
Дохід на одиницю (d_j)	2,5	1,5	3,8	2,6	3

Оптимальне переформування портфелю фінансових активів полягає у продажі всіх акцій виду 3 та спрямуванні отриманої виручки та вільного капіталу ($150 \cdot 3.4 + 1200 = 1710$ грошових одиниць) на придбання 684 акцій виду 5. Це забезпечуватиме інвестору максимально можливий дохід наприкінці планового періоду у розмірі 3662 грошових одиниць (рис. 3.1).

A	B	C	D	E	F
Управління фінансовими активами					
Вид активу	1	2	3	4	5
Наявність (a)	120	200	150	100	250
Ціна продажу (p)	2	1,25	3,4	2	2,3
Ціна купівлі (q)	2,1	1,3	3,5	2,2	2,5
Дохід на одиницю (d)	2,5	1,5	3,8	2,6	3
1+% за кредит (1+r)	1,3		Позика (v)		0
1+% на депозит (1+s)	1,2		На депозит (w)		0
Вільний капітал (I)	1200				
Продаж акцій (x)	0	0	150	0	0
Купівля акцій (y)	0	0	0	0	684
Поточні доходи	1710				
Поточні витрати	1710				
Кінцевий дохід (z)	3662				

Рис. 3.1. Робочий лист Excel з результатами розв'язування задачі про оптимальне управління портфелем фінансових активів у детермінованому випадку

Розглянута задача має й альтернативний оптимальний план: замість купівлі акцій виду 3 покласти 1710 грошових одиниць на депозит. Враховуючи лінійність задачі, робимо висновок, що оптимальним буде будь-який варіант розподілу капіталу у розмірі 1710 грошових одиниць між депозитним внеском та купівлею акцій виду 3, оскільки дохідність зазначених двох напрямів інвестування однакова (дорівнює 1,2).

Приклад 3.1.1 закінчено.

Пошук розв'язку задачі за умов ризику для нейтральної щодо ризику ОПР або за умов невизначеності, якщо керуватися критерієм якнайкращого гарантованого результату, принципово майже не відрізняється від процесу, задіяного для детермінованого випадку – потрібно лише скористатися даними про очікувану дохідність фінансових інструментів у випадку ризику або про мінімально можливу дохідність у випадку невизначеності. Тому опрацюємо лише випадок ризику у припущенні, що ставлення ОПР до ризику може відрізнятись від нейтрального.

<u>Приклад 3.1.2</u>. Оптимальне управління портфелем фінансових активів за умов ризику. Вважатимемо показники доходу d_j $(j=\overline{1,5})$, який забезпечуватиме у плановому періоді один цінний папір j–го виду, випадковими величинами з відомими очікуваними значеннями та стандартними відхиленнями (таблиця 3.2).

Таблиця 3.2. Статистичні характеристики показників випадкового питомого доходу за окремими видами цінних паперів

Характеристика активу	Вид активу (j)				
	1	2	3	4	5
Очікуване значення ($\overline{d}_j$)	2,5	1,5	3,8	2,6	3
Стандартне відхилення (σ_j)	0,7071	0,4472	0,0632	0,5967	0,9487

Оптимальний план шукатимемо за критерієм максимізації детермінованого еквіваленту $\hat{z}$ майбутнього загального випадкового доходу z інвестора:

$$\hat{z} \approx \overline{z} + k \cdot \sigma(z),$$

де $\overline{z}$ – очікуване значення майбутнього загального випадкового доходу, $\sigma(z)$ – стандартне відхилення цього випадкового доходу від його очікуваного рівня, а значення множника k обирається від'ємним у разі несхильності ОПР до ризику або додатним у разі схильності інвестора до ризику. За абсолютною величиною значення цього множника є тим більшим, чим сильніше ставлення ОПР до ризику відрізняється від нейтрального.

Коефіцієнти кореляції між випадковими питомими доходами за напрямами інвестування візьмемо з таблиці 3.3, інші потрібні вихідні дані – з прикладу 3.1.1.

Таблиця 3.3. Матриця коефіцієнтів кореляції ρ_{ij} між випадковими питомими доходами

Вид активу (i)	Вид активу (j)				
	1	2	3	4	5
1	1	-0,94388	0,77460	0,99386	0,774560
2	-0,94388	1	-0,52223	-0,97463	-0,52223
3	0,77460	-0,52223	1	0,69985	1
4	0,99386	-0,97463	0,69985	1	0,69985
5	0,77460	-0,52223	1	0,69985	1

Розрахунки показують, що у разі помірної схильності ОПР до ризику (скажімо, $0 < k < 0.25$) інвестору доцільно продати всі акції видів 2 і 3, а дохід від продажу цих акцій та вільний капітал (разом – 1960 грошових одиниць) витратити на придбання 784 акцій виду 5. Сформований у такий спосіб фінансовий портфель забезпечуватиме інвестору очікуваний загальний дохід у розмірі 3662 грошових одиниці з великим стандартним відхиленням від очікуваного рівня – у розмірі 1092,67 грошових одиниць.

Навпаки, інвестору з слабкою несхильністю до ризику ($k = -0.01$) є сенс продати лише акції виду 3, а отриманий дохід та вільний капітал (разом у сумі 1710 грошових одиниць) покласти на депозит, що є в нашому прикладі безризиковим інвестуванням. Тоді загальний очікуваний дохід інвестора теж складатиме 3662 грошових одиниці, але стандартне відхилення загального доходу від очікуваного рівня становитиме лише 298,62 грошових одиниць.

Інвестору з помітною несхильністю до ризику ($-0.5 \geq k \geq -1$) є сенс залишити лише 130 акцій виду 2 та 100 акцій виду 4. Решту наявних акцій потрібно продати, а отриманий дохід разом із початковим капіталом (всього 2612,5 грошових одиниць) спрямувати на депозит. Тоді загальний очікуваний дохід дорівнюватиме 3590, а стандартне відхилення – 13,35 грошових одиниць.

Таким чином, використання економіко–математичного моделювання, оптимізаційних методів та програмних засобів дозволяє знайти якнайкращий варіант переформування наявного фінансового портфеля інвестора, з урахуванням його індивідуального ставлення до ризику.

Вправи до підрозділу 3.1

Вправа 3.1.1. Сформулювати умови оптимальності для наступної детермінованої задачі оптимального переформовування фінансового портфелю:

$$\left.\begin{aligned} z = \sum_{j=1}^{n} d_j (a_j - x_j + y_j) \to \max\,, \\ \sum_{j=1}^{n} (-p_j x_j + q_j y_j) = I\,, \\ 0 \leq x_j \leq a_j\,; \quad y_j \geq 0\,, \quad j = \overline{1, n}\,, \end{aligned}\right\} \qquad (3.1)$$

де відомі:

n – кількість видів цінних паперів, якими володіє або може володіти інвестор;

j – номер окремого виду цінних паперів ($j = \overline{1, n}$);

a_j – кількість наявних у інвестора цінних паперів j–го виду;

p_j – поточна ціна реалізації інвестором одного свого j–го цінного паперу;

q_j – поточна ціна придбання інвестором однієї додаткової одиниці j–го цінного паперу;

d_j – дохід, який забезпечуватиме інвестору один цінний папір j–го виду;

I – розмір вільного капіталу інвестора;

невідомі:

x_j – кількість цінних паперів j–го виду (із числа наявних у інвестора), що підлягають реалізації;

y_j – кількість цінних паперів j–го виду, що інвестору доцільно придбати;

z – загальний дохід фінансового портфелю інвестора.

Вказівка. Скористайтесь теорією двоїстості у лінійному програмуванні.

Вправа 3.1.2. Розв'яжіть задачу оптимального переформування фінансового портфелю, наведену у вправі 3.1.1, якщо вільний капітал інвестора $I = 100\,000$ грошових одиниць, за такими вихідними даними:

Показники акції	Вид акції (j)						
	1	2	3	4	5	6	7
Наявність (a_j)	100	200	150	250	300	200	100
Ціна продажу (p_j)	120	130	80	90	110	140	90
Ціна купівлі (q_j)	125	150	90	105	125	150	110
Дохід на одиницю (d_j)	130	160	95	110	130	160	125

Перевірте для знайденого з використанням інструменту "Пошук рішення" електронної таблиці Excel розв'язку, чи виконуються сформульовані Вами умови оптимальності.

Вправа 3.1.3. З використанням "Пошуку рішення" електронної таблиці Excel перевірте розв'язок детермінованої задачі про оптимальне управління портфелем фінансових активів з прикладу 3.1.1. Запишіть двоїсту до цієї задачі та вкажіть її розв'язок.

Вправа 3.1.4. З використанням "Пошуку рішення" електронної таблиці Excel перевірте розв'язки задачі з прикладу 3.1.2 про оптимальне управління портфелем фінансових активів за умов ризику. Запропонуйте спосіб подання результатів, якщо точне значення множника k, яким відтворюється індивідуальне ставлення інвестора до ризику, є невизначеним.

3.2. Формування оптимального календарного плану реального інвестування за умов ризику

Опрацюємо задачу формування інвестиційного портфелю та календарного плану виконання комплексу проектів реального інвестування за умов ризику. Нагадаємо, що аналогічну детерміновану задача було розглянуто в підрозділі 1.3.

Побудова економіко–математичної моделі. Окреслимо, передусім, вихідні показники задачі. Нехай T_0 – тривалість горизонту планування, t – номер окремого часового проміжку в межах планового горизонту ($t=\overline{1,T_0}$); n – кількість потенційних проектів реального інвестування, j – номер окремого проекту ($j=\overline{1,n}$); K_t – ліміт інвестиційних ресурсів на t–й часовий проміжок ($t=\overline{1,T_0}$); r – нормативний коефіцієнт ефективності інвестицій.

Для кожного j–го інвестиційного проекту ($j=\overline{1,n}$) відомими вважаються: T_j – максимальна тривалість життєвого циклу ($T_j<T_0$); $\bar{I}_{j\tau}$ – очікувані інвестиційні витрати у τ–му часовому проміжку життєвого циклу, $\sigma(I_{j\tau})$ – їх стандартні відхилення; $\overline{N}_j$ – очікуване значення чистого доходу, зведеного до початку життєвого циклу проекту; $\sigma(N_j)$ – його стандартне відхилення.

Детермінованими керованими параметрами є логічні змінні x_{jt}, які значеннями 1 або 0 відбивають факт включення j–го проекту до інвестиційного портфелю та початок виконання цього проекту у t–му часовому проміжку планового періоду.

За критерій оптимальності оберемо вимогу максимізації детермінованого еквіваленту $\hat{N}_\Sigma$ випадкового загального зведеного чистого доходу:

$$\hat{N}_\Sigma=\overline{N}_\Sigma+k\sigma(N_\Sigma), \qquad (3.9)$$

де ваговий коефіцієнт k визначається залежно від особливостей ставлення ОПР до ризику (таблиця 3.4).

Таблиця 3.4. Окремі значення множника k залежно від типу ставлення інвестора до ризику

Тип ставлення до ризику	Нейтральний	Відрізняється від нейтрального: /несхильність (–), схильність (+)/		
		Помірно	Середньо	Сильно
Значення множника k	0	$\mp$ 0,2..0,3	$\mp$ 0,5..0,6	$\mp$ 0,9..

Складовими критеріального показника (3.9) інвестиційного портфелю виступають:

$\overline{N}_\Sigma$ – очікуваний загальний, зведений до початку планового періоду, чистий дохід за усіма проектами, які буде обрано:

$$\overline{N}_\Sigma = \sum_{j=1}^{n} \overline{N}_j \sum_{t=1}^{T_0 - T_j + 1} \frac{x_{jt}}{(1+r)^{t-1}};$$

$\sigma(N_\Sigma)$ – стандартне відхилення випадкового загального зведеного чистого доходу від очікуваного рівня:

$$\sigma(N_\Sigma) = \sqrt{\sigma^2(N_\Sigma)},$$

де дисперсія загального доходу за портфелем обчислюється за формулою:

$$\sigma^2(N_\Sigma) = \sum_{j=1}^{n} \sigma^2(N_j) \sum_{t=1}^{T_0 - T_j + 1} \frac{x_{jt}}{(1+r)^{2t-2}}.$$

/Зараз було використано припущення про незалежність ризиків, пов'язаних з виконанням окремих проектів. У разі необхідності від цього припущення можна позбавитись. Окрім цього, враховано обмеження, які буде накладено на логічні змінні x_{jt}/.

Припустимо, що ми вже визначили основні статистичні характеристики економічних показників потенційних інвестиційних проектів (таблиця 3.5) з метою подальшого формування якнайкращого інвестиційного портфелю.

Таблиця 3.5. Статистичні характеристики економічних показників потенційних інвестиційних проектів, млн. грн. (вгорі у відповідній клітинці – очікуване значення, внизу – стандартне відхилення)

Проект	Максимальна тривалість, років	Чистий дохід, зведений до початку виконання проекту	Щорічні інвестиційні витрати протягом життєвого циклу						
			1	2	3	4	5	6	7
1	6	470,11	50	40,833	29,167	1,667	0	0	0
		66,20	3,333	2,5	2,5	1,6667	0	0	0
2	5	520,285	103,2	154,3	49,621	0	0	0	0
		64,72	9,632	12,14	6,34	0	0	0	0
3	6	282,434	41,3	72,54	98,715	15,14	0	0	0
		52,11	3,684	11,74	8,914	15,141	0	0	0
4	6	312,46	62,8	129,45	0	0	0	0	0
		40,38	8,55	16,423	0	0	0	0	0
5	7	455,35	71,2	82,63	58,148	11,25	0	0	0
		30,14	5,35	10,98	4,573	11,252	0	0	0

Нехай $I_{\Sigma t}$ – щорічна потреба портфелю в інвестиційних ресурсах:

$$I_{\Sigma t} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\tau=1}^{\min\{t, T_j\}} I_{j\tau} x_{j,t+1-\tau}, \; t = \overline{1, T_0}.$$

Це є випадкова величина. Визначимо її статистичні характеристики:

- очікуване значення: $\bar{I}_{\Sigma t} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\tau=1}^{\min\{t, T_j\}} \bar{I}_{j\tau} x_{j,t+1-\tau}$,
- дисперсія: $\sigma^2(I_{\Sigma t}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\tau=1}^{\min\{t, T_j\}} \sigma^2(I_{j\tau}) x_{j,t+1-\tau}$

/зараз знову враховано припущення про статистичну незалежність витрат та особливості логічних змінних x_{jt}/.

Обмеження за лімітом інвестиційних ресурсів у кожний період часу t у випадку ризику подамо як вимогу дотримання ліміту із певною імовірністю. У припущенні про нормальний закон розподілу обсягу необхідних ресурсів цю вимогу можна записати нерівністю:

$$\bar{I}_{\Sigma t} + \gamma \sigma(I_{\Sigma t}) \le K_t ,$$

в якій для імовірності 0,95 за значення γ, згідно таблиць нормального розподілу, слід покласти 1,645.

/У разі необхідності зменшити імовірність порушення лімітів параметр γ треба збільшити; навпаки, коли імовірність порушення лімітів можна збільшити, рівень параметра γ слід зменшити. Ця властивість дозволяє уникнути припущення про нормальний закон розподілу обсягу необхідних інвестиційних ресурсів. Крім того, можна врахувати і випадки, коли ліміти інвестицій K_t теж вважаються випадковими – у такому разі останнє обмеження слід замінити наступним:

$$\bar{I}_{\Sigma t} + \gamma \sqrt{\sigma^2(I_{\Sigma t}) + \sigma^2(K_t)} \le \bar{K}_t ,$$

де $\bar{K}_t$ і $\sigma^2(K_t)$, відповідно, очікуване значення і стандартне відхилення випадкової величини інвестиційного ресурсу K_t ./

Економіко–математична модель задачі формування інвестиційного портфелю та календарного плану його виконання у випадку ризику набирає вигляду:

$$\left.\begin{array}{c}
\hat{N}_{\Sigma} = \sum_{j=1}^{n} \bar{N}_j \sum_{t=1}^{T_0-T_j+1} \frac{x_{jt}}{(1+r)^{t-1}} + k\sigma(N_{\Sigma}) \to \max , \\
\sigma^2(N_{\Sigma}) = \sum_{j=1}^{n} \sigma^2(N_j) \sum_{t=1}^{T_0-T_j+1} \frac{x_{jt}}{(1+r)^{2t-2}} , \\
\sum_{j=1}^{n} \sum_{\tau=1}^{\min\{t, T_j\}} \bar{I}_{j\tau} x_{j,t+1-\tau} + \gamma \sigma(I_{\Sigma t}) \le K_t , \quad t = \overline{1, T_0} , \\
\sigma^2(I_{\Sigma t}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\tau=1}^{\min\{t, T_j\}} \sigma^2(I_{j\tau}) x_{j,t+1-\tau} , \quad t = \overline{1, T_0} , \\
\sum_{t=1}^{T_0-T_j+1} x_{jt} \le 1 ; \quad x_{jt} \in \{0;1\} , \quad t = \overline{1, T_0 - T_j + 1} ; \quad j = \overline{1, n} .
\end{array}\right\} \qquad (3.10)$$

Таблиця 3.6. Основні економічні показники оптимального портфелю та календарного плану виконання комплексу інвестиційних проектів у випадку ризику, млн. грн.

Проект	Рік		Очікуваний прибуток, зведений до початку планового періоду	Очікувані щорічні інвестиційні витрати протягом планового періоду									
	Початку	Можливого закінчення		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	6	470,110	50,00	40,833	29,167	1,667	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
2	Не обрано		0,000	0,00	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
3	5	10	136,205	0,00	0,000	0,000	0,000	41,300	72,540	98,715	15,140	0,00	0,00
4	Не обрано		0,000	0,00	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
5	3	9	196,135	0,00	0,000	71,200	82,630	58,148	11,250	0,000	0,000	0,00	0,00
Разом:			**802,449**	**50,00**	**40,833**	**100,367**	**84,297**	**99,448**	**83,790**	**98,715**	**15,140**	**0,00**	**0,00**
Довідково:	1). Можливі потреби у інвестиційних ресурсах за несприятливих обставин			55,48	44,95	110,08	102,57	109,11	110,54	113,38	40,05	0,00	0,00
	2). Щорічний ліміт інвестиційних ресурсів			150	150	180	180	180	180	180	180	180	180

Приклад розв’язування задачі. Побудована економіко–математична модель для календарного планування портфелю реальних інвестицій за умов ризику є оптимізаційною нелінійною цілочисловою задачею з логічними змінними. Знайдемо її розв’язок, користуючись вихідними даними про потенційні інвестиційні проекти з таблиці 3.5, а даними про ліміти інвестиційних ресурсів та ставку дисконту – з прикладу для детермінованого випадку, який було опрацьовано в підрозділі 1.3. Тип ставлення інвестора до ризику вважатимемо несхильним, на середньому рівні ($k = -0.61$), граничну імовірність перевищення лімітів інвестиційних ресурсів задамо на рівні 0.05 ($\gamma = 1.645$).

Розв’язок задачі наведено у таблиці 3.6. Він принципово відрізняється від розв’язку для детермінованого випадку тим, що за обраних умов другий та четвертий проекти не можуть бути включені до інвестиційного портфеля через неприпустимість порушення обмежень щодо щорічних обсягів наявних інвестиційних ресурсів. Але якщо ОПР вважатиме за можливе перерозподілити інвестиційні ресурси у часі або знайти додаткові джерела фінансування, отриманий варіант плану може бути переглянуто. Коли ж можливостей залучення додаткового фінансування або перерозподілу інвестиційних ресурсів у часі немає, доведеться задовольнитися тим, що принаймні на перший рік планового періоду проекти другий та четвертий до інвестиційного портфелю не включатимуться, оскільки у супротивному випадку додаткове включення хоча б одного з цих проектів до інвестиційного портфелю неминуче призведе до зривів у реалізації розпочатих інвестиційних проектів з несприятливими наслідками щодо майбутніх економічних результатів.

Вправи до підрозділу 3.2

Вправа 3.2.1. Спланувати робочий лист Excel та перевірити наведені у таблиці 3.6 результати розв’язування задачі про формування за умов ризику портфелю реальних інвестицій та календарного плану його виконання.

Вправа 3.2.2. Дослідити чутливість отриманого розв’язку задачі про формування портфелю реальних інвестицій та календарного плану його виконання (вправа 3.2.1) щодо можливої зміни значення параметру k, який відбиває індивідуальне ставлення ОПР до ризику (при проведення розрахунків було обрано значення $k = -0.61$).

3.3. Оптимізація розміру страхової суми

Світовий досвід свідчить про активний розвиток інституту страхування в умовах ринкової економіки. Опрацюємо не лише питання про визначення страхувальником оптимального для нього розміру страхової суми, а також і питання про рекомендації страхувальнику щодо його дій під час обговорення умов страхової угоди з потенційним страхувальником.

Постановка задачі страхувальника[1]. Розглянемо задачу про визначення потенційним страхувальником оптимальної для нього страхової суми S при страхуванні наявного у нього капіталу K:

$$0 \le S \le K, \qquad S - ?.$$

Відомими величинами, поряд з K, вважатимемо такі:

p – норматив страхової премії;

q – норматив страхового відшкодування,

α – імовірність настання страхового випадку.

Зазначені некеровані параметри задовольняють певні кількісні співвідношення, які визначаються змістом цих параметрів:

$$0 < \alpha q < p < q \le 1,\ 0 < \alpha < 1.$$

Припустимо, що страховою угодою передбачатиметься наступне. Якщо страхувальник визначить страхову суму у розмірі S грошових одиниць, він повинен буде сплатити страховику премію у розмірі pS, тобто наявний капітал страхувальника зменшиться з величини K до величини $K - pS$. У разі, якщо протягом терміну дії страхової угоди страхувальник втратить свій капітал через страховий випадок (імовірність цієї події дорівнює α), він отримає від страховика страхове відшкодування у розмірі qS грошових одиниць. Коли ж страхового випадку не відбудеться, страхувальник залишиться із капіталом у розмірі $K - pS$ грошових одиниць.

Потрібно визначити оптимальний для страхувальника розмір S^* страхової суми S.

Для страхувальника ситуацію, пов'язану зі страхуванням, можна тлумачити як лотерею, в якій з імовірністю α може статися наслідок qS та з імовірністю $(1-\alpha)$ – наслідок $(K - pS)$ /рис. 3.2/.

---

[1] Варіанти постановки та елементи дослідження задачі страхувальника наведено, зокрема, також у працях: Ястремський О.І. Моделювання економічного ризику. – К.: Либідь, 1992. – 176 с.; Вітлінський В.В., Наконечний С.І. Ризик у менеджменті. – К.: ТОВ "Борисфен–М", 1996. – 336 с.; Олексюк О.С. Системи підтримки прийняття фінансових рішень на мікрорівні. – К.: Наукова думка, 1998. – 508 с.

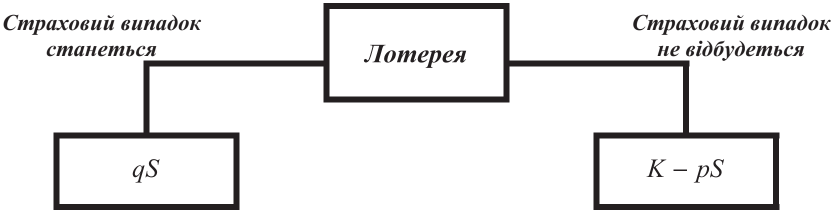
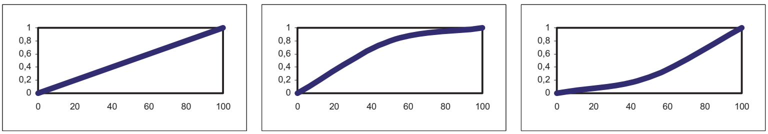


Рис. 3.2. Лотерея страхувальника

Різні особи ставляться до ризику по-різному, згідно їх власної системи переважань. Позначимо через f функцію корисності страхувальника, визначену в межах загальної суми його капіталу:

$$u = f(x), \qquad 0 \le x \le K .$$

Вважатимемо цю неперервну та зростаючу функцію нормованою значеннями 0 та 1 на відрізку $[0; K]$. Типові графіки функції корисності, залежно від особливостей ставлення до ризику (нейтральності, несхильності або схильності), наведено на рис. 3.3.



а) б) в)

Рис. 3.3. Графік функції корисності на множині значень капіталу від 0 до 100 грошових одиниць, залежно від особливостей ставлення до ризику:
а) нейтральне ставлення до ризику – функція корисності лінійна,
б) несхильне ставлення до ризику – функція корисності вгнута,
в) схильне ставлення до ризику – функція корисності опукла

У випадку ризику ОПР керується критерієм максимізації очікуваної корисності. Отже, задача визначення страхувальником оптимального розміру страхової суми S набирає вигляду:

$$\left.\begin{aligned} \bar{u} = \alpha f(qS) + (1-\alpha) f(K - pS) \to \max, \\ 0 \le S, \quad S \le K - pS, \end{aligned}\right\} \qquad (3.11)$$

де величини α, K, p і q, а також функціональна залежність f вважаються відомими, а змінна S – невідомою, яка підлягає визначенню.

Маємо одновимірну оптимізаційну задачу, розв’язок якої визначається індивідуальним ставленням страхувальника до ризику.

Розв'язування задачі страхувальника. Розпочнемо дослідження з випадку, коли страхувальник є нейтральним щодо ризику. Функція корисності цього страхувальника є лінійною:

$$u = f(x) = \frac{x}{K},\ 0 \le x \le K .$$

Тобто задача нейтрального щодо ризику страхувальника набирає вигляду:

$$\left.\begin{aligned} \overline{u} = \alpha\frac{qS}{K} + (1-\alpha)\frac{K-pS}{K} = (1-\alpha) + \frac{\alpha q-(1-\alpha)p}{K}S \to \max ,\\ 0 \le S \le \frac{K}{1+p}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.12)$$

Ця задача має розв’язок, який визначається знаком коефіцієнта при змінній S у цільовій функції:

а) при $\alpha q-(1-\alpha)p > 0$ потрібно страхувати весь капітал: $S^* = K/(1-p)$;

б) при $\alpha q-(1-\alpha)p < 0$ потрібно відмовитися від страхування: $S^* = 0$;

в) нарешті, при $\alpha q-(1-\alpha)p = 0$ страхову суму можна обрати довільною: S^* – довільне значення з проміжку $[0; \frac{K}{1-p}]$.

Останній випадок “в” є практично неможливим, але відповідне рівняння –

$$\alpha q = (1-\alpha)p$$

– дозволяє чітко розмежувати випадки, коли нейтральній щодо ризику особі або доцільно страхувати все, або, навпаки, доцільно повністю відмовитися від страхування.

Позначимо через α^* саме таке значення параметра α, яке відповідає зазначеному рівнянню:

$$\alpha^* = \frac{p}{p+q}.$$

Це дозволяє сформулювати наступне правило поведінки особи, нейтральної щодо ризику:

а) якщо імовірність α страхової події є високою: $\alpha > \alpha^* = \frac{p}{p+q}$, доцільно застрахувати весь капітал;

б) коли імовірність страхової події є малою: $\alpha < \alpha^* = \frac{p}{p+q}$, доцільно відмовитися від страхування.

<u>Приклад 3.3.1</u>. Якщо при страхуванні автомобіля на випадок крадіжки норматив страхової премії складає 4% ($p = 0.04$), а франшиза становить 10%, тобто норматив страхового відшкодування – 90% ($q = 0.90$), тоді граничне значення імовірності, яке розмежовує стратегії поведінки нейтральної до ризику особи, дорівнюватиме:

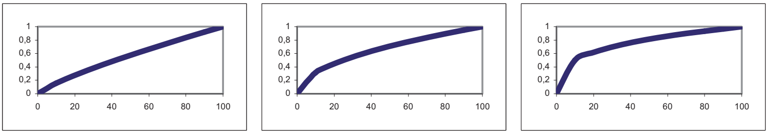
$$\alpha^* = \frac{0.04}{0.04+0.90} \approx 0.043 .$$

Таким чином, якщо імовірність крадіжки автомобіля оцінюється величиною, більшою від 0,043, нейтральній щодо ризику особі доцільно застрахувати автомобіль на випадок крадіжки. Коли ж імовірність викрадення автомобіля страхувальник вважає меншою від 0,043, він відмовиться від цього виду страхування.

Розглянемо далі випадок, коли страхувальник ставиться до ризику несхильно. У найпростіший спосіб його переважання можна наближено відбити вгнутою степеневою функцією корисності:

$$u = f(x) = \left(\frac{x}{K}\right)^{\mu},\ 0 \le x \le K,\ \text{де}\ 0 < \mu < 1.$$

Параметр μ цієї степеневої залежності характеризує рівень несхильності до ризику ОПР – зі зростанням несхильності до ризику значення μ зменшується. Приклади відповідних степеневих функцій корисності несхильних до ризику страхувальників наведені на рис. 3.4.



$\mu = 0.8$ $\mu = 0.5$ $\mu = 0.3$

Рис. 3.4. Графік степеневої функції корисності несхильного до ризику страхувальника залежно від рівня його несхильності до ризику (зі зростанням несхильності до ризику значення μ зменшується)

Для несхильної до ризику особи маємо таку задачу визначення оптимального розміру страхової суми:

$$\left.\begin{aligned} \bar{u} = \alpha\left(\frac{qS}{K}\right)^{\mu} + (1-\alpha)\left(\frac{K-pS}{K}\right)^{\mu} \to \max, \\ 0 \le S, \quad S \le \frac{K}{1+p}, \end{aligned}\right\} \qquad (3.13)$$

де $0 < \alpha < 1$, $0 < p < q \le 1$, $0 < \mu < 1$.

У наведеній одновимірній нелінійній задачі максиміації цільова функція є вгнутою (як сума двох увігнутих функцій). Тому розв’язок задачі міститиметься серед точок межі допустимих планів та точок, у яких похідна цільової функції перетворюється на нуль.

Для визначення стаціонарних точок цільової функції знайдемо її похідну та прирівняємо цю похідну до нуля:

$$\bar{u}'(S) = \alpha\mu\left(\frac{qS}{K}\right)^{\mu-1}\frac{q}{K} + (1-\alpha)\mu\left(\frac{K-pS}{K}\right)^{\mu-1}\left(-\frac{p}{K}\right) = 0.$$

Маємо розв’язок цього рівняння:

$$S = \frac{K}{p + q\left[\frac{(1-\alpha)p}{\alpha q}\right]^{\frac{1}{1-\mu}}}.$$

Враховуючи, що $\overline{u}'(+0) > 0$, робимо висновок, що розв'язок $S*$ задачі визначатиметься найменшим з двох чисел: $\frac{K}{1+p}$ та $\frac{K}{p + q\left[\frac{(1-\alpha)p}{\alpha q}\right]^{\frac{1}{1-\mu}}}$:

$$S* = \min\left\{\frac{K}{1+p}; \frac{K}{p + q\left[\frac{(1-\alpha)p}{\alpha q}\right]^{\frac{1}{1-\mu}}}\right\}.$$

Приклад 3.3.2. Якщо $\alpha = 0.01$, $q = 1$, $p = 0.04$ та $\mu = 0.5$, матимемо такий розв'язок задачі про оптимальну частку капіталу, яку слід застрахувати несхильній до ризику особі:

$$\frac{S*}{K} = \min\left\{\frac{1}{1+0.04}; \frac{1}{0.04 + \left(\frac{0.99 \cdot 0.04}{0.01}\right)^2}\right\} \approx 0.064,$$

тобто за наведених умов страхувальнику доцільно застрахувати приблизно 6.4% його капіталу. /Нейтральна до ризику особа в аналогічній ситуації відмовилася б від страхування./ Ілюструє знайдений розв'язок рис. 3.5, на якому наведено графік функції $\overline{u}(S)$ на множині значень S від 0 до 100.

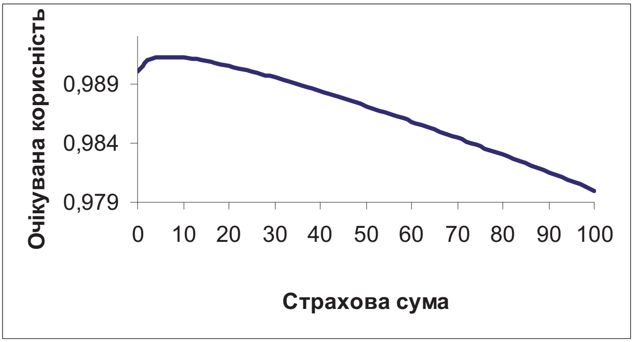
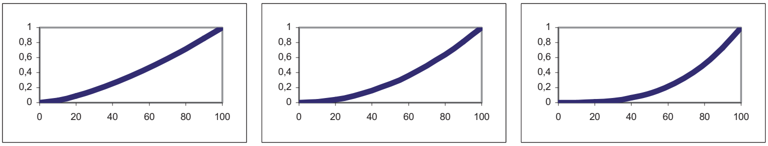


Рис. 3.5. Функція очікуваної корисності $\overline{u} = \overline{u}(S)$ несхильного до ризику страхувальника ($\mu = 0.5$) залежно від розміру страхової суми S

Опрацюємо тепер ситуацію з точки зору страхувальника, який <u>схильний</u> до ризику. Для нього функція корисності є опуклою. У разі використання степеневої залежності параметр μ функції корисності має бути більшим від одиниці:

$$u = f(x) = \left(\frac{x}{K}\right)^{\mu},\ 0 \le x \le K,\ \mu > 1,$$

причому зростання схильності до ризику відтворюється збільшенням значення μ (рис. 3.6).



$\mu = 1.5$ $\mu = 2.0$ $\mu = 3.0$

Рис. 3.6. Графік степеневої функції корисності схильного до ризику страхувальника залежно від рівня його схильності до ризику (зі зростанням схильності до ризику значення μ збільшується)

Задача схильної до ризику особи є схожою на задачі, які ми мали у попередніх випадках. Зараз вона має вигляд:

$$\left.\begin{aligned} \bar{u} = \alpha\left(\frac{qS}{K}\right)^{\mu} + (1-\alpha)\left(\frac{K-pS}{K}\right)^{\mu} \to \max, \\ 0 \le S \le \frac{K}{1+p}, \end{aligned}\right\} \qquad (3.14)$$

де $0 < \alpha < 1$, $0 < p < q \le 1$, $\mu > 1$.

На відміну від попередніх випадків ($\mu = 1$ у разі нейтральності щодо ризику або $0 < \mu < 1$ у разі несхильності), для схильної до ризику особи параметр μ більший за одиницю. Це визначає властивість опуклості цільової функції останньої задачі. Відомо, що максимальне значення неперервної та опуклої функції на замкненому відрізку досягається в одній з меж цього відрізку. Отже, щоб знайти розв'язок задачі схильного до ризику страхувальника, потрібно порівняти між собою лише два значення цільової функції: $\bar{u}(0)$ та $\bar{u}(\frac{K}{1+p})$, після чого вибрати найбільше з них.

Маємо:

$$\bar{u}(0) = 1 - \alpha,$$

$$\bar{u}(\frac{K}{1+p}) = \frac{\alpha q^{\mu} + (1-\alpha)}{(1+p)^{\mu}}.$$

Таким чином, одержуємо наступне правило прийняття рішення про страхування страхувальником, який схильний до ризику:

а) при $\dfrac{\alpha q^{\mu} + (1-\alpha)}{(1+p)^{\mu}} > 1-\alpha$ потрібно страхувати весь капітал;

б) при $\dfrac{\alpha q^{\mu} + (1-\alpha)}{(1+p)^{\mu}} < 1-\alpha$ потрібно відмовитися від страхування;

в) нарешті, у практично неймовірному випадку, коли $\dfrac{\alpha q^{\mu} + (1-\alpha)}{(1+p)^{\mu}} = 1-\alpha$, обидві альтернативи – або страхувати весь капітал, або ж відмовитися від страхування взагалі – є рівноцінними.

Бачимо, що на відміну від несхильної до ризику особи, схильний до ризику страхувальник ніколи не буде страхувати лише частину власного капіталу – він, як і нейтральна до ризику особа, діє за принципом: або все, або нічого.

Щоб докладніше проаналізувати правило прийняття схильною до ризику особою рішення щодо страхування, опрацюємо рівняння, яке розмежовує альтернативні стратегії цієї особи:

$$\frac{\alpha q^{\mu} + (1-\alpha)}{(1+p)^{\mu}} = 1-\alpha .$$

Знайдемо α^* – корінь цього рівняння: $\alpha^* = \dfrac{(1+p)^{\mu} - 1}{q^{\mu} + (1+p)^{\mu}}$.

Отримали таке правило:

а) якщо імовірність α страхової події велика: $\alpha > \alpha^* = \dfrac{(1+p)^{\mu} - 1}{q^{\mu} + (1+p)^{\mu}}$, доцільно застрахувати весь капітал: $S^* = \dfrac{K}{1+p}$;

б) коли імовірність страхової події є малою: $\alpha < \alpha^* = \dfrac{(1+p)^{\mu} - 1}{q^{\mu} + (1+p)^{\mu}}$, доцільно відмовитися від страхування: $S^* = 0$.

Порівнюючи це правило з правилом, яке відповідало нейтральному щодо ризику страхувальнику, робимо висновок, що схильна до ризику особа починає страхувати власний капітал за дещо більшої імовірності настання страхової події, аніж особа, яка нейтральна до ризику. Скажімо, при $p = 0.04$, $q = 0.9$ та $\mu = 1.2$ (слабка схильність до ризику), одержимо таке розмежувальне значення щодо імовірності страхового випадку:

$$\alpha^* = \frac{(1+0.04)^{1.2} - 1}{0.9^{1.2} + (1+0.04)^{1.2} - 1} \approx 0.0518$$

– воно перевищує рівень, який спостерігався за нейтрального ставлення до ризику (тоді мали $\alpha^* \approx 0.043$).

Рекомендації щодо дій страхової компанії. Оскільки потенційний страхувальник обирає рішення щодо добровільного страхування згідно власної системи переважань, страховій компанії доцільно брати до уваги індивідуальні особливості переважань страхувальників. З'ясуємо можливі дії страхової компанії у випадках, коли страхувальник є нейтральним до ризику, несхильним до ризику і, нарешті, схильним до ризику.

Для нейтральної щодо ризику особи ми визначили межове значення $\alpha^* = \dfrac{p}{p+q}$ імовірності α страхового випадку, яке обумовлює поведінку цього страхувальника:

- при $\alpha < \alpha^*$ він відмовиться від страхування;
- при $\alpha > \alpha^*$ він страхуватиме весь капітал.

Візьмемо до уваги, що зараз α – це суб'єктивна оцінка страхувальником імовірності настання страхової події. Отже, з метою залучення страхувальника до страхування, страховій компанії слід, насамперед, охарактеризувати потенційному страхувальнику відповідні страхові випадки, навести інформацію про окремі аналогічні випадки, що сталися в минулому, проілюструвати динаміку важливих статистичних показників.

Для подальших досліджень питання про можливі дії страхової компанії у випадку спілкування з нейтральною до ризику особи подамо оптимальний розмір S^* капіталу, що підлягатиме страхуванню страхувальником, за такою формулою:

$$S^* = \frac{K}{1+p} B\{\alpha(p+q)/p\},$$

де $B\{\cdot\}$ – це логічна функція, яка набирає значення 1 або 0 залежно від того, чи більшим є її аргумент від 1, чи ні:

$$B\{z\} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } z > 1; \\ 0, \text{ якщо } z < 1. \end{cases}$$

Наведена функція $B\{z\}$ є неспадною. Отже, щоб залучити страхувальника до страхування, страховій компанії є сенс впливати на збільшення аргументу z цієї функції, який залежить від чинників α, p і q:

$$z = \alpha(p+q)/p = \alpha\left(1 + \frac{q}{p}\right).$$

Наведена формула робить очевидними можливі дії страхової компанії, спрямовані на збільшення контингенту страхувальників та розмірів страхових сум:

- збільшити суб'єктивну оцінку страхувальниками імовірності страхового випадку α;
- зменшити норматив страхової премії p;
- збільшити норматив страхового відшкодування q.

Щоб порівняти ефективність кожного з цих заходів, знайдемо спочатку похідні змінної z за кожним із чинників впливу α, p і q:

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = 1 + \frac{q}{p} > 0\,,$$

$$\frac{\partial z}{\partial p} = -\frac{\alpha q}{p^2} < 0\,,$$

$$\frac{\partial z}{\partial q} = \frac{\alpha}{p} > 0\,.$$

Бачимо, що знаки похідних-узгоджуються з рекомендаціями щодо дій страхової компанії, оскільки додатне значення похідної вказує на зростання функції, а від'ємне – на спадання.

Найменшою із зазначених трьох частинних похідних за абсолютною величиною є остання – частинна похідна за змінною q. Дійсно,

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} - \frac{\partial z}{\partial q} = 1 + \frac{q - \alpha}{p} > 0$$

(оскільки значення q розташовані близько 1, а значення α – близько 0, тобто різниця $q - \alpha$ є додатною),

$$\left|\frac{\partial z}{\partial p}\right| - \frac{\partial z}{\partial q} = \frac{\alpha}{p^2}(q - p) > 0$$

(оскільки $q > p$).

Це може наводити на висновок, що страховій компанії не слід поспішати збільшувати норматив страхового відшкодування q (скорочуючи тим самим франшизу у частці $(1 - q)$ від страхової суми), а розглянути можливість скорочення нормативу страхової премії p. Проте дії у цьому напрямі є обмеженими, оскільки при $p \le \alpha q$ діяльність страхової компанії стане збитковою – очікувані страхові виплати перевищуватимуть обсяги страхових надходжень. Отже, маємо межі можливої варіації нормативу страхової премії:

$$\alpha q < p < \frac{\alpha q}{1 - \alpha}\,,$$

причому цей досить малий діапазон на практиці є ще вужчим через необхідність створення у страховій компанії страхових резервів, відшкодування необхідних виробничих витрат та забезпечення нормальної прибутковості цієї страхової компанії.

Звернемося тепер до показників еластичності змінної z за відповідними чинниками.

Нагадаємо, що для функції $y = f(x)$ еластичність $\varepsilon_y(x)$ змінної y за змінною x обчислюється за формулою:

$$\varepsilon_y(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x} = \frac{f'(x)}{f(x)} x = [\ln f(x)]'_x\, x\,,$$

де знаком “штрих” позначено похідну відповідної функції. /Коли змінна y є функцією багатьох змінних, беруться до уваги відповідні частинні похідні цієї функції./ За економічним змістом показник еластичності: показує, на скільки відсотків зміниться залежна змінна, якщо незалежна змінна зросте на один відсоток.

У нашому випадку для залежності змінної z від чинників α, p і q маємо:

$$\ln z = \ln\alpha + \ln(1+\frac{p}{q}).$$

Тому коефіцієнти еластичності за відповідними чинниками наступні:

$$\varepsilon_z(\alpha) = 1,$$

$$\varepsilon_z(p) = -\frac{q}{p+q},$$

$$\varepsilon_z(q) = \frac{q}{p+q}.$$

Найбільшою за абсолютною величиною є еластичність за імовірністю настання страхового випадку α. Це підтверджує доцільність заходів з інформування потенційного страхувальника про статистику відповідних несприятливих подій. Щодо інших дій страхової компанії, то через збіжність модулів еластичностей змінної z за параметрами p та q віддати перевагу або скороченню нормативу страхового внеску p, або ж збільшенню нормативу страхового відшкодування q складно. На наш погляд, психологічно краще привернути увагу страхувальника до доцільності страхування збільшенням нормативу страхового відшкодування q, аніж зменшенням нормативу страхової премії p. Водночас є об’єктивна межа і таких заходів, оскільки параметр q не може перевищувати 1, до того ж збільшення цього параметру супроводжується зменшенням франшизи, зовсім відмовлятися від якої не завжди є доцільним /франшиза стимулює страхувальника до посилення власної відповідальності за проведення заходів щодо зменшення ризику настання несприятливих випадків/.

На наступному етапі досліджень опрацюємо варіанти діалогу з страхувальником, який ставиться до ризику несхильно. Оптимальний для нього розмір страхової суми визначається рівнянням:

$$S^* = \min\left\{\frac{K}{1+p};\ \frac{K}{p+q\left[\frac{(1-\alpha)p}{\alpha q}\right]^{\frac{1}{1-\mu}}}\right\},$$

де параметр μ знаходиться в межах від 0 до 1 та характеризує рівень несхильності до ризику, причому зі зростанням несхильності рівень μ

зменшується, а при $\mu \to 1$ ставлення несхильної до ризику особи наближається до нейтрального типу.

Дійсно,

$$\lim_{\mu \to 1-0} S^*(\mu) = \begin{cases} 0, & \textit{якщо } \dfrac{(1-\alpha)p}{\alpha q} > 1; \\ \dfrac{K}{1+p}, & \textit{якщо } \dfrac{(1-\alpha)p}{\alpha q} < 1 \end{cases}$$

– це збігається з правилом вибору стратегії щодо страхування нейтральною щодо ризику особою.

Але, на відміну від нейтральної до ризику ОПР, яка звертається до страхових послуг лише за умови $\alpha \geq \dfrac{p}{p+q}$, несхильна до ризику особа завжди страхуватиме певну частку свого капіталу, оскільки $S^* > 0$. З'ясуємо, насамперед, коли ця частка є максимальною, тобто коли $S^* = \dfrac{K}{1+p}$.

Частка капіталу, яку страхуватиме несхильна до ризику особа, буде максимально можливою та досягатиме рівня $\dfrac{K}{1+p}$ у разі виконання нерівності:

$$1 + p \geq p + q\left[\frac{(1-\alpha)p}{\alpha q}\right]^{\frac{1}{1-\mu}},$$

тобто коли $q\left[\dfrac{(1-\alpha)p}{\alpha q}\right]^{\frac{1}{1-\mu}} \leq 1$. Ця нерівність є рівносильною до такої:

$$\alpha \geq \frac{p}{p+q^{\mu}}.$$

Врахуємо тепер, що норматив страхового відшкодування q задовольняє нерівність: $0 < q \leq 1$, а параметр μ, що характеризує рівень несхильності до ризику, – нерівність $0 < \mu < 1$. Тому $q^{\mu} \geq q$, отже:

$$\frac{p}{p+q^{\mu}} \leq \frac{p}{p+q}.$$

Дійшли висновку, що несхильна до ризику особа страхуватиме весь свій капітал за граничної імовірності настання страхової події $\alpha^* = \dfrac{p}{p+q^{\mu}}$ дещо меншої, аніж особа, яка ставиться до ризику нейтрально. Причому зі значним зростанням несхильності до ризику (тобто коли $\mu \to 0$) рівень цієї граничної імовірності зменшується, наближаючись до значення $\dfrac{p}{1+p}$.

Проаналізуємо тепер ситуацію, коли імовірність α настання страхової події є меншою граничного рівня $\alpha^* = \dfrac{p}{p+q^{\mu}}$, тобто коли $\alpha < \dfrac{p}{p+q^{\mu}}$. У такій ситуації нейтральна щодо ризику особа відмовилася б від страхування. Навпаки, несхильна до ризику особа страхуватиме частку свого капіталу у розмірі $S^* = \dfrac{K}{p + q\left[\dfrac{(1-\alpha)p}{\alpha q}\right]^{\frac{1}{1-\mu}}}$. Ця величина є меншою від максимально можливого розміру страхової суми $\dfrac{K}{1+p}$:

$$S^* < \frac{K}{1+p},$$

оскільки зараз має місце нерівність $q\left[\dfrac{(1-\alpha)p}{\alpha q}\right]^{\frac{1}{1-\mu}} > 1$.

Водночас страхова компанія має можливість впливати на частку S^* відповідною варіацією параметрів p та q страхового договору. Щоб з'ясувати ці можливості, проаналізуємо функціональну залежність величини S^* від аргументів α, μ, p і q (рис. 3.7).

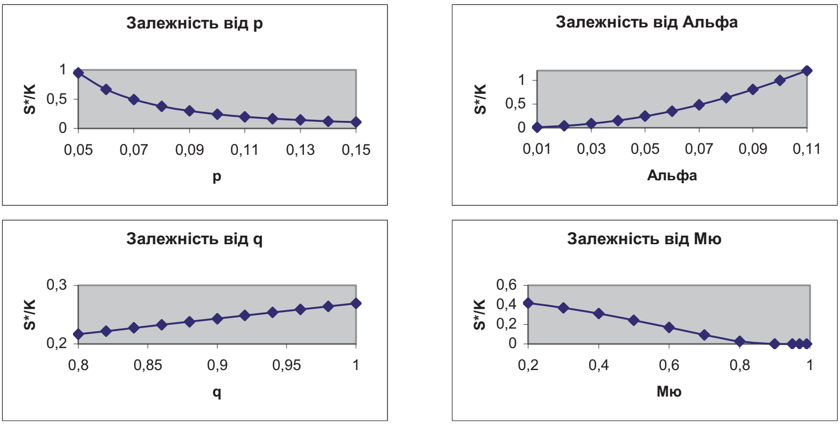


Рис. 3.7. Частка капіталу, що підлягатиме страхуванню несхильним до ризику страхувальником, – відношення S*/K – залежно від параметрів страхової угоди (p – норматив страхової премії, q – норматив страхового відшкодування), імовірності настання страхової події (α) та рівня несхильності до ризику (μ).

/Базові значення параметрів: $p = 0.1$, $q = 0.9$, $\alpha = 0.05$, $\mu = 0.5$./

Знайдемо частинні похідні цієї функції.

Маємо: $S^* = S^*(\alpha, \mu, p, q) = \dfrac{K}{p + q\left[\dfrac{(1-\alpha)p}{\alpha q}\right]^{\frac{1}{1-\mu}}}$.

Отже,

$$\frac{\partial S^*}{\partial \alpha} = -\frac{A}{\alpha^2}\left(\frac{p^{\mu}}{q}\right)^{\frac{1}{1-\mu}} > 0,$$

$$\frac{\partial S^*}{\partial \mu} = \frac{A}{(1-\mu)^2}\left[\frac{(1-\alpha)p}{\alpha q^{\mu}}\right]^{\frac{1}{1-\mu}} \ln\frac{(1-\alpha)p}{\alpha q} < 0,$$

$$\frac{\partial S^*}{\partial p} = A\left(1 + \frac{1}{1-\mu}\left[\frac{(1-\alpha)p^{\mu}}{\alpha q^{\mu}}\right]^{\frac{1}{1-\mu}}\right) < 0,$$

$$\frac{\partial S^*}{\partial q} = -A\frac{\mu}{1-\mu}\left[\frac{(1-\alpha)p\mu}{\alpha q}\right]^{\frac{1}{1-\mu}} > 0,$$

оскільки $A = -\dfrac{K}{\left(p + \left[\dfrac{(1-\alpha)p}{\alpha q^{\mu}}\right]^{\frac{1}{1-\mu}}\right)^2} < 0$.

Знаки частинних похідних свідчать про такі можливі дії страхової компанії, які збільшують розміри страхових сум страхувальника, коли він ставиться до ризику несхильно:

1) збільшити суб'єктивну оцінку імовірності страхової події α;
2) спробувати вплинути на посилення несхильності страхувальника до ризику (тобто на зменшення параметру μ);
3) зменшити норматив страхової премії p;
4) збільшити норматив страхового відшкодування q.

Бачимо, зокрема, що інформування страхувальника щодо статистики відповідних страхових випадків, поряд з іншими заходами страхової компанії, дозволяє не лише підвищити суб'єктивну оцінку страхувальником імовірності страхової події, а також посилити рівень несхильності страхувальника до ризику, що дозволить збільшити розмір страхової суми під час укладання договору страхування.

Нарешті з'ясуємо дії страхової компанії у випадку, коли потенційний страхувальник є <u>схильним</u> до ризику. Нагадаємо, що схильний до ризику страхувальник визначає розмір страхової суми за правилом:

$$S^* = \frac{K}{1+p}B\left\{\frac{\alpha(q^{\mu} + (1+p)^{\mu}}{(1+p)^{\mu} - 1}\right\},$$

де $B\{z\}$, як і раніше, – логічна функція, яка набирає значення 1 або 0 залежно від того, чи більшим є її аргумент від 1, чи ні:

$$B\{z\} = \begin{cases} 1, \textit{якщо } z > 1; \\ 0, \textit{якщо } z < 1. \end{cases}$$

Зараз аргументом логічної функції виступає змінна z, яка є функцією параметрів α, μ, p і q:

$$z = \frac{\alpha(q^{\mu} + (1+p)^{\mu}}{(1+p)^{\mu} - 1}.$$

Отже, щоб визначити дії страхової компанії, спрямовані на збільшення страхової суми, можна дослідити знаки похідних змінної z за кожним із впливових чинників α, p і q (Додатний знак похідної означає зростання, а від'ємний – спадання значень функції при відповідній варіації незалежної змінної в околі досліджуваної точки):

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = \frac{q^{\mu} + (1+p)^{\mu}}{(1+p)^{\mu} - 1} > 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial p} = -\frac{\alpha\mu(1+p)^{\mu-1} q^{\mu}}{\left[(1+p)^{\mu} - 1\right]^2} < 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial q} = \frac{\alpha\mu q^{\mu-1}}{(1+p)^{\mu} - 1} > 0.$$

Робимо висновок, що страховій компанії з метою залучення потенційного страхувальника до страхування доцільно, як і у попередніх ситуаціях, впливати на збільшення суб'єктивної імовірності настання страхового випадку, скорочувати страховий тариф та збільшувати норматив страхового відшкодування. Доцільно враховувати, що схильна до ризику особа, так само як і нейтральна щодо ризику, або страхуватиме весь наявний у неї капітал, або ж зовсім відмовиться від страхування. Причому рішення про страхування схильна до ризику особа обиратиме за імовірності настання страхової події дещо більшої, аніж особа, яка ставиться до ризику нейтрально.

Окрім зазначених дій, страховій компанії доцільно також наголосити на тому, що свої зобов'язання щодо виплати страхових відшкодувань вона завжди виконує сумлінно; корисно проілюструвати цю тезу відповідними прикладами.

Таким чином, уважне та індивідуальне ставлення страховиків до потенційних клієнтів дозволить збільшити обсяги страхових послуг, сприятиме розвитку страхового ринку, краще захищатиме майнові інтереси страхувальників.

Вправи до підрозділу 3.3

Вправа 3.3.1. Розв'язати задачу страхувальника (3.11), якщо $K = 100\,000$ грошових одиниць, $p = 0.08$, $q = 0.95$, $\alpha = 0.03$; проілюструвати залежність розв'язку від значення параметру μ.

Вправа 3.3.2. Як впливатиме на розв'язок задачі страхувальника значення нового параметру β $(0 \le \beta \le 1)$, який характеризує імовірність виплати страховиком страхового відшкодування страхувальнику у разі настання страхового випадку? /Наведене у підрозділі дослідження зроблено у припущенні, що $\beta = 1$/.

Вправа 3.3.3. При виконанні дослідження ми використовували степеневу функцію корисності страхувальника $u = \left(\frac{x}{K}\right)^{\mu}$. Пропонуємо дослідити задачу страхувальника, використовуючи для відбиття його ставлення до ризику експоненційну функцію корисності $u = Ae^{cx} + B$, $0 \le x \le K$. Параметри A та B цієї функції знайдіть самостійно, виходячи із загальновживаних умов нормування.

3.4. Оптимальне управління валютним резервом

Валютний резерв країни є вагомим чинником стабілізації інфляційних процесів та підтримки її зовнішньоекономічних зв'язків, а для інших суб'єктів господарювання він є потужним засобом запобігання ризикам у фінансово–економічній діяльності. Валютний резерв утворюється з набору валют та періодично переформовується. Необхідність переформування валютного резерву зумовлена, зокрема, тим, що відносна цінність окремих валют з часом змінюється. Щоб підтримувати оптимальну цінність валютного резерву, його доцільно постійно переглядати, обмінюючи певну частину валюти, відносна цінність якої зменшуватиметься, на таку, відносна цінність якої зростатиме. В умовах ризику або невизначеності майбутньої відносної цінності окремих валют для пошуку оптимального плану переформування валютного резерву доцільно скористатися відповідними економіко–математичними методами.

Сьогодні у валютних операціях найчастіше використовуються долар США, євро, японська єна, англійський фунт стерлінгів, канадський долар тощо. Окрім національних валют у міжнародних розрахунках використовуються міжнародні гроші (наприклад, SDR – Special Drawing Rights – безготівкові гроші у вигляді спеціального запису на рахунку країни в МВФ), дорогоцінні метали тощо. Обмін валют між суб'єктами валютного ринку здійснюється за валютними курсами. Валютний курс – це вартість грошової одиниці однієї валюти, обчислена у грошових одиницях іншої валюти. Валютні курси визначаються, зокрема, співвідношеннями національних обсягів ВВП, обсягів експорту та імпорту, внутрішніх цін, процентних ставок тощо. Причинами зміни валютних курсів можуть бути: зміна обсягів експорту; зміна обсягів імпорту; зміна обсягів торгівельних операцій (експорту та імпорту разом); інфляція або дефляція; зміни облікових або відсоткових ставок національними або світовими (регіональними) банками; економічна нестабільність; нестабільність фінансових ринків; політична нестабільність; міжнародні конфлікти; екологічні кризи; стихійні лиха; інші причини тощо. Окрім економічних на валютні курси впливають політичні та інші фактори. Причому конкретний валютний курс визначається за законами ринкової економіки співвідношенням попиту та пропозиції відповідних валют.

Арбітраж на валютному ринку – це отримання прибутку за рахунок різниці у курсі певної валюти на різних ринках (просторовий арбітраж) або сприятливої та передбачуваної зміни курсу певної валюти у часі (часовий арбітраж). Просторовий арбітраж на сучасному світовому валютному ринку практично унеможливлюється. Але існують можливості для арбітражу у часі, оскільки валютні курси і, відповідно, відносні цінності валют демонструють хаотичний характер.

Непередбачуваність майбутніх валютних курсів спонукає активних учасників валютного ринку спробувати отримати прибуток за рахунок гри на курсах валют. Часто їх зусилля приносять позитивні для них результати. Це, з одного боку, стимулює відповідні арбітражні зусилля і інших учасників. З іншого боку, пасивність окремих „гравців” валютного ринку знецінює їх власні валютні резерви через зростання цінності валютних резервів їх „супротивників” – більш активних учасників світової „валютної гри”.

Статистика валютних ринків містить інформацію про валютні курси, що склалися за результатами обміну у вигляді купівлі–продажу окремих пар валют. Якби на валютному ринку були присутні лише дві валюти, цієї інформації було б достатньо для аналізу динаміки цінності валют. Але за сучасних умов відмови від золотовалютного стандарту, поширення режимів плаваючого курсу та вільного обігу десятків конвертованих валют, для порівняння тенденцій у зміні цінності окремих валют потрібні додаткові розрахунки та дослідження. Одним із засобів такого дослідження може служити обчислення показників відносної цінності валют.

Відносна цінність валют визначається обмінними курсами. І навпаки, обмінні курси визначаються відносною цінністю валют. Наприклад, якщо йдеться про дві валюти – A та B (з певними одиницями виміру кожної з цих валют), тоді курс валюти A щодо валюти B (тобто кількість одиниць валюти A, яку можна обміняти за/на одну одиницю валюти B) – k_{AB} – є величина, що дорівнює частці від ділення відносної цінності одиниці валюти B (w_B) на відносну цінність одиниці валюти A (w_A): $k_{AB} = \dfrac{w_B}{w_A}$.

Візьмемо до розгляду n різних валют. Якщо відносну цінність i–ої валюти позначити через w_i, а j–ї валюти – через w_j, тоді обмінний курс i–ї валюти щодо j–ї валюти – k_{ij} – задовольнятиме співвідношення:

$$k_{ij} = \frac{w_j}{w_i} \text{ для усіх } i,\ j = \overline{1, n};$$

Ці співвідношення дозволяють обчислити показники відносної цінності валют за інформацією про валютні курси, що склалися на валютному ринку. Нехай, скажімо, k_{1j}, $j = \overline{2, n}$, – обмінні курси першої валюти щодо усіх інших валют з набору, що розглядається (очевидно також, що $k_{11} = 1$). Тоді для показників відносної цінності кожної з валют матимемо систему рівнянь:

$$\frac{w_j}{w_1} = k_{1j}, \qquad j = \overline{1, n}.$$

Додамо до цих рівнянь широковживану для відносних показників умову нормування:

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1.$$

Це дозволить однозначно визначити відносну цінність кожної з валют:

$$w_j = \frac{k_{1j}}{\sum_{j=1}^{n} k_{1j}}, \qquad j = \overline{1, n}.$$

Приклад 3.4.1. Нехай маємо інформацію про курс першої валюти щодо п’яти інших валют, який склався на валютному ринку на певну дату (таблиця 3.7; показано також курс першої валюти щодо неї самої, який дорівнює 1).

Таблиця 3.7. Курс першої валюти відносно інших валют

Валюта	1	2	3	4	5	6
Курс першої валюти щодо інших валют	1	8,644116	5,331800	1,7620	4,44544	6,088916

Обчислимо за даними таблиці 3.7 відносну цінність одиниці кожної з зазначених валют станом на відповідну дату:

$$w_1 = \frac{1}{1+8{,}644116+5{,}331800+1{,}7620+4{,}44544+6{,}088916} \approx 0{,}0367,$$

$$w_2 = \frac{8{,}644116}{1+8{,}644116+5{,}331800+1{,}7620+4{,}44544+6{,}088916} \approx 0{,}3170,$$

$$w_3 = \frac{5{,}331800}{1+8{,}644116+5{,}331800+1{,}7620+4{,}44544+6{,}088916} \approx 0{,}1955,$$

$$w_4 = \frac{1{,}7620}{1+8{,}644166+5{,}33180+1{,}7620+4{,}44544+6{,}088916} \approx 0{,}0646,$$

$$w_5 = \frac{4{,}44544}{1+8{,}644116+5{,}331800+1{,}7620+4{,}44544+6{,}088916} \approx 0{,}1630,$$

$$w_6 = \frac{6{,}088916}{1+8{,}644116+5{,}331800+1{,}7620+4{,}44544+6{,}088916} \approx 0{,}2232.$$

Приклад 3.4.1 закінчено.

Бачимо, по–перше, що відносна цінність кожної з валют визначається відносно певного, наперед обраного набору валют. По–друге, показники відносної цінності валют залежать від обраних одиниць виміру цих валют.

Щоб зробити значення відносних цінностей різних валют такими, що мало різнитимуться за абсолютною величиною, можна замість природних скористатися розрахунковими одиницями виміру валют:

- для першої валюти (курсом якої щодо інших валют ми користуємося як вихідним) за одиницю виміру обирати її природну одиницю;
- для усіх інших валют ($j = \overline{2, n}$) визначити розрахункові одиниці виміру: $m_j = \dfrac{1}{Med\{k_{1j}^t\}_{t=1}^T}$, де T – тривалість періоду часу, що досліджується, t – номер моменту часу (окремого часового проміжку) з досліджуваного періоду ($t = \overline{1, T}$), k_{1j}^t –курс першої

валюти щодо j – ої валюти (в її „природних” одиницях) в момент часу t, $Med\{\cdot\}$ – медіанне значення числового масиву $\{\cdot\}$.

Відносна цінність кожної з валют у часі змінюється. Типова динаміка відносних цінностей різних валют показана на рис. 3.8.

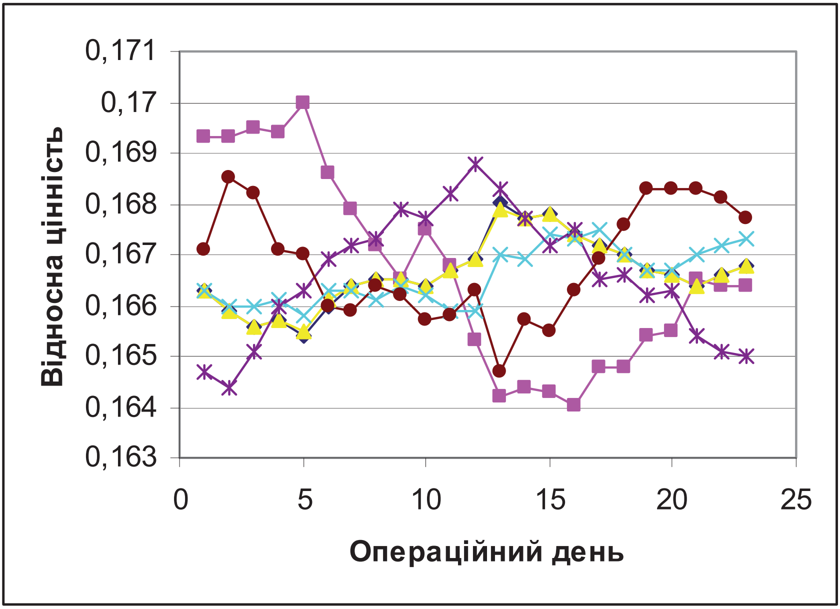


Рис. 3.8. Типова хаотична динаміка відносних цінностей різних валют

Цінність валютного резерву визначається відносними цінностями та обсягами наявних у ньому валют:

$$z^t = \sum_{j=1}^{n} w_j^t a_j^t ,$$

де n – кількість валют, a_j^t – кількість наявної у резерві j – ої валюти, w_j^t – відносна цінність одиниці j – ої валюти. Індекс t використовується для позначення певного календарного моменту часу (операційного дня тощо).

Оскільки відносні цінності валют із часом міняються, змінюється і цінність валютного резерву у цілому, навіть якщо кількість валюти кожного виду у цьому резерві лишається без змін. Причому якби майбутня відносна цінність валют визначалася б наперед абсолютно точно, цінність валютного резерву можна було б збільшити шляхом його оптимального переформовування.

Задача переформовування валютного резерву у детермінованих умовах, тобто при відомих значеннях майбутніх відносних цінностей валют, полягає у визначенні такого резерву, загальна цінність якого буде якнайбільшою.

Побудова вихідної економіко–математичної моделі. Для економіко–математичного моделювання задачі оптимального управління валютним резервом уведемо необхідні позначення.

Відомі величини:

n – кількість різних валют, з яких створено або може бути утворено валютний резерв;

i, j – номер окремої валюти ($i, j = \overline{1, n}$);

a_i – кількість i–ї валюти, що знаходиться у валютному резерві в поточний момент часу;

k_{ij} – курс i–ї валюти щодо j–ї, який дорівнює кількості валюти i–го виду, яка потрібна, щоб отримати одиницю валюти j–го виду при переформуванні валютного резерву (покладаємо також $k_{ii} = 1$ при $i = j$).

Некеровані параметри:

w_j^1 – майбутня відносна цінність j–ї валюти ($j = \overline{1, n}$).

Керовані змінні:

x_{ij} – кількість i–ї валюти, яку буде витрачено для придбання j–ї валюти ($i, j = \overline{1, n}$);

y_j – кількість j–ї валюти, яка міститиметься у переформованому валютному резерві;

z – загальна майбутня цінність переформованого валютного резерву.

Залежності між керованими змінними, некерованими параметрами та відомими величинами:

1) загальна цінність переформованого валютного резерву визначається майбутньою відносною цінністю кожної валюти та кількістю відповідної валюти, яка міститиметься у цьому резерві:

$$z = \sum_{j=1}^{n} w_j^1 y_j \ ;$$

2) Кількість j–ї валюти, яка міститиметься у переформованому валютному резерві, визначається кількістю валюти різних видів, яку використано під час переформування резерву для придбання цієї валюти:

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_{ij}} x_{ij} \ , \quad j = \overline{1, n} \, ;$$

3) Кількість i–ї валюти, яку буде використано для придбання валют під час переформування валютного резерву, відповідає початковій кількості цієї валюти у поточному резерві

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ , \quad i = \overline{1, n} \, ;$$

4) кількість i–ї валюти, яку буде витрачено для придбання j–ї валюти, невід'ємна:

$$x_{ij} \geq 0 \, , \quad i, j = \overline{1, n} \, .$$

Детермінований випадок. З урахуванням залежностей між керованими змінними, некерованими параметрами та відомими величинами економіко–математична модель детермінованої задачі набирає вигляду:

$$\left.\begin{aligned} & z=\sum_{j=1}^{n} w_j^1 y_j \to \max, \\ & y_j=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k_{ij}}x_{ij}, \quad j=\overline{1,n}, \\ & \sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i, \quad i=\overline{1,n}, \\ & x_{ij}\ge 0, \quad i,j=\overline{1,n}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.15)$$

Маємо розподільчу задачу лінійного програмування, розв’язок якої визначається конкретними значеннями некерованих параметрів.

З метою дослідження задачі візьмемо до уваги, що обмінні курси k_{ij} визначаються поточною відносною цінністю w_i^0 та w_j^0 відповідних валют:

$$k_{ij}=\frac{w_j^0}{w_i^0}, \ (i, j=\overline{1,n}).$$

Тому співвідношення між керованими змінними можна подати так:

$$w_j^0 y_j=\sum_{i=1}^{n} w_i^0 x_{ij} \ \ (j=\overline{1,n}).$$

Позначимо поточну цінність існуючого валютного резерву через z^0:

$$z^0=\sum_{i=1}^{n} w_i^0 a_i .$$

Умовно утворення цінності поточного валютного резерву можна уявити як реалізацію всієї наявної валюти за її поточною цінністю. Тоді задача переформування валютного резерву постає як задача про придбання за ціною, що відповідає поточній відносній цінності, такої кількості відповідних валют, при якій загальна цінність валютного резерву у майбутньому буде якнайбільшою:

$$\left.\begin{aligned} & z=\sum_{j=1}^{n} w_j^1 y_j \to \max, \\ & \sum_{j=1}^{n} w_j^0 y_j = z^0, \\ & y_j \ge 0, \quad j=\overline{1,n}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.16)$$

Останню задачу назвемо задачею визначення складу валютного резерву. Після знаходження її оптимального плану, який ми позначимо через

y_j^*, $j=\overline{1,n}$, конкретну схему переформування валютного резерву можна побудувати як розв'язок задачі балансування:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} w_i^0 x_{ij} &= w_j^0 y_j^* , \quad j=\overline{1,n}, \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= a_i , \quad i=\overline{1,n}, \\ x_{ij} &\ge 0 , \quad i, j=\overline{1,n}. \end{aligned}\right\}$$

Ця задача балансування є розв'язуваною, оскільки справджується умова існування її розв'язку: $\sum_{j=1}^{m} w_j^0 y_j^* = \sum_{i=1}^{m} w_i^0 a_i$. Один із розв'язків можна знайти за формулами:

$$x_{ij}^* = \frac{a_i w_j^0 y_j^*}{\sum_{j=1}^{n} w_j^0 y_j^*}, \qquad i, j=\overline{1,n}.$$

Якщо задачу визначення складу валютного резерву (3.16), яка містить лише одне основне обмеження, перетворити шляхом уведення нових змінних: $s_j = w_j^0 y_j$ ($j=\overline{1,n}$), вона набере вигляду:

$$\left.\begin{aligned} z = \sum_{j=1}^{n} \frac{w_j^1}{w_j^0} s_j &\to \max , \\ \sum_{j=1}^{n} s_j &= z^0 , \\ s_j \ge 0 , \quad & j=\overline{1,n} . \end{aligned}\right\} \qquad (3.17)$$

Тобто у детермінованих умовах оптимальний склад валютного резерву визначатиметься тими валютами, темп зміни відносної цінності яких (відношення $\frac{w_j^1}{w_j^0}$) є найбільшим.

<u>Приклад 3.4.2</u>. Припустимо, що валютний резерв містить шість різних валют у кількості по 100 одиниць кожної (йдеться про розрахункові одиниці виміру цих валют). Якщо поточні та майбутні відносні цінності кожної з валют відомі (таблиця 3.8), оптимальний план переформування валютного резерву полягає у обміні всієї валюти, окрім шостої, на цю шосту валюту, оскільки темп зміни її відносної цінності є найбільшим. У показниках майбутньої відносної цінності валют цінність наявного валютного резерву (без переформування) складатиме 100 одиниць, у той час коли цінність переформованого резерву дорівнюватиме 100,8378 одиниць, тобто одноразове переформування валютного резерву дозволило збільшити його цінність на 0,8 %.

Таблиця 3.8. Оптимальне переформування валютного резерву у детермінованому випадку

Показник	Валюта					
	1	2	3	4	5	6
Наявність у резерві	100	100	100	100	100	100
Поточна відносна цінність	0,1663	0,1693	0,1663	0,1663	0,1647	0,1671
Майбутня відносна цінність	0,1659	0,1693	0,1659	0,1660	0,1644	0,1685
Резерв після оптимального переформування	0	0	0	0	0	598,444
Довідково: темп зміни відносної цінності	0,997595	1	0,997595	0,998196	0,998179	1,008378

Тепер звернемося до реальної ситуації, коли показники майбутньої відносної цінності валют є недетермінованими.

Випадок ризику. За умов ризику некеровані параметри w_j^1, які показують відносну цінність одиниці j-ї валюти у майбутньому, вважатимемо випадковими величинами з відомими середніми значеннями $\overline{w}_j^1$ та стандартними відхиленнями σ_j ($j=\overline{1,n}$).

Якщо при керуванні валютним резервом ОПР ставиться до ризику несхильно, для визначення оптимального складу валютного резерву слід звертатися до множини ефективних планів двокритеріальної задачі:

$$\left.\begin{aligned} \overline{z} = \sum_{j=1}^{n} \overline{w}_j^1 y_j \to \max, \\ \sigma^2(z) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j y_i y_j \to \min, \\ \sum_{j=1}^{n} w_j^0 y_j = z^0, \\ y_j \ge 0, \quad j=\overline{1,n}, \end{aligned}\right\} \qquad (3.18)$$

де ρ_{ij} – коефіцієнт кореляції між параметрами w_i^1 та w_j^1 ($i, j=\overline{1,n}$; при $i=j$, очевидно, $\rho_{ii}=1$).

Перша цільова функція двокритеріальної задачі (3.18) орієнтує на вибір такого валютного резерву, очікувана загальна цінність якого $\overline{z}$ була б найбільшою. Друга цільова функція відбиває вимогу вибору валютного резерву з найменшою дисперсією своєї загальної цінності $\sigma^2(z)$.

Розв'язок задачі має відповідати системі переважань ОПР. Оптимальний валютний резерв є таким з ефективних планів двокритеріальної задачі, при якому співвідношення показників очікуваної цінності та дисперсії цінності є, з точки зору ОПР, найпереважнішим.

Для розв'язування задачі (3.18) скористаємося узагальненою методикою багатокритеріальної оптимізації. Згідно неї, пошук оптимального валютного резерву можна організувати шляхом послідовної реалізації наступних шести етапів.

<u>Етап 1.</u> Визначення меж варіації кожної з цільових функцій на множині ефективних планів двокритеріальної задачі – інтервалів $[\bar{z}_{\min}; \bar{z}_{\max}]$ та $[\sigma^2(z)_{\min}; \sigma^2(z)_{\max}]$. Якщо для кожної з цільових функцій її найкраще значення на множині ефективних планів збігатиметься з найгіршим, робимо висновок, що всі ефективні плани рівноцінні. Довільний з них може бути обраним за розв'язок задачі.

У типовому випадку, який вимагає подальшого опрацювання, інтервали варіації значень кожної з цільових функцій на множині ефективних планів матимуть ненульову довжину.

<u>Етап 2.</u> Побудова узагальненої адитивної цільової функції:

$$h = \frac{\bar{z}}{\bar{z}_{\max} - \bar{z}_{\min}} - \frac{\sigma^2(z)}{\sigma^2(z)_{\max} - \sigma^2(z)_{\min}}$$

та визначення валютного резерву y^1, який відповідає максимуму цієї функції на множині Y допустимих планів задачі.

Цей план є ефективним. Його показники очікуваної цінності та дисперсії цінності разом з межами варіації критеріальних показників на множині ефективних планів передаються ОПР.

<u>Етап 3.</u> ОПР або погоджується обрати план y^1 за розв'язок задачі, або повинна по кожній з цільових функцій вказати такі припустимі рівні $\bar{z}_\xi$ та σ^2_ξ, які вона вважає задовільними.

<u>Етап 4.</u> Визначається реальність припустимих рівнів критеріальних показників та здійснюється їх корекція або в бік покращання, якщо вони є реальними, або в бік послаблення, щоб зробити реальними. Для цього розв'язують задачу опуклого програмування:

$$\left.\begin{array}{c} t \to \max\,, \\ \bar{z} \ge \bar{z}_\xi + t(\bar{z}_{\max} - \bar{z}_\xi)\,, \\ \sigma^2(z) \le \sigma^2_\xi - t(\sigma^2_\xi - \sigma^2(z)_{\min})\,, \\ y \in Y\,. \end{array}\right\}$$

Реальні припустимі рівні критеріальних показників визначаються оптимальним значенням t^* параметра t цієї задачі. Зазначимо, що $t^* < 1$, причому випадок $t^* \geq 0$ свідчить про реальність первісних припустимих рівнів, а випадок $t^* < 0$ – про їх нереальність.

<u>*Етап 5.*</u> Розшукується ефективний план y^2, який відповідає реальним припустимим рівням критеріальних показників. Він є розв’язком задачі оптимізації квадратичної функції з лінійними та нелінійними обмеженнями:

$$\left.\begin{array}{c} h = \dfrac{\bar{z}}{\bar{z}_{\max} - \bar{z}_{\min}} - \dfrac{\sigma^2(z)}{\sigma^2(z)_{\max} - \sigma^2(z)_{\min}} \rightarrow \max , \\ \bar{z} \geq \bar{z}_{\xi} + t^*(\bar{z}_{\max} - \bar{z}_{\xi}) , \\ \sigma^2(z) \leq \sigma^2_{\xi} - t^*(\sigma^2_{\xi} - \sigma^2(z)_{\min}) , \\ y \in Y . \end{array}\right\}$$

Результатом є рекомендація про затвердження за розв’язок плану y^2, яка надсилається ОПР.

<u>*Етап 6.*</u> Якщо ОПР не погоджується з рекомендацією обрати за розв’язок план y^2, вона повинна здійснити корекцію первісних припустимих рівнів критеріальних показників (для забезпечення збіжності методу нові рівні повинні бути слабкішими від попередніх).

В результаті або робимо висновок про завершення процесу, або повертаємося до етапу 4, маючи на увазі нові значення припустимих рівнів критеріальних показників.

<u>Примітки</u>: 1. Якщо ОПР на етапах 3, 6 залишає один або обидва з критеріальних показників поза увагою, за припустимі рівні таких критеріальних показників можна обрати, відповідно, значення $\bar{z}_{\min}$ та $\sigma^2(z)_{\max}$.

2. Якщо діалог з ОПР неможливий, тоді етапи 2, 3, 6 опускаються, а за розв’язок задачі обирається план y^2, який буде знайдено після реалізації етапів 1, 4, 5, з урахуванням примітки 1.

<u>Приклад 3.4.3</u>. Для проведення обчислень вважатимемо, що розглядається шість валют. Наявний валютний резерв містить по 100 одиниць кожної валюти. Поточна відносна цінність цих валют наведена у таблиці 3.8, а щодо випадкових майбутніх відносних цінностей валют скористаємося даними, наведеними у таблиці 3.9.

Таблиця 3.9. Статистичні характеристики майбутніх випадкових відносних цінностей валют

Валюта	Очікуване значення	Стандартне відхилення	Коефіцієнти кореляції (стовпчик відповідає другій валюті)					
			1	2	3	4	5	6
1	0,1659	0,0011	1	-0,925	0,999	0,705	0,505	-0,494
2	0,1693	0,0018	-0,925	1	-0,926	-0,734	-0,499	0,285
3	0,1659	0,0012	0,999	-0,926	1	0,708	0,511	-0,500
4	0,1660	0,0005	0,705	-0,734	0,708	1	-0,078	0,018
5	0,1644	0,0019	0,505	-0,499	0,511	-0,078	1	-0,814
6	0,1685	0,0017	-0,494	0,285	-0,500	0,018	-0,814	1

Інформація про підсумки реалізації етапів 1 і 2 розв’язування задачі визначення оптимального складу валютного резерву наведена у таблиці 3.10. Валютний резерв y^1 міститиме 4,978 одиниць п’ятої та 593,537 одиниць шостої валюти. Його очікувана цінність дорівнює 100,8295 одиниць, стандартне відхилення загальної цінності цього резерву дорівнює $\sqrt{0,34352} \approx 0,586$ (одиниць).

Таблиця 3.10. Підсумки першого та другого етапів розв’язування задачі визначення оптимального валютного резерву за умов ризику за узагальненою методикою багатокритеріальної оптимізації

Критеріальні показники	Значення критеріальних показників на множині ефективних планів		Критеріальні показники валютного резерву, що пропонується першим
	Найкраще	Найгірше	
Очікувана цінність	100,8378	100,0181	100,8295
Дисперсія цінності	0,00011	1,03146	0,34352

Заслуговує на увагу і валютний резерв y^2, який буде знайдено за результатами етапів 4 і 5, з урахуванням приміток 1 і 2. Покладаємо гранично припустимі рівні критеріальних показників такими, що відповідають їх найгіршим значенням на множині ефективних планів двокритеріальної задачі: $\overline{z}_{\xi} = 100,0181$ та $\sigma^2_{\xi} = 1.03146$, після чого та максимізацією параметру t покращуємо ці рівні. В результаті на етапі 4 буде знайдено $t^* \approx 0,79$, а на етапі 5 буде визначено валютний резерв y^2, який охарактеризовано у таблиці 3.11.

Таблиця 3.11. Показники валютного резерву,
знайденого за результатами четвертого та п’ятого етапів

<table>
<tr><td rowspan="2">Склад резерву</td><td>Валюта</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>Кількість</td><td>0</td><td>70,736</td><td>26,640</td><td>0</td><td>4,454</td><td>495,875</td></tr>
<tr><td colspan="4">Очікувана загальна цінність резерву</td><td colspan="4">100,6822</td></tr>
<tr><td colspan="4">Дисперсія загальної цінності</td><td colspan="4">0,2167</td></tr>
</table>

Валютний резерв y^2 поступається резерву y^1 за показником очікуваної цінності, але має меншу дисперсію цінності. Зрозуміло, що остаточний вибір (або плану y^1, або плану y^2, або деякого іншого плану y^3) здійснює ОПР за власною системою переважань. Відзначимо лише, що без переформовування початковий валютний резерв має очікувану цінність 100 одиниць та дисперсію цінності 266,5. Ці показники у разі несхильності до ризику є значно гіршими, аніж у планів y^1 та y^2, тобто переформовування валютного резерву є вигідним для ОПР.

Слід врахувати, що завжди існує імовірність отримати кінцевий результат гіршим від очікуваного. Тому управління валютними резервами має супроводжуватись систематичними ретельними розрахунками та обґрунтуваннями, особливо щодо показників майбутньої випадкової відносної цінності валют.

Випадок невизначеності. Якщо про значення показників майбутньої відносної цінності валют слушно говорити лише з точністю до певних діапазонів, йдеться про управління валютним резервом за умов невизначеності. Розглянемо методику визначення оптимального валютного резерву саме для цього випадку.

Нагадаємо, що коли обчислити поточну цінність існуючого валютного резерву z^0: $z^0 = \sum_{j=1}^{n} w_j^0 a_j$, де w_j^0 – відома на момент прийняття рішення поточна відносна цінність j-ї валюти, $j = \overline{1, n}$), задачу переформування валютного резерву (3.15) можна звести до задачі визначення складу валютного резерву (3.16). Остання задача для випадку невизначеності щодо некерованих параметрів – показників майбутньої відносної цінності валют – записується так:

$$\left.\begin{aligned}
&z = f(w^1, y) = \sum_{j=1}^{n} w_j^1 y_j \to m.pref\,,\\
&\sum_{j=1}^{n} w_j^0 y_j = z^0,\\
&y_j \ge 0\,, \quad j = \overline{1, n}\,.\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&w_j^1 \in [w_j^{\min}; w_j^{\max}]\,, \quad j = \overline{1, n}\,,\\
&\sum_{j=1}^{n} w_j^1 = 1\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (3.19)$$

У записі цієї задачі через w^1 та y позначено, відповідно, вектор невизначених некерованих параметрів: $w^1 = (w_1^1, \ldots, w_n^1)$ та вектор невідомих керованих змінних: $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

Обмеження задачі щодо керованих змінних відбивають вимогу переформування валютного резерву без залучення додаткових валютних ресурсів.

Стосовно некерованих параметрів припускається, що відомі діапазони $[w_j^{\min}; w_j^{\max}]$, у межах яких може знаходитися майбутня відносна цінність відповідної валюти w_j^1 $(j = \overline{1, n})$; враховано також вимогу нормування, згідно якої сума показників відносних цінностей всіх валют дорівнює одиниці.

У цільовій функції задачі підкреслено, що цінність z майбутнього валютного резерву є залежною як від складу цього валютного резерву y, так і від недетермінованих некерованих параметрів w^1, причому розв'язок задачі утворюватиме найпереважніший за цінністю валютний резерв з точки зору ОПР.

Позначимо множину допустимих валютних резервів через Y, а множину можливих значень некерованих параметрів через W^1:

$$Y = \{(y_1, \ldots, y_n) \mid \sum_{j=1}^{n} w_j^0 y_j = z^0; \quad y_j \geq 0,\ j = \overline{1, n}\},$$

$$W^1 = \{(w_1^1, \ldots, w_n^1) \mid \sum_{j=1}^{n} w_j^1 = 1; \quad w_j^{\min} \leq w_j^1 \leq w_j^{\max},\ j = \overline{1, n}\}.$$

За відсутності довільної додаткової інформації про некеровані параметри для визначення оптимального складу валютного резерву скористаємося <u>максимінним критерієм Вальда</u>, який забезпечуватиме отримання валютного резерву якнайбільшої цінності у найгіршій з ситуацій щодо значень некерованих параметрів.

З використанням цього критерію задача визначення оптимального складу валютного резерву набирає вигляду:

$$[\min_{w^1 \in W^1} f(w^1, y)] \xrightarrow[y \in Y]{} \max.$$

З теорії про сідлові точки доходимо висновку, що розв'язок цієї максимінної задачі можна отримати шляхом визначення розв'язку мінімаксної задачі:

$$[\max_{y \in Y} f(w^1, y)] \xrightarrow[w^1 \in W^1]{} \min,$$

яку досліджувати та розв'язувати дещо простіше, аніж вихідну максимінну задачу.

Процес розв'язування мінімаксної задачі можна розкласти на два етапи.

На <u>*першому етапі*</u> розшукуватимуться значення некерованих параметрів w^{1*} – розв'язанням оптимізаційної задачі:

$$\left.\begin{array}{c} t \to \min\,, \\ w_j^1 \le w_j^o \cdot t\,, \quad j = \overline{1, n}\,, \\ \sum_{j=1}^{n} w_j^1 = 1\,, \\ w_j^{\min} \le w_j^1 \le w_j^{\max}, \quad j = \overline{1, n}\,, \end{array}\right\}$$

а на *<u>другому етапі</u>* визначатиметься оптимальний склад валютного резерву y^*:

$$\left.\begin{array}{c} z = \sum_{j=1}^{n} w_j^{1*} y_j \to \max\,, \\ \sum_{j=1}^{n} w_j^0 y_j = z^0\,, \\ y_j \ge 0\,, \quad j = \overline{1, n}\,. \end{array}\right\}$$

Обґрунтування цього підходу засноване на співвідношенні:

$$\max_{y \in Y} f(w^1, y) = z^0 \cdot \max_{j = \overline{1, n}} \frac{w_j^1}{w_j^0}\,,$$

з якого випливає, що $f(w^{1*}, y^*) = \max_{y \in Y} f(w^{1*}, y) = z^0 \cdot t^*$, де t^* – оптимальне значення параметру (цільової функції) t.

Можемо, зокрема, зробити висновок, що коли $w_j^0 \in [w_j^{\min}, w_j^{\max}]$ для всіх $j = \overline{1, n}$, тоді $t^* = 1$ і $w^{1*} = w^0$, тобто переформовувати існуючий валютний резерв недоцільно. Навпаки, потреба у переформуванні валютного резерву може виникнути лише тоді, коли принаймні для однієї з валют діапазон можливих значень її майбутньої відносної цінності $[w_j^{\min}, w_j^{\max}]$ не включатиме поточного значення відносної цінності цієї валюти w_j^0, тобто коли $w_j^0 \notin [w_j^{\min}, w_j^{\max}]$ для деякого $j \in \overline{1, n}$.

<u>Приклад 3.4.4</u>. Припустимо, що валютний резерв може утворюватись з трьох валют: EUR, GBP та USD, причому в момент прийняття рішення відносні цінності одиниці кожної валюти описуються вектором $w^0 = (0.28; 0.45; 0.27)$. Вважатимемо, що наявний валютний резерв містить по 100 одиниць кожної валюти, тобто його загальна цінність (у відносних одиницях) складає:

$$z^0 = 0.28 \cdot 100 + 0.45 \cdot 100 + 0.27 \cdot 100 = 100 \text{ (одиниць).}$$

Якщо межі діапазонів можливих значень майбутньої відносної цінності валют такі, як це показано в таблиці 3.12 для випадку 1, виходячи з критерію Вальда валютний резерв змінювати не потрібно. Ознакою цього є те, що діапазони можливих значень майбутньої відносної цінності кожної з валют включають у себе поточні значення відносних цінностей відповідних валют.

Таблиця 3.12. Поточна відносна цінність та межі діапазонів можливих значень майбутньої відносної цінності валют

Показник відносної цінності валют	Позна-чення	Випадок 1			Випадок 2		
		EUR	GBP	USD	EUR	GBP	USD
		$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=1$	$j=2$	$j=3$
Поточна відносна цінність	w_j^0	0,28	0,45	0,27	0,28	0,45	0,27
Мінімально можлива майбутня відносна цінність	$w_j^{\min}$	0,25	0,40	0,25	0,25	0,40	0,30
Максимально можлива майбутня відносна цінність	$w_j^{\max}$	0,30	0,50	0,35	0,30	0,44	0,35

У випадку 2 проілюстровано ситуацію, коли діапазони можливих значень майбутньої відносної цінності валют не містять у собі поточних значень відповідних відносних цінностей. А саме: поточна відносна цінність GBP перевищує максимально можливе значення її майбутньої відносної цінності: $w_2^0 = 0.45 > w_2^{\max} = 0.44$; водночас поточна відносна цінність USD є меншою від мінімально можливого значення майбутньої відносної цінності цієї валюти: $w_3^0 = 0.27 < w_3^{\min} = 0.30$.

За таких умов для визначення оптимального складу валютного резерву за критерієм Вальда спочатку потрібно розв’язати задачу визначення некерованих параметрів, яка в нашому конкретному випадку буде такою:

$$\left.\begin{array}{c} t \to \min , \\ w_1^1 \le 0.28t , \qquad w_2^1 \le 0.45t , \qquad w_3^1 \le 0.27t , \\ w_1^1 + w_2^1 + w_3^1 = 1 , \\ 0.25 \le w_1^1 \le 0.30 , \quad 0.40 \le w_2^1 \le 0.44 , \quad 0.30 \le w_3^1 \le 0.35 . \end{array}\right\}$$

Розв’язок цієї задачі лінійного програмування описується так:

$$\left.\begin{array}{c} t^* = \dfrac{30}{27} , \quad w_3^{1*} = 0.30 , \\ w_1^{1*} + w_2^{1*} = 0.70 , \\ 0.25 \le w_1^{1*} \le 0.30 , \quad 0.40 \le w_2^{1*} \le 0.44 . \end{array}\right\}$$

Далі, для визначення оптимального складу валютного резерву, отримуємо задачу лінійного програмування:

$$\left.\begin{array}{c} z = w_1^{1*} y_1 + w_2^{1*} y_2 + 0.30 y_3 \to \max , \\ 0.28 y_1 + 0.45 y_2 + 0.27 y_3 = 100 , \\ y_1 \ge 0 , \quad y_2 \ge 0 , \quad y_3 \ge 0 . \end{array}\right\}$$

Зваживши на обмеження щодо оптимальних значень некерованих параметрів w_1^{1*} та w_2^{1*}, визначаємо розв’язок останньої задачі:

$$y_1^* = 0, \quad y_2^* = 0, \quad y_3^* = \frac{100}{0.27} = 370.37, \quad u^* = \frac{30}{27} \cdot 100 = 111.11.$$

Таким чином, за умов невизначеності у випадку 2 оптимальним планом переформування валютного резерву (EUR, GBP, USD) = (100, 100, 100) є обмін валют EUR та GBP на USD і отримання валютного резерву (EUR, GBP, USD) = (0, 0, 370.37).

Якщо майбутня відносна цінність валют дійсно знаходитиметься у межах обраних діапазонів невизначеності, цінність валютного резерву внаслідок його оптимального переформування зросте принаймні на 11 % (у найнесприятливішому з випадків).

Наведений приклад підкреслює необхідність якомога точнішого визначення меж діапазонів можливих значень майбутньої відносної цінності валют, оскільки вони істотно впливають на тактику переформування валютного резерву.

Вправи до підрозділу 3.4

Вправа 3.4.1. З використанням електронних таблиць перевірте результати розрахунків щодо оптимального плану переформування валютного резерву у детермінованому випадку, наведені у прикладі 3.4.2.

Вправа 3.4.2. Перевірте, з використанням інструменту "Пошук рішення", результати розрахунків щодо оптимального плану переформування валютного резерву у випадку ризику, наведені у прикладі 3.4.3.

Вправа 3.4.3. Розв’яжіть задачу з прикладу 3.4.3 про оптимальне переформовування валютного резерву у випадку ризику, використовуючи показник детермінованого еквіваленту $\hat{z}$ майбутньої загального цінності валютного резерву: $\hat{z} \approx \overline{z} + k \cdot \sigma(z)$, де $\overline{z}$ – очікуване значення, а $\sigma(z)$ – стандартне відхилення його майбутньої випадкової загальної цінності (у разі несхильності ОПР до ризику значення множника k обирається від’ємним, у разі схильності – додатним.

Вправа 3.4.4. Перевірте, з використанням інструменту "Пошук рішення" електронної таблиці Excel, результати розрахунків щодо оптимального плану переформування валютного резерву у випадку невизначеності, наведені у прикладі 3.4.4.

3.5. Формування оптимального кредитного портфелю

Опрацюємо задачу оптимізації кредитного портфелю з урахуванням ризику неповернення коштів позичальниками. Загальний зведений чистий дохід кредитного портфелю за умов ризику щодо майбутньої платоспроможності позичальників є випадковою величиною, тому критерієм оптимальності слугує вимога максимізації детермінованого еквіваленту цього випадкового доходу. Але перед побудовою економіко–математичної моделі та розв'язуванням відповідної задачі спочатку проаналізуємо окремий кредитний запит.

Аналіз кредитного запиту. Кредитний запит характеризується розміром позики V, тривалістю кредитної угоди T та графіком повернення позичкових коштів та відсотків за кредит на проміжку часу $\left[0, T\right]$. Цей графік містить інформацію про розміри майбутніх платежів D_i, які здійснюватимуться позичальником у календарні моменти часу t_i, $i = \overline{1, m}$, де m – загальна кількість таких платежів.

Вважатимемо, для визначеності, що тривалість T кредитної угоди вимірюється у місяцях, а платежі здійснюватимуться щомісяця у фіксованому розмірі D грошових одиниць, тобто за весь час дії кредитної угоди позичальник повинен зробити T таких платежів.

Нехай r – обрана кредитною установою місячна нормативна ставка дисконту. Тоді за відсутності ризику зведений чистий дохід N кредитної установи складе величину

$$N = -V + \sum_{t=1}^{T} \frac{D}{(1+r)^t} = -V + D\sum_{t=1}^{T} \frac{1}{(1+r)^t} = -V + \frac{D}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^T}\right),$$

тобто

$$N = -V + \frac{D}{r} - \frac{D}{r(1+r)^T}. \qquad (3.20)$$

Оскільки у момент надання кредиту існує ризик щодо майбутньої платоспроможності позичальника, зведений чистий дохід кредитної установи за кредитним запитом, що досліджується, є випадковою величиною. З'ясуємо закон розподілу цієї випадкової величини.

Позначимо через θ момент часу у майбутньому, коли позичальник втратить свою платоспроможність, та вважатимемо, що з моменту часу θ всі його платежі кредитній установі припиняються. Знайдемо функцію розподілу імовірностей $P(t)$ неперервної випадкової величини θ.

Припускатимемо, що імовірність втрати позичальником платоспроможності на нескінченно малому проміжку часу довжиною $\Delta t > 0$ дорівнює $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$, тобто пропорційна довжині проміжку Δt з точністю до нескінченно малої величини більш високого порядку малості, аніж Δt. Вважатимемо також, що множник $\lambda > 0$, який характеризує конкретного позичальника з огляду на його можливу неплатоспроможність у майбутньому, не залежить від моменту часу, коли починається проміжок Δt.

За наведених припущень для функції $P(t)$ розподілу імовірностей випадкової величини θ маємо рівність:

$$P(t+\Delta t) = P(t) + (1 - P(t))(\lambda \Delta t + o(\Delta t),$$

тобто

$$\frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} = (1 - P(t))(\lambda + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}).$$

Після переходу до границі при $\Delta t \to 0$ одержимо наступне диференціальне рівняння щодо невідомої функції $P(t)$:

$$P'(t) = \lambda - \lambda P(t).$$

Розв’язок цього диференціального рівняння визначаємо за очевидної початкової умови $P(0) = 0$:

$$P(t) = 1 - e^{-\lambda t},\ t \ge 0, \qquad (3.21)$$

що свідчить про показниковий закон розподілу випадкового моменту часу θ, коли позичальник втратить своєю платоспроможність. Графіки функцій розподілу та щільностей розподілу ймовірностей розподіленої за показниковим законом випадкової величини при окремих значеннях параметру λ показані на рис. 3.9.

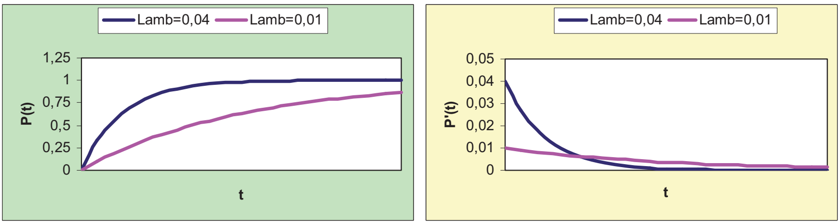


Рис. 3.9. Функції розподілу імовірностей $P(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ та щільності розподілу імовірностей $P'(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ для розподіленої за показниковим законом неперервної випадкової величини

З’ясуємо властивості параметру λ, який характеризує можливу неплатоспроможність позичальника. Для цього, насамперед, обчислимо середню тривалість $\overline{\theta}$ такого проміжку часу, упродовж якого позичальник зберігає свою платоспроможність:

$$\overline{\theta} = \int_0^{+\infty} tP'(t)dt = \int_0^{+\infty} t\lambda e^{-\lambda t}dt = -te^{-\lambda t}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}dt = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

Отже, по-перше, $\frac{1}{\lambda}$ – це очікувана тривалість випадкового проміжку часу, упродовж якого позичальник залишатиметься платоспроможним.

По-друге, оскільки тривалість кредитної угоди дорівнює T одиниць часу, параметр λ визначає імовірність події, що позичальник буде платоспроможним до самого закінчення терміну дії кредитного договору. Зазначена подія – це подія $\{\theta > T\}$, імовірність якої дорівнює: $1 - P(T) = e^{-\lambda T}$.

По третє, параметр λ визначається імовірністю q_0 події, що позичальник залишиться платоспроможним упродовж першого року дії кредитного договору. Дійсно, якщо тривалість проміжку часу, який починається з моменту отримання позичальником позики та має довжину 1 рік, позначити через T_0 (йдеться про використання обраних для дослідження одиниць виміру часу), з рівності $q_0 = e^{-\lambda T_0}$ одержимо: $\lambda = -\dfrac{\ln q_0}{T_0}$.

Ці та інші властивості параметру λ дозволяють оцінювати його значення за результатами аналізу наявної у кредитній установі статистики виконання позичальниками кредитних угод, об'єктивної інформації про конкретного позичальника, з використанням скорингових моделей тощо.

Нехай, далі, τ – це кількість платежів, які зробить позичальник до моменту втрати ним платоспроможності. Величина τ – це дискретна випадкова величина, яка може набирати довільних цілочислових значень на множині чисел від 0 до T. Помічаємо, що подія $\{\tau = t\}$ – тобто що позичальник зробить саме t платежів до моменту втрати ним платоспроможності – рівносильна події $\{t < \theta \leq t+1\}$, імовірність якої дорівнює $P(t+1) - P(t)$, якщо $0 \leq t \leq T-1$. Коли ж $t = T$, подія $\{\tau = T\}$ означає, що має місце подія $\{\theta > T\}$, імовірність якої дорівнює $1 - P(T)$, де $P(t)$ – це функція розподілу імовірностей неперервної випадкової величини θ – моменту втрати позичальником своєї платоспроможності. Тому імовірності p_t подій $\{\tau = t\}$, $t = 0, 1, \ldots, T$, згідно (3.21), дорівнюватимуть:

$$p_t = \begin{cases} e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(t+1)}, & 0 \leq t \leq T-1; \\ e^{-\lambda T}, & t = T. \end{cases}, \qquad (3.22)$$

Знайдемо чистий зведений дохід N_t кредитної установи у випадку, якщо позичальник зробить точно t платежів. За аналогією з (3.20) одержимо:

$$N_t = -V + \frac{D}{r} - \frac{D}{r(1+r)^t}, \quad 0 \leq t \leq T. \qquad (3.23)$$

Формули (3.22), (3.23) повністю визначають закон розподілу імовірностей випадкового зведеного чистого доходу кредитної установи за умов ризику щодо майбутньої платоспроможності позичальника.

Обчислення детермінованого еквіваленту випадкового зведеного чистого доходу кредитної установи за окремим кредитним запитом. Нагадаємо, що корисність випадкового прибутку дорівнює очікуваній корисності його можливих значень /дивись формулу (2.1)/. Тому для детермінованого еквіваленту $\hat{N}$ випадкового зведеного чистого доходу кредитної установи справджується рівняння:

$$f(\hat{N}) = \sum_{t=0}^{T} f(N_t) p_t. \qquad (3.24)$$

Функція корисності f у разі нейтрального ставлення кредитної установи до ризику є лінійною, тому детермінований еквівалент $\hat{N}$ збігатиметься з очікуваним рівнем $\overline{N}$ випадкового чистого зведеного доходу:

$$\hat{N} = \overline{N} \equiv \sum_{t-0}^{T} N_t p_t \,. \qquad (3.25)$$

Коли ж ставлення до ризику відрізняється від нейтрального та використовується експоненційна функція корисності, з рівняння (3.24) одержимо:

$$e^{c\hat{N}} = \sum_{t-0}^{T} e^{cN_t} p_t \,,$$

тобто

$$\hat{N} = \frac{1}{c} \ln\left(\sum_{t=0}^{T} e^{cN_t} p_t \right).$$

Користуючись для значень N_t формулами (3.23), остаточно одержимо:

$$\hat{N} = -V + \frac{D}{r} + \frac{1}{c} \ln \sum_{t=0}^{T} e^{-\frac{cD}{r(1+r)^t}} p_t \,, \qquad (3.26)$$

де параметр $c \neq 0$ відповідає ставленню кредитної установи до ризику ($c < 0$ у разі несхильності і, навпаки, $c > 0$ у разі схильності до ризику).

Наведемо два простих способи обчислення значення параметру c.

<u>Спосіб 1</u> – за імовірністю p, за якої для кредитної установи нульовий прибуток є рівноцінним до лотереї $< -W, p, W >$, в якій можна або з імовірністю p отримати прибуток у розмірі $W > 0$ грошових одиниць, або з імовірністю $(1 - p)$ мати збитки теж у розмірі W грошових одиниць:

$$p: \quad 0 \sim < -W, p, W > .$$

При $p \neq \frac{1}{2}$, тобто коли ставлення до ризику відрізняється від нейтрального ($\frac{1}{2} < p < 1$ у разі несхильності та $0 < p < \frac{1}{2}$ у разі схильності до ризику), значення параметру c обчислюється за формулою:

$$c = \frac{1}{W} \ln \frac{1-p}{p} . \qquad (3.27)$$

Обґрунтування цього способу можна отримати за результатами досліджень, запропонованих у вправі 2.1.3.

<u>Спосіб 2</u> – за детермінованим еквівалентом $\hat{w}$ лотереї $< -W ; W >$, в якій з однаковими ймовірностями (по ½) можна або отримати прибуток у розмірі $W > 0$ грошових одиниць, або ж мати збитки теж у розмірі W грошових одиниць:

$$\hat{w}: \quad \hat{w} \sim < -W, \ W > .$$

Випадок $\hat{w} = 0$ відповідає нейтральному, випадок $-W < \hat{w} < 0$ – несхильному, а випадок $0 < \hat{w} < W$ – схильному ставленню до ризику.

При $\hat{w} \neq 0$, тобто коли ставлення до ризику відрізняється від нейтрального, значення параметру c обчислюється як відмінний від нуля корінь рівняння:

$$2e^{c\hat{w}} = e^{cW} + e^{-cW}.$$

/Аналогічне рівняння та спосіб його розв'язування були наведені в підрозділі 2.1, коли ми вивчали питання про ідентифікацію індивідуальної функції корисності доходу./

Щодо нової невідомої $v = e^{cW}$ це рівняння набере вигляду:

$$2v^{\frac{\hat{w}}{W}} = v + \frac{1}{v}, \qquad (3.28)$$

за відмінним від 1 коренем v якого остаточно обчислимо:

$$c = \frac{\ln v}{W}. \qquad (3.29)$$

Довідково наводимо (рис. 3.10) графічну залежність відмінного від 1 кореню v рівняння (3.28) від відношення $\frac{\hat{w}}{W}$, яке за економічним змістом своїх складових завжди задовольняє нерівності: $-1 < \frac{\hat{w}}{W} < 1$. Ця залежність неявно описується рівнянням: $\frac{\hat{w}}{W}\ln v + \ln 2 = \ln(1+v^2) - \ln v$, з якого виплаває рівняння щодо оберненої функції: $\frac{\hat{w}}{W} = \frac{\ln(1+v^2) - \ln v - \ln 2}{\ln v}$.

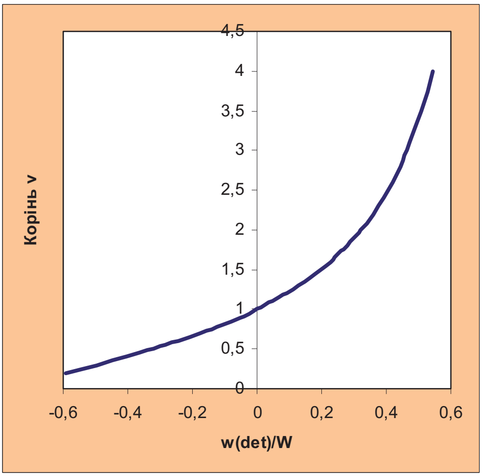


Рис. 3.10. Залежність нетривіального (відмінного від 1) кореню v рівняння $2v^{\frac{\hat{w}}{W}} = v + \frac{1}{v}$ від відношення $\frac{\hat{w}}{W}$

<u>Приклад 3.5.1</u>. Якщо, скажімо, $W = 100$ грошових одиниць, а визначена кредитною установою імовірність p, з якою $0 \sim < -100, p, 100 >$, дорівнює

0,62, значення параметру c функції корисності прибутку, з використанням за способом 1 формули (3.27), дорівнюватиме:

$$c = \frac{1}{100}\ln\frac{1-0.62}{0.62} = -0.0049 .$$

За способом 2 спочатку в кредитній установі визначають детермінований еквівалент $\hat{w}$ лотереї $< -100;\ 100 >$. Припустимо, що наявним перевażанням відповідає значення $\hat{w} = -24:\ -24 \sim < -100;\ 100 >$.

Далі обчислимо відношення $\frac{\hat{w}}{W}:\ \frac{\hat{w}}{W} = \frac{-24}{100} = -0.24$, після чого потрібно знайти відмінний від 1 корінь v рівняння (3.28). З використанням інструменту "Підбір параметру" Excel (правда, він дає менш точні результати, аніж інструмент "Пошук рішення") знаходимо: $v \approx 0.6066$ ("Пошук рішення" зупиниться на більш точному значенні $v \approx 0.6068$).

Нарешті, користуючись формулою (3.29), одержимо:

$$c = \frac{\ln 0.6066}{100} = -0.005 .$$

(з практично відсутньою різницею у порівнянні з використанням більш точного значення кореня $v \approx 0.6068$).

Наявність альтернативних способів обчислення значення параметру c, враховуючи практичну неможливість абсолютно точного виявлення переважань, дозволяє контролювати правильність відбиття переважань, а також мати уявлення про можливі межі варіації цього параметру. Зараз орієнтовно можна вважати, що $-0.0049 < c < -0.005$ (за нижню межу обрали менше значення, яке дав спосіб 1, а за верхню межу – більше значення, знайдене за способом 2).

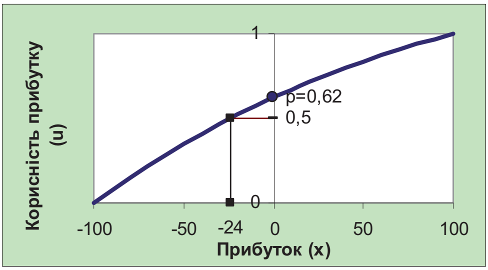


Рис. 3.11. Способи визначення параметру c нормованої на відрізку $[-100, 100]$ експоненційної функції корисності $u = Ae^{cx} + B$ прибутку x

На рис. 3.11 наведено графік нормованої на відрізку $[-W, W]$ /де $W = 100$ грошових одиниць/ експоненційної функції корисності $u = Ae^{cx} + B$ прибутку x, та ілюстрація задіяних способів обчислення параметру c. Спосіб 1 полягав в ідентифікації цієї функції за значенням імовірності $p = 0.62$ при рівні прибутку $x = 0$, а спосіб 2 – в її ідентифікації за значенням детермінованого еквіваленту ($x = -24$) випадкового прибутку, очікувана корисність якого дорівнює 0,5.

Приклад 3.5.1 закінчено.

Отже, ми отримали метод обчислення детермінованого еквіваленту випадкового зведеного чистого доходу кредитної установи за окремим кредитним запитом $\hat{N}$ за формулою:

$$\hat{N} = -V + \frac{D}{r} + \frac{1}{c}\ln\sum_{t=0}^{T} e^{-\frac{cD}{r(1+r)^t}} p_t \,,$$

де:

V – розмір позики,

T – тривалість кредитної угоди (зараз у місяцях),

D – розмір щомісячних платежів,

r – обрана кредитною установою місячна нормативна ставка дисконту,

c – параметр, що відбиває ставлення кредитної установи до ризику,

p_t, $t = 0, 1, \ldots, T$ – імовірність події, що позичальник зробить t платежів до моменту втрати ним платоспроможності:

$$p_t = \begin{cases} e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(t+1)}, & 0 \le t \le T-1; \\ e^{-\lambda T}, & t = T. \end{cases},$$

λ – параметр, який характеризує можливу неплатоспроможність позичальника.

Аналіз кредитного запиту завершується висновком про доцільність чи недоцільність подальшого розгляду цього запиту щодо можливості включення його до кредитного портфелю кредитної установи. Кредитний запит слушно рекомендувати до потенційно прийнятних, якщо детермінований еквівалент випадкового зведеного чистого доходу кредитної установи за цим запитом невід'ємний ($\hat{N} \ge 0$). А якщо детермінований еквівалент випадкового зведеного чистого доходу від'ємний ($\hat{N} < 0$), відповідний запит є для кредитної установи економічно невигідним, з огляду на індивідуальне ставлення кредитної установи до ризику.

Підсумки аналізу кредитного запиту слушно доповнити інформацією про чутливість показника детермінованого еквіваленту випадкового зведеного чистого доходу за цим запитом щодо можливої варіації значень основних чинників впливу – зокрема, параметрів r, c і λ. Це дозволить виважено робити висновки щодо потенційної придатності кредитного запиту для подальшого розгляду.

Приклад 3.5.2. Проаналізуємо запит на отримання кредиту у розмірі $\mathrm{V} = 100$ грошових одиниць (далі – г.о.) терміном на $T = 10$ місяців на умовах щомісячного погашення позичальником кредиту та відсотків у розмірі $D = 15$ г.о.. Кредитна установа користується місячною нормативною ставкою дисконту $r = 0.012$, її ставлення до ризику характеризує параметр $c = -0.006$. Показник можливої неплатоспроможності позичальника кредитна установа визначила на рівні $\lambda = 0.004$.

За наведених умов спочатку, користуючись формулами (3.22) і (3.23), знайдемо закон розподілу імовірностей випадкового зведеного чистого доходу кредитної установи та подамо його у вигляді таблиці 3.13.

Таблиця 3.13. Закон розподілу випадкового зведеного чистого доходу кредитної установи за окремим кредитним запитом

Можливі рівні	-100,00	-85,18	-70,53	-56,06	-41,76	-27,63
Імовірності	0,04	0,04	0,04	0,03	0,03	0,03

Можливі рівні	-13,66	0,14	13,77	27,24	40,56
Імовірності	0,03	0,03	0,03	0,03	0,67

З таблиці 3.13, насамперед, робимо висновок, що у разі стовідсоткової платоспроможності позичальника зведений чистий дохід кредитної установи дорівнюватиме 40,56 г.о. Але існує ризик неплатоспроможності позичальника. Тому за даними таблиці обчислимо очікуване значення зведеного чистого доходу кредитної установи: $\overline{N} = 13.99$ г.о. Далі за формулою (3.26) обчислюємо детермінований еквівалент випадкового зведеного чистого доходу, з урахуванням ставлення кредитної установи до ризику: $\hat{N} = 7.31$ г.о., тобто кредитний запит для кредитної установи є потенційно прийнятним.

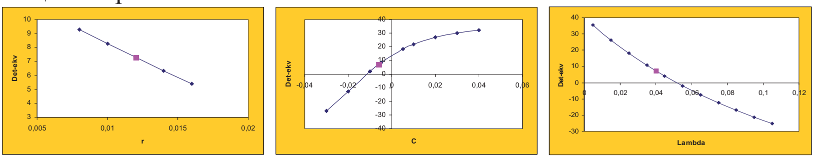


Рис. 3.12. Вплив основних чинників впливу – параметрів r, c і λ – на значення детермінованого еквіваленту випадкового зведеного чистого доходу за кредитним запитом /поточні значення параметрів: $r = 0.012$, $c = -0.006$, $\lambda = 0.004$/

Аналіз чутливості детермінованого еквіваленту випадкового зведеного чистого доходу за кредитним запитом щодо можливої варіації основних чинників впливу робимо за допомогою графіків, показаних на рис. 3.12. Спостерігаємо:

- зменшення детермінованого еквіваленту $\hat{N}$ із збільшенням нормативної ставки дисконту r;
- зменшення детермінованого еквіваленту $\hat{N}$ із зменшенням параметру c, який відбиває ставлення кредитної установи до ризику. Обране для розрахунків значення $c = -0.006$ свідчить про несхильність кредитної установи до ризику; водночас при посиленні несхильності до ризику (зменшенні c) навіть до рівня $c = -0.01$ детермінований еквівалент випадкового зведеного чистого доходу за кредитним запитом лишатиметься додатним;

- із збільшенням параметру λ, який характеризує можливу неплатоспроможність позичальника, детермінований еквівалент $\hat{N}$ зменшуватиметься, але залишатиметься додатним навіть при $\lambda = 0.05$. Тому можливі неточності при визначенні обраного для розрахунків значення $\lambda = 0.004$ принципово не впливатимуть на висновок про потенційну можливість подальшого розгляду цього запиту на предмет включення до кредитного портфелю.

Приклад 3.5.2 закінчено.

<u>Визначення оптимального кредитного портфелю</u>. Ця задача полягає у виборі із n потенційно прийнятних кредитних запитів, враховуючи наявний обсяг кредитних ресурсів K, саме таких, щоб детермінований еквівалент загального зведеного чистого доходу кредитної установи був би якнайбільшим. Випадкові моменти настання неплатоспроможності у різних позичальників можна вважати незалежними. Тож незалежними можна вважати і випадкові зведені чисті доходи кредитної установи за окремими кредитними запитами. Отже, як було доведено в підрозділі 2.1.1, детермінований еквівалент загального зведеного чистого доходу кредитного портфелю дорівнює сумі детермінованих еквівалентів випадкових зведених чистих доходів за тими кредитними запитами, які буде обрано до цього портфелю. Ці міркування спрощують побудову економіко–математичної моделі задачі про оптимальне формування кредитного портфелю за умов ризику щодо майбутньої платоспроможності позичальників.

Уведемо наступні позначення.

Відомі:

K – обсяг наявних кредитних ресурсів, грошових одиниць;

r – обрана кредитною установою місячна нормативна ставка дисконту (для визначеності вважатимемо, що одиницею виміру часу обрано 1 місяць);

c – параметр, що відбиває ставлення кредитної установи до ризику щодо розміру зведеного чистого доходу;

n – кількість потенційно прийнятних кредитних запитів.

За кожним з потенційно прийнятних кредитних запитів j ($j = \overline{1, n}$) вважаються також відомими:

V_j – розмір позики;

$\hat{N}_j$ – детермінований еквівалент зведеного чистого доходу кредитної установи за відповідним кредитним запитом.

Невідомі:

x_j, $j = \overline{1, n}$, – логічні змінні, які відбивають факт включення j–го кредитного запиту до кредитного портфелю, чи, навпаки, відмови від цього:

$$x_j = \begin{cases} 1, & \textit{якщо } j - \textit{й кредитний запит буде} \\ & \textit{обрано до кредитного портфелю}; \\ 0, & \textit{у супротивному випадку}; \end{cases}$$

$\hat{N}$ – детермінований еквівалент загального зведеного чистого доходу кредитного портфелю.

За обраних позначень економіко–математична модель задачі про оптимальне формування кредитного портфелю за умов ризику щодо майбутньої платоспроможності позичальників набирає вигляду:

$$\left.\begin{aligned} &\hat{N} = \sum_{j=1}^{n} \hat{N}_j x_j \to \max , \\ &\sum_{j=1}^{n} V_j x_j \le K , \\ &x_j \in \{0; 1\} , \quad j = \overline{1, n} . \end{aligned}\right\} \qquad (3.30)$$

Маємо розподільчу задачу лінійного програмування з логічними змінними, розв’язок якої легко розшукати за допомогою відповідних програмних засобів, причому за помірної кількості потенційно прийнятних кредитних запитів n це можна зробити навіть з використанням інструменту "Пошук рішення" електронної таблиці Excel.

За великої кількості потенційно прийнятних кредитних запитів можна також скористатися наближеним методом розв’язування задачі (3.30), який полягає в упорядкуванні усіх запитів за спаданням відношення $\frac{\hat{N}_j}{V_j}$:

$$\frac{\hat{N}_1}{V_1} \ge \frac{\hat{N}_2}{V_2} \ge \cdots \ge \frac{\hat{N}_n}{V_n} ,$$

після чого з упорядкованої послідовності запитів до кредитного портфелю обирається максимально можлива кількість перших запитів, для яких вистачатиме наявного обсягу кредитного ресурсу K.

Приклад 3.5.3. Припустимо, що є 5 кредитних запитів, інформація про які наведена у таблиці 3.14.

Таблиця 3.14. Основні показники кредитних запитів (г.о.)

Показник	Номер запиту, j				
	1	2	3	4	5
Розмір позики, V_j	100	200	300	400	500
Детермінований еквівалент чистого зведеного доходу, $\hat{N}_j$	16,8	30,5	50,1	62,7	80,2

Якщо ліміт кредитних ресурсів банку дорівнює 1000 г.о., оптимальний кредитний портфель $x^* = (0, 1, 1, 0, 1)$ включатиме другий, третій та п’ятий запити. Запити перший та четвертий через брак кредитних ресурсів буде відхилено. Знайдений портфель забезпечуватиме кредитній установі максимально можливий загальний зведений чистий дохід – за показником його детермінованого еквіваленту – у розмірі 160,8 г.о.

Підсумки розв’язування цієї задачі з використанням "Пошуку рішення" Excel показано на рисунку 3.13.

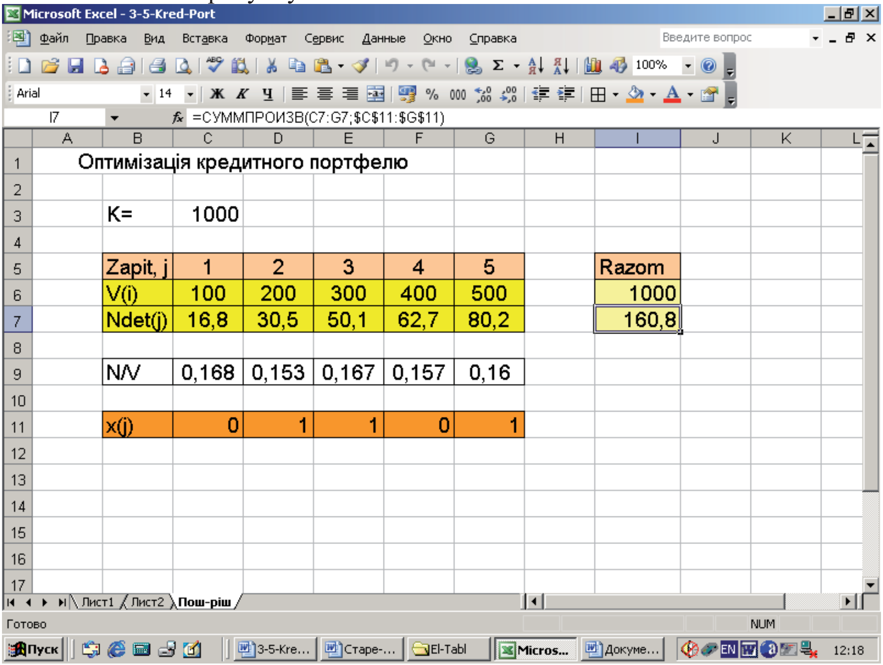


Рис. 3.13. Робочий лист Excel з результатами розв’язування задачі про оптимізацію кредитного портфелю

Зазначимо, що в нашому прикладі наближений алгоритм виявився б неефективним, оскільки кількість потенційно прийнятних кредитних запитів є малою, причому залишок кредитних ресурсів після включення до кредитного портфелю запитів 1, 3 і 5 , які мають більші відношення $\frac{\hat{N}_j}{V_j}$, дорівнював би 100 г.о., що є відносно досить великим, але недостатнім для кредитування жодного з запитів (4 або 2), які залишатимуться.

Приклад 3.5.3 закінчено.

Наведені результати засвідчують доцільність використання запропонованої методики при плануванні кредитного портфеля кредитної установи за умов ризику щодо майбутньої платоспроможності позичальників.

Вправи до підрозділу 3.5

Вправа 3.5.1. Серед 100 однотипних позичальників 7 втратили платоспроможність упродовж першого року після отримання ними кредиту, а ще 10 – упродовж другого року. Оцінити параметр λ майбутньої неплатоспроможності таких позичальників.

Вправа 3.5.2. Обчислити, виходячи з власних переважань, очікуваний рівень та детермінований еквівалент випадкового зведеного чистого доходу банку, який надав позичальнику кредит у розмірі 600 г.о. терміном на 5 років на умовах щомісячної сплати банку позичальником 20 г.о. Визначена банком нормативна місячна ставка дисконту дорівнює 0,02. За ризиком втрати платоспроможності позичальник відноситься до групи, охарактеризованої у вправі 3.5.1.

Вправа 3.5.3. Перевірте, з використанням інструменту "Пошук рішення", результати розрахунків щодо оптимального кредитного портфелю банку, наведені у прикладі 3.5.3.

Література (список посилань)

1. Брейли Р., Майерс С. Принципы корпоративных финансов: Пер. с англ. – М.: ЗАО «Олимп–Бизнес», 1997. – XXXI, 1120 с.
2. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий: Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1993. – 320 с.
3. Саати Т. Принятие решений при зависимостях и обратных связях: Аналитические сети: Пер. с англ. – М.: Издательство ЛКИ, 2008. – 360 с.
4. Нейман фон Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение: Пер. с англ. – М.: Наука, 1970. – 700 с.
5. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения: Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1981. – 560 с.
6. Кофман А., Дебазей Г. Сетевые методы планирования: Применение системы ПЕРТ и ее разновидностей при управлении производственными и научно–исследовательскими проектами: Пер. с фр. – М.: Прогресс, 1968. – 180 с.
7. Дамодаран А. Инвестиционная оценка. Инструменты и техника оценки любых активов: Пер. с англ. – М.: Альпина Бизнес Букс, 2004. – ХУП+1342 с.
8. Бригхем Ю., Гапенски Л. Финансовый менеджмент: Полный курс. В двух т.: Пер. с англ. – СПб.: Экономическая школа, 1997. – Т. 1 – XXX+497 с., т. 2 – 669 с.
9. Markowitz H.M. Portfolio Selection //Journal of Finance. – 1952. – # 7 (1). – Pp. 77–91.
10. Markowitz H.M. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments. – N.Y.: John Willey, 1959. – 758 p.
11. Ястремський О.І. Моделювання економічного ризику. – К.: Либідь, 1992. – 176 с.
12. Вітлінський В.В., Наконечний С.І. Ризик у менеджменті. – К.: ТОВ “Борисфен–М”, 1996. – 336 с.
13. Олексюк О.С. Системи підтримки прийняття фінансових рішень на мікрорівні. – К.: Наукова думка, 1998. – 508 с.

Додаток А. Окремі публікації автора за тематикою дисципліни

№	Повна назва публікації	Рік
1.	Кігель В.Р. Наближене обчислення детермінованого еквіваленту випадкового прибутку з метою визначення найприбутковішої альтернативи за умов ризику// Вчені записки /Університет економіки та права "КРОК". – 2009. – Вип. 20, том Ш (Серія "Економіка"). – С. 209–214. (0,5 д.а.)	2009
2.	Кігель В.Р. Ставлення страховиків до клієнтів як чинник розвитку страхового ринку //Вчені записки. Університет економіки та права "КРОК". – 2008. – Вип. 17 (Сер. "Економіка"). – С. 272–283. (0,65 д.а.)	2008
3.	Кігель В.Р. Оцінювання економічної ефективності ризикових проектів реального інвестування //Держава та регіони. Науково–виробничий журнал. Серія "Економіка та підприємництво". – 2008. – № 3. – С. 118–124. (0,7 д.а.)	2008
4.	Кігель В.Р. Економетричне обґрунтування доцільності регресивної системи оподаткування //Вчені записки. Університет економіки та права "КРОК". – 2006. – Вип. 15 (Сер. "Економіка"). – С. 144–148. (0,35 д.а.)	2006
5.	Кігель В.Р. Регресивна система оподаткування насправді прогресивна //Віче, Журнал Верховної Ради України. – 2006. – № 7–8. – С. 51 (0,15 д.а.)	2006
6.	Кігель В.Р. Про об'єктивну обмеженість рівня прибутковості добровільного страхування як виду фінансово–економічної діяльності //Матеріали міжвузівської науково–практичної конференції на тему: "Роль і місце фінансово–економічного механізму управління у сфері підприємництва". – К.: Університет економіки та права "КРОК", 2006. – 160 с. С. 67–69. (0,15 д.а.)	2006
7.	Кігель В.Р. Як зміцнювати валютний резерв засобами математики, з урахуванням індивідуальних переважань: Посібник. – К.: Кондор, 2005. – 51 с. (3,24 д.а.)	2005
8.	Кігель В.Р. Про визначення та властивості пропорції оптимального розподілу капіталу за активним та пасивним напрямами інвестування //Вчені записки. Університет економіки та права "КРОК". – 2004. – Вип. 10 (Сер. "Економіка"). – С. 178–185. (0,55 д.а.)	2004
9.	Кігель В.Р. Методи і моделі підтримки прийняття рішень у ринковій економіці: Монографія. – К.: ЦУЛ, 2003. – 202 с. (11,18 д.а.)	2003
10.	Кігель В.Р. Математичні методи ринкової економіки: Навчальний посібник (рекомендований МОНУ). – К.: Кондор, 2003. – 158 с. (8,48 д.а.)	2003

11.	Кігель В.Р. Про визначення оптимального кредитного портфеля банку в умовах ризику неповернення коштів позичальниками //Вісник НБУ. – 2003. – № 1. – С. 15–17. (0,35 д.а.)	2003
12.	Кігель В.Р. Про доцільність оподаткування прибутку підприємств за регресивною системою //Тези доповідей ІУ Міжнародної науково–практичної конференції “Проблеми впровадження інформаційних технологій в економіці”. – Ірпінь: ДПАУ, АДПСУ, КНЕУ, НТУУ “КПІ”, 2003. – С.49–52 (0,15 д.а.)	2003
13.	Кігель В.Р. Визначення найкращого варіанта інвестування в умовах ризику //Фінанси України. – 2002. – № 12. – С. 85–89. (0,3 д.а.)	2002
14.	Кігель В.Р. Про прогресивність регресивної системи оподаткування //Тези доповідей ІІІ Міжнародної науково–практичної конференції “Проблеми впровадження інформаційних технологій в економіці”. – Ірпінь: ДПАУ, АДПСУ, КНЕУ, НТУУ “КПІ”, 2002. – С. 39–41 (0,15 д.а.)	2002
15.	Кігель В.Р. Економіко–математичні моделі підтримки прийняття рішень у фінансовому менеджменті //Моделювання та інформаційні системи в економіці. Міжвідомчий науковий збірник. – 2001. – Вип. 65. – С. 220–225 (0,35 д.а.)	2001
16.	Кігель В.Р. Економіко–математичне моделювання в управлінні валютними резервами //Вісник НБУ. – 2000. – № 4. – С. 44–47. (0,5 д.а.)	2000
17.	Кігель В.Р. До питання про оптимальне управління валютним резервом в умовах невизначеності //Вісник НБУ. – 2000. – № 7. – С. 45–47. (0,35 д.а.)	2000
18.	Кігель В.Р. Узагальнена методика багатокритеріальної оптимізації економічних рішень //Моделювання та інформаційні системи в економіці. Міжвідомчий науковий збірник. – 2000. – Вип. 64. – С. 82–89. (0,4 д.а.)	2000
19.	Кігель В.Р. Економіко–математичні моделі підтримки прийняття рішень у фінансовому менеджменті //Тези доповідей Міжнародної науково–практичної конференції “Проблеми впровадження інформаційних технологій в економіці та бізнесі”. – Ірпінь: ДПАУ, АДПСУ, КНЕУ, 2000. – С. 293–294 (0,15 д.а.)	2000
20.	Кігель В.Р. Оптимальное управление портфелем финансовых активов (в детерминированных условиях, условиях риска и в условиях неопределенности) //Матеріали У Міжнародного форуму “Ринок капіталу України – 2000”. Семінар “Управління фінансовими та інвестиційними ризиками”. – К.: FAService, 2000. – С. XI–20 – XI–28. (0,8 д.а.)	2000

21.	Кігель В.Р. Определение наиболее предпочтительного финансового портфеля в условиях неопределенности по критерию Вальда //Финансовые риски. – 2000. – № 2 (22). – С. 108–110. (0,4 п.л.)	2000
22.	Кігель В.Р. Відносна цінність валют: означення, обчислення, елементи дослідження /За матеріалами Всеукраїнської науково–практичної конференції "Актуальні проблеми фінансово–грошової політики і трансформація економіки України" //Персонал. – 2000. – № 4 (58). – Додаток № 9. – С. 91–92. (0,15 д.а.)	2000
23.	Кігель В.Р. Економіко–математичні моделі підтримки прийняття підприємницьких рішень за умов невизначеності щодо майбутніх цін на продукцію та виробничі ресурси //Теорії мікро–макроекономіки. Збірник наукових праць за матеріалами Всеукраїнської науково–практичної конференції "Підприємництво в умовах трансформації економіки України" (КНУ імені Тараса Шевченка, 2000). Рекомендований Міністерством освіти та науки України. – 2000. – Вип. 6. – С. 166–172. (0,35 д.а.)	2000
24.	Кігель В.Р. Свойства и поиск оптимальных финансовых портфелей для ЛПР с разными отношениями к риску //Финансовые риски. – 1999. – № 2 (18). – С. 86–91. (0,8 п.л.)	1999
25.	Кігель В.Р. Визначення особливостей системи переважань потенційного клієнта як вагомий фактор активізації страхової справи //Персонал. – 1999. – № 4 (52). – Додаток № 3. – С. 58–60. (0,4 д.а.)	1999
26.	Кігель В.Р. Исследование задачи определения наиболее предпочтительного финансового портфеля для ЛПР с разными отношениями к риску //Финансовые риски. – 1999. – № 3–4 (19–29). – С. 98–104. (0,7 п.л.)	1999
27.	Кігель В.Р. Методы обоснования управленческих решений при формировании финансового портфеля //Материалы Межвузовской научно–практической конференции «Современные методы и технологии принятия управленческих решений» //Персонал. – 1999. – № 6 (54). – Приложение № 5. – С. 116–121. (0,65 п.л.)	1999
28.	Кігель В.Р. Математичні методи прийняття рішень у ефективному підприємництві: Монографія. – К.: ІЕУГП, 1999. – 269 с. (12,15 д.а.)	1999

29.	Голишев Л.К., Кігель В.Р., Коваленко І.І., Марченко В.П., Попудрибко В.О. Проектне оцінювання ефективності інформаційних систем адміністративних установ //Інформатизація та ринкові перетворення в економіці України. Збірник наукових праць. – К.: ДНДІІМЕ, 1998. – С. 101–109. (0,7 д.а.)	1998
30.	Гладун В., Кігель В., Коваленко І., Марченко В. До методики оцінки впливу несприятливих факторів на основні економічні показники інноваційних проектів //Економіка України. – 1996. – № 9. – С. 44–50. (0,6 д.а.)	1996

Додаток Б. Приклади тестових запитань з дисципліни "Оптимізація фінансових рішень"

№	Питання	Відповідь
1.	Показник NPV обчислюється за формулою: а) $\sum_{t=1}^{T}\frac{(1+r)^t}{P_t}$ б) $\sum_{t=1}^{T}\frac{P_t}{(1+r)^t}$ в) $\sum_{t=1}^{T}\frac{P_t}{(1+r)^t} \Big/ \sum_{t=1}^{T}\frac{V_t}{(1+r)^t}$ г) $\sum_{t=1}^{T}\frac{V_t}{(1+r)^t} \Big/ \sum_{t=1}^{T}\frac{P_t}{(1+r)^t}$	Б
2.	Відношення зведеного потоку прибутків до зведеного потоку витрат за фінансовим проектом – це: а) термін окупності б) ставка дисконту в) індекс рентабельності г) внутрішня норма дохідності	В
3.	Строк окупності інвестицій – це: а) максимальний момент часу, починаючи з якого інтегральний ефект стає невід’ємним б) максимальний момент часу, починаючи з якого інтегральний ефект стає невід’ємним та залишається невід'ємним і надалі в) мінімальний момент часу, починаючи з якого інтегральний ефект стає невід’ємним г) мінімальний момент часу, починаючи з якого інтегральний ефект стає невід’ємним та залишається невід'ємним і надалі	Г
4.	Внутрішня норма дохідності інвестиційного проекту – це така ставка дисконту, за якою: а) термін окупності збігається з тривалістю життєвого циклу б) індекс рентабельності дорівнює 1 в) зведений прибуток є додатним г) чистий зведений дохід дорівнює нулю	Г

5.	Фінансовий проект є рентабельним, якщо: а) $IRR > r$ б) $IRR = r$ в) $IRR < r$ г) $IRR = 0$	А
6.	PP *(pay–back period)* – це: а) тривалість життєвого циклу інвестиційного проекту б) термін окупності інвестицій в) обраний на період планування коефіцієнт дисконтування г) визначена для планового періоду ставка дисконту	Б
7.	Ставка дисконту r завжди задовольняє умову: а) $r > 0$ б) $r > -1$ в) $r < 1$ г) $0 < r < 1$	Б
8.	Якщо фінансовий менеджер вважає рівноцінними такі потоки витрат: $V^1 = (0, 10)$, $V^2 = (9, 0)$, його переважанням відповідає наступна ставка дисконту: а) 1,11 б) 0,9 в) 0,11 г) 0,1	В
9.	Із збільшенням коефіцієнта дисконтування розмір зведених витрат: а) зменшується б) збільшується в) може або збільшуватись, або зменшуватись г) не міняється	Б
10.	Із зменшенням ставки дисконту розмір зведеного доходу: а) збільшується б) зменшується в) може або зменшуватися, або збільшуватися г) не міняється	А
11.	Невідомими в задачах календарного планування комплексу інвестиційних проектів виступають: а) кошторисна вартість кожного інвестиційного проекту б) ліміти інвестиційних ресурсів в) тривалість життєвого циклу кожного з проектів г) терміни початку реалізації кожного інвестиційного проекту	Г

12.	Задача оптимізації календарного плану реалізації комплексу інвестиційних проектів є задачею: а) лінійного програмування б) нелінійного програмування в) цілочислового програмування г) дробово–лінійного програмування	В
13.	Основними невідомими задачі оптимізації календарного плану реалізації комплексу інвестиційних проектів є: а) неперервні змінні б) цілочислові змінні в) логічні змінні г) невід'ємні змінні	В
14.	Найуживанішим критерієм оптимальності в задачах оптимізації фінансових рішень є вимога: а) мінімізації PP б) максимізації IRR в) максимізації NPV г) максимізації PI	В
15.	В багатокритеріальній задачі оптимізації фінансових рішень неефективною вважається альтернатива, яку можна поміняти на іншу так, щоб: а) значення хоча б одного з критеріальних показників покращилося б) значення усіх критеріальних показників покращилися в) значення усіх критеріальних показників не погіршилися г) значення хоча б одного з критеріальних показників покращилося, а решти – не погіршилися	Г
16.	В багатокритеріальній задачі фінансового планування ефективною є альтернатива, при заміні якої на іншу: а) хоча б один з критеріальних показників погіршується б) усі критеріальні показники погіршуються в) якщо один з критеріальних показників покращиться, тоді усі інші погіршаться г) якщо один з критеріальних показників покращиться, тоді хоча б один з інших погіршиться	Г

17.	За розв'язок багатокритеріальної задачі оптимізації фінансових рішень слід обирати: а) довільну з ефективних альтернатив б) лише абсолютно оптимальну альтернативу в) таку з ефективних альтернатив, яка відповідає перевaжанням ОПР г) таку альтернативу, за якою рівні критеріальних показників є припустимими з точки зору ОПР	В
18.	Маємо чотири альтернативних інвестиційних проекти <table><tr><td rowspan="2">Показник</td><td colspan="4">Проект</td></tr><tr><td>*A*</td><td>*B*</td><td>*C*</td><td>*D*</td></tr><tr><td>*NPV*</td><td>40</td><td>50</td><td>30</td><td>60</td></tr><tr><td>*PP*</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr></table> Неефективним за критеріями максимізації чистого зведеного доходу та мінімізації терміну окупності є проект: а) *A* б) *B* в) *C* г) *D*	В
19.	При розв'язування багатокритеріальної задачі оптимізації фінансових рішень узагальнений критерій оптимальності дозволяє: а) адекватно відтворити переважання ОПР б) не враховувати переважань ОПР в) наближено відтворити переважання ОПР та генерувати лише ефективні альтернативи г) відкинути усі неефективні альтернативи	В
20.	Залучення критеріальних обмежень у процесі багатокритеріальної оптимізації фінансових рішень дозволяє: а) відкидати неефективні альтернативи б) уточнювати розв'язок, краще враховуючи переважання ОПР в) відмовитися від використання узагальненого критерію оптимальності г) не враховувати переважань ОПР	Б
21.	У ринковій економіці виробничу діяльність суб'єкта господарювання найчастіше описують функцією: а) лінійною: $y = ax + b$ б) степеневою: $y = ax^b$ в) показниковою: $y = ab^x$ г) логарифмічною: $y = a\ln(x + b)$	Б

22.	Система оподаткування, за якою норматив оподаткування не залежить від розміру бази оподатковування, називається: а) прогресивною б) регресивною в) прогресивно–регресивною г) пропорційною	Г
23.	Із зростанням ставки оподаткування від 0 до 1 розмір податкових надходжень: а) зростає б) спадає в) спочатку зростає, потім спадає г) спочатку спадає, потім зростає	В
24.	Функція корисності доходу схильної до ризику ОПР є: а) сталою б) лінійною в) опуклою г) вгнутою	В
25.	Функція корисності прибутку несхильної до ризику ОПР є: а) лінійною та зростаючою б) вгнутою та спадною в) опуклою та зростаючою г) вгнутою та зростаючою	Г
26.	За нейтрального ставлення до ризику переважання ОПР щодо витрат відбиваються функцією корисності: а) лінійною б) степеневою в) логарифмічною г) показниковою	А
27.	Якщо ОПР вважає детермінованим еквівалентом простої лотереї майбутнього прибутку $L =< 200; 500 >$ прибуток €$= 400$ (грошових одиниць), її ставлення до ризику є: а) нейтральним б) несхильним в) схильним г) визначити неможливо через відсутність потрібної інформації	В

<table>
<tr><td>28.</td><td>Якщо ОПР вважає, що детермінований еквівалент простої лотереї майбутніх витрат $L = \langle 1000; 1300 \rangle$ дорівнює $€ = 1200$ (грошових одиниць), її ставлення до ризику є:
а) нейтральним
б) несхильним
в) схильним
г) визначити неможливо через відсутність потрібної інформації</td><td>Б</td></tr>
<tr><td>29.</td><td>За нейтрального ставлення до ризику детермінований еквівалент € випадкового доходу, у порівнянні з очікуваним рівнем $\overline{x}$ цього доходу, є:
а) меншим від нього: $€ < \overline{x}$
б) більшим від нього: $€ > \overline{x}$
в) таким самим: $€ = \overline{x}$
г) непорівнювальним, оскільки визначити $€ - \overline{x}$ неможливо</td><td>В</td></tr>
<tr><td>30.</td><td>Маємо інформацію про детерміновані еквіваленти прибутків за трьома альтернативними інвестиційними проектами:
<table><tr><td>Проект</td><td>A</td><td>B</td><td>C</td></tr><tr><td>Детермінований еквівалент недетермінованого прибутку</td><td>100</td><td>120</td><td>140</td></tr></table>
Тоді слід вважати, що:
а) $A \succ B \succ C$
б) $A \approx B \approx C$
в) $A \prec B \prec C$
г) $A \approx B \prec C$</td><td>В</td></tr>
<tr><td>31.</td><td>Функція $\varphi(\overline{x}, \sigma_x)$ обчислення детермінованого еквіваленту випадкового доходу є позитивно однорідною першого порядку щодо своїх аргументів $\overline{x}$ та σ_x.
Відомо, що $\varphi(10; 4) = 8$. Тоді $\varphi(2; 0)$ дорівнює:
а) 1,6
б) 2
в) 2,5
г) 0</td><td>Б</td></tr>
<tr><td>32.</td><td>Якщо ОПР обчислює детермінований еквівалент випадкового доходу за формулою: $€ = \overline{x} + 0.6\sigma_x$,
ця особа є:
а) несхильною до ризику
б) нейтральною або помірно несхильною до ризику
в) нейтральною або ледь схильною до ризику
г) схильною до ризику</td><td>Г</td></tr>
</table>

33.	Коефіцієнт Пратта–Ерроу обчислюється за формулою: а) $s = \frac{f'(\bar{x})}{f''(\bar{x})}$ б) $s = -\frac{f'(\bar{x})}{f''(\bar{x})}$ в) $s = \frac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})}$ г) $s = -\frac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})}$	Г
34.	Відомо, що певний інвестор вкладає кошти у ризикове інвестування або за наявності у нього дуже великого капіталу, або за умов дуже великого стандартного відхилення випадкової дохідності ризикового інвестування. Цей інвестор, скоріше за все, є особою: а) нейтральною до ризику б) нейтральною або несхильною до ризику в) несхильною до ризику г) схильною до ризику	Г
35.	Несхильний до ризику інвестор вкладатиме частину коштів у ризикове інвестування, якщо: а) очікувана дохідність ризикового інвестування є меншою від безризикової дохідності б) очікувана дохідність ризикового інвестування є більшою від безризикової дохідності в) очікувана дохідність ризикового інвестування збігається з безризиковою дохідністю г) очікувана дохідність ризикового інвестування є меншою від безризикової дохідності, але існує певна імовірність отримати дуже високий прибуток за ризиковим напрямом	Б
36.	Оцінювання випадкового грошового потоку потрібно робити на основі: а) корекції безризикової ставки дисконту б) корекції безризикової ставки дисконту та опрацюванні очікуваного грошового потоку в) обчислення детермінованого еквіваленту випадкового грошового потоку, зведеного за безризиковою ставкою дисконту г) обчислення детермінованого еквіваленту зведеного випадкового грошового потоку за скоригованою безризиковою ставкою дисконту	В

37.	Із зростанням коефіцієнта варіації випадкового NPV імовірність беззбитковості інвестиційного проекту: а) не міняється б) зменшується в) збільшується г) може або зменшитися, або збільшитися	Б
38.	Обчислення детермінованого еквіваленту випадкового доходу лише з використанням його мінімального, максимального та найімовірнішого значень здійснюється у припущенні, що дохід має наступний закон розподілу ймовірностей: а) рівномірний б) біноміальний в) бета-розподіл г) геометричний	В
39.	Критерій Вальда прийняття фінансових рішень за умов невизначеності забезпечує отримання: а) найкращого очікуваного результату б) найкращого гарантованого результату в) результату з мінімальним відхиленням від очікуваного рівня г) максимально можливого результату	Б
40.	Фінансовий менеджер, який часто відмовляється від страхування наявного капіталу, є: а) нейтральним до ризику б) несхильним до ризику в) схильним до ризику г) помірно несхильним до ризику	В
41.	Якщо фінансовий менеджер завжди звертається до послуг страхової компанії, він є: а) нейтральним до ризику б) несхильним до ризику в) помірно схильним до ризику г) схильним до ризику	Б
42.	Щоб збільшити обсяг страхових послуг, страховій компанії доцільно: а) зменшити норматив страхової премії б) зменшити норматив страхового відшкодування в) збільшити франшизу г) збільшити страховий тариф	А

43.	Обмінний курс валюти A щодо валюти B завжди збільшується, якщо: а) відносна цінність валют A та B збільшується б) відносна цінність валют A та B зменшується в) відносна цінність валюти A збільшується, а валюти B зменшується г) відносна цінність валюти A зменшується, а валюти B збільшується	Г
44.	Відносна цінність валют не залежить від: а) обраного для дослідження набору валют б) обраних одиниць виміру валют в) часу г) країни, в якій здійснюється дослідження	Г
45.	Поповнювати валютний резерв слушно такою валютою, відносна цінність якої: а) є максимальною б) є стабільною в) зростає найшвидше г) має велике стандартне відхилення	В
46.	Несхильна до ризику особа створюватиме валютний резерв з таких валют, коефіцієнт кореляції між відносними цінностями яких є: а) близьким до 0 б) додатним в) близьким до +1 г) близьким до –1	Г

Навчальне видання

Кігель *Володимир* __________

Оптимізація фінансових рішень

навчальний посібник

Підписано до друку 12.01.2011 р. Формат 60x84/16. Папір офсетний.
Гарнітура Times. Умов.друк.арк. 10,0.
Наклад _____ прим. Зам. № 0401-04

Виготівник ТОВ “Дорадо-Друк”
09000, м.Сквира, вул. Щорса, 7
(044) 501–75–69
www.doradoalliance.com

Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи
до Державного реєстру ДК № 2600 від 01.09.2006 р.