

ПРАКТИЧНА РОБОТА №3. Послідовне з'єднання елементів у систему.

Теоретичні відомості

З'єднання елементів називається послідовним, якщо відмова хоча б одного елемента призводить до відмови всієї системи. Система, з'єднана послідовно, є працездатною тільки тоді, коли всі її елементи працездатні. Ймовірність безвідмовної роботи системи протягом часу t визначається формулою

$$P_c(t) = P_1(t) \cdot P_2(t) \cdot \dots \cdot P_n(t) \quad (3.1)$$

де $P_i(t)$ - ймовірність безвідмовної роботи i -го елемента протягом часу t .

Якщо $P_i(t) = P(t)$, то

$$P_c(t) = P^n(t). \quad (3.2)$$

Виразимо $P_c(t)$ через інтенсивність відмов $\lambda_i(t)$ елементів системи. Маємо:

$$P_c(t) = \exp\left(-\sum_{i=1}^n \int_0^t \lambda_i(t) dt\right), \quad (3.3)$$

або

$$P_c(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda_c(t) dt\right). \quad (3.4)$$

$$\lambda_c(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t). \quad (3.5)$$

Де

Тут $\lambda_i(t)$ - інтенсивність відмов i -го елемента;

$\lambda_c(t)$ - інтенсивність відмов системи.

Ймовірність відмови системи протягом інтервалу часу $(0, t)$ дорівнює

$$q_c(t) = 1 - P_c(t). \quad (3.6)$$

$$q_c(t) = 1 - \prod_{i=1}^n \lambda_i(t).$$

Частота відмов системи $f_c(t)$ визначається співвідношенням

$$f_c(t) = \lambda_c(t) P_c(t). \quad (3.7)$$

$$f_c(t) = -\frac{dP_c(t)}{dt}.$$

Інтенсивність відмов системи

$$\lambda_c(t) = \frac{f_c(t)}{P_c(t)}. \quad (3.8)$$

Середній час безвідмовної роботи системи:

$$m_{tc} = \int_0^{\infty} P_c(t) dt. \quad (3.9)$$

У випадку експоненційного закону надійності всіх елементів системи маємо

$$\lambda_i(t) = \lambda_i = \text{const}; \quad (3.10)$$

$$\lambda_c(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \lambda_c; \quad (3.11)$$

$$P_i(t) = \exp(-\lambda_i t); \quad (3.12)$$

$$P_c(t) = e^{-\lambda_c t}; \quad (3.13)$$

$$f_i(t) = \lambda_i \cdot e^{-\lambda_i t}; \quad (3.14)$$

$$q_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}; \quad (3.15)$$

$$m_{ic} = \frac{1}{\lambda_c} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}; \quad (3.16)$$

$$m_{ic} = \frac{1}{\lambda_i}; \quad (3.17)$$

Де m_{ti} - середній час безвідмовної роботи і-го елемента.

При розрахунках надійності систем часто доводиться перемножувати ймовірності безвідмовної роботи окремих елементів розрахунку, підносити їх до ступеня і витягувати корені. При значеннях $P(t)$, близьких до одиниці, ці обчислення можна виконувати з достатньою для практики точністю за наступними приблизними формулами:

$$\left. \begin{aligned} P_1(t)P_2(t)\dots P_n(t) &\approx 1 - \sum_{i=1}^n q_i(t), \\ P_i^n(t) &= 1 - Nq_i(t), \\ \sqrt[n]{P_i(t)} &= 1 - q_i(t)/n, \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

де $q_i(t)$ - ймовірність відмови і-го елемента.

Розв'язання типових задач.

Задача 3.1. Система складається з трьох пристроїв. Інтенсивність відмов електронного пристрою дорівнює $\lambda_1 = 0,16 \times 10^{-3} \text{ 1/год} = \text{const}$. Інтенсивності відмов двох електромеханічних пристроїв лінійно залежать від часу і визначаються наступними формулами:

$$\lambda_2 = 0,23 \times 10^{-4} t \text{ 1/час}, \lambda_3 = 0,06 \times 10^{-6} t^{2,6} \text{ 1/час}.$$

Необхідно розрахувати можливість безвідмовної роботи виробу протягом 100 год.

Рішення. На підставі формули (3.3) маємо

$$P_c(t) = \exp\left(-\sum_{i=1}^n \int_0^t \lambda_i(t) dt\right) = \exp\left\{-\left[\int_0^t \lambda_1 dt + \int_0^t \lambda_2 dt + \int_0^t \lambda_3 dt\right]\right\} =$$

$$= \exp\left[-\left(\lambda_1 t + 0,23 \cdot 10^{-4} \frac{t^2}{2} + 0,06 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{t^{3,6}}{3,6}\right)\right].$$

Для $t=100$ год:

$$P_c(100) = \exp\left[-\left(0,16 \cdot 10^{-3} \cdot 100 + 0,23 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{100^2}{2} + 0,06 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{100^{3,6}}{3,6}\right)\right] \approx 0,33$$

Задача 3.2. Система складається із трьох блоків, середній час безвідмовної роботи яких дорівнює: $m_{t1}=160$ год; $m_{t2} = 320$ год; $m_{t3} = 600$ год.

Для блоків справедливий експоненційний закон надійності. Потрібно визначити середній час безвідмовної роботи системи.

Рішення. Скориставшись формулою (3.17) отримаємо

$$\lambda_1 = \frac{1}{m_{t1}} = \frac{1}{160}; \lambda_2 = \frac{1}{m_{t2}} = \frac{1}{320}; \lambda_3 = \frac{1}{m_{t3}} = \frac{1}{600}.$$

Тут λ_i – інтенсивність відмов i -го блоку. На підставі формули (3.11) маємо

$$\lambda_c = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \frac{1}{160} + \frac{1}{320} + \frac{1}{600} \approx 0,011 \quad 1/\text{год}$$

де λ_c – інтенсивність відмови системи.

За формулою (3.16) отримаємо

$$m_{tc} = \frac{1}{\lambda_c} = \frac{1}{0,011} \approx 91 \quad \text{год}$$

Задача 3.3. Система складається з 12600 елементів, середня інтенсивність відмов яких $\lambda_{cp}=0,32 \times 10^{-6}$ 1/год. Потрібно визначити $P_c(t)$, $q_c(t)$, $fc(t)$, mtc для $t=50$ год.

Тут $P_c(t)$ - ймовірність безвідмовної роботи системи протягом часу t ;

$q_c(t)$ – ймовірність відмови системи протягом часу t ;

$fc(t)$ – частота відмов або щільність ймовірності безвідмовної роботи системи протягом часу t ;

mtc – середній час безвідмовної роботи системи.

Розв'язання. Інтенсивність відмов системи за формулою (3.11) буде:

$$\lambda_c = \lambda_{cp} \cdot n = 0,32 \times 10^{-6} \cdot 12600 = 4,032 \times 10^{-3} 1/\text{год}.$$

Тоді на підставі (3.13) отримаємо:

$$P_c(t)=e^{-\lambda_c t}; P_c(50)=e^{-4,032 \cdot 0,001 \cdot 50} \approx 0,82.$$

Из (3.15) получим

$$q_c(t)=1-P_c(t); q_c(50)=1-P_c(50) \approx 0,18.$$

Из (3.14) имеем

$$f_c(t) = \lambda_c e^{-\lambda_c t} = \lambda_c P_c(t); f_c(50) = 4,032 \cdot 10^{-3} \cdot 0,82 = 3,28 \cdot 10^{-3} \text{ 1/ч.}$$

Из (3.16) получим

$$m_{tc}=1/\lambda_c=1/4,032 \cdot 10^{-3} \approx 250 \text{ ч.}$$

Задача 3.4. Система складається з двох пристроїв. Ймовірності безвідмовної роботи кожного з них протягом часу $t=100$ год рівні: $P_1(100)=0,95$; $P_2(100)=0,97$. Справедливий експоненційний закон надійності. Необхідно знайти середній час безвідмовної роботи системи.

Розв'язання. Знайдемо ймовірність безвідмовної роботи виробу:

$$P_c(100)=P_1(100) \cdot P_2(100)=0,95 \cdot 0,97=0,92.$$

Знайдемо інтенсивність відмов виробу, використовуючи формулу:

$$P_c(t)=e^{-\lambda_c t}$$

або

$$P_c(100)=e^{-\lambda_c \cdot 100}.$$

Отримаємо

$$\lambda_c \cdot 100 \approx 0,083,$$

і тоді

$$\lambda_c \approx 0,83 \times 10^{-3} \text{ 1/год.}$$

Таким чином,

$$m_{tc}=1/\lambda_c=1/0,83 \times 10^{-3} \approx 1200 \text{ год.}$$

Отже, середній час безвідмовної роботи системи дорівнює приблизно 1200 годин.

Задача 3.5. Ймовірність безвідмовної роботи одного елемента протягом часу t дорівнює $P(t)=0,9997$. Треба визначити ймовірність безвідмовної роботи системи, яка складається $n=100$ таких самих елементів.

Розв'язання. Ймовірність безвідмовної роботи системи рівна

$$P_c(t)=P^n(t)=(0,9997)^{100}.$$

Оскільки ймовірність $P_c(t)$ близька до одиниці, для її обчислення використаємо формулу (3.18). У нашому випадку $q(t)=1-P(t)=1-0,9997=0,0003$.

Тоді

$$P_c(t) \approx 1-nq(t)=1-100 \times 0,0003=0,97.$$

Отже, ймовірність безвідмовної роботи системи дорівнює приблизно 0,97.

Задача 3.6. Ймовірність безвідмовної роботи системи протягом часу t рівна $P_c(t)=0,95$. Система складається з $n=120$ рівнонадійних елементів. Потрібно знайти ймовірність безвідмовної роботи елемента.

Розв'язання. Очевидно, що ймовірність безвідмовної роботи елемента буде

$$P_1(t) = \sqrt[n]{P_c(t)}.$$

Оскільки $P(t)$ близька до одиниці, для її обчислення використаємо формулу (3.18).

У нашому випадку $q(t)=1-P(t)=1-0,95 = 0,05$.

Тоді

$$P_1(t) = \sqrt[n]{P_c(t)} \approx 1 - \frac{q_c(t)}{n} = 1 - \frac{0,05}{120} \approx 0,9996.$$

Задача 3.7. Система складається з 12600 елементів, середня інтенсивність відмов яких $\lambda_{cp}=0,32 \times 10^{-6}$ 1/год. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи протягом $t=50$ годин.

Розв'язання. Інтенсивність відмов системи за формулою (3.11) буде

$$\lambda_c = \lambda_{cp} \cdot n = 0,32 \times 10^{-6} \cdot 12600 = 4,032 \times 10^{-3} \text{1/год.}$$

Тоді на підставі (3.13) $P_c(t) = e^{-\lambda_c \cdot t}$ або $P_c(50) \approx e^{-4,032 \times 10^{-3} \cdot 50} \approx 0,82$.

Задачі для самостійного розв'язання

Задача 3.8. Апаратура зв'язку складається з 2000 елементів, середня інтенсивність відмов яких $\lambda_{cp}=0,33 \times 10^{-5}$ 1/год.. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи апаратури протягом $t=200$ годин і середнє час безвідмовної роботи апаратури.

Задача 3.9. Невідновлювальна під час роботи електронна машина складається з 200000 елементів, середня інтенсивність відмов яких $\lambda=0,2 \times 10^{-6}$ 1/год. Треба визначити ймовірність безвідмовної роботи електронної машини протягом $t=24$ годин і середній час безвідмовної роботи електронної машини.

Задача 3.10. Система управління складається з 6000 елементів, середня інтенсивність відмов яких $\lambda_{cp}=0,16 \times 10^{-6}$ 1/год. Необхідно визначити ймовірність безвідмовної роботи протягом $t=50$ годин і середній час безвідмовної роботи.

Задача 3.11. Прилад складається з $n=5$ вузлів. Надійність вузлів характеризується ймовірністю безвідмовної роботи протягом часу t , яка дорівнює: $P_1(t)=0,98$; $P_2(t)=0,99$; $P_3(t)=0,998$; $P_4(t)=0,975$; $P_5(t)=0,985$. Треба визначити ймовірність безвідмовної роботи приладу.

Задача 3.12. Система складається з п'яти приладів, середні часи безвідмовної роботи яких дорівнюють: $mt_1=83$ год; $mt_2=220$ год; $mt_3=280$ год; $mt_4=400$ год; $mt_5=700$ год. Для приладів справедливий експоненційний закон надійності. Треба знайти середній час безвідмовної роботи системи.

Задача 3.13. Прилад складається з п'яти блоків. Ймовірності безвідмовної роботи кожного з них протягом часу $t=50$ год дорівнюють: $P_1(50)=0,98$; $P_2(50)=0,99$; $P_3(50)=0,998$; $P_4(50)=0,975$; $P_5(50)=0,985$. Справедливий експоненційний закон надійності. Треба знайти середній час безвідмовної роботи приладу.