Державний вищий навчальний заклад
«Запорізький національний університет»
Міністерства освіти і науки України

О.Г. Спиця, І.В. Зіновєєв, Н.І.-В. Манько

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ ТА ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Навчальний посібник
для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра
напрямів підготовки «Фізика», «Прикладна фізика»

Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол № від

Запоріжжя
2015

УДК: 514(075.8)
ББК: В151.54 я73
С 727

Спиця О.Г. Аналітична геометрія та лінійна алгебра: навчальний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра напрямів підготовки «Фізика», «Прикладна фізика» / О.Г. Спиця, І.В. Зіновєєв, Н.І.–В. Манько. – Запоріжжя: ЗНУ, 2015. – 125 с.

Навчальний посібник містить теоретичні відомості про множини, матриці, визначники, системи лінійних алгебраїчних рівнянь, власні значення та власні вектори матриці, квадратичні форми, вектори, криві та поверхні першого та другого порядків. Призначений для ознайомлення з основними методами аналітичної геометрії та лінійної алгебри, зокрема координатним та векторним, сприяє засвоєнню основних алгоритмів: обчислення визначників, знаходження рангів матриць, розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь, зведення квадратичних форм до канонічного виду та ін. У посібнику наведено приклади розв'язання основних типів задач та задачі для самостійного розв'язання.

Навчальне видання призначене для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра фізичного факультету денної та заочної форм навчання напрямів підготовки «Фізика» та «Прикладна фізика».

Рецензент *С.М. Гребенюк*
Відповідальний за випуск *А.К. Приварников*

ЗМІСТ

ВСТУП

Курс "Аналітична геометрія та лінійна алгебра" є необхідною складовою частиною базової теоретичної підготовки студента-фізика та основою для подальшого вивчення спеціальних дисциплін.

Він дає можливість засвоїти основні теоретичні відомості, практичні вміння та навички з курсу "Аналітична геометрія та лінійна алгебра".

Мета навчального курсу:

- надати основні теоретичні відомості стандартного курсу аналітичної геометрії та вищої алгебри, які складають невід'ємну частину загально математичної освіти студента-фізика;
- узагальнити відомі поняття алгебри та геометрії; простежити взаємозв'язок предметів алгебри та геометрії та логіку розвитку теоретичних побудов в цих дисциплінах;
- продемонструвати застосування теоретичних відомостей до розв'язання практичних задач.

Завдання курсу:

- надати основні поняття про множини, ознайомити з діями над ними;
- ознайомити з поняттям матриці, визначника, діями над ними та основними властивостями; навчити застосовувати матриці та визначники до розв'язання задач лінійної алгебри;
- надати означення та основні властивості лінійних просторів; надати відомості про вектори та дії над ними; ознайомити із застосуванням векторів та їх добутків до розв'язування задач фізики;
- надати відомості про криві та поверхні і та іі порядків; ознайомити із застосуванням кривих та поверхонь і та іі порядків до розв'язування задач фізики.

У результаті вивчення дисципліни студент повинен

знати:

- основні поняття, факти та теореми лінійної алгебри, аналітичної геометрії;
- сфери застосування матриць та визначників, векторів, їх добутків, кривих та поверхонь I та II порядків.

вміти:

- застосовувати основні поняття, твердження та теореми до розв'язку задач; наводити приклади, які демонструють суттєвість теоретичних понять чи фактів, або спростовують хибні ствердження;
- застосовувати елементи алгебри до розв'язку задач геометрії та використовувати матеріал попередніх тем при вивченні наступних;
- розв'язувати типові задачі кожної з вивчених тем.

У зв'язку зі сказаним вище **метою** даного посібника є забезпечення високого рівня теоретичних та практичних знань, навчання студентів вільно користуватися поняттями та методами лінійної алгебри та аналітичної геометрії.

1 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОЖИН

Теоретичні відомості

Множина – це сукупність об’єктів, об’єднаних за певною ознакою, причому таких, що для кожного можна встановити, належить цей об’єкт даній сукупності чи ні.

Як правило, елементи множини позначаються маленькими буквами, а самі множини – великими. Приналежність елемента m множині M позначається так: $m \in M$.

Множини можуть бути скінченними, нескінченними й порожніми. Множина, що містить скінченну кількість елементів, називається *скінченною*. Якщо множина не містить жодного елемента, то вона називається *порожньою* й позначається $\varnothing$.

Множину A називають *підмножиною* множини B (позначається $A \subseteq B$), якщо будь-який елемент множини A є елементом множини B: $A \subseteq B \overset{def}{\longleftrightarrow} a \in A \Rightarrow a \in B$ (рис. 1.1). При цьому говорять, що B містить A, або B покриває A. Невключення підмножини C в множину B позначається так: $C \not\subset B$.

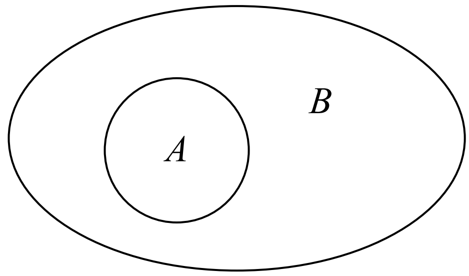


Рисунок 1.1

Множини A й B *рівні* ($A = B$) тоді й тільки тоді, коли $A \subseteq B$, і $B \subseteq A$, тобто елементи множин A і B збігаються.

Множина A називається *власною підмножиною* множини B, якщо $A \subseteq B$, а $B \not\subset A$. Позначається так: $A \subset B$.

Потужністю скінченної множини M називається число її елементів. Позначається $|M|$.

Прийнято вважати, що порожня множина $\varnothing$ є підмножиною будь-якої множини.

Універсальною множиною U називається множина всіх розглянутих у даній задачі елементів.

Способи задання множин: множини можуть бути задані переліком всіх її елементів; арифметичними операціями; описом властивостей або графічно.

1. Задання множин **переліком всіх її елементів**. Наприклад, множина A складається з букв a, b, c, d : $A = \{a, b, c, d\}$ або множина N включає цифри 0, 2, 3, 4: $N = \{0, 2, 3, 4\}$.

2. Задання множин описанням характеристичних властивостей елементів за допомогою **арифметичних операцій**. Наприклад, $B = \left\{ b \mid b = \dfrac{\pi}{2} \pm \pi k, k \in N \right\}$.

3. Задання множини **описанням властивостей** елементів. Наприклад, M – це множина чисел, які є степенями двійки.

4. **Графічне** задання множин відбувається за допомогою діаграм Ейлера-Венна. Замкнена лінія Ейлера – обмежує множину, а рамка – універсальну множину U (рис. 1.2). Задано дві множини: $A=\{a,b,c\}$ і $B=\{b,d,e,f\}$. Якщо елементів множин небагато, то вони можуть на діаграмі вказуватися явно.

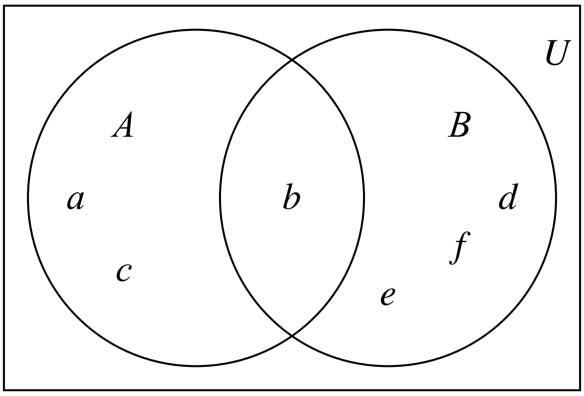


Рисунок 1.2

Операції над множинами

Об'єднанням множин A і B ($A \cup B$) називається множина, що складається з усіх тих елементів, які належать хоча б одній із множин A або B. (рис. 1.3):

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B\}.$$

У загальному випадку операція об'єднання може бути використана для декількох множин: $A \cup B \cup C \cup D$ або $S=\bigcup_{i=1}^{k} A_i$, де k – кількість об'єднаних множин.

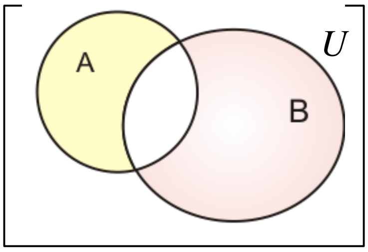


Рисунок 1.3

Перерізом множин A і B ($A \cap B$) називається множина, що складається з елементів, що входять як у множину A, так і в множину B (рис. 1.4): $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \in B\}$.

Операція перерізу так само може бути розповсюджена на декілька множин, наприклад, $A \cap B \cap C \cap D$ або $S=\bigcap_{i=1}^{k} A_i$, де k – кількість множин.

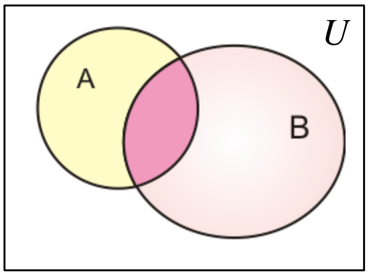


Рисунок 1.4

Різницею множин A і B ($A \setminus B$) називається множина всіх елементів множини A, які не містяться в B (рис. 1.5, а): $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \notin B\}$; аналогічно (рис. 1.5, б): $B \setminus A = \{x \mid x \in B \text{ і } x \notin A\}$.

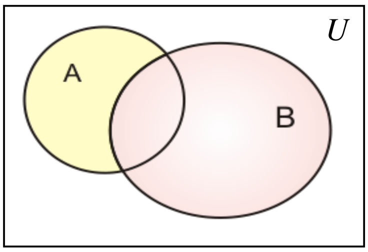


Рисунок 1.5, а

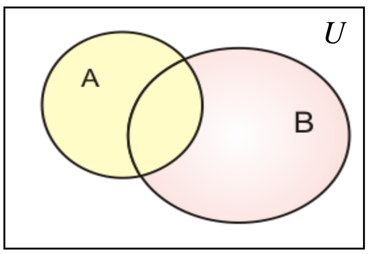


Рисунок 1.5, б

Доповненням (до універсальної множини U) множини A називається множина всіх елементів, що не належать A, але належать універсальній множині U (рис. 1.6): $\overline{A} = \{x \mid x \notin A \text{ і } x \in U\}$. Наприклад, універсальна множина U складається з букв російського алфавіту, A – множина голосних букв, тоді $\overline{A}$ – множина приголосних букв і букв ь и ъ.

Пріоритет виконання операцій: спочатку виконуються операції доповнення, потім перерізу й тільки потім об'єднання й різниці. Послідовність виконання операцій може бути змінена дужками.

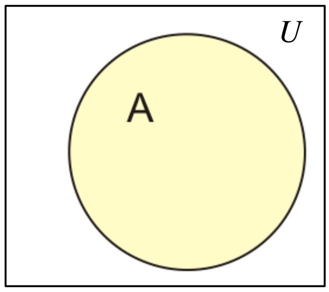


Рисунок 1.6

Тест для самоперевірки

1. Множина – це

А сукупність об'єктів;
Б впорядкована сукупність об'єктів;
В сукупність об'єктів, об'єднаних за певною ознакою;
Г впорядкована сукупність об'єктів, об'єднаних за певною ознакою.

2. Множина називається скінченною, якщо вона

А містить скінченну кількість елементів;
Б містить нескінченну кількість елементів;
В не містить жодного елемента;
Г містить скінченну кількість елементів або не містить жодного елемента.

3. Множина називається порожньою, якщо вона

А містить скінченну кількість елементів;
Б містить нескінченну кількість елементів;
В не містить жодного елемента;
Г містить скінченну кількість елементів або не містить жодного елемента.

4. Множину A називають підмножиною множини B, якщо

А деякий елемент множини A є елементом множини B;
Б будь-який елемент множини A не є елементом множини B;
В деякий елемент множини A не є елементом множини B;
Г будь-який елемент множини A є елементом множини B.

5. Множини A й B рівні тоді й тільки тоді, коли

А $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$; **Б** $A \subseteq B$ або $B \subseteq A$;
В $A \subseteq B$; **Г** $B \subseteq A$.

6. Множина A називається власною підмножиною множини B, якщо

А $A \subseteq B$ або $B \not\subset A$; **Б** $A \subseteq B$ і $B \not\subset A$;
В $A \subseteq B$; **Г** $B \not\subset A$.

7. Потужністю скінченної множини називається

А число елементів універсальної множини;
Б число її елементів або число елементів універсальної множини;
В число її елементів;
Г число елементів її будь-якої підмножини.

8. Який з зазначених способів є заданням множини переліком всіх її елементів?

А $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$;
Б $\{m \mid m = 2^n, n \in N\}$;
В множина чисел, які є степенями двійки;
Г $1, 2, 4, 8, 16$.

9. *Який з зазначених способів є заданням множини за допомогою арифметичних операцій?*

А $1, 2, 4, 8, 16, ...$;

Б $\{m \mid m = 2^n, n \in N\}$;

В множина чисел, які є степенями двійки;

Г $1, 2, 4, 8, 16$.

10. *Який з зазначених способів є заданням множини описанням властивостей?*

А $1, 2, 4, 8, 16, ...$;

Б $\{m \mid m = 2^n, n \in N\}$;

В множина чисел, які є степенями двійки;

Г $1, 2, 4, 8, 16$.

11. *Графічне задання множин відбувається за допомогою*

А діаграм Ейлера або діаграм Венна;

Б діаграм Ейлера;

В діаграм Венна;

Г діаграм Ейлера-Венна.

12. *Об'єднанням множин A і B називається множина, що складається з усіх тих елементів*

А які належать хоча б одній із множин A або B;

Б які належать як множині A, так множині B;

В які належать множині A, але не належать множині B;

Г які не належать множині A, але належать множині B.

13. *Перетином множин A і B називається множина, що складається з усіх тих елементів*

А які належать хоча б одній із множин A або B;

Б які належать як множині A, так множині B;

В які належать множині A, але не належать множині B;

Г які не належать множині A, але належать множині B.

14. *Різницею множин A і B називається множина, що складається з усіх тих елементів*

А які належать хоча б одній із множин A або B;

Б які належать як множині A, так множині B;

В які належать множині A, але не належать множині B;

Г які не належать множині A, але належать множині B.

15. *Різницею множин B і A називається множина, що складається з усіх тих елементів*

А які належать хоча б одній із множин A або B;

Б які належать як множині A, так множині B;

В які належать множині A, але не належать множині B;

Г які не належать множині A, але належать множині B.

16. *Доповненням (до універсальної множини U) множини A називається множина всіх елементів, які*

А належать A, але не належать універсальній множині U;

Б не належать A і не належать універсальній множині U;
В не належать A, але належать універсальній множині U;
Г належать A і належать універсальній множині U.

17. Встановіть відповідність між операціями над множинами $A=\{4; 1; 3; -4\}$ *і* $B=\{0; 3; -1; 4\}$ *(1 – 4) та результатами цих операцій (А – Д).*

1	$A\cap B$	**А**	$\{0; -1\}$
2	$A\cup B$	**Б**	$\varnothing$
3	$A\setminus B$	**В**	$\{0; 1; -1; 3; 4; -4\}$
4	$B\setminus A$	**Г**	$\{1; -4\}$
		Д	$\{3; 4\}$

Відповіді: 1.В. 2.А. 3.В. 4.Г. 5.А. 6.Б. 7.В. 8.А. 9.Б. 10.В. 11.Г. 12.А. 13.Б. 14.В. 15.Г. 16.В. 17. 1Д; 2В; 3Г; 4А.

Приклади розв’язання задач

Приклад 1 Задати різними способами множину A всіх парних чисел 2, 4, 6, …., що не перевищують 1000.

Розв’язання.

1. Переліком елементів: $A=\{2,4,6,8,10,...,998,1000\}$;
2. Описанням властивостей: $A=\left\{x \mid x\in N \text{ и } \frac{x}{2}\in N,\ N\le 1000\right\}$.
3. За допомогою арифметичних операцій: а) $2\in A$; б) якщо $x\in A$, то $(x+2)\in A$; в) $x\le 1000$.

Приклад 2 Опитування 100 студентів, що вивчають іноземні мови, показав: англійську мову вивчають 29 студентів, німецьку –30, французьку –9, тільки французьку – 1, англійську і німецьку – 10, німецьку і французьку – 4, усі три мови – 3 студента. Скільки студентів не вивчають жодної мови? Скільки студентів вивчають тільки німецьку мова? При розв’язанні використовувати діаграми Венна.

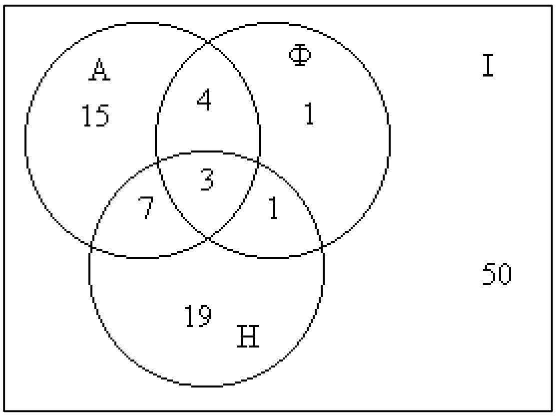


Рисунок 1.7

Розв’язання.

Введемо позначення: I – множина всіх опитаних студентів; A – множина студентів, що вивчають англійську мову; H – множина студентів, що вивчають німецьку мову; Φ – множина студентів, що вивчають французьку мову (рис. 1.7)

За умовою задачі очевидно, що $A\cap\Phi\cap H=3$, тоді

$$(A\cap H)\setminus(A\cap\Phi\cap H)=4-3=1; \qquad (A\cap H)=(A\cap\Phi\cap H)=10-3=7.$$

У такому випадку тільки німецька мову вивчають $30-7-3-1=19$ студентів.

З умови задачі також випливає, що $(A \cap \Phi) \setminus (A \cap \Phi \cap H) = 9 - 1 - 1 - 3 = 4$, а тому тільки англійську мову вивчають $29 - 4 - 3 - 7 = 15$ студентів. Тоді число студентів, що не вивчають жодної мови, буде

$$C \setminus (A \cup \Phi \cup H) = 100 - (1 + 1 + 3 + 4 + 7 + 15 + 19) = 50 \text{ студентів.}$$

Задачі для самостійного розв'язування

№ 1.1. Записати множини, перелічивши всі їх елементи:

1) $A = \{x \mid x \in N \text{ і } x^2 - 4x + 3 = 0\}$;

2) 2) $B = \{x \mid x \in R \text{ і } x^2 - 2x + 2 = 0\}$.

№1.2. Знайти об'єднання, переріз та різницю множин:

1) $A = \{x \mid 0 < x < 2\}$, $B = \{x \mid 1 \le x \le 3\}$;

2) $A = \{x \mid x^2 - 2x > 0\}$, $B = \{x \mid x^2 - 4x + 3 > 0\}$.

№ 1.3. Множина A складається з натуральних чисел, що діляться на 4, множина B – з натуральних чисел, що діляться на 10, множина C – з натуральних чисел, що діляться на 75. З яких чисел складається множина $A \cap B \cap C$?

№ 1.4. Нехай $U = \{1,2,3,4,5\}$, $X = \{1,5\}$, $Y = \{1,2,4\}$, $Z = \{2,5\}$. Знайти множини:

1) $X \cap \overline{Y}$; 2) $(X \cap Z) \cap \overline{Y}$; 3) $X \cup (Y \cap Z)$;
4) $(X \cup Y) \cap (X \cup Z)$; 5) $\overline{X \cup Y}$; 6) $\overline{X} \cap \overline{Y}$;
7) $(X \cup Y) \cup Z$; 8) $X \setminus Z$; 9) $(X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z)$.

№ 1.5. Нехай $U = \{a,b,c,d,e,f\}$, $A = \{a,b,c\}$, $B = \{f,e,c,a\}$, $C = \{d,e,f\}$. Знайти множини:

1) $A \setminus C$; 2) $B \setminus C$; 3) $C \setminus B$;
4) $A \setminus B$; 5) $\overline{A} \cup B$; 6) $B \cap \overline{A}$;
7) $A \cap C$; 8) $C \cap A$.

Розв'язати задачі № 1.6 – 1.14 з використанням діаграм Ейлера-Венна.

№ 1.6. У студентському потоці 37 людей добре знають математику, а 25 людей – електроніку, і 19 людей добре знають і математику й електроніку. Якщо в потоці кожний зі студентів знає хоча б один із цих предметів, то скільки студентів у потоці?

№ 1.7. З 250 студентів 151 вивчають німецьку мову, 136 – французьку мову, 27 – італійську, 63 – французьку й німецьку, 7 – італійську й французьку, 11 – німецьку й італійську, 4 – усі три мови. Скільки студентів: а) вивчають тільки німецьку або тільки французьку мови? б) вивчають тільки італійську мову? в) вивчають німецьку й французьку мова, але не італійську? г) не вивчають жодної мови? д) вивчають хоча б дві іноземні мови?

№ 1.8. Кожний з 500 студентів зобов'язано відвідувати хоча б один із трьох спецкурсів: з математики, фізики, астрономії. Три спецкурси відвідують 10 студентів, з математики й астрономії –25 студентів, спецкурс тільки з фізики – 80 студентів. Відомо також, що спецкурс з математики відвідують 345 студентів, з фізики – 145, з астрономії – 100 студентів. Скільки студентів відвідують спецкурс тільки з астрономії? Скільки студентів відвідують два спецкурси?

№ 1.9. Екзамен з математики містив три задачі: по алгебрі, геометрії й тригонометрії. З 800 абітурієнтів задачу по алгебрі розв’язали 250 людей; по алгебрі або геометрії – 660 людей; по дві задачі розв’язали 400 людей, з них дві задачі по алгебрі і й геометрії розв’язали 150 людей, по алгебрі й тригонометрії – 50 людей; жоден абітурієнт не розв’язав усі задачі; 20 абітурієнтів не розв’язали ні однієї задачі; тільки по тригонометрії задачі розв’язали 120 людей. Скільки абітурієнтів розв’язали тільки одну задачу? Скільки абітурієнтів розв’язали задачі по тригонометрії?

№ 1.10. На курсах іноземних мов вчиться 600 людей. З них французьку вивчають 220 людей, англійську – 270 людей. Слухачі, що вивчають англійську мову, не вивчають німецьку мову; одну французьку мову вивчають 100 людей, одну німецьку мову вивчають 180 людей. Скільки людей вивчають по дві іноземні мови? Скільки людей вивчають одну іноземну мову?

№ 1.11. На кафедрі іноземних мов працюють 18 викладачів. З них 12 викладають англійську мову, 11 – німецьку мову, 9 – французьку мову. 5 викладачів викладають англійську й німецьку мови, 4 – англійську й французьку, 3 – німецьку й французьку. Скільки викладачів викладають усі три мови? Скільки викладачів викладають тільки дві мови?

№ 1.12. Група студентів з 25 людей здала екзаменаційну сесію з наступними результатами: 2 людини одержали тільки «відмінно»; 3 – відмінні, добрі й задовільні оцінки; 4 – тільки «добре»; 3 – тільки добрі й задовільні оцінки. Число студентів, що здали сесію тільки на «задовільно», дорівнює числу студентів, що здали сесію тільки на «добре» і «відмінно». Студентів, що одержали тільки відмінні й задовільні оцінки – немає. Задовільні або добрі оцінки одержали тільки 22 студенти. Скільки студентів здали сесію тільки на «задовільно»?

№ 1.13. Викладачі кафедри прикладної математики викладають на трьох факультетах: механічному, технологічному, економічному. На технологічному факультеті працює 22 викладачі, на механічному – 23 викладачі, на механічному й економічному – 36 викладачів. Тільки на технологічному факультеті працюють 10 викладачів. 2 – на трьох факультетах. 5 викладачів працюють тільки на механічному й економічному факультетах. Число викладачів, що працюють тільки на механічному й технологічному факультетах, дорівнює числу викладачів, що працюють на економічному й технологічному факультетах. Скільки викладачів працює на кафедрі? Скільки викладачів працює тільки на одному факультеті?

№ 1.14. Екзамен з математики містив три задачі: по алгебрі, геометрії й тригонометрії. З 750 абітурієнтів задачу по алгебрі розв’язали 400 абітурієнтів, по геометрії – 480, по тригонометрії – 420. Задачі по алгебрі або геометрії розв’язали 630 абітурієнтів; по геометрії або тригонометрії – 600 абітурієнтів; по алгебрі або тригонометрії – 620 абітурієнтів. 100 абітурієнтів не розв’язали ні однієї задачі. Скільки абітурієнтів розв’язали всі задачі? Скільки абітурієнтів розв’язали тільки одну задачу?

2 МАТРИЦІ ТА ДІЇ НАД НИМИ

Теоретичні відомості

Матрицею розміру $m\times n$, де m – число рядків, n – число стовпців, називається прямокутна таблиця чисел, розташованих у певному порядку. Ці числа називаються *елементами матриці*. Місце кожного елемента однозначно визначається номерами рядка й стовпця, на перетині яких він знаходиться. Елементи матриці позначаються a_{ij}, де i – номер рядка, а j – номер стовпця. Позначення:

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m3} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ або } A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}.$$

Матриця, у якої число рядків дорівнює числу стовпців, називається *квадратною* (квадратну матрицю розміру $n\times n$ називають матрицею n-го порядку).

Елементи квадратної матриці, у яких співпадають номери рядка й стовпця, на перетині яких він знаходиться, утворюють *головну діагональ*. Інша діагональ квадратної матриці називається *побічною*.

Квадратна матриця, у якої всі елементи, окрім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається *діагональною*.

Діагональна матриця, у якої всі елементи головної діагоналі дорівнюють 1, називається *одиничною*. Позначення:

$$E_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \qquad E_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Квадратна матриця називається *трикутною*, якщо всі елементи, розташовані по одну сторону від головної діагоналі, рівні 0.

Матриця, всі елементи якої дорівнюють 0, називається *нульовою*. Позначення:

$$\theta=\begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}.$$

Матриці називаються *рівними*, якщо вони мають однаковий розмір і всі їх відповідні елементи рівні, тобто

$$A=B \text{, якщо } a_{ij}=b_{ij} \text{, де } i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}.$$

Якщо $a_{mn}=a_{nm}$, то матриця називається *симетричною*. Наприклад:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Матриця, що містить один рядок або один стовпець, називається *вектором* (або *матрицею-рядком* або *матрицею-стовпцем* відповідно). Їх вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \text{ – матриця-стовпець,} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix} \text{ – матриця-рядок.}$$

Матриця розміру 1×1, що складається з одного числа, ототожнюється із цим числом, тобто матриця $(5)_{1\times1}$ є числом 5.

Матриці використовують для опису електричних мереж, потоків на шляхах, виробничих процесів тощо.

Мережу, зображену на рис. 2.1, складає 5 гілок або ребер (з'єднань, занумерованих 1, 2,...,5) та 4 вузли (точок, де дві або більше гілки сполучаються) з одним заземленим вузлом (на кожній гілці стрілкою вказано напрям).

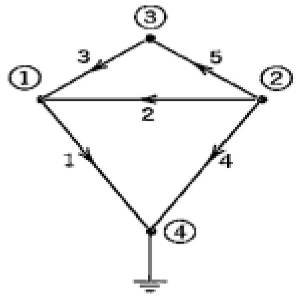


Рисунок 2.1

Мережу описують за допомогою «вузлової інцидентної матриці» $A = (a_{ij})_{4\times5}$, де

$$a_{ij} = \begin{cases} +1, \text{ якщо гілка } j \text{ виходить з вузла } i, \\ -1, \text{ якщо гілка } j \text{ входить у вузол } i, \\ 0, \text{ якщо гілка } j \text{ не зв'язана з вузлом } i. \end{cases}$$

А саме:

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccccc} \text{гілка } 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{вузол 1} \\ \text{вузол 2} \\ \text{вузол 3} \\ \text{вузол 4} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Транспонування

Матриця, отримана з даної заміною кожного її рядка стовпцем з тим же номером, називається матрицею, *транспонованою* до даної. Позначення: A^T або A^t.

Наприклад, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $\quad A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Транспонована матриця має властивість: $\left(A^T\right)^T = A$.

Додавання матриць

Сумою двох матриць однакового розміру називається матриця того ж розміру, кожний елемент якої є сумою відповідних елементів матриць-доданків, тобто, якщо $A_{m\times n} = (a_{ij})$ й $B_{m\times n} = (b_{ij})$, то

$$C_{m\times n} = A_{m\times n} + B_{m\times n} = (a_{ij} + b_{ij}),$$

де $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Наприклад, $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 10 \end{pmatrix}$.

Розглянемо застосування додавання матриць. Усі зображення, які можна побачити в мережі Інтернет, створені або опрацьовані за допомогою комп'ютера (одержані, приміром, з цифрового фотоапарата або відскановані) і збережені в цифровому форматі, мають тисячі або й, навіть, мільйони маленьких квадратиків, які називають пікселами. Піксели одержують поділянням будь-якого зображення сіткою. Комп'ютер може змінювати яскравість кожного піксела сітки.

Приміром, літеру Г на рис. 2.2 зображено за допомогою 9 пікселів у сітці 3×3. Розгляньмо чотири відтінки: білий, світло-сірий, темно-сірий та чорний і занумеруймо їх як 0, 1, 2, 3 відповідно (рис. 2.3).

Запишемо матрицю, яка відповідає цифровій фотографії літери Г, кожний елемент якої відповідає використаному відтінку:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Щоб збільшити контрастність фотографії (темно-сірий відтінок літери перетворити на чорний (тобто збільшити на 1), а світло-сірий відтінок тла на білий (тобто зменшити на 1)) (рис. 2.4), до матриці фотографії А треба додати матрицю $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

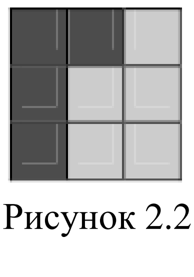


Рисунок 2.2

Рисунок 2.3

Рисунок 2.4

Множення матриці на число

Добутком матриці $A_{m\times n} = (a_{ij})$ *на число* $k \in R$ називається матриця $B_{m\times n} = (b_{ij})$, кожний елемент якої отриманий множенням відповідного елемента матриці A на число k, тобто $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$, де $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Наприклад, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $k = 2$: $A \cdot k = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$.

Матриця $-A = (-1) \cdot A$ називається *протилежною* до матриці A.

Різницю матриць $A - B$ можна визначити так: $A - B = A + (-B)$.

Властивості операцій додавання матриць і множення матриці на число

(A, B, C – матриці, $\alpha, \beta \in R$):

1. $A + B = B + A$;
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3. $A + \theta = A$;
4. $A + (-A) = \theta$;
5. $1 \cdot A = A$;
6. $\alpha \cdot (A + B) = \alpha A + \alpha B$;
7. $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha A + \beta A$;
8. $\alpha \cdot (\beta A) = (\alpha\beta) \cdot A$.

Елементарні перетворення матриць

Елементарними перетвореннями матриць є:

– перестановка місцями двох рядків матриці;

– множення всіх елементів рядка матриці на ненульове число;

– додавання до всіх елементів рядка матриці відповідних елементів іншого рядка матриці, помножених на одне й теж ненульове число.

Дві матриці A й B називаються *еквівалентними*, якщо одну з них можна отримати з іншої за допомогою елементарних перетворень. Позначення: $A \sim B$.

За допомогою елементарних перетворень будь-яку матрицю можна звести до так званого *ступінчастого* виду цієї матриці, у якої:

- після нульового рядка йде тільки нульовий рядок;
- якщо перші ненульові елементи двох будь-яких сусідніх рядків мають номери k й m, то $k < m$.

Наприклад, $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Добуток матриць

Добутком матриці $A_{m\times n} = (a_{ij})$ на матрицю $B_{n\times p} = (b_{jk})$ називається така матриця $C_{m\times p} = (c_{ik})$, елемент i-го рядка й k-го стовпця якої дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A й відповідних елементів k-го стовпця матриці B, тобто

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nk},$$

де $i = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, p}$.

Наприклад, знайдемо добуток матриць $A=\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\end{pmatrix}$:

$$AB=\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 2 & 1\cdot 4 & 1\cdot 1\\4\cdot 2 & 4\cdot 4 & 4\cdot 1\\3\cdot 2 & 3\cdot 4 & 3\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\8 & 16 & 4\\6 & 12 & 3\end{pmatrix};$$

$$BA=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}=\left(2\cdot 1+4\cdot 4+1\cdot 3\right)=(21)=21.$$

Для прямокутних матриць A і B добуток визначений, якщо число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці B.

Зауваження. При перестановці матриць результат може вийти різним або один з них взагалі не існує. В загальному випадку, властивість комутативності при множенні матриць не має місця.

Матриці A й B, для яких $AB=BA$, називаються *переставними*.

Щоб матриці були переставними, необхідно, щоб вони були квадратними однакового порядку, однак, ця умова не є достатньою.

Властивості операцій над матрицями (A,B,C – матриці, $\alpha,\beta\in R$), якщо записані операції мають сенс:

1. $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$;
2. $A\cdot E=E\cdot A=A$;
3. $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$;
4. $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$;
5. $\alpha\cdot(A\cdot B)=(\alpha A)B$;
6. $(A+B)^T=A^T+B^T$;
7. $(\alpha A)^T=\alpha A^T$;
8. $(AB)^t=B^tA^t$.

Тест для самоперевірки

1. *Встановіть відповідність між матрицями (1 – 4) та їх розмірами (А – Д).*

1	$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$	**3**	$\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$	**А** **Б**	2×2 2×3
2	$\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\end{pmatrix}$	**4**	$\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$	**В** **Г** **Д**	3×2 1×3 3×1

2. *Встановіть відповідність між симетричними матрицями (1 – 4) та їх невідомими елементами (А – Д).*

1	$\begin{pmatrix}2 & 1\\\square & 1\end{pmatrix}$	**3**	$\begin{pmatrix}2 & \square\\2 & 1\end{pmatrix}$	**А** **Б**	0 1
2	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 1 & 4\\3 & \square & 2\end{pmatrix}$	**4**	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\2 & 1 & 4\\\square & 4 & 2\end{pmatrix}$	**В** **Г** **Д**	2 3 4

3. *Знайдіть значення* m *і* n, *для яких здійсненна операція:* $A_{m\times n}\cdot B_{3\times 4}=C_{2\times 4}$.

А $m=2$, $n=4$; **Б** $m=2$, $n=3$;
В $m=4$, $n=3$; **Г** $m=3$, $n=4$.

4. *Знайдіть значення* m *і* n, *для яких здійсненна операція:* $3A_{m\times n}=C_{3\times 4}$.

А $m=2$, $n=4$; **Б** $m=2$, $n=3$;
В $m=4$, $n=3$; **Г** $m=3$, $n=4$.

5. *Знайдіть значення* m *і* n, *для яких здійсненна операція:* $A_{m\times 3}+B_{2\times n}$.

А $m=2$, $n=4$; **Б** $m=2$, $n=3$;
В $m=4$, $n=3$; **Г** $m=3$, $n=4$.

6. *Знайдіть значення* m *і* n, *для яких здійсненна операція:* $\left(A_{2\times n}\right)^T=A_{4\times m}$.

А $m=2$, $n=4$; **Б** $m=2$, $n=3$;
В $m=4$, $n=3$; **Г** $m=3$, $n=4$.

7. *Результатом обчислення* $A+B$, *якщо* $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -4 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ *і* $B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ *буде:*

А $\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$; **Б** $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -7 & -4\\ -2 & 1\end{pmatrix}$;

В $\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -1 & 4\\ -2 & 1\end{pmatrix}$; **Г** $\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -7 & -4\\ -2 & 1\end{pmatrix}$.

8. *Якщо матриця* $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$, *то матриця* $4A$ *має вид:*

А $\begin{pmatrix}2 & -4\\ 3 & -8\end{pmatrix}$; **Б** $\begin{pmatrix}8 & -4\\ 12 & -8\end{pmatrix}$;

В $\begin{pmatrix}8 & -1\\ 12 & -2\end{pmatrix}$; **Г** $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 12 & -8\end{pmatrix}$.

9. *Якщо матриця* $B=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ -1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, *то матриця* B^T *має вид:*

А $\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & -3\end{pmatrix}$; **Б** $\begin{pmatrix}0 & -1 & -3\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$;

В $\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ -3 & -1 & 0\end{pmatrix}$; **Г** $\begin{pmatrix}-3 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

10. *Результатом обчислення* $3A^T-2B$, *якщо* $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -5 & 8\end{pmatrix}$ *і* $B=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 5 & -7\end{pmatrix}$ *буде:*

А $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}$; **Б** $\begin{pmatrix} 8 & -15 \\ -25 & 38 \end{pmatrix}$;

В $\begin{pmatrix} 8 & -21 \\ -19 & 38 \end{pmatrix}$; **Г** $\begin{pmatrix} 4 & -9 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$.

11. Встановіть відповідність між матрицями $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ *і* $B=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ *(1 – 4) та елементами їх добутку* $C = AB$ *(А – Д).*

1 c_{11}	**3** c_{13}	**А** 1
		Б –4
		В 5
2 c_{22}	**4** c_{32}	**Г** –9
		Д 2

12. Встановіть відповідність між парою матриць A, B (1 – 4) та їх добутком AB (А – Д).

Матриці A і B	*Добуток AB*
1 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$	**А** $\begin{pmatrix} -12 & -2 \end{pmatrix}$
2 $A=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 3 \end{pmatrix}$	**Б** $\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$
3 $A=\begin{pmatrix} -4 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$	**В** $\begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}$
4 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$	**Г** $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$
	Д $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

Відповіді: 1. 1Б; 2Г; 3А; 4В. 2. 1Б; 2Д; 3В; 4А. 3.Б. 4.Г. 5.Б. 6.А. 7.А. 8.Б. 9.Г. 10.Б. 11. 1В; 2Г; 3А; 4Д. 12. 1В; 2Б; 3А; 4Г.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1 Знайти добуток матриць $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+10 & 4+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 16 \end{pmatrix};$$

$$BA = \varnothing \text{ – не існує.}$$

Приклад 2 Дано матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Знайти $A^T \cdot B + 2C$.

Розв'язання.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot3+1\cdot2 \\ 0\cdot1+4\cdot3-4\cdot2 \\ 3\cdot1+1\cdot3+2\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix};$$

$$2C = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad A^T \cdot B + 2C = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Приклад 3 Дана матриця $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Знайти A^3.

Розв'язання.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix};$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 & 78 \\ 39 & 86 \end{pmatrix}.$$

Відзначимо, що матриці $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$ є переставними.

Приклад 4 Звести до ступінчастого виду матрицю $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

Виконуючи елементарні перетворення, одержимо:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2\cdot\mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 2 - 3\cdot\mathrm{II} \\ \\ +3\cdot\mathrm{II} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задачі для самостійного розв'язування

№ 2.1. Для заданих матриць обчислити AB й BA, якщо це можливо:

1) $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & -5 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix}6\\ 3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 4\end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -1 & 0\\ 1 & 5 & 2\end{pmatrix}$; 4) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}$.

№ 2.2. Для заданих матриць виконати зазначені дії:

1) для матриць $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -6\\ 2 & -3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 4\\ 8 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 2\\ 0 & 2 & -3\end{pmatrix}$ обчислити $2A^T-3B$, $AB+E$, $BA-C^2$, $(AB)^T$, B^TA^T, $AC+(CB)^T$, CA^T, CA^T+B;

2) для матриць $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -2 & 4\\ 0 & 1 & 8\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 3 & -7\end{pmatrix}$ обчислити $2B-3C$, $A(B+C)$, BC^T+A^2, $AC-BC^T$, CB^T-2A^2;

3) для матриць $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -3 & 4\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & -4 & 6\\ 4 & 2 & -2\end{pmatrix}$ обчислити $4A-3B+C$, A^T+B^T, $AB-BA$, $BC+A^2$;

3 ВИЗНАЧНИКИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Теоретичні відомості

Квадратній матриці A порядку n можна поставити у відповідність число $\det A$ (або $\left|A\right|$, або Δ), яке називають її *визначником*, у такий спосіб:

$$n=1, \qquad A=\left(a_1\right), \qquad \det A=a_1;$$

$$n=2, \qquad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad \det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix};$$

$$n=3, \qquad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad \det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$\ldots$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Визначник матриці A також називають її *детермінантом*. Правило обчислення детермінанта для матриці порядку n є досить складним для сприйняття й застосування. Однак відомі методи, що дозволяють реалізувати обчислення визначників високих порядків на основі визначників нижчих порядків.

Обчислення визначника матриці 2-го порядку ілюструється схемою:

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Наприклад, $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}=2\cdot 6-5\cdot\left(-3\right)=27$.

При обчисленні визначника матриці 3-го порядку зручно користуватися:

- *правилом трикутників*, яке ілюструється схемою:

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{23}a_{32}a_{11}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

- *правилом прямих*, яке ілюструється схемою:

$$\begin{array}{ccccccc} & & «+» & & «–» & & \\ \det A= & \left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right. & & \left|\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}\right. & = \end{array}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{23}a_{32}a_{11}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Властивості визначників

1. Визначник матриці не змінюється при її транспонуванні, тобто $\det A = \det A^t$.

2. При перестановці двох рядків (стовпців) матриці її визначник змінює знак.

3. Визначник матриці, що має два однакових рядки (стовпці), дорівнює нулю.

4. При множенні рядка (стовпця) матриці на число її визначник множиться на це число.

5. Якщо елементи деякого рядка (стовпця) матриці пропорційні відповідним елементам іншого її рядка (стовпця), то визначник такої матриці дорівнює нулю.

6. Якщо елементи якого-небудь рядка визначника матриці є сумою двох доданків, то визначник може бути розкладено на суму двох відповідних визначників. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+b \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b \\ a_{21} & a_{22} & c \\ a_{31} & a_{32} & d \end{vmatrix}.$$

7. Визначник матриці не зміниться, якщо до елементів одного рядка (стовпця) матриці додати відповідні елементи іншого її рядка (стовпця), помножені на будь-яке ненульове число.

Мінором M_{ij} деякого елемента a_{ij} визначника n-го порядку називається визначник $(n-1)$-го порядку, отриманий з вихідного шляхом викреслювання рядка й стовпця, на перетині яких знаходиться обраний елемент. Наприклад, для визначника $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}$:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 24 = 15, \; M_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 1 = 7.$$

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} визначника називається його мінор, узятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Наприклад, для визначника $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}$: $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -15$, $A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = 7$.

8. (*Розкладання визначника за елементами деякого рядка або стовпця*). Визначник дорівнює сумі добутків елементів деякого рядка (стовпця) та їх відповідних алгебраїчних доповнень, тобто $\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in}$ (за елементами i-го рядка) або $\det A = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + ... + a_{nk}A_{nk}$ (за елементами k-го стовпця).

Наприклад, $\rightarrow\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$

$= (-2\cdot 1 - 1\cdot 3) - 2(0\cdot 1 - 3\cdot 3) + (0\cdot 1 + 3\cdot 2) = 19$.

9. Сума добутків елементів якого-небудь рядка (стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю, наприклад, $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + ... + a_{1n}A_{2n} = 0$.

10. Визначник трикутної матриці дорівнює добутку елементів головної діагоналі.

11. Визначник добутку матриць дорівнює добутку визначників цих матриць.

Тест для самоперевірки

1. *Для яких матриць існує визначник?*

А тільки для квадратної матриці;
Б для будь-якої матриці;
В тільки для трикутної матриці;
Г тільки для прямокутної матриці.

2. *Як зміниться визначник 8 порядку, якщо її сьомий рядок помножити на 2?*

А не зміниться; **Б** зміниться тільки знак;
В зменшиться вдвічі; **Г** збільшиться вдвічі.

3. *Як зміниться визначник 7 порядку, якщо поміняти місцями його другий та сьомий рядки?*

А не зміниться; **Б** зміниться тільки знак;
В зменшиться вдвічі; **Г** збільшиться вдвічі.

4. *Як зміниться визначник 9 порядку, якщо до його першого стовпця додати п'ятий стовпець, помножений на 3?*

А не зміниться; **Б** зміниться тільки знак;
В зменшиться втричі; **Г** збільшиться втричі.

5. *Нехай визначник матриці А третього порядку дорівнює (–5). Чому дорівнює визначник матриці* $0{,}2A^2$ *?*

А 1; **Б** 25; **В** 2; **Г** 5.

6. *У визначнику третього порядку всі елементи парні числа. Знайти найбільше число з наступних, на яке ділиться цей визначник.*

А 2; **Б** 6; **В** 12; **Г** 8.

7. *Коренем рівняння* $\begin{vmatrix} 2 & x-4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$ *буде число*

А –12; **Б** –4; **В** 12; **Г** 4.

8. *Розв'язком нерівності* $\begin{vmatrix} x-2 & -8 \\ -1 & x-4 \end{vmatrix} \le 0$ *буде*

А $(0;\ 6)$; **Б** $[0;\ 6]$;
В $(-\infty;\ 0]\cup[6;\ +\infty)$; **Г** $(-\infty;\ 0)\cup(6;\ +\infty)$.

9. Яке з вказаних правил є правилом обчислення визначників?

А трикутників; **Б** Крамера;

В оберненої матриці; **Г** Гаусса.

10. Яке з вказаних правил НЕ Є правилом обчислення визначників?

А трикутників;

Б прямих;

В розкладання по елементах рядка;

Г Гаусса.

11. Чому дорівнює визначник $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ *?*

А $-2\cdot 3\cdot 5$; **Б** $2\cdot 3\cdot 5$;

В $2-3+5$; **Г** $-(2-3+5)$.

12. Сума добутків елементів четвертого рядка визначника п'ятого порядку на їх відповідні алгебраїчні доповнення дорівнює:

А 0; **Б** визначнику;

В модулю визначника; **Г** $4\cdot 5$.

13. Сума добутків елементів четвертого рядка визначника п'ятого порядку на алгебраїчні доповнення третього рядка дорівнює:

А 0; **Б** визначнику;

В модулю визначника; **Г** $4\cdot 5$.

14. Чому дорівнює визначник Δ 7 порядку, якщо всі елементи його сьомого рядка в 2 два рази більше відповідних елементів 2 рядка:

А Δ; **Б** $0{,}5\Delta$; **В** 2Δ; **Г** 0.

15. Встановіть відповідність між деякими числами матриці $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ *(1 – 4) й величиною цих чисел (А – Д).*

1 A_{12} **2** M_{12}	**3** $\det A$ **4** $A_{11}+M_{22}$	**А** –6 **Б** 8	**В** –4 **Г** –8 **Д** 4

16. Закінчіть речення так, щоб утворилося правильне твердження. «Якщо визначник містить два рівних рядки, то він …»

А не зміниться;

Б змінить знак;

В дорівнює нулю;

Г може як змінитися так й ні (це залежить від самого визначника).

17. Закінчіть речення так, щоб утворилося правильне твердження. «Якщо один з рядків визначника є лінійною комбінацією його інших рядків, то він …»

А не зміниться;

Б змінить знак;

В дорівнює нулю;
Г може як змінитися так й ні (це залежить від самого визначника).

Відповіді: 1.А. 2.Г. 3.Б. 4.А. 5.Г. 6.Г. 7.Б. 8.Б. 9.А. 10.Г. 11.Б. 12.Б. 13.А. 14.Г. 15. 1Б; 2Г; 3Д; 4А. 16.В. 17.В.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1 Для заданих матриць $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, обчислити $\det(AB)$.

Розв'язання.

Знайдемо добуток заданих матриць:

$$AB=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ -18 & 15 \end{pmatrix}.$$

Тоді визначник отриманої матриці буде: $\det(AB)=\begin{vmatrix} 10 & 0 \\ -18 & 15 \end{vmatrix}=150$.

Приклад 2 Обчислити визначники:

1) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix}$.

Розв'язання.

1) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$;

2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-2+0+18-(-6+3+0)=19$;

$$\downarrow$$

3) $$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix}\begin{matrix} -\mathrm{III} \\ \\ \\ +\mathrm{II} \end{matrix}=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 6 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 7 & 5 \end{vmatrix}\begin{matrix} +\mathrm{II}\cdot 3 \\ \\ \\ \\ \end{matrix}=\begin{vmatrix} 0 & 21 & 4 & 9 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 7 & 5 \end{vmatrix}=$$

$$=-1\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 21 & 4 & 9 \\ 5 & 3 & 2 \\ 6 & 7 & 5 \end{vmatrix}=122.$$

Задачі для самостійного розв’язування

№ 3.1. Обчислити визначники:

1) $\begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} a & a-b \\ a+b & a-1 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 1/2 & 1/2\cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 6 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$;

7) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 0 \\ 8 & 7 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$; 9) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$;

10) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$; 11) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$; 12) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

13) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; 14) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; 15) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

16) $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$; 17) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$;

18) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$; 19) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$;

20) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$; 21) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$.

№ 3.2. Розв’язати рівняння:

1) $\begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix} = 0$; 2) $\begin{vmatrix} \sin 2x & \cos 3x \\ -\cos 2x & \sin 3x \end{vmatrix} = 0$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$.

№ 3.3. Обчислити визначник матриці, яка є добутком двох заданих матриць:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

4 ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ. РАНГ МАТРИЦІ. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Теоретичні відомості

Квадратна матриця називається *невиродженою*, якщо її визначник відмінний від нуля. В противному випадку матриця називається *виродженою*.

Матриця A^{-1} називається *оберненою* матриці A, якщо виконується умова $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, де E – одинична матриця того ж порядку, що й матриця A. Матриця A^{-1} має той же порядок, що й матриця A.

Властивості оберненої матриці:

1. $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det A}$;
2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;
3. $\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$.

Будь-яка невироджена матриця має обернену, яку можна обчислити двома методами:

1. *Метод алгебраїчних доповнень*:

– обчислити визначник даної матриці: $\det A$;

– обчислити алгебраїчні доповнення всіх елементів даної матриці: A_{ij};

– записати обернену матрицю у вигляді:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

2. *Метод приєднання одиничної матриці*:

– приєднати до даної матриці одиничну того ж порядку, тобто записати матрицю виду: $(A \mid E)$;

– привести записану матрицю до виду $\left(E \mid A^{-1}\right)$ за допомогою елементарних перетворень матриць.

Мінором M_k порядку k матриці $A_{m\times n}$ ($k \le \min(m, n)$) називається визначник k-го, складений з елементів цієї матриці, що знаходяться на перетині будь-яких її k рядків і k стовпців.

Базисним мінором матриці $A_{m\times n}$ називається будь-який її мінор порядку r ($r \le \min(m, n)$), якщо він відмінний від нуля, а всі мінори порядку $(r+1)$ або дорівнюють нулю, або не існують. Порядок r базисного мінору називається *рангом матриці* A, а її рядки й стовпці, що входять у базисний мінор, називаються *базисними*.

Для рангу матриці A прийняті позначення: $\operatorname{rang} A$, $r(A)$.

Ранг нульової матриці вважається рівним нулю.

Властивості рангу матриці

1. При транспонуванні матриці її ранг не змінюється.
2. Якщо викреслити з матриці нульовий рядок, то ранг матриці не зміниться.
3. Ранг матриці не змінюється при елементарних перетвореннях рядків матриці.

Способи обчислення рангу матриці

1. Метод обвідних мінорів: пошук базисного мінору.
2. Метод елементарних перетворень матриці: ранг матриці дорівнює кількості ненульових рядків у її ступінчастому виді.

Наприклад,

1) $$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&5\\0&0&0&0&0\\2&0&0&0&11\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&5\\2&0&0&0&11\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&5\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \mathrm{rang}A=2$$

$$\text{або }\begin{vmatrix}1&5\\2&11\end{vmatrix}=11-10=1\neq 0\Rightarrow \mathrm{rang}A=2.$$

2) $$\begin{pmatrix}3&5&7\\1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}4&8&12\\1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\end{pmatrix}\Rightarrow \mathrm{rang}A=2.$$

3) $$\begin{pmatrix}1&2&1&3&4\\3&4&2&6&8\\1&2&1&3&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&3&4\\3&4&2&6&8\end{pmatrix},\ \begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=4-6=-2\neq 0\Rightarrow \mathrm{rang}A=2.$$

Розглянемо систему m лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) із n невідомими:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m.\end{cases}\tag{4.1}$$

Ця система рівнянь характеризується матрицею

$$\widetilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}a_{11}&a_{12}&\ldots&a_{1n}&b_1\\a_{21}&a_{22}&\ldots&a_{2n}&b_2\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\a_{m1}&a_{m2}&\ldots&a_{mn}&b_m\end{array}\right),$$

яка називається *розширеною матрицею системи*. Її розмір – $m\times(n+1)$. Матриця, що стоїть ліворуч вертикальної риски, називається *матрицею системи*. *Елементами матриці системи* (4.1) є коефіцієнти при невідомих. Матриця, що стоїть праворуч від вертикальної риски, називається *стовпцем вільних членів*.

Система лінійних рівнянь (4.1) називається *однорідною*, якщо права частина всіх рівнянь дорівнює нулю.

Розв'язком системи рівнянь (4.1) називають будь-яку впорядковану сукупність дійсних чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, яка має таку властивість: кожне рівняння системи перетворюється в тотожність, якщо покласти в ньому $x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2,\ \ldots,\ x_n = \alpha_n$.

Система (4.1) називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок. Якщо система не має розв'язків, вона називається *несумісною*.

Якщо система (4.1) має більше одного розв'язку, вона називається *невизначеною*, а якщо має єдиний, то називається *визначеною*.

Розв'язки $(\alpha_1; \alpha_2; ...; \alpha_n)$, $(\beta_1; \beta_2; ...; \beta_n)$, ..., $(\gamma_1; \gamma_2; ...; \gamma_n)$ назвемо *лінійно залежними*, якщо знайдуться такі числа $\lambda, \delta, ..., \mu$, не всі рівні нулю, що справедливі рівності

$$\lambda\alpha_i + \delta\beta_i + ... + \mu\gamma_i = 0 \quad (i = 1, ..., n).$$

Розв'язки, що не є лінійно залежними, називаються *лінійно незалежними*, або інакше, розв'язки $(\alpha_1; \alpha_2; ...; \alpha_n)$, $(\beta_1; \beta_2; ...; \beta_n)$, ..., $(\gamma_1; \gamma_2; ...; \gamma_n)$ називаються *лінійно незалежними*, якщо остання рівність можлива лише у випадку, коли всі числа $\lambda, \delta, ..., \mu$ дорівнюють нулю.

Дві системи лінійних алгебраїчних рівнянь називаються *еквівалентними* (*рівносильними*), якщо кожний розв'язок першої системи є розв'язком другої й навпаки або вони обидві несумісні.

Теорема 4.1 Якщо від матриці $\tilde{A}$ до матриці $\tilde{B}$ можна перейти скінченим числом елементарних перетворень рядків, то всякий розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь, відповідний матриці $\tilde{A}$, є розв'язком системи з матрицею $\tilde{B}$ й навпаки, тобто розглянуті системи рівнянь еквівалентні.

Теорема 4.2 (*теорема Кронекера-Капеллі*) Система лінійних алгебраїчних рівнянь (4.1) сумісна тоді й тільки тоді, коли ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці цієї системи, тобто $\operatorname{rang}\tilde{A} = \operatorname{rang} A$.

Наслідок. 1) Якщо ранг матриці сумісної СЛАР дорівнює числу невідомих, то система має єдиний розв'язок, тобто є визначеною. 2) Якщо ранг матриці сумісної СЛАР менше числа невідомих, то система має нескінченну множину розв'язків, тобто є невизначеною.

Методи розв'язання СЛАР

Алгоритм розв'язання системи рівнянь (4.1) ***методом Гаусса***:

1. Записати розширену матрицю $\tilde{A}$ вихідної системи рівнянь.
2. Звести матрицю $\tilde{A}$ до ступінчастого виду за допомогою елементарних перетворень рядків. Якщо в отриманій ступінчастій матриці $\tilde{B}$ є рядок, у якому перший ненульовий елемент перебуває на останньому місці, то вихідна система розв'язків не має (є несумісною).

3. Якщо система рівнянь сумісна, то в системі рівнянь із матрицею $\widetilde{B}$ необхідно відкинути рівняння, які відповідають нульовим рядкам матриці $\widetilde{B}$. У решти рівнянь виділяємо головні невідомі (визначник, складений з коефіцієнтів при них, відмінний від нуля), а члени з вільними невідомими переносимо в праві частини.

4. Послідовно виражаємо головні невідомі через вільні, рухаючись від останнього рівняння до першого. Отримаємо загальний розв'язок системи.

5. Надаючи вільним невідомим різні числові значення й обчислюючи відповідні значення головних невідомих будемо одержувати різні розв'язки вихідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, які називають *частинними розв'язками* системи.

Метод Крамера

Розглянемо тепер систему n лінійних алгебраїчних рівнянь із n невідомими ($n \geq 2$)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{4.2}$$

Одержимо явні вирази для розв'язку системи (4.2) через коефіцієнти a_{ij} цієї системи й вільні члени b_i в припущенні, що визначник матриці системи не дорівнює нулю.

Теорема 4.3 (*Теорема Крамера*) Якщо визначник матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь (4.2)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

відмінний від нуля, то система має єдиний розв'язок, тобто є сумісною й визначеною. Цей розв'язок обчислюється за правилом Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \ldots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

де Δ_i – визначник, який отримано з визначника Δ заміною i-го стовпця стовпцем вільних членів.

Зауваження. Система (4.2) може:

1) мати єдиний розв'язок, коли $\Delta \neq 0$;
2) мати нескінченну множину розв'язків, коли $\Delta = \Delta_i = 0$, $i = \overline{1, n}$;
3) не мати жодного розв'язку, коли $\Delta = 0$ й хоча б один з визначників Δ_i, $i = \overline{1, n}$, відмінний від нуля.

Матричний спосіб

Систему n лінійних алгебраїчних рівнянь із n невідомими (4.2) можна записати в матричному вигляді: $A \cdot X = B$, де A – матриця системи, X – матриця-стовпець невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а B – матриця-стовпець вільних членів. Якщо A – невироджена матриця, то після множення зліва на A^{-1} обох частин матричного рівняння $A \cdot X = B$, одержимо $A \cdot \left(A^{-1} \cdot X\right) = A^{-1} \cdot B$. Так як $A \cdot \left(A^{-1} \cdot X\right) = \left(A \cdot A^{-1}\right) \cdot X = EX = X$, то

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Однорідні СЛАР

Однорідна система є завжди сумісною, тому що має нульовий (*тривіальний*) розв'язок: $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots,\ x_n = 0$. Крім нульового розв'язку, в однорідної системи можуть бути й ненульові розв'язки.

Теорема 4.4 Якщо число рівнянь однорідної системи менше числа невідомих, то система має нетривіальні розв'язки.

З теореми Крамера випливає, що якщо система n однорідних лінійних рівнянь із n невідомими має хоча б один нетривіальний розв'язок, то її визначник дорівнює нулю.

Фундаментальною системою розв'язків (ФСР) однорідної системи рівнянь називається сукупність будь-яких $n - \mathrm{rang}A$ частинних, лінійно незалежних розв'язків однорідної системи, де n – число невідомих у системі, а A – матриця системи.

Для відшукання фундаментальної системи розв'язків однорідної системи користуємося алгоритмом для розв'язання довільних систем алгебраїчних рівнянь. Єдина відмінність полягає в тому, що при знаходженні частинного розв'язку вільним невідомим надаються значення у вигляді одиничної або діагональної матриці (для задоволення умови лінійної незалежності частинних розв'язків).

Системи лінійних алгебричних рівнянь природно виникають під час вивчення потоку деякої величини через мережу. Приміром, це можуть бути потоки електричного струму в енергетичних мережах. Системи рівнянь, за допомогою яких вивчають реальні мережі, можуть містити до сотень, тисяч або й мільйонів рівнянь та невідомих. Мережу складають множина вузлів і множина гілок, які сполучають усі або деякі вузли. Приміром, перехрестя вулиць – це вузол, вулиці — гілки. На кожній гілці вказують напрям потоку, а його величину позначають деякою невідомою.

У задачах на мережевий потік припускають, що:

1) загальний вхідний потік в мережі дорівнює загальному вихідному потоку з мережі;

2) загальний вхідний потік у вузлі дорівнює загальному вихідному потоку з вузла.

Для прикладу розгляньмо електричну схему, що містить чотири резистори і два джерела напруги (рис. 2.5).

Напрями струмів i_1, i_2 та i_3 вказано на кожній ділянці кола стрілками.

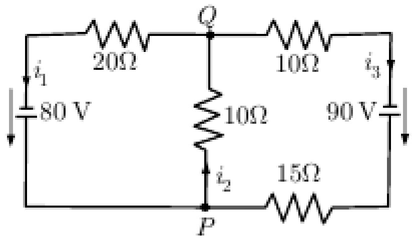


Рисунок 2.5

Струми можна визначити, застосовуючи омів закон

$$\text{Напруга} = \text{струм} \times \text{опір}$$

та два кірхгофових закони:

1) у будь-якій точці кола сума вхідних струмів дорівнює сумі вихідних струмів (кірхгофів закон струмів);

2) у будь-якій петлі сума всіх падінь напруги дорівнює ЕРС (кірхгофів закон напруг).

Застосуємо закони Ома і Кірхгофа до розглядуваного кола:

вузол P: $i_1 - i_2 + i_3 = 0$;

вузол Q: $-i_1 + i_2 - i_3 = 0$;

права петля: $10i_2 + 25i_3 = 90$;

ліва петля: $20i_1 + 10i_2 = 80$.

Бачимо, що рівняння для вузлів P та Q пропорційні, отже, залишаючи лише одне з цих рівнянь, маємо систему:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 + i_3 = 0, \\ 10i_2 + 25i_3 = 90, \\ 20i_1 + 10i_2 = 80. \end{cases}$$

Її можна розв'язати будь-яким методом з представлених вище: $i_1 = 2\text{A}$, $i_2 = 4\text{A}$, $i_3 = 2\text{A}$.

Тест для самоперевірки

1. *Чому дорівнює* $\det\left(4A^{-1}\right)$, *якщо A – матриця третього порядку та її визначник дорівнює 3?*

А 12; **Б** 3; **В** $\frac{4}{3}$; **Г** $\frac{1}{12}$;

2. *Матриця вироджена, якщо її визначник*

А додатний; **Б** дорівнює нулю;
В від'ємний; **Г** не дорівнює нулю.

3. *Нехай A деяка матриця. Для того, щоб вона була оборотною необхідно й достатньо, щоб виконувалось одна з наступних умов:*

А матриця *A* повинна бути прямокутною;
Б матриця *A* повинна бути квадратною;
В матриця *A* повинна бути квадратною виродженою;
Г матриця *A* повинна бути квадратною невиродженою.

4. *Ранг матриці* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ *дорівнює:*

А 1; **Б** 2; **В** 3; **Г** 4.

5. *При яких перетвореннях з наступних ранг матриці не змінюється?*

А при множенні рядка на число;
Б перестановка елементів матриці місцями;
В додавання до стовпця деякого числа;
Г піднесення елементів деякого рядка в квадрат.

6. Система лінійних алгебраїчних рівнянь називається однорідною, якщо

А всі вільні члени дорівнюють нулю;
Б всі вільні члени не дорівнюють нулю;
В деякі вільні члени дорівнюють нулю;
Г деякі вільні члени не дорівнюють нулю.

7. Нехай деяка система лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР$_1$) має єдиний розв'язок $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, ..., \beta_n)$ й поміняввши місцями у всіх рівняннях СЛАР$_1$ коефіцієнти при x_1 й x_2 отримали СЛАР$_2$. Якій умові задовольняє розв'язок СЛАР$_2$?

А має єдиний розв'язок $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, ..., \beta_n)$;
Б вона буде несумісною;
В вона буде сумісною невизначеною;
Г має єдиний розв'язок $(\beta_2, \beta_1, \beta_3, ..., \beta_n)$.

8. Дві системи лінійних рівнянь називаються еквівалентними, якщо вони обидві

А сумісні й кожний розв'язок однієї системи є розв'язком другої і навпаки та вони обидві несумісні;
Б сумісні й кожний розв'язок однієї системи є розв'язком другої і навпаки або вони обидві несумісні;
В сумісні й кожний розв'язок однієї системи є розв'язком другої і навпаки;
Г несумісні.

9. Нехай $r(A)$ – ранг матриці системи, а $r(B)$ – ранг розширеної матриці системи лінійних рівнянь. Необхідною та достатньою умовою сумісності системи є:

А $r(B) = r(A)$;
Б $r(B) = r(A) +$ число ненульових вільних членів;
В $r(A)$ дорівнює числу невідомих;
Г $r(B)$ дорівнює числу рівнянь.

10. Який метод розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь оснований на приведенні розширеної матриці системи до ступінчастого виду?

А метод Крамера; **Б** матричний метод;
В метод трикутника; **Г** метод Гаусса.

11. Матрицею системи лінійних алгебраїчних рівнянь називається матриця, яка складається з

А коефіцієнтів при невідомих;
Б вільних членів;
В коефіцієнтів при невідомих і вільних членів;
Г коефіцієнтів при невідомих або вільних членів.

12. *Розширеною матрицею системи лінійних алгебраїчних рівнянь називається матриця, яка складається з*

А коефіцієнтів при невідомих;
Б вільних членів;
В коефіцієнтів при невідомих і вільних членів;
Г коефіцієнтів при невідомих або вільних членів.

13. *Яку кількість розв'язків має система рівнянь* $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ 4x - 2y = 2? \end{cases}$

А 0; **Б** 1; **В** 2; **Г** безліч.

14. *Яку кількість розв'язків має система рівнянь* $\begin{cases} 2x - y = -1, \\ 4x - 2y = 2? \end{cases}$

А 0; **Б** 1; **В** 2; **Г** безліч.

15. *Яку кількість розв'язків має система рівнянь* $\begin{cases} 2x + y = 1, \\ 4x - 2y = 2? \end{cases}$

А 0; **Б** 1; **В** 2; **Г** безліч.

16. *Відомо, що ранг матриці системи однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь від 7 невідомих дорівнює 5, тоді число розв'язків в фундаментальній системі розв'язків цієї системи дорівнює*

А 0; **Б** 1; **В** 2; **Г** 5.

17. *Для яких систем лінійних алгебраїчних рівнянь можна застосовувати метод Крамера?*

А для будь-яких;
Б квадратних;
В однорідних;
Г квадратних, у яких визначник матриці системи відмінний від нуля.

18. *При розв'язанні системи по правилу Крамера використовують формули (тут Δ – визначник матриці системи, Δ_i – визначник, отриманий з визначника Δ заміною i-го стовпця стовпцем вільних членів)*

А $x_i = \dfrac{\Delta}{\Delta_i}$; **Б** $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$;
В $x_i = \Delta - \Delta_i$; **Г** $x_i = \Delta_i \cdot \Delta$.

19. *Розв'язком матричного рівняння $BY = D$ буде:*

А $Y = B^{-1}D$; **Б** $Y = DB^{-1}$;
В $Y = B : D$; **Г** $X = D : B$.

20. *Фундаментальною системою розв'язків однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь називається*

А будь-який набір частинних розв'язків цієї системи;
Б будь-який ненульовий набір частинних розв'язків цієї системи;
В будь-який лінійно незалежний набір частинних розв'язків цієї системи;
Г будь-який лінійно залежний набір частинних розв'язків цієї системи.

Відповіді: 1.В. 2.Б. 3.Г. 4.А. 5.А. 6.А. 7.Г. 8.Б. 9.А. 10.Г. 11.А. 12.В. 13.Г. 14.А. 15.Б. 16.В. 17.Г. 18.Б. 19.А. 20.В.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1 При яких значеннях λ для матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \lambda & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ не існує оберненої матриці.

Розв'язання.

Оберненої матриці не існує, якщо вихідна матриця вироджена, тобто її визначник дорівнює нулю. Будемо мати:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \lambda & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=3+2\lambda-12+2\lambda=4\lambda-9, \qquad |A|=0 \Rightarrow 4\lambda-9=0,\ \lambda=\frac{9}{4}.$$

Приклад 2 Знайти матрицю, обернену до $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ двома способами.

Розв'язання.

I спосіб.

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=2+3=5; \qquad A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot 1=1,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot(-1)=1, \quad A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot 3=-3, \quad A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot 2=2;$$

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

II спосіб.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \cdot 2+\mathrm{I} \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \end{array}\right)\begin{matrix} \cdot 5-\mathrm{II}\cdot 3 \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 10 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \end{array}\right)\begin{matrix} \cdot 1/10 \\ \cdot 1/10 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/5 & -3/5 \\ 0 & 1 & 1/5 & 2/5 \end{array}\right);$$

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Приклад 3 Знайти ранг матриці $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}\xrightarrow{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}\xleftrightarrow{\mathrm{III}\cdot 2-\mathrm{I}}$$

$$\leftrightarrow\begin{pmatrix}2&4&6\\0&3&2\\0&10&2\end{pmatrix}\xleftrightarrow{\text{III}\cdot 3-\text{II}\cdot 10}\begin{pmatrix}2&4&6\\0&3&2\\0&0&-14\end{pmatrix}\Rightarrow \operatorname{rang}A=3.$$

Приклад 4 Розв'язати системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса:

1) $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=10,\\ x_2-x_4=-2,\\ x_1+x_4=5,\\ 2x_1+2x_2+x_3+x_4=13;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3x_1-5x_2+2x_3+4x_4=2,\\ 7x_1-4x_2+x_3+3x_4=5,\\ 5x_1+7x_2-4x_3-6x_4=3;\end{cases}$

3) $\begin{cases}2x_1-x_2+x_3+2x_4+3x_5=2,\\ 6x_1-3x_2+2x_3+4x_4+5x_5=3,\\ 6x_1-3x_2+4x_3+8x_3+13x_5=9,\\ 4x_1-2x_2+x_3+x_4+2x_5=1.\end{cases}$

Розв'язання.

1) Розширена матриця $\widetilde{A}$ системи рівнянь має вигляд:

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&10\\0&1&0&-1&-2\\1&0&0&1&5\\2&2&1&1&13\end{pmatrix}.$$

Виконавши елементарні перетворення рядків, зведемо матрицю A до ступінчастого виду

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&10\\0&1&0&-1&-2\\1&0&0&1&5\\2&2&1&1&13\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ -\text{I}\\ \text{IV}-2\cdot\text{I}\end{array}\leftrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&10\\0&1&0&-1&-2\\0&-1&-1&0&-5\\0&0&-1&-1&-7\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ +\text{II}\\ \\ \end{array}\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&10\\0&1&0&-1&-2\\0&0&-1&-1&-7\\0&0&-1&-1&-7\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ \\ -\text{III}\end{array}\leftrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&10\\0&1&0&-1&-2\\0&0&-1&-1&-7\\0&0&0&0&0\end{array}\right)=\widetilde{B}.$$

З виду матриці $\widetilde{B}$ випливає, що вихідна система рівнянь сумісна й що головними невідомими є x_1, x_2, x_3, а вільною невідомою – x_4. Виразимо головні невідомі x_1, x_2, x_3, через вільну невідому x_4, розв'язуючи систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 - x_4, \\ \quad x_2 \qquad = -2 + x_4, \\ \qquad - x_3 = -7 + x_4. \end{cases}$$

Рухаючись від останнього рівняння до першого, будемо мати $\begin{cases} x_1 = 5 - x_4, \\ x_2 = -2 + x_4, \\ x_3 = 7 - x_4. \end{cases}$

Поклавши $x_4 = c$, де c – довільне число, одержимо загальний розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 = 5 - c, \\ x_2 = -2 + c, \\ x_3 = 7 - c, \\ x_4 = c. \end{cases}$$

2) $$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 7 & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot 3 - \mathrm{I}\cdot 7 \\ \cdot 3 - \mathrm{I}\cdot 5 \end{array} \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 23 & -11 & -19 & 1 \\ 5 & 46 & -22 & -38 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ - \mathrm{II}\cdot 2 \end{array} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & 23 & -11 & -19 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right).$$

В останньому рядку отриманої ступінчастої матриці перший ненульовий елемент стоїть на останньому місці. Отже, система несумісна.

3) $$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 & 9 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ - 3\cdot \mathrm{I} \\ - 3\cdot \mathrm{I} \\ - 2\cdot \mathrm{I} \end{array} \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -4 & -3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ + \mathrm{II} \\ + \mathrm{III} \end{array} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \\ \cdot(-1) \end{array} \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Матриця ступінчаста, система сумісна, невизначена. x_3, x_4, x_5 – головні невідомі, x_1, x_2 – вільні невідомі.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ \qquad\qquad x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 3, \\ \qquad\qquad\quad x_4 \qquad = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = x_1, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = -1 - 8x_1 + 4x_2, \\ x_4 = 0, \\ x_5 = 1 + 2x_1 - x_2. \end{cases}$$

Приклад 5 Розв'язати систему рівнянь методом Крамера $\begin{cases} 3x+2y+z=5, \\ x+y-z=-2, \\ 4x-y+5z=3. \end{cases}$

Розв'язання.

Обчислимо визначник системи Δ й визначники Δ_x, Δ_y, Δ_z:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix}=-11\neq 0, \qquad \Delta_x=\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}=33,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix}=-55, \qquad \Delta_z=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}=-44.$$

За формулами Крамера одержуємо єдиний розв'язок системи:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{33}{-11}=-3,\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-55}{-11}=5,\ z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{-44}{-11}=4.$$

Приклад 6 Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3x+2y+z=5, \\ x+y-z=-2, \\ 4x-y+5z=3 \end{cases}$ матричним методом.

Розв'язання.

Перепишемо вихідну систему у вигляді $A\cdot X=B$, де $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$,

$X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Обчислимо визначник матриці системи: $|A|=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix}=-11\neq 0$.

Обчислимо алгебраїчні доповнення до всіх елементів матриці системи й потім складемо обернену матрицю:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}=4,\ A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=-9,\ A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}=-5,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}=-11,\ A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=11,\ A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}=11,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-3,\ A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=4,\ A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1,$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 4 & -11 & -3 \\ -9 & 11 & 4 \\ -5 & 11 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо розв’язок:

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 4 & -11 & -3 \\ -9 & 11 & 4 \\ -5 & 11 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 33 \\ -55 \\ -44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Приклад 7 Знайти загальний розв’язок та ФСР однорідної СЛАР:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 \qquad + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Розв’язання.

Зведемо матрицю системи до ступінчастого виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & -1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -\mathrm{I} \\ +\mathrm{I} \\ -\mathrm{I}\cdot 3 \end{array} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & -1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 13 & -2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \cdot 6 - \mathrm{II} \\ -\mathrm{III}\cdot 13 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & -1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & -22 & -22 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ +\mathrm{III}\cdot 2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & -1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -8 \end{pmatrix}.$$

Будемо мати, що $\mathrm{rang} A = 4 < n = 5 \Rightarrow$ система має безліч розв’язків. Запишемо систему, що відповідає отриманій ступінчастій матриці й розв’яжемо її:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ \qquad 6x_2 - x_3 + 5x_4 + 5x_5 = 0, \\ \qquad\qquad x_3 + 7x_4 + 7x_5 = 0, \\ \qquad\qquad\qquad 8x_4 + 8x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2(-x_5) + x_5 = -x_5, \\ x_2 = -5(-x_5) - 5x_5 = 0, \\ x_3 = -7 \cdot (-x_5) - 7x_5 = 0, \\ x_4 = -x_5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_5, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = -x_5 \end{cases}$$ – загальний розв’язок системи;

$(-1;\ 0;\ 0;\ -1;\ 1)$ – фундаментальна система розв’язків.

Задачі для самостійного розв’язування

№ 4.1. Для заданих матриць знайти обернені й зробити перевірку:

1) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

№ 4.2. Знайти ранг матриць:

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

№ 4.3. Дослідити на сумісність і знайти розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь у випадку сумісності:

1) $\begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ x + 2y + z = 0, \\ 2x - y + 3z = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 2y - 4z - 1 = 0, \\ 2x + y - 5z + 1 = 0, \\ x - y - z + 2 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x - y + 2z = 5, \\ 2x - y - z = 2, \\ 4x - 2y - 2z = -3. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 - 7 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 1 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 + 7 = 0. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_4 + 3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 + 6 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 - 2 = 0. \end{cases}$

7) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7. \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 3 = 0, \\ 6x_1 + 9x_2 - 2x_3 - x_4 + 4 = 0, \\ 10x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 - 3 = 0, \\ 8x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 7 = 0. \end{cases}$

9) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 9x_4 = 79, \\ 3x_1 + 13x_2 + 18x_3 + 30x_4 = 263, \\ 2x_1 + 4x_2 + 11x_3 + 16x_4 = 146, \\ x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 9x_4 = 92. \end{cases}$ 10) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1, \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12. \end{cases}$

№ 4.4. Знайти розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь трьома способами, якщо це можливо:

1) $\begin{cases} 2x+y-z=0, \\ x-y-3z=13, \\ 3x-2y+4z=-15; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y-2z=4, \\ 2x-3y+z=3, \\ 3x-2y+6z=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x+2y+z=1, \\ 3x+y+2z=-2, \\ 4x-y-z=7; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5x-3y+6z=6, \\ 2x-y-3z=8, \\ x+4y-2z=9; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x-y+z=3, \\ 2x+y+z=11, \\ x+y+2z=8; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x-y-4z=-2, \\ 6x+2y+z=9, \\ 2x+4y-3z=3; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 5x+y+z=3, \\ 2x-6y-z=8, \\ x+y+z=1; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 2x+4y+z=4, \\ 3x+6y+2z=4, \\ 4x-y-3z=1; \end{cases}$

9) $\begin{cases} x-3y+z=-2, \\ 4x+y-z=3, \\ 5x+2y-3z=0; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} 3x+y-2z=1, \\ x-2y+3z=5, \\ 2x+3y-z=-4; \end{cases}$

11) $\begin{cases} x+2y-z=2, \\ -3x+y+z=9, \\ 2x-3y+2z=9; \end{cases}$ 12) $\begin{cases} 2x+y+z=-7, \\ 2x-y-3z=5, \\ x-3y-z=1. \end{cases}$

№ 4.5 Знайти загальний розв'язок та фундаментальну систему розв'язків однорідної системи рівнянь:

1) $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0, \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0, \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0, \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=0, \\ 3x_1-6x_2+4x_3+2x_4=0, \\ 4x_1-8x_2+17x_3+11x_4=0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3+3x_4+5x_5=0, \\ 6x_1+4x_2+3x_3+5x_4+7x_5=0, \\ 9x_1+6x_2+5x_3+7x_4+9x_5=0, \\ 3x_1+2x_2+4x_3+8x_5=0. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x_1+5x_2+2x_3=0, \\ 4x_1+7x_2+5x_3=0, \\ x_1+x_2-4x_3=0, \\ 2x_1+9x_2+6x_3=0. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 6x_1-2x_2+2x_3+5x_4+7x_5=0, \\ 9x_1-3x_2+4x_3+8x_4+9x_5=0, \\ 6x_1-2x_2+6x_3+7x_4+x_5=0, \\ 3x_1-x_2+4x_3+4x_4-x_5=0. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 5x_1+6x_2-2x_3+7x_4+4x_5=0, \\ 2x_1+3x_2-x_3+8x_4+2x_5=0, \\ 7x_1+9x_2-3x_3+5x_4+6x_5=0, \\ 5x_1+9x_2-3x_3+x_4+6x_5=0. \end{cases}$

5 ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ Й ВЛАСНІ ВЕКТОРИ МАТРИЦІ

Теоретичні відомості

Нехай дана невироджена квадратна матриця *A*, ненульовий стовпець X і число λ. Якщо виконується рівність $AX = \lambda X$, то число λ називають *власним значенням* матриці *A*, а стовпець X – *власним вектором* (*стовпцем*), що відповідає власному значенню λ.

Розглянемо матричну рівність $AX = \lambda X$ і виконаємо деякі перетворення:

$$AX - \lambda X = \theta,$$

$$AX - \lambda EX = \theta,$$

$$(A - \lambda E)X = \theta. \tag{5.1}$$

Останнє матричне рівняння є записом однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Існування ненульового стовпця X рівносильне існуванню ненульового розв'язку цієї системи, тобто визначник матриці цієї системи повинен дорівнювати нулю: $\left| A - \lambda E \right| = 0$ – рівняння для відшукання власних значень, яке називають *характеристичним рівнянням*.

Для відшукання власних векторів підставляємо знайдені λ в систему (5.1) і розв'язуємо однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Зауваження. Нехай дана квадратна матриця порядку n, тоді:

1) число коренів характеристичного рівняння, відмінних від нуля, дорівнює рангу матриці, тобто ранг матриці менше n тоді й тільки тоді, коли хоча б один корінь характеристичного рівняння дорівнює нулю.

2) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \Delta(A)$.

3) якщо матриця симетрична, то всі n коренів характеристичного рівняння дійсні.

Тест для самоконтролю

1. Що називають власним вектором X матриці A?

А вектор X в рівності $AX = \lambda X$;
Б вектор $X \neq \theta$ в рівності $AX = \lambda X$;
В вектор X в рівності $AX = X$;
Г вектор $X \neq \theta$ в рівності $AX = X$.

2. Рівняння для пошуку власних значень називається

А власним; **Б** алгебраїчним;
В характеристичним; **Г** матричним.

3. Що називають власним значенням λ матриці A?

А число λ в рівності $AX = \lambda X$, $X \neq \theta$;
Б число $\lambda \neq \theta$ в рівності $AX = \lambda X$, $X \neq \theta$;
В число λ в рівності $AX = \lambda$, $X \neq \theta$;
Г число $\lambda \neq \theta$ в рівності $AX = \lambda$, $X \neq \theta$.

4. Характеристичним рівнянням матриці A називається рівняння

А $A - \lambda E = \theta$; **Б** $f(\lambda) = A - \lambda E$;
В $f(\lambda) = \det(A - \lambda E)$; **Г** $\det(A - \lambda E) = 0$.

5. *В якому з наступних випадків всі корені характеристичного рівняння дійсні?*

А матриця симетрична;
Б матриця ортогональна;
В порядок матриці – парне число;
Г порядок матриці – непарне число.

6. *Як знайти власні значення матриці А?*

А знайти корені характеристичного рівняння, тоді їх модулі й будуть власними значеннями;
Б знайти корені характеристичного рівняння, тоді їх квадрати й будуть власними значеннями;
В знайти корені характеристичного рівняння, тоді їх сума й буде власним значенням;
Г знайти корені характеристичного рівняння, тоді вони й будуть власними значеннями.

7. *Чому дорівнює число коренів характеристичного рівняння?*

А дорівнює порядку матриці;
Б дорівнює числу коренів, не рівних нулю;
В дорівнює рангу матриці;
Г визначити неможливо.

8. *Як знайти власні вектори матриці А?*

А для будь-якого власного значення знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь $(A-\lambda E)X=\theta$;
Б для одного з власних значень знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь $(A-\lambda E)X=\theta$;
В нульові вектори даного простору;
Г для кожного власного значення знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь $(A-\lambda E)X=\theta$.

9. *Рівняння* $\det(A-\lambda E)=0$ *називається*

А власним; **Б** алгебраїчним;
В характеристичним; **Г** матричним.

10. *Фундаментальна система розв'язків однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь* $(A-\lambda E)X=\theta$ *є*

А власними значеннями матриці;
Б власними векторами матриці, які відповідають власному значенню λ;
В нульовими векторами матриці, які відповідають власному значенню λ;
Г нульовими значеннями матриці.

11. *Рівняння* $\det(A-\lambda E)=0$ *застосовується для пошуку*

А нульових векторів; **Б** нульових значень;
В власних векторів; **Г** власних значень.

12. *Однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь* $(A-\lambda E)X=\theta$ *застосовується для пошуку*

А нульових векторів; **Б** нульових значень;
В власних векторів; **Г** власних значень.

13. *Власні значення матриці є коренями рівняння*

А матричного; **Б** алгебраїчного;
В власного; **Г** характеристичного.

14. *Якими розв'язками однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь* $(A-\lambda E)X=\theta$ *є власні вектори, що відповідають власному значенню* λ*?*

А загальним;
Б частинним;
В довільною системою частинних;
Г лінійно незалежною системою частинних.

15. *Корені характеристичного рівняння називаються*

А нульовими векторами; **Б** нульовими значеннями;
В власними векторами; **Г** власними значеннями.

16. *Фундаментальна система розв'язків однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь з матрицею системи* $A-\lambda E$ *називають*

А нульовими векторами; **Б** нульовими значеннями;
В власними векторами; **Г** власними значеннями.

17. *Якщо квадратна матриця порядку* n *симетрична, то*

А деякі з коренів характеристичного рівняння дійсні;
Б всі n коренів характеристичного рівняння дійсні;
В деякі з коренів характеристичного рівняння цілі;
Г всі n коренів характеристичного рівняння цілі.

18. *Добуток всіх власних значень квадратної матриці порядку* n *дорівнює*

А їх сумі;
Б їх різниці;
В визначнику цієї матриці;
Г модулю визначника цієї матриці.

19. *Чому дорівнює число коренів характеристичного рівняння, відмінних від нуля?*

А рангу матриці;
Б порядку матриці;
В різниці порядку та рангу матриці;
Г сумі порядку та рангу матриці.

20. *Закінчіть речення так, щоб утворилося правильне твердження. «Ранг квадратної матриці порядку* n *менше* n *тоді й тільки тоді, коли …»*

А всі корені характеристичного рівняння не дорівнюють нулю;
Б один корінь характеристичного рівняння дорівнює нулю;
В хоча б один корінь характеристичного рівняння дорівнює нулю;
Г всі корені характеристичного рівняння дорівнюють нулю.

Відповіді: 1.В. 2.В. 3.В. 4.Г. 5.А. 6.Г. 7.А. 8.Г. 9.В. 10.Б. 11.Г. 12.В. 13.Г. 14.Г. 15.Г. 16.В. 17.Б. 18.В. 19.А. 20.В.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1 Знайти власні значення й відповідні їм власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Складемо характеристичне рівняння й знайдемо його корені, тобто власні значення даної матриці:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\left(4-\lambda^2\right)(\lambda+3) + 3 - 2(\lambda+3) - 5(\lambda+2) = 0,$$

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0, \qquad (\lambda+1)^3 = 0, \qquad \lambda_{1,2,3} = -1.$$

Знайдемо власний вектор, що відповідає знайденому власному значенню $\lambda = -1$. Для цього розв'яжемо однорідну СЛАР, записану в матричній формі:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Приведемо матрицю системи до ступінчастого виду:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot 3 - \mathrm{I} \cdot 5 \\ \cdot 3 + \mathrm{I} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -\mathrm{II} \\ \\ \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Запишемо систему, відповідну отриманій матриці й знайдемо її розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 + \quad x_3 = 0, \\ \quad x_2 + x_3 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3, \\ x_2 = -x_3. \end{cases}$$

Таким чином, власний вектор, що відповідає власному значенню $\lambda = -1$, буде мати вигляд $X = (-c; -c; c)$, де $c = const \neq 0$.

Задачі для самостійного розв'язування

№ 5.1. Знайти власні значення й відповідні їм власні вектори наступних матриць:

1) $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$; 2) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

3) $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; 4) $D = \begin{pmatrix} 11 & 8 & 0 \\ 8 & 5 & -10 \\ 0 & -10 & 2 \end{pmatrix}$.

6 КВАДРАТИЧНІ ФОРМИ

Теоретичні відомості

Квадратичною формою називається однорідний многочлен другого степеня від змінних $x_1, x_2, ..., x_n$, тобто многочлен виду

$$f = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + ... + a_{1n}x_1x_n + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{2n}x_2x_n + ... +$$
$$+ a_{n1}x_1x_n + a_{n2}x_2x_n + ... + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j ,$$

де коефіцієнти a_{ij}, ($i, j = 1, ..., n$) – дійсні числа. Вважають $a_{ik} = a_{ki}$.

Із квадратичною формою можна зв'язати квадратну симетричну матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

складену з коефіцієнтів квадратичної форми. Ранг r матриці називається *рангом квадратичної форми*. Якщо $r = n$, то квадратична форма n змінних називається *невиродженою*. Якщо ця матриця діагональна, то говорять, що квадратична форма n змінних має *канонічний* (*діагональний*) вигляд:

$$f = b_1y_1^2 + b_2y_2^2 + \cdots + b_ny_n^2 .$$

Нехай задане лінійне перетворення $X = BX'$, що виражає змінні $x_1, x_2, ..., x_n$ через нові змінні $x_1', x_2', ..., x_n'$. Якщо $\Delta(B) \neq 0$, то перетворення називається *невиродженим*.

Основна задача теорії квадратичних форм – за допомогою різних замін змінних (лінійних перетворень) привести квадратичну форму до канонічного виду.

Зведення квадратичних форм до діагонального виду *невиродженим* лінійним перетворенням змінних може бути здійснене нескінченним числом способів. При цьому коефіцієнти при квадратах змінних у діагональній формі можуть не збігатися, але кількість додатних, від'ємних і нульових коефіцієнтів повинна збігатися.

Стовпець X називається *нормованим*, якщо сума квадратів його елементів дорівнює одиниці, тобто

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \text{ або } X^T X = 1.$$

Два стовпці X й Y, що мають однакове число елементів, називаються *ортогональними*, якщо сума добутків їх відповідних елементів дорівнює нулю, тобто

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = 0 \text{ або } X^T Y = Y^T X = 0 .$$

Квадратна матриця називається *ортогональною*, якщо всі її стовпці нормовані й попарно ортогональні. Щоб квадратна матриця A була ортогональною, необхідно й достатньо, щоб $A^T A = E$. Лінійне перетворення змінних називається *ортогональним*, якщо його матриця ортогональна.

Властивості ортогональних матриць

1. Визначник ортогональної матриці дорівнює ± 1.
2. Добуток ортогональних матриць є ортогональною матрицею.
3. Одинична матриця є ортогональною.
4. Для ортогональної матриці A обернена матриця існує й дорівнює транспонованій $A^{-1} = A^T$, причому обернена матриця те ж ортогональна.

Квадратична форма f називається *додатно-означеною*, якщо при будь-яких значеннях аргументів $f \ge 0$, причому $f = 0$ тоді й тільки тоді, коли $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.

Щоб квадратична форма була додатно-означеною необхідно й достатньо, щоб при приведенні її до діагонального виду невиродженим лінійним перетворенням змінних усі коефіцієнти при квадратах нових змінних були додатні.

Квадратична форма f називається *від'ємно-означеною*, якщо форма $-f$ є додатно-означеною.

Квадратична форма називається *невизначеною*, якщо вона не є визначеною ні додатно, ні від'ємно.

Якщо квадратичну форму можна представити у вигляді

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

де $\lambda = 0, \pm 1$, то говорять, що квадратична форма має *нормальний вид*.

Методи зведення квадратичної форми до канонічного виду

Метод Лагранжа.

1) Якщо всі коефіцієнти при квадратах змінних дорівнюють нулю, то вводимо, наприклад, наступне невироджене перетворення:

$$x_1 = y_1 - y_2,\ x_2 = y_1 + y_2,\ x_i = y_i,\ i = \overline{3, n}.$$

Після цього перетворення коефіцієнт при квадраті нової змінної y_1^2 буде ненульовим.

2) При наявності хоча б одного ненульового коефіцієнту при квадраті змінної, то зручно, наприклад, зробити наступну заміну $y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n$, $y_2 = x_2$, ... $y_n = x_n$. після такої заміни квадратична форма, в даному випадку, буде мати змінну y_1 тільки в квадраті і не мати в інших добутках.

3) Якщо залишилися доданки, що не є квадратами змінних, то повторюємо міркування, розглядаючи перетворення змінних $y_2, ..., y_n$, аналогічні описаним вище, при цьому не змінюючи y_1. За скінченне число таких перетворень ми зведемо квадратичну форму до канонічного вигляду.

Метод власних векторів.

1) Записати матрицю A заданої квадратичної форми.
2) Визначити з рівняння $|A - \lambda E| = 0$ власні значення цієї матриці.

3) Для кожного власного значення λ_k визначити відповідні йому власні вектори (n- вимірні матриці-стовпці).

4) Після того, як будуть знайдені всі n власних векторів матриці A, потрібно координати цих векторів помістити у відповідні стовпці шуканої матриці B.

5) Записати канонічний вид квадратичної форми

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

де $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ – власні значення матриці A.

6) Записати вид лінійного перетворення змінних $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, яке зводить задану квадратичну форму f до канонічного виду.

Тест для самоперевірки

1. *Який многочлен третього степеня з вказаних є квадратичною формою?*

А $f = -x_1^2 - x_2 + 2x_3^2$; **Б** $f = -x_1^2 - x_1x_2 + 2x_3$;

В $f = -x_1 x_2 + 2x_3^2$; **Г** $f = -x_1^2 - x_2 + 2x_3$.

2. *Матрицею квадратичної форми* $g = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$ *є*

А $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; **Б** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$;

В $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; **Г** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. *Яка з квадратичних форм є додатно-означеною?*

А $f = -x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2$; **Б** $f = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2$;

В $f = x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2$; **Г** $f = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2$.

4. *Яка з квадратичних форм є від'ємно-означеною?*

А $f = -x_1^2 - 2x_2x_3$; **Б** $f = -x_2^2 + 2x_3x_1$;

В $f = -3x_1^2 - 4x_2^2 - 2x_3^2$; **Г** $f = x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2$.

5. *Який многочлен третього степеня з представлених є квадратичною формою канонічного виду?*

А $f = -x_1^2 - x_1x_2 + 2x_3^2$; **Б** $f = -x_1^2 - x_1x_2 + 2x_3$;

В $f = -x_1 - x_2 + 2x_3^2$; **Г** $f = -x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2$.

6. *Який многочлен третього степеня з представлених НЕ Є квадратичною формою?*

А $f=-x_1^2-x_1x_2+2x_3^2$; **Б** $f=-x_1^2-x_1x_2+2x_3^2$;

В $f=-x_1-x_2+2x_3^2$; **Г** $f=-x_1^2-x_2^2+2x_3^2$.

7. *Яка з матриць Є ортогональною?*

А $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; **Б** $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

В $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; **Г** $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

8. *Який многочлен третього степеня з вказаних є квадратичною формою, але не має канонічного виду?*

А $f=-x_1^2-x_1x_2+2x_3^2$; **Б** $f=-x_1^2-x_1x_2+2x_3$;

В $f=-x_1-x_2+2x_3^2$; **Г** $f=-x_1^2-x_2^2+2x_3^2$.

9. *Відомо, що матриця* $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ *є ортогональною. Оберненою до неї буде матриця:*

А $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; **Б** $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

В $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$; **Г** $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

10. *Яку першу заміну можна зробити при зведенні квадратичної форми* $f=x_1^2+5x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$ *до канонічного виду?*

А $x_1=y_1-y_2$, $x_2=y_1+y_2$, $x_3=y_3$;

Б $y_1=x_1-x_2$, $y_2=x_1+x_2$, $y_3=x_3$;

В $y_1=x_1+2x_2-4x_3$, $y_2=x_2$, $y_3=x_3$;

Г $y_1=x_1+x_2-2x_3$, $y_2=x_2$, $y_3=x_3$.

11. *Квадратична форма називається невиродженою, якщо її ранг*

А дорівнює кількості змінних;

Б менше кількості змінних;

В більше кількості змінних;

Г або дорівнює або менше кількості змінних.

12. *Яка з квадратичних форм зведена до канонічного виду та є від'ємно-означеною?*

А $f=-2x_1x_2+2x_3^2$; **Б** $f=-3x_1^2-4x_2^2-2x_3^2$;

В $f=-x_1^2-2x_2x_3$; **Г** $f=x_1^2-x_2^2-2x_3^2$.

13. Квадратична форма $g=2y_1^2+\frac{1}{2}y_2^2+\frac{-17}{2}y_3^2$ *має нормальний вид*

А $g=z_1^2+z_2^2+z_3^2$; **Б** $g=z_1^2-z_2^2+z_3^2$;

В $g=-z_1^2-z_2^2+z_3^2$; **Г** $g=-z_1^2-z_2^2-z_3^2$.

14. Канонічний вид квадратичної форми в ортогональному базисі має в якості канонічних коефіцієнтів

А тільки 1;

Б тільки 1 або –1;

В тільки 0, 1 або –1;

Г власні значення матриці квадратичної форми.

15. Матриця перетворення квадратичної форми, зведеної до канонічного виду ортогональним перетворенням змінних є

А одиничною; **Б** діагональною;

В ортогональною; **Г** симетричною.

16. Стовпець X *називається нормованим, якщо*

А сума квадратів його елементів дорівнює нулю;

Б квадрат суми його елементів дорівнює одиниці;

В сума квадратів його елементів дорівнює одиниці;

Г квадрат суми його елементів дорівнює нулю.

17. Два стовпці X *й* Y*, що мають однакове число елементів, називаються ортогональними, якщо*

А сума добутків їх відповідних елементів дорівнює одиниці;

Б сума добутків їх відповідних елементів дорівнює нулю;

В добуток суми їх відповідних елементів дорівнює нулю;

Г добуток суми їх відповідних елементів дорівнює одиниці.

18. Яку першу заміну можна зробити при зведенні квадратичної форми $f=2x_1x_2-4x_1x_3$ *до канонічного виду?*

А $x_1=y_1-y_2,\ x_2=y_1+y_2,\ x_3=y_3$;

Б $y_1=x_1+2x_2-4x_3,\ y_2=x_2,\ y_3=x_3$;

В $x_1=y_1+y_2-2y_3,\ x_2=y_2,\ x_3=y_3$;

Г $y_1=x_1+x_2-2x_3,\ y_2=x_2,\ y_3=x_3$.

19. Якщо власні значення $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1,\ \lambda_4=-3$ *матриці квадратичної форми* $f=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$*, то квадратична форма має наступний канонічний вид*

А $f=-y_1^2-y_2^2-y_3^2+3y_4^2$; **Б** $f=y_1^2+y_2^2+y_3^2-y_4^2$;

В $f=y_1^2+y_2^2+y_3^2-3y_4^2$; **Г** $f=y_1^2-3y_4^2$.

20. Форма $g=9t_1^2-2t_2^2+3t_3^2$ *зводиться до нормального виду заміною*

А $\begin{cases} 9t_1 = z_1, \\ 2t_2 = z_2, \\ 3t_3 = z_3; \end{cases}$ **Б** $\begin{cases} 3t_1 = z_1, \\ \sqrt{2}t_2 = z_2, \\ \sqrt{3}t_3 = z_3; \end{cases}$

В $\begin{cases} 9t_1 = z_1, \\ -2t_2 = z_2, \\ 3t_3 = z_3; \end{cases}$ **Г** $\begin{cases} 3t_1 = z_1, \\ -\sqrt{2}t_2 = z_2, \\ \sqrt{3}t_3 = z_3. \end{cases}$

Відповіді: 1.В. 2.Г. 3.Б. 4.В. 5.Г. 6.В. 7.А. 8.А. 9.А. 10.Г. 11.А. 12.Б. 13.Б. 14.Г. 15.В. 16.В. 17.Б. 18.А. 19.В. 20.Б.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1 Звести до канонічного виду квадратичну форму методом Лагранжа

$$f = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_3.$$

Розв'язання.

Зробимо заміну змінних $x_1 = y_1 - y_2$, $x_2 = y_1 + y_2$, $x_3 = y_3$. Тоді квадратична форма перетвориться до виду

$$f = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 - 8y_2y_3.$$

Зробимо нову заміну змінних

$$z_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 = 2y_1 - 2y_3 = 2(y_1 - y_3),\ z_2 = y_2,\ z_3 = y_3,$$

одержимо

$$f = \frac{1}{2}z_1^2 - 2z_2^2 - 8z_2z_3 - 2z_3^2 = \frac{1}{2}z_1^2 - 2\left[(z_2 + 2z_3)^2 - 3z_3^2\right].$$

Після заміни змінних $z_1 = t_1$, $z_2 + 2z_3 = t_2$, $z_3 = t_3$ квадратична форма f буде зведена до канонічного виду

$$f = \frac{1}{2}t_1^2 - 2t_2^2 + 6t_3^2.$$

Приклад 2 Звести ортогональним перетворенням змінних квадратичну форму $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$ до канонічного виду.

Розв'язання.

Запишемо матрицю заданої квадратичної форми

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Складемо характеристичне рівняння $|A - \lambda E| = 0$:

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=(\lambda-1)^3(\lambda+3)=0.$$

Власними значеннями матриці A є числа $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$, $\lambda_4=-3$.

Отже, канонічний вигляд квадратичної форми буде: $f=y_1^2+y_2^2+y_3^2-3y_4^2$.

Задачі для самостійного розв'язування

№ 6.1. Звести до канонічного виду квадратичну форму методом Лагранжа:

1) $f=x_1^2+5x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$;

2) $f=x_1^2+x_2^2+5x_3^2-6x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$.

№ 6.2. Звести до канонічного виду квадратичну форму ортогональним перетворенням змінних:

1) $f=x_1^2+2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3$;

2) $f=11x_1^2+5x_2^2+2x_3^2+16x_1x_2+4x_1x_3-20x_2x_3$;

3) $f=x_1^2+x_2^2+5x_3^2-6x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$.

7 ОЗНАЧЕННЯ ВЕКТОРА. ЛІНІЙНІ ОПЕРАЦІЇ НАД ВЕКТОРАМИ. ДІЛЕННЯ ВІДРІЗКА В ДАНОМУ ВІДНОШЕННІ

Теоретичні відомості

Вектор – напрямлений відрізок прямої. Позначення: $\overline{a}$ або $\vec{a}$. Якщо A – початок вектора, а B – кінець, то тоді вектор можна позначити так: $\overline{AB}$ або $\overrightarrow{AB}$.

Відстань між кінцем і початком вектора $\overline{a}$ будемо називати *довжиною* або *модулем вектора* й позначати одним із символів: $\left|\overline{a}\right|$ або a.

Два або більше векторів називають *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Три або більше векторів називають *компланарними*, якщо всі вони паралельні деякій площині або лежать в одній площині.

Якщо довжина вектора $\overline{a}$ дорівнює нулю, то вектор $\overline{a}$ називають *нульовим* і пишуть $\overline{a} = \overline{0}$.

Якщо положення початкової точки вектора в просторі значення не має, такі вектори називають *вільними*. Два вільні вектори називають *однаково спрямованими* ($\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$), якщо вони колінеарні та їх кінці лежать по одну сторону від прямої, що проходить через їх початки. В противному випадку вектори називають *протилежно спрямованими* ($\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$). Два вільних вектори вважаються *рівними*, якщо вони мають однакові довжини й однакові напрямки.

З останнього означення випливає, що рівні вектори можна переносити паралельно самим собі (таке перенесення не змінює їхніх довжин і напрямів). Однак, не завжди такі перенесення допустимі.

Приміром, $\overline{v}$ – швидкість частинки води гірського водоспаду в який-небудь момент. Навряд чи можна стверджувати, що швидкість потоку в будь-якій іншій точці буде така сама. За фізичним змістом цей вектор не можна переносити в іншу точку простору. Такі вектори називають *зв'язаними*.

Якщо ж $\overline{v}$ – швидкість тросу, що рівномірно підіймає вантаж (рис. 7.1), то перенесення цього вектора вздовж прямої дії сили натягу цілком можливе. Такі вектори називають *ковзними*.

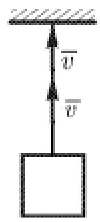


Рисунок 7.1

Якщо, нарешті, $\overline{v}$ – швидкість кабіни ліфта (рис. 7.2), то вектор можна перенести в будь-яку її точку. Такі вектори називають *вільними*.

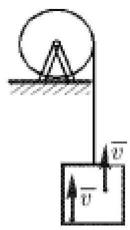


Рисунок 7.2

Під *лінійними операціями* над векторами розуміють операції додавання векторів і множення вектора на число. *Сумою* векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називають вектор $\overline{c}$, який можна отримати в результаті таких дій: з довільної точки A простору відкладаємо вектор $\overline{a}$, а з кінця B цього вектора відкладаємо вектор $\overline{b}$, будемо вважати при цьому, що кінець вектора $\overline{b}$ розташовано в точці C, тоді вектор $\overline{AC}$ і є сума векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ (рис 7.3а). У деяких випадках зручніше користуватися правилом паралелограма (рис. 7.3б): якщо вектори відкласти від однієї точки, то вектор суми – це та діагональ паралелограма, початок якої знаходиться в тій самій точці, що й початки векторів-доданків.

а) правило трикутника *б) правило паралелограма*

Рисунок 7.3 – Правила суми двох векторів

За правилом трикутника поняття суми легко узагальнюється на випадок будь-якого скінченого числа векторів.

Вектор $\overline{b}$ будемо називати *протилежним* вектору $\overline{a}$, якщо $\overline{a}=-\overline{b}$. Вектор, протилежний вектору $\overline{a}$, позначають так: $-\overline{a}$. Напрямки $\overline{a}$ й $-\overline{a}$ протилежні, а модулі однакові.

Під *різницею* векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ розуміють вектор $\overline{a}+\left(-\overline{b}\right)$. Різницю векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ будемо позначати так: $\overline{a}-\overline{b}$.

Добутком вектора $\overline{a}$ на число α називають вектор, який має довжину $|\alpha|\cdot|\overline{a}|$. Напрямок вектора $\alpha\overline{a}$ збігається з напрямком вектора $\overline{a}$, якщо $\alpha>0$, і протилежний йому, якщо $\alpha<0$. Якщо $\alpha=0$, то $0\cdot\overline{a}=\overline{0}$.

Властивості операцій додавання векторів і множення їх на числа

(для будь-яких векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ та будь-яких дійсних чисел α і β)

1. Додавання векторів *комутативне*: $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$.
2. Додавання векторів *асоціативне*: $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{c}=\overline{a}+\left(\overline{b}+\overline{c}\right)$.
3. Додавання нульового вектора до будь-якого вектора $\overline{a}$ не змінює останнього: $\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$.
4. Множення вектора на число *асоціативне*: $(\alpha\beta)\overline{a}=\alpha(\beta\overline{a})$.
5. Множення вектора на число *дистрибутивне стосовно додавання чисел*: $(\alpha+\beta)\overline{a}=\alpha\overline{a}+\beta\overline{a}$.
6. Множення вектора на число *дистрибутивне стосовно додавання векторів*: $\alpha\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=\alpha\overline{a}+\alpha\overline{b}$.
7. Множення вектора на одиницю не змінює останнього $1\cdot\overline{a}=\overline{a}$, $1\in R$.

Використовуючи лінійні операції над векторами, можна формувати суми такого виду $\alpha_1\overline{a}_1+\alpha_2\overline{a}_2+...+\alpha_n\overline{a}_n$, які називаються *лінійними комбінаціями векторів* $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$.

Нехай на площині або в просторі зафіксована точка *O* (*полюс*). Вектор $\overline{OM}$ з початком у точці *O* та кінцем у деякій точці *M* площини або простору називається *радіус-вектором* точки *M*: $\overline{r}_M$.

Нехай дано три точки *A*, *B*, *C*, що лежать на одній прямій. Говорять, що точка *C* ділить напрямлений відрізок *AB* у відношенні λ, якщо $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}}=\lambda$ (або $\overline{AC}=\lambda\overline{CB}$).

Теорема 1.1 Якщо точка *C* ділить відрізок *AB* у відношенні $\lambda\neq-1$, то радіус вектор $\overline{r}_C$ точки *C* виражається через радіус-вектори $\overline{r}_A$ і $\overline{r}_B$ точок *A* й *B* наступним чином: $\bar{r}_C = \dfrac{\bar{r}_A + \lambda \bar{r}_B}{1+\lambda}$, $\lambda \neq -1$ – формула ділення відрізка в даному відношенні.

Тест для самоперевірки

1. *$ABCD$ – квадрат. Сума яких із зазначених векторів є нульовим вектором?*

А $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$; **Б** $\overline{DC}$ і $\overline{AB}$;

В $\overline{AC}$ і $\overline{DA}$; **Г** $\overline{BC}$ і $\overline{AD}$.

2. *$ABCD$ – паралелограм. Точки M і N – середини AB і BC відповідно. Скільки з представлених пар векторів колінеарні: $\{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}\}$, $\{\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AC}\}$, $\{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\}$, $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\}$?*

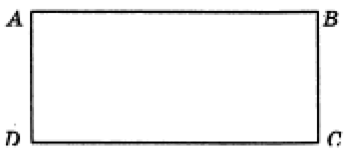
А 1; **Б** 2; **В** 3; **Г** 4.

3. *Векторною величиною є:*

А маса тіла; **Б** швидкість тіла;

В час; **Г** площа.

4. *На рисунку $ABCD$ – прямокутник. Тоді вектор $\overrightarrow{BC}$ буде дорівнювати вектору:*



А $\overrightarrow{AD}$; **Б** $\overrightarrow{DA}$;

В $\overrightarrow{CB}$; **Г** $\overrightarrow{AB}$.

5. *Рівність $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ називається:*

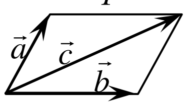
А переставна властивість; **Б** сполучна властивість;

В правилом трикутника; **Г** правилом паралелограма.

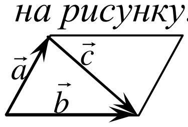
6. *В ΔABC відрізок MN $(MN \parallel BC)$ – середня лінія. Число k, для якого $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{MA}$, дорівнює:*

А 2; **Б** –2; **В** 0,5; **Г** –0,5.

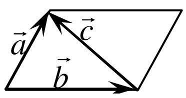
7. *Вектор $\vec{c}$ є різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ на рисунку:*

А 

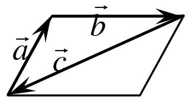
;

Б 

;

В 

;

Г 

.

8. *$ABCD$ – паралелограм, O – точка перетину його діагоналей. Знайдіть $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OA}$:*

А $\overrightarrow{OC}$; **Б** $\overrightarrow{BO}$; **В** $\overrightarrow{OB}$; **Г** $\overrightarrow{CO}$.

9. *O – точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{c}$. Виразіть вектор $\vec{c}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.*

А $\vec{c} = \dfrac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$; **Б** $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$;

В $\vec{c} = \dfrac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$; **Г** $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$.

10. *Оберіть правильне твердження:*

А якщо точка *M* ділить відрізок *AB* у відношенні λ, то $\frac{BM}{MA} = \lambda$;

Б точка *M*, що належить прямій M_1M_2, може ділити відрізок M_1M_2 у відношенні $\lambda < 0$;

В якщо точка *M* – середина відрізка *AB*, то точка *M* ділить відрізок *AB* у відношенні $\lambda = \frac{1}{2}$;

Г якщо точка *M* ділить відрізок *AB* у відношенні λ, то точка *M* ділить відрізок *BA* у відношенні $(-\lambda)$.

11. ABCD – квадрат. Укажіть пари рівних векторів.

А $\overline{AB}$ і $\overline{DC}$; **Б** $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$;

В $\overline{BC}$ і $\overline{DA}$; **Г** $\overline{BC}$ і $\overline{AC}$.

12. Точка M – середина відрізка AB, тоді точка M ділить відрізок AB у відношенні:

А $\lambda = -0{,}5$; **Б** $\lambda = 0{,}5$; **В** $\lambda = 1$; **Г** $\lambda = 2$.

13. ABCD – паралелограм. Укажіть пари колінеарних векторів.

А $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$; **Б** $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$;

В $\overline{AB}$ і $\overline{BC}$; **Г** $\overline{DA}$ і $\overline{BD}$.

14. Точка M – середина відрізка AB. Укажіть вірну векторну рівність.

А $\bar{r}_M = 0{,}5(\bar{r}_A - \bar{r}_B)$; **Б** $\bar{r}_M = 0{,}5(\bar{r}_A + \bar{r}_B)$;

В $\bar{r}_M = \bar{r}_A - \bar{r}_B$; **Г** $\bar{r}_M = \bar{r}_A + \bar{r}_B$.

15. ABCD – паралелограм. Укажіть пари неколінеарних векторів.

А $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$; **Б** $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$;

В $\overline{AB}$ і $\overline{BA}$; **Г** $\overline{DA}$ і $\overline{BC}$.

16. Точка M ділить відрізок AB у відношенні $\lambda = -0{,}5$. Вкажіть вірну векторну рівність.

А $\bar{r}_M = 0{,}5(\bar{r}_A - \bar{r}_B)$; **Б** $\bar{r}_M = 0{,}5(\bar{r}_A + \bar{r}_B)$;

В $\bar{r}_M = 2\bar{r}_A - \bar{r}_B$; **Г** $\bar{r}_M = 2\bar{r}_A + \bar{r}_B$.

17. Точка M ділить відрізок AB у відношенні $\lambda = 1{,}5$. Укажіть вірну векторну рівність.

А $\bar{r}_M = 0{,}2(2\bar{r}_A - 3\bar{r}_B)$; **Б** $\bar{r}_M = 0{,}2(2\bar{r}_A + 3\bar{r}_B)$;

В $\bar{r}_M = 1{,}5(\bar{r}_A - \bar{r}_B)$; **Г** $\bar{r}_M = 1{,}5(\bar{r}_A + \bar{r}_B)$.

18. Оберіть неправильне твердження:

А якщо точка *M* ділить відрізок *AB* у відношенні λ, то $\frac{BM}{MA} = \lambda$;

Б точка *M*, що лежить на прямій M_1M_2, може ділити відрізок M_1M_2 у відношенні $\lambda < 0$;

В якщо точка *M* – середина відрізка *AB*, то точка *M* ділить відрізок *AB* у відношенні $\lambda = 1$;

Г якщо точка *M* ділить відрізок *AB* у відношенні λ, то відрізок *BA* точка *M* ділить у відношенні $\frac{1}{\lambda}$.

19. *Відомо, що* $\bar{r}_M = -2\bar{r}_A + 3\bar{r}_B$. *У якому відношенні точка M ділить відрізок AB?*

А $\frac{3}{2}$; **Б** $-\frac{2}{3}$; **В** $-\frac{3}{2}$; **Г** $\frac{2}{3}$.

20. *Відомо, що точка M ділить відрізок AB у відношенні* λ. *У якому відношенні ця точка ділить відрізок BA?*

А $-\lambda$; **Б** $\lambda+1$; **В** $\frac{1}{\lambda}$; **Г** $1-\lambda$.

Відповіді: 1.А. 2.Б. 3.Б. 4.А. 5.А. 6.Б. 7.В. 8.Б. 9.А. 10.Б. 11.А. 12.В. 13.А. 14.Б. 15.Б. 16.В. 17.Б. 18.А. 19.В. 20.В.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1 У трикутнику *ABC* пряма *AM* – бісектриса кута *BAC*, причому точка *M* належить стороні *BC*. Виразити вектор $\overline{AM}$ через $\overline{AB} = \bar{b}$, $\overline{AC} = \bar{c}$.

Розв'язання.

$\overline{BC} = \bar{c} - \bar{b}$. За властивістю бісектриси внутрішнього кута трикутника маємо $\left|\overline{BM}\right| : \left|\overline{MC}\right| = \left|\bar{b}\right| : \left|\bar{c}\right|$, $\left|\overline{BM}\right| : \left|\overline{BC}\right| = \left|\bar{b}\right| : \left(\left|\bar{b}\right| + \left|\bar{c}\right|\right)$.

Отже, $\overline{BM} = \frac{\left|\bar{b}\right|}{\left|\bar{b}\right| + \left|\bar{c}\right|}\left(\bar{c} - \bar{b}\right)$. Оскільки $\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{BM}$, то

$$\overline{AM} = \bar{b} + \frac{\left|\bar{b}\right|}{\left|\bar{b}\right| + \left|\bar{c}\right|}\left(\bar{c} - \bar{b}\right) = \frac{\bar{b}\left|\bar{c}\right| + \bar{c}\left|\bar{b}\right|}{\left|\bar{b}\right| + \left|\bar{c}\right|}.$$

Приклад 2 Радіус-векторами вершин *A*, *B*, С трикутника *ABC* є $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, $\bar{r}_3$ відповідно. Знайти радіус-вектор точки *M* перетину медіан трикутника.

Розв'язання.

Оскільки $\overline{BC} = \bar{r}_3 - \bar{r}_2$, $\overline{BD} = \frac{\bar{r}_3 - \bar{r}_2}{2}$ (*D* – середина *BC*), $\overline{AB} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$, $\overline{AD} = \overline{BD} + \overline{AB} = \frac{\bar{r}_3 - \bar{r}_2}{2} + \bar{r}_2 - \bar{r}_1 = \frac{\bar{r}_3 + \bar{r}_2 - 2\bar{r}_1}{2}$, $\overline{AM} = \frac{2}{3}\overline{AD}$, тому $\overline{AM} = \frac{\bar{r}_3 + \bar{r}_2 - 2\bar{r}_1}{3}$. Отже, $\bar{r}_M = \bar{r}_1 + \overline{AM} = \frac{\bar{r}_1 + \bar{r}_2 + \bar{r}_3}{3}$.

Приклад 3 У трикутнику *ABC* сторона *AB* точками *M* і *N* поділена на три рівні частини: $\left|\overline{AM}\right| = \left|\overline{MN}\right| = \left|\overline{NB}\right|$. Виразити вектор $\overline{CM}$ через $\overline{CA} = \bar{a}$, $\overline{CB} = \bar{b}$.

Розв'язання.

Оскільки $\overline{AB} = \bar{b} - \bar{a}$, то $\overline{AM} = \frac{\bar{b} - \bar{a}}{3}$. Враховуючи, що $\overline{CM} = \overline{CA} + \overline{AM}$, маємо

$$\overline{CM} = \overline{a} + \frac{\overline{b} - \overline{a}}{3} = \frac{2\overline{a} + \overline{b}}{3}.$$

Приклад 4 Двоє людей різної маси гойдаються на гойдалці (рис. 7.4). де треба розташувати опору гойдалки, щоб ніхто не переважував?

Рисунок 7.4

Розв'язання.

Змоделюємо цю задачу. Об'єктом дослідження є розташування місця опори гойдалки, на якій сидять двоє людей різної маси. Вважатимемо гойдалку недеформованим стрижнем, що розташований на точковій опорі, до кінців якого прикладені сили ваги першої і другої людини. Треба знайти рівнодійну цих сил, що й дозволить визначити шукану реакцію опори.

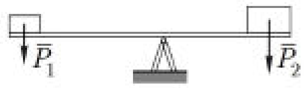


Рисунок 7.5

Розглянемо математичну модель. Нехай відрізок AB є недеформованим стрижнем (рис. 7.5). до кінців відрізка прикладені вектори $\overline{P_1}$ та $\overline{P_2}$, що відповідають силам ваги тих, хто гойдається. Знайдемо точку перетину прямої, уздовж якої діє рівнодійна, з відрізком AB.

Розглядувані вектори за фізичним змістом задачі є ковзними векторами, тому їх не можна звести до спільного початку. Але рівнодійна сил $\overline{P_1}$ та $\overline{P_2}$ існує. Доповнимо задану систему векторів вектором $\overline{F}$, прикладеним до точки A, і який лежить на прямій AB, а також вектором $-\overline{F}$, прикладеним до точки B (рис. 7.6). Сума векторів $\overline{F}$ та $-\overline{F}$ є нульовим вектором, тому нова система векторів рівносильна вихідній. Але

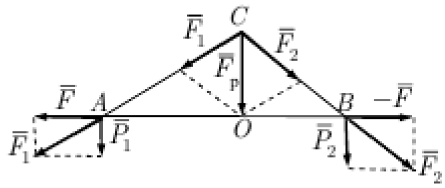


Рисунок 7.6

$$\begin{cases} \overline{F_1} = \overline{P_1} + \overline{F}, \\ \overline{F_2} = \overline{P_2} - \overline{F} \end{cases} \Rightarrow \overline{P_1} + \overline{P_2} = \overline{F_1} + \overline{F_2} = \overline{F_p}.$$

Переміщуючи вектори $\overline{F_1}$ та $\overline{F_2}$ уздовж відповідних прямих їх дій, дістанемо у перетині точку C. З геометричних міркувань випливає, що $\overline{F_p} \parallel \overline{P_1} \parallel \overline{P_2}$. Тому $\left|\overline{F_p}\right| = \left|\overline{P_1}\right| + \left|\overline{P_2}\right|$. За фізичним змістом реакція опори $\overline{R} = -\overline{F_p}$ і прикладена вона до точки перетину AB з OC.

Задачі для самостійного розв'язування

№ 7.1. Спростити вирази:

1) $\overline{AB} - \overline{CB} - \overline{DC} - \overline{AK} - \overline{KC} - \overline{CD}$; 2) $\overline{AB} + \overline{MN} + \overline{BC} + \overline{CA} + \overline{PQ} + \overline{NM}$;

3) $\overline{AD} + \overline{MP} + \overline{EK} - \overline{EP} - \overline{MD}$; 4) $2\overline{x} - \overline{a} + 3\overline{b} - \overline{x} + 3\overline{a} - \overline{b}$.

№ 7.2. Для довільних векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ побудувати:

1) $2\overline{a} - \frac{1}{3}\overline{b}$, $\frac{1}{2}\overline{a} + 3\overline{b}$, $-2\overline{a} - 3\overline{b}$, $-3\overline{a} + 2\overline{b}$;

2) $4\overline{a} - \frac{1}{2}\overline{b}$, $\frac{1}{4}\overline{a} + \frac{1}{3}\overline{b}$, $-3\overline{a} - 4\overline{b}$, $-\frac{2}{3}\overline{a} + \frac{3}{4}\overline{b}$.

№ 7.3. Побудувати суму та різницю векторів $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$, $\overline{AB}$ і $\overline{DC}$ трапеції $ABCD$, що є її основами.

№ 7.4. У правильному п'ятикутнику $ABCDE$ задані вектори, що збігаються з його сторонами: $\overline{AB} = \overline{m}$, $\overline{BC} = \overline{n}$, $\overline{CD} = \overline{p}$, $\overline{DE} = \overline{q}$, $\overline{EA} = \overline{r}$. Побудувати вектори:

1) $\overline{m} - \overline{n} + \overline{p} - \overline{q} + 2\overline{r}$;

2) $\overline{m} + 2\overline{p} + \frac{1}{2}\overline{r}$;

3) $2\overline{m} + \frac{1}{2}\overline{n} - 3\overline{p} - \overline{q} + 2\overline{r}$.

№ 7.5. Задано $\overline{AB} = \overline{a} + 2\overline{b}$, $\overline{BC} = -4\overline{a} - \overline{b}$, $\overline{CD} = -5\overline{a} - 3\overline{b}$. Довести, що $ABCD$ – трапеція.

№ 7.6. У трикутнику ABC вектори $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{BC} = \overline{b}$. Знайти вектори, що збігаються з медіанами цього трикутника.

№ 7.7. Визначити будь-який вектор, що ділить навпіл кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$.

№ 7.8. Нехай $\overline{r}_1$, $\overline{r}_2$, $\overline{r}_3$ – радіус-вектори трьох послідовних вершин паралелограма *ABCD*. Знайти радіус-вектор вершини *D*.

№ 7.9. Дано правильний шестикутник $ABCDEF$, точка O – його центр. Виразити вектори $\overline{OC}$, $\overline{OD}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DA}$, $\overline{CA}$ через вектори $\overline{OA} = \overline{a}$, $\overline{OB} = \overline{b}$.

№ 7.10. Точка *O* – центр ваги трикутника *ABC*. Виразити вектори $\overline{AC}$, $\overline{CB}$, $-\frac{1}{2}\overline{AB}$, $\overline{AO}$ через вектори $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{BC} = \overline{b}$.

№ 7.11. У тетраедрі $ABCD$ точки M і N є серединами ребер DA і BC відповідно. Виразити вектор $\overline{MN}$ через вектори $\overline{DA}$, $\overline{DB}$, $\overline{DC}$.

№ 7.12. У паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ задані вектори, що збігаються з його ребрами: $\overline{AB} = \overline{m}$, $\overline{AD} = \overline{n}$, $\overline{AA_1} = \overline{p}$. Побудувати вектори:

1) $\overline{m} + \overline{n} + \overline{p}$; 2) $\overline{m} + \overline{n} + \frac{1}{2}\overline{p}$; 3) $\frac{1}{2}\overline{m} + \frac{1}{2}\overline{n} + \overline{p}$;

4) $\overline{m} + \overline{n} - \overline{p}$; 5) $-\overline{m} - \overline{n} + \frac{1}{2}\overline{p}$.

№ 7.13. Точка *O* – центр ваги трикутника *ABC*. Довести, що $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{0}$.

№ 7.14. Точка M_1 – середина відрізка A_1B_1, точка M_2 – середина відрізка A_2B_2. Довести векторну рівність $\overline{M_1M_2} = \frac{1}{2}\left(\overline{A_1A_2} + \overline{B_1B_2}\right)$.

№ 7.15. Побудувати точку *M*, що ділить відрізок *AB* у відношенні:

1) ± 2, $\pm\frac{1}{2}$; 2) $\pm\frac{3}{4}$, $\pm\frac{4}{3}$; 3) 3, –4, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$.

№ 7.16. Точка *M* ділить відрізок *AB* у відношенні $\lambda = -\frac{2}{3}$. Виразити радіус-вектор точки *B* через радіус вектори точок *A* і *M*.

8 ЛІНІЙНА ЗАЛЕЖНІСТЬ ВЕКТОРІВ. ПОНЯТТЯ ВЕКТОРНОГО ПРОСТОРУ, БАЗИСУ Й КООРДИНАТ ВЕКТОРА

Теоретичні відомості

Вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ називаються *лінійно залежними*, якщо існують дійсні числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, серед яких хоча б одне відмінне від нуля, такі, що $\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + ... + \alpha_n\overline{a}_n = \overline{0}$. Якщо остання рівність можлива тільки при тривіальному наборі чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, тобто $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, то вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ називаються *лінійно незалежними*.

Вектор $\overline{b} = \alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + ... + \alpha_n\overline{a}_n$ називають лінійною комбінацією векторів $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$. В цій рівності $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ – дійсні числа.

Теорема 8.1 Для того, щоб система векторів була лінійно залежною, необхідно й достатньо, щоб один з векторів був лінійною комбінацією інших.

Теорема 8.2 Два вектори лінійно залежні тоді й тільки тоді, коли вони колінеарні.

Наслідок. Два неколінеарних вектори лінійно незалежні.

Теорема 8.3 Три вектори лінійно залежні тоді й тільки тоді, коли вони компланарні.

Наслідок. Три некомпланарних вектори лінійно незалежні.

Теорема 8.4 Будь-які чотири вектори у просторі геометричних векторів лінійно залежні.

Множину векторів будемо називати *векторним простором*, якщо лінійні операції над будь-якими векторами цієї множини, тобто додавання двох векторів і множення вектора на число, дають вектори тієї ж множини.

Базисом векторного простору називається така впорядкована сукупність векторів цього простору, яка є лінійно незалежною і додавання до цієї системи хоча б одного вектора робить її лінійно залежною (умова максимальності). З максимальності системи базисних векторів випливає, що будь-який вектор $\overline{d}$ простору є лінійною комбінацією базисних векторів: $\overline{d} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c}$, де $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – вектори базису. Числа α, β, γ називаються *координатами вектора* $\overline{d}$ в базисі $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$. Позначення: $\overline{d}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Теорема 8.5 Будь-які два базиси одного векторного простору мають однакову кількість векторів.

Теорема 8.6 Координати вектора в заданому базисі єдині.

Число векторів базису називається *розмірністю* даного векторного простору. Позначення: $\dim V$.

Теорема 8.7 Будь-яка координата суми скінченого числа векторів дорівнює сумі відповідних координат доданків:

$$\overline{d}_1 + \overline{d}_2 + ... + \overline{d}_n = (\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n, \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_n, \gamma_1 + \gamma_2 + ... + \gamma_n).$$

При множенні вектора на число, його координати множаться на це число, тобто

$$\lambda\overline{d}_1 = (\lambda\alpha_1, \lambda\beta_1, \lambda\gamma_1),\ \lambda \in R.$$

Теорема 8.8 Якщо точка C ділить відрізок AB у відношенні $\lambda \neq -1$ і

$A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, то координати точки C можна знайти за формулами:

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda},\ y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda},\ z_C = \frac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda}.$$

Тест для самоперевірки

1. *ABCD – паралелограм. Точки M і N ділять навпіл сторони AB і BC відповідно. Скільки із зазначених систем векторів є лінійно залежними:* $\{\overline{AM}, \overline{AN}\}$, $\{\overline{AN}, \overline{AC}\}$, $\{\overline{AM}, \overline{AB}\}$, $\{\overline{AB}, \overline{CD}\}$?

А 1; **Б** 2; **В** 3; **Г** 4.

2. *Відомо, що* $\alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c} = \overline{0}$. *Вектори* $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$ *будуть ЛІНІЙНО ЗАЛЕЖНИМИ, якщо*

А $\alpha \neq 0 \vee \beta \neq 0 \vee \gamma \neq 0$; **Б** $\alpha \neq 0 \wedge \beta \neq 0 \wedge \gamma \neq 0$;

В $\alpha = \beta = \gamma = 0$; **Г** $\alpha = 0 \vee \beta = 0 \vee \gamma = 0$.

3. *ABCD – паралелограм. Точки M і N ділять навпіл сторони AB і BC відповідно. Скільки із зазначених систем векторів є лінійно незалежними:* $\{\overline{AM}, \overline{AN}\}$, $\{\overline{AN}, \overline{AC}\}$, $\{\overline{AM}, \overline{AB}\}$, $\{\overline{AB}, \overline{CD}\}$?

А 1; **Б** 2; **В** 3; **Г** 4.

4. *Лінійно незалежною є система векторів (* $\overline{a} \neq \overline{0}$ *)*

А $\{\overline{d}_1 = \overline{a}, \overline{d}_2 = \overline{0}\}$; **Б** $\{\overline{d}_1 = \overline{a}, \overline{d}_2 = -\overline{a}\}$;

В $\{\overline{d}_1 = \overline{a}\}$; **Г** $\{\overline{d}_1 = \overline{0}, \overline{d}_2 = -\overline{a}\}$.

5. *Скільки з представлених систем векторів є ЛІНІЙНО ЗАЛЕЖНИМИ (* $\overline{a}, \overline{b} \neq \overline{0}, \overline{a} \nparallel \overline{b}$ *):* $\{\overline{d}_1 = \overline{a}, \overline{d}_2 = \overline{b}\}$; $\{\overline{d}_1 = \overline{a}, \overline{d}_2 = -\overline{a}\}$; $\{\overline{d}_1 = \overline{a}\}$; $\{\overline{d}_1 = \overline{0}, \overline{d}_2 = -\overline{a}\}$?

А 1; **Б** 2; **В** 3; **Г** 4.

6. *Відомо, що* $\overline{a} = 2\overline{b} + 3\overline{c}$. *Що можна сказати про систему векторів* $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$?

А утворює базис; **Б** вона лінійно незалежна;

В вона лінійно залежна; **Г** неможливо визначити.

7. *Що можна сказати про систему чотирьох векторів?*

А вона може бути лінійно незалежною;

Б вона завжди лінійно незалежна;

В вона завжди лінійно залежна;

Г вона може бути лінійно залежною.

8. *Відомий розклад* $\overline{x} = \overline{e_2} + 3\overline{e_1} + 2\overline{e_3}$ *по базису* $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$. *Тоді координати вектора* $\overline{x}$ *мають вигляд*

А $(3; 2; 1)$; **Б** $(1; 3; 2)$; **В** $(3; 1; 2)$; **Г** $(2; 3; 1)$.

9. *ABCD – паралелограм,* $\{\overline{AB}, \overline{AC}\}$ *– базис. Координати вектора* $\overline{BC}$ *в цьому базисі мають вигляд*

А $(1; -1)$; **Б** $(-1; 1)$; **В** $(1; 1)$; **Г** $(-1; -1)$.

10. *ABCD – паралелограм,* $\{\overline{AB}, \overline{AD}\}$ *– базис. Координати вектора* $\overline{DB}$ *в цьому базисі мають вигляд*

А $(1; -1)$; **Б** $(-1; 1)$; **В** $(1; 1)$; **Г** $(-1; -1)$.

11. *ABCD – ромб. Координатами вектора* $\overline{OC}$ *(O – точка перетину діагоналей) в базисі* $\{\overline{AB}, \overline{AD}\}$ *будуть*

А $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; **Б** $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$; **В** $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$; **Г** $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

12. *ABCD – паралелограм. Координатами вектора* $\overline{AB}$ *в базисі* $\{\overline{AD}, \overline{DC}\}$ *будуть:*

А $(1,0)$; **Б** $(-1,0)$; **В** $(0,-1)$; **Г** $(0,1)$.

13. *Вершина A тетраедра OABC прийнята за полюс, вектори* $\overline{AO}$, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ *– за базис. Координатами радіус-вектора центру ваги грані OAB тетраедра будуть:*

А $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$; **Б** $\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$; **В** $\left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$; **Г** $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

14. *При яких значеннях* λ *і* μ *вектори* $\overline{a}(-1, 2\mu, 3)$ *і* $\overline{b}(\lambda, 3, -2)$ *будуть колінеарні?*

А $\lambda = \frac{3}{2}$, $\mu = -\frac{9}{4}$; **Б** $\lambda = -\frac{2}{3}$, $\mu = -\frac{9}{4}$;

В $\lambda = \frac{2}{3}$, $\mu = -\frac{9}{4}$; **Г** $\lambda = \frac{2}{3}$, $\mu = -\frac{9}{4}$.

15. *Точка M ділить відрізок AB у відношенні* $\lambda = -0{,}5$. *Вкажіть координати точки M, якщо* $A(1; 2; 3)$, $B(-1; -2; -3)$.

А $(0; 0; 0)$; **Б** $(3; 6; 9)$; **В** $(1; 2; 3)$; **Г** $(-3; -6; -9)$.

16. *Точка M ділить відрізок AB у відношенні* $\lambda = 1{,}5$. *Вкажіть координати точки A, якщо* $M(1; 2; 3)$, $B(-1; -2; -3)$.

А $(-4; -8; -12)$; **Б** $(1; 2; 3)$; **В** $(4; 8; 12)$; **Г** $(-2; -4; -6)$.

17. *Точка M ділить відрізок AB у відношенні* $\lambda = -\frac{2}{3}$. *Вкажіть координати точки B, якщо* $A(1; 2; 3)$, $M(-1; -2; -3)$.

А $(-2; -4; -6)$; **Б** $(1; 2; 3)$; **В** $(4; 8; 12)$; **Г** $(2; 4; 6)$.

18. *На матеріальну точку діють дві сили* $\overline{F_1} = -2\overline{a}$ *і* $\overline{F_2} = 3\overline{b}$, *де* $\overline{a}(5; -2; 3)$, $\overline{b}(1; 0; -4)$. *Координатами їх рівнодійної будуть*

А $(-7; 7; -18)$; **Б** $(-7; 4; 6)$; **В** $(-13; 4; 6)$; **Г** $(-7; 4; -18)$.

19. *Дано вектори* $\overline{a}(-1; 3; 2)$, $\overline{b}(0; 1; 4)$. *Координатами вектора* $\dfrac{3\overline{a} - 2\overline{b}}{4}$ *будуть*

А $\left(-\frac{3}{4}; \frac{7}{4}; -\frac{1}{2}\right)$; **Б** $\left(-\frac{3}{4}; 2; -\frac{1}{2}\right)$;

В $\left(\frac{3}{4}; \frac{7}{4}; -\frac{1}{2}\right)$; **Г** $\left(-\frac{3}{4}; \frac{7}{4}; -\frac{1}{4}\right)$.

20. Відомо, що $\dim V = 3$. *Яку максимальну кількість лінійно незалежних векторів можна вказати в цьому просторі?*

А 0; **Б** 1; **В** 2; **Г** 3.

Відповіді: 1.Б. 2.А. 3.Б. 4.В. 5.Б. 6.В. 7.В. 8.В. 9.Б. 10.А. 11.А. 12.Г. 13.А. 14.Г. 15.Б. 16.В 17.Г. 18.Г. 19.А. 20.Г.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1 Система векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$ містить нульовий вектор. Дослідити цю систему векторів на лінійну залежність.

Розв'язання.

Без обмеження загальності міркувань можна припустити, що $\bar{a}_1 = \bar{0}$, тоді, $1 \cdot \bar{a}_1 + 0 \cdot \bar{a}_2 + ... + 0 \cdot \bar{a}_n = \bar{0}$. У цій лінійній комбінації векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$ коефіцієнт при першому векторі відмінний від нуля. Отже, розглянута система векторів лінійно залежна.

Приклад 2 В паралелограмі $ABCD$ точка M – середина DC, N – середина BC. Знайти лінійну залежність векторів $\overline{AM}$, $\overline{AN}$, $\overline{CB}$.

Розв'язання.

Виходячи з геометричного змісту лінійної залежності трьох векторів, одразу маємо, що вектори $\overline{AM}$, $\overline{AN}$, $\overline{CB}$ лінійно залежні. Знайдемо яку-небудь нульову, але нетривіальну лінійну комбінацію цих векторів.

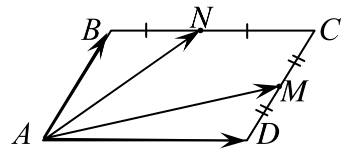


Рисунок 8.1 – Рисунок до прикладу 2

Виберемо базис $\{\overline{AB}, \overline{AD}\}$. Розкладемо вектори $\overline{AM}$, $\overline{AN}$, $\overline{CB}$ за базисом, отримаємо

$$\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AB} + \overline{AD},\ \overline{AN} = \frac{1}{2}\overline{AD} + \overline{AB},\ \overline{CB} = -\overline{AD}.$$

Складемо нульову лінійну комбінацію векторів $\overline{AM}$, $\overline{AN}$, $\overline{CB}$ з коефіцієнтами α, β, γ: $\alpha\overline{AM} + \beta\overline{AN} + \gamma\overline{CB} = \bar{0}$.

Підставимо в цю комбінацію знайдені розклади цих векторів за базисом та зберемо коефіцієнти при базисних векторах, отримаємо

$$\left(\frac{1}{2}\alpha + \beta\right)\overline{AB} + \left(\alpha + \frac{1}{2}\beta - \gamma\right)\overline{AD} = \bar{0}.$$

Так як вектори $\overline{AB}$ і $\overline{AD}$ лінійно незалежні, то будь-яка їх нульова лінійна комбінація повинна бути тривіальною. Тому маємо

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\alpha+\beta=0,\\ \alpha+\frac{1}{2}\beta-\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-2\beta,\\ \alpha=\gamma-\frac{1}{2}\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-2\beta,\\ \gamma=-\frac{3}{2}\beta.\end{cases}$$

Нас цікавить який-небудь ненульовий набір чисел α, β, γ, тому покладемо $\beta=-2$. Тоді $\alpha=4$, $\gamma=3$. Таким чином, знайдена шукана нетривіальна нульова комбінація векторів $\overline{AM}$, $\overline{AN}$, $\overline{CB}$ у вигляді $4\overline{AM}-2\overline{AN}+3\overline{CB}=\overline{0}$.

Приклад 3 Вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ некомпланарні. Чи будуть компланарними вектори $\overline{l}, \overline{m}, \overline{n}$: $\overline{l}=\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$, $\overline{m}=\overline{a}-\overline{b}$, $\overline{n}=3\overline{a}-\overline{b}+\overline{c}$. Якщо так, то знайти їх лінійну залежність.

Розв'язання.

Виходячи з геометричного змісту лінійної залежності трьох векторів, одразу маємо, що вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ лінійно незалежні. Складемо нульову лінійну комбінацію векторів $\overline{l}, \overline{m}, \overline{n}$ з коефіцієнтами α, β, γ

$$\alpha\overline{l}+\beta\overline{m}+\gamma\overline{n}=\overline{0}.$$

Підставимо в цю комбінацію їх розклади і зберемо коефіцієнти при векторах $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, отримаємо

$$(\alpha+\beta+3\gamma)\overline{a}+(\alpha-\beta-\gamma)\overline{b}+(\alpha+\gamma)\overline{c}=\overline{0}.$$

Так як вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ лінійно незалежні, то будь-яка їх нульова лінійна комбінація повинна бути тривіальною. Тому маємо

$$\begin{cases}\alpha+\beta+3\gamma=0,\\ \alpha-\beta-\gamma=0,\\ \alpha+\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=2\alpha,\\ \gamma=-\alpha.\end{cases}$$

Нас цікавить який-небудь ненульовий набір чисел α, β, γ, тому покладемо $\alpha=1$. Тоді $\beta=2$, $\gamma=-1$. Таким чином, вектори $\overline{l}, \overline{m}, \overline{n}$ компланарні та їх лінійну залежність можна записати у вигляді $\overline{l}+2\overline{m}-\overline{n}=\overline{0}$.

Приклад 4 Знайти вектор $\overline{a}=\overline{AB}$, якщо $A(1;3;2)$ і $B(5;8;-1)$.

Розв'язання.

Координати точки співпадають з координатами її радіус-вектора, тому можемо записати: $\overline{r}_A(1;3;2)$, $\overline{r}_B(5;8;-1)$. Знайдемо координати шуканого вектора: $\overline{a}=\overline{AB}=\overline{r}_B-\overline{r}_A=(4;5;-3)$.

Приклад 5 Знайти координати *P* – центру ваги трикутника *ABC*, якщо відомі координати його вершин: *A*(–4; 2), *B*(2; 0), *C*(1; 3).

Розв'язання.

Центр ваги трикутника – це точка перетину його медіан. Тому спочатку знайдемо координати другого кінця однієї з медіан, наприклад *CD*:

$$x_D=\frac{x_A+x_B}{2}=-1,\ y_D=\frac{y_A+y_B}{2}=1,\ D(-1;1).$$

Центр ваги *P* ділить кожну медіану у відношенні 2:1, рахуючись від вершини трикутника, тобто

$$x_P=\frac{x_C+2x_D}{1+2}=\frac{1+2\cdot(-1)}{3}=-\frac{1}{3};\qquad y_P=\frac{y_C+2y_D}{1+2}=\frac{3+2\cdot 1}{3}=\frac{5}{3}.$$

Отже, $P\left(-\frac{1}{3};\ \frac{5}{3}\right)$.

Приклад 6 Нехай задано n матеріальних точок $M_1,...,M_n$, у яких зосереджено маси $m_1,...,m_n$. Знайти центр мас системи точок.

Розв'язання.

Розв'язання цієї задачі ґрунтується на двох фізичних припущеннях:

1. Центр мас системи із двох точок M_1 та M_2 з масами m_1 та m_2 розташований на відрізку M_1M_2 і поділяє його у відношенні $\lambda=\frac{m_2}{m_1}$.

2. Центр мас системи точок $M_1,M_2,...,M_n$ з масами $m_1,m_2,...,m_n$ збігається з центром мас системи із двох точок, одна з яких розташована в центрі мас системи точок $M_1,M_2,...,M_{n-1}$ і має масу $m_1+m_2+...+m_{n-1}$, а друга – точка M_n з масою m_n.

Усі проміжні викладки проведемо лише для абсциси. Із припущення 1 та теореми 8.8 випливає, що абсциса центра мас системи із двох точок

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\frac{x_1+\frac{m_2}{m_1}x_2}{1+\frac{m_2}{m_1}}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}.$$

Припущення 2 дозволяє тепер знайти абсцису центра мас трьох точок:

$$x=\frac{\dfrac{x_1+\frac{m_2}{m_1}x_2}{1+\frac{m_2}{m_1}}+\dfrac{m_3}{m_1+m_2}x_2}{1+\dfrac{m_3}{m_1+m_2}}=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3}.$$

За допомогою методу математичної індукції доводять, що координати центра мас системи з n точок можна знайти за формулами:

$$x=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}m_ix_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}m_i};\qquad y=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}m_iy_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}m_i};\qquad z=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}m_iz_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}m_i}.$$

Задачі для самостійного розв'язування

№ 8.1. Дано трикутник ABC. Точка B_1 – середина сторони *AC*, точки A_1, A_2 ділять сторону *CB* на три рівні частини, точки C_1, C_2, C_3 ділять сторону *AB* на чотири рівні частини. Знайти лінійну залежність векторів $\overline{C_1A_2}$, $\overline{A_1B_1}$, $\overline{C_2C}$.

№ 8.2. Паралелограм $ABCD$: B_1 – середина AB; A_1 – середина AD; C_1, C_2 ділять DC на три рівні частини. Знайти лінійну залежність векторів $\overline{A_1B_1}$, $\overline{DA_1}$, $\overline{BC_1}$.

№ 8.3. Дана трапеція $ABCD$ ($AB \parallel CD$), у якої $AB = 3DC$. Точки M і N – середини бічних сторін, точка P – середина основи AB. Знайти лінійну залежність векторів $\overline{MN}$, $\overline{PC}$, $\overline{DA}$.

№ 8.4. У трикутнику ABC точка D – середина сторони AC, Точки E і F – ділять BC на три рівні частини. Знайти лінійну залежність векторів $\overline{DF}$, $\overline{EA}$, $\overline{FE}$.

№ 8.5. Знайти, якщо вона існує, лінійну залежність векторів $\bar{l} = 2\bar{a} - \bar{b} - \bar{c}$, $\bar{m} = 2\bar{b} - \bar{a} - \bar{c}$, $\bar{n} = 2\bar{c} - \bar{b} - \bar{a}$, де вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ некомпланарні.

№ 8.6. Дано вектори $\bar{a}(-1; 3; 2)$, $\bar{b}(0; 1; 4)$. Обчислити координати векторів $\bar{a} + \bar{b}$, $\bar{a} - \bar{b}$, $\dfrac{\bar{a} + 2\bar{b}}{3}$, $\dfrac{\bar{a} - 2\bar{b}}{2}$, $2\bar{a} + 3\bar{b}$.

№ 8.7. На матеріальну точку діють дві сили $\overline{F_1} = 2\bar{a}$ і $\overline{F_2} = 3\bar{b}$, де $\bar{a}(5; -2; 3)$, $\bar{b}(1; 0; -4)$. Знайти їх рівнодійну.

№ 8.8. Знайти лінійну залежність векторів $\bar{a}(1;3;5)$, $\bar{b}(0; 4; 5)$, $\bar{c}(7; -8; 4)$, $\bar{d}(2; -1; 3)$.

№ 8.9. Чи будуть вектори $\bar{l} = 2\bar{a} - \bar{b} + \bar{c}$, $\bar{m} = \bar{a} + \bar{b} - 2\bar{c}$, $\bar{n} = \bar{a} - 2\bar{b} + 3\bar{c}$ лінійно залежні, якщо вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ лінійно незалежні?

№ 8.10. Чи колінеарні точки $A(4;-1)$, $B(6;-7)$, $C(3;2)$?

№ 8.11. Довести, що вектори $\bar{a}(1;-1;2)$, $\bar{b}(2;2;-1)$, $\bar{c}(3;7;-7)$ утворюють базис. Знайти координати вектора $\bar{d}(2;1;0)$ в цьому базисі.

№ 8.12. Дано три вектори $\bar{a}(3;-1)$, $\bar{b}(1;-2)$, $\bar{c}(-1;7)$. Знайти розклад вектора $\bar{p} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$ за базисом $\{\bar{a}, \bar{b}\}$.

№ 8.13. Знайти розклад вектора $\bar{c}(11;6;-5)$ за базисом $\bar{p}(3;-2;1)$, $\bar{q}(-1;1;-2)$, $\bar{r}(2;1;-3)$.

№ 8.14. Дано вектори $\bar{a}(2;3)$, $\bar{b}(1;-3)$, $\bar{c}(-1;3)$. При якому значенні α вектори $\bar{p} = \bar{a} + \alpha\bar{b}$ і $\bar{q} = \bar{a} + 2\bar{c}$ колінеарні?

№ 8.15. Знайти числа α, β, γ, для яких $\alpha\bar{a}, \beta\bar{b}, \gamma\bar{c}, \bar{d}$ утворюють замкнену ламану лінію, де $\bar{a}(3;-2;1)$, $\bar{b}(-1;1;-2)$, $\bar{c}(2;1;-3)$, $\bar{d}(11;6;-5)$.

№ 8.16. Визначити, при яких значеннях x і y вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$, зв'язані співвідношенням $(3x - y + 2)\bar{a} + (x + 2y + 3)\bar{b} = \bar{0}$, неколінеарні?

№ 8.17. Визначити, при яких значеннях x, y та z вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$, зв'язані співвідношенням $(x + y - z - 2)\bar{a} + (2x - 2y + z - 1)\bar{b} + (x - 1)\bar{c} = \bar{0}$, некомпланарні?

9 ЗАГАЛЬНА ДЕКАРТОВА Й ПОЛЯРНА СИСТЕМИ КООРДИНАТ. ПРОЕКЦІЯ ВЕКТОРА НА ВІСЬ

Теоретичні відомості

Пряма з заданим на ній напрямком, прийнятим за додатний, називається *віссю*.

Нехай $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ – трійка некомпланарних векторів у просторі. Виберемо в просторі яку-небудь точку O і проведемо через неї три осі Ox, Oy, Oz, які зіставимо з векторами $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$. Побудована конструкція з точки й трьох осей з напрямними векторами $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ називається *загальною декартовою* (або *афінною*) *системою координат*.

Якщо базис $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ є ортонормованим (вектори базису одиничні та попарно ортогональні), то загальна декартова система координат називається *прямокутною декартовою системою координат* або просто *декартовою системою координат*.

Наприклад, систему глобального позиціонування (GPS) – сукупність супутників, обладнаних радіочастотними приймально-передавальним обладнанням, використовують для визначення розташування об'єкта на поверхні Землі під час наведення ракет на ціль та координації пересування підрозділів авіаційного, морського і наземного базування. Натепер, окрім приймачів спеціального призначення випускаються прилади, вмонтовані в наручні годинники, мобільні телефони, руні радіостанції, за допомогою яких можна орієнтуватись на місцевості. Їх використовують альпіністи, рятівники, туристи.

Основою системи є навігаційні супутники, які рухаються навколо Землі. Приймач GPS обчислює власне положення, вимірюючи час, коли було послано сигнал з GPS супутників. Кожен супутник постійно надсилає повідомлення, у якому міститься інформація про час відправлення повідомлення, точку орбіти супутника, з якої було надіслано повідомлення, та загальний стан системи і наближені дані орбіт усіх інших супутників угрупування системи GPS. Ці сигнали поширюються зі швидкістю світла.

Приймач використовує час одержання повідомлення для обчислення віддалі до супутника, виходячи з якої шляхом застосування геометричних і тригонометричних рівнянь обчислюється положення приймача. Одержані координати набувають більш наочної форми, такої як широта та довгота, або положення на карті, та відображається користувачеві.

Оскільки обчислення положення супутника потребує знати час з високою точністю, необхідно одержувати інформацію з чотирьох або більше супутників. Інакше кажучи, приймач GPS використовує чотири параметри для обчислення чотирьох невідомих: трьох координат x, y, z і t.

Базис у тривимірному векторному просторі може бути правим або лівим. Відкладемо вектори $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ базису з однієї точки O простору. Якщо для спостерігача, який дивиться з кінця вектора $\overline{e}_3$ на площину векторів $\overline{e}_1$ і $\overline{e}_2$, найкоротший поворот навколо точки O від вектора $\bar{e}_1$ до вектора $\bar{e}_2$ відбувається проти ходу годинникової стрілки, то базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ вважається *правим*. А якщо ні, то базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ – *лівий*.

Надалі, говорячи про ортонормований базис тривимірного векторного простору, будемо завжди вважати, що базис є правим.

Полярна система координат на площині визначається точкою O – полюсом, променем Ox – полярною віссю та одиничним відрізком.

Положення довільної точки M площини в полярній системі координат визначається відстанню $\rho = OM$ і кутом φ, відлічуваним від полярної осі до променя OM в заданому напрямку. Числа ρ і φ називаються *полярними координатами* точки M (ρ – полярний радіус, φ – полярний кут, $0 \le \varphi < 2\pi$). Позначення: $M(\rho; \varphi)$.

Зв'язок між декартовими та полярними координатами однієї й тієї ж точки (початок декартової системи координат збігається з полюсом полярної системи координат, а вісь Ox декартової системи координат збігається з полярною віссю, такі системи координат називаються *узгодженими*) визначаються формулами:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \ 0 \le \varphi < 2\pi, \ \rho \ge 0; \qquad (9.1)$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases} \qquad (9.2)$$

Проекцією вектора $\bar{a}$ на вісь l називається число, яке позначається $\text{пр}_l\bar{a}$ і дорівнює $|\bar{a}|\cos\varphi$, де φ $(0 \le \varphi \le \pi)$ – кут між додатним напрямком осі l й напрямком вектора $\bar{a}$, тобто за означенням $\text{пр}_l\bar{a} = |\bar{a}|\cos\varphi$.

При використанні векторів у фізиці складові вектора на осях координат називають *векторними проекціями на осі координат.* Координати складових на осях, тобто координати вектора, називають *скалярними проекціями,* або, коротко, *проекціями вектора на осі координат,* і позначають $\text{пр}_x\bar{a}$, $\text{пр}_y\bar{a}$, $\text{пр}_z\bar{a}$.

У прикладних питаннях вектор нерідко задають модулем і кутами, які цей вектор утворює з осями координат (точніше з ортами на цих осях). У цьому випадку координати (проекції) вектора $\bar{a}$ на площині обчислюються за формулами:

$$x = \text{пр}_x\bar{a} = |\bar{a}|\cos\alpha; \ y = \text{пр}_y\bar{a} = |\bar{a}|\sin\alpha,$$

де α – кут між вектором $\bar{a}$ і віссю *Ox.*

У просторі мають місце аналогічні формули:

$$x = \text{пр}_x\bar{a} = |\bar{a}|\cos\alpha; \ y = \text{пр}_y\bar{a} = |\bar{a}|\cos\beta; \ z = \text{пр}_z\bar{a} = |\bar{a}|\cos\gamma,$$

де α, β, γ – кути між вектором $\bar{a}$ і відповідними осями координат; x, y, z – координати вектора $\bar{a}$. Величини $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ називають *напрямними косинусами* векторів, для них має місце співвідношення:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Тест для самоперевірки

1. *Оберіть правильне твердження:*

А довільна точка площини визначається двома координатами;
Б кожна точка простору визначається хоча б трьома координатами;
В кожна точка площини визначається хоча б двома координатами;
Г кожна точка простору визначається не більше ніж трьома координатами.

2. *В загальній декартовій системі координат вектори базису повинні бути*

А довільними колінеарними; **Б** довільними неколінеарними;
В довільними компланарними; **Г** довільними некомпланарними.

3. *В декартовій системі координат вектори базису повинні бути*

А одиничні та попарно ортогональні; **Б** попарно ортогональні;
В одиничні; **Г** довільними некомпланарними.

4. *Полярна система координат на площині визначається*

А полюсом;
Б одиничним відрізком;
В полюсом, полярною віссю та одиничним відрізком;
Г полярною віссю.

5. *$ABCD$ – паралелограм. Координатами вершини B в системі координат $\{A, \overline{AD}, \overline{AB}\}$ будуть:*

А $(1,0)$; **Б** $(-1,0)$; **В** $(0,-1)$; **Г** $(0,1)$.

6. *Вершина A тетраедра $OABC$ прийнята за початок координат, вектори $\overline{AO}, \overline{AB}, \overline{AC}$ – за базис. Координатами центру ваги грані OAB тетраедра будуть:*

А $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$; **Б** $\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$; **В** $\left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$; **Г** $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

7. *Укажіть полярні координати точки, симетричної з точкою $\left(\frac{1}{2}; -\frac{\pi}{4}\right)$ відносно полюса.*

А $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\pi}{4}\right)$; **Б** $\left(\frac{1}{2}; \frac{\pi}{4}\right)$; **В** $\left(\frac{1}{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$; **Г** $\left(\frac{1}{2}; \frac{5\pi}{4}\right)$.

8. *Укажіть полярні координати точки, симетричної з точкою $\left(\frac{1}{2}; -\frac{\pi}{4}\right)$ відносно полярної осі.*

А $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\pi}{4}\right)$; **Б** $\left(\frac{1}{2}; \frac{\pi}{4}\right)$; **В** $\left(\frac{1}{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$; **Г** $\left(\frac{1}{2}; \frac{5\pi}{4}\right)$.

9. *Дана точка, полярні координати якої мають наступні значення: $\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}; -\frac{\pi}{4}\right)$. Декартовими координатами цієї точки в узгодженій декартовій системі координат будуть:*

А $\left(-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right)$; **Б** $\left(\frac{3}{4}; -\frac{3}{4}\right)$; **В** $\left(-\frac{3}{4}; -\frac{3}{4}\right)$; **Г** $\left(\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right)$.

10. Дана точка, полярні координати якої мають наступні значення: $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$*. Декартовими координатами цієї точки в узгодженій декартовій системі координат будуть:*

А $\left(-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right)$; **Б** $\left(\frac{3}{4}; -\frac{3}{4}\right)$; **В** $\left(-\frac{3}{4}; -\frac{3}{4}\right)$; **Г** $\left(\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right)$.

11. Дана точка, декартові координати якої мають наступні значення: $(-1; 1)$*. Полярними координатами цієї точки в узгодженій полярній системі координат будуть:*

А $\left(\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right)$; **Б** $\left(\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}\right)$; **В** $\left(\sqrt{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$; **Г** $\left(\sqrt{2}; -\frac{3\pi}{4}\right)$.

12. Дана точка, декартові координати якої мають наступні значення: $(0; 2)$*. Полярними координатами цієї точки в узгодженій полярній системі будуть:*

А $\left(\sqrt{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; **Б** $\left(\sqrt{2}; -\frac{\pi}{2}\right)$; **В** $\left(2; \frac{\pi}{2}\right)$; **Г** $\left(2; -\frac{\pi}{2}\right)$.

13. Як розташовані точки, полярні координати яких задовольняють рівнянню $\rho = 1$*?*

А на колі з центром в полюсі і радіуса 1;
Б на промені, який співпадає з полярною віссю;
В на колі з центром в полюсі і діаметра 1;
Г на промені, який виходить з полюса і утворює з полярною віссю кут 90°.

14. Як розташовані точки, полярні координати яких задовольняють рівнянню $\varphi = \frac{\pi}{2}$*?*

А на колі з центром в полюсі і радіуса 1;
Б на промені, який співпадає з полярною віссю;
В на колі з центром в полюсі і діаметра 1;
Г на промені, який виходить з полюса і утворює з полярною віссю кут 90°.

15. Скільки правих базисів можна скласти з трьох некомпланарних векторів?

А 0; **Б** 1; **В** 2; **Г** 3.

16. Точка B симетрична точці A (x; y; z) відносно точки M (a; b; c). Координати точки B дорівнюють…

А $(2a + x; 2b + y; 2c + z)$; **Б** $(a + x; b + y; c + z)$;
В $(a - 2x; b - 2y; c - 2z)$; **Г** $(2a - x; 2b - y; 2c - z)$.

17. Вкажіть усі значення параметра m при яких точки $P(1; 2; m)$ *і* $Q(m; 2; -1)$ *симетричні відносно площини yz?*

А $m = 1$; **Б** $m = \pm 1$; **В** $m = -1$**;** **Г** $m \in \varnothing$.

18. Проекцію вектора $\bar{a}$ *на вісь, визначену вектором* $\bar{b}$*, можна обчислити за формулою*

А $|\bar{a}| \cdot \cos\left(\bar{a} \,\hat{,}\, \bar{b}\right)$; **Б** $|\bar{b}| \cdot \cos\left(\bar{a} \,\hat{,}\, \bar{b}\right)$;

В $\left|\bar{a}\right|\cdot\sin\left(\bar{a}\,\hat{,}\,\bar{b}\right)$**;** **Г** $\left|\bar{b}\right|\cdot\sin\left(\bar{a}\,\hat{,}\,\bar{b}\right)$.

19. Проекцію вектора $\bar{b}$ на вісь, визначену вектором $\bar{a}$, можна обчислити за формулою

А $\left|\bar{a}\right|\cdot\cos\left(\bar{a}\,\hat{,}\,\bar{b}\right)$; **Б** $\left|\bar{b}\right|\cdot\cos\left(\bar{a}\,\hat{,}\,\bar{b}\right)$;

В $\left|\bar{a}\right|\cdot\sin\left(\bar{a}\,\hat{,}\,\bar{b}\right)$**;** **Г** $\left|\bar{b}\right|\cdot\sin\left(\bar{a}\,\hat{,}\,\bar{b}\right)$.

20. Напрямний косинус вектора $\bar{c}(c_1, c_2, c_3)$ з віссю аплікат визначається за формулою

А $\dfrac{\text{пр}_x\bar{a}}{\left|\bar{a}\right|}$; **Б** $\dfrac{\text{пр}_y\bar{a}}{\left|\bar{a}\right|}$;

В $\dfrac{\text{пр}_z\bar{a}}{\left|\bar{a}\right|}$**;** **Г** $\dfrac{\text{пр}_x\bar{a}+\text{пр}_y\bar{a}+\text{пр}_z\bar{a}}{\left|\bar{a}\right|}$.

Відповіді: 1.А. 2.Г. 3.А. 4.В. 5.Г. 6.А. 7.В. 8.Б. 9.Б. 10.Б. 11.В. 12.В. 13.А. 14.Г. 15.Г. 16.Г. 17.В. 18.А. 19.Б. 20.В.

Приклади розв’язання задач

Приклад 1 Побудувати точки, полярні координати яких мають наступні значення: $A\left(3;\dfrac{\pi}{6}\right)$; $B\left(2;\dfrac{\pi}{4}\right)$. Визначити декартові координати цих точок в узгодженій декартовій системі координат.

Розв’язання.

Для визначення декартових координат цих точок скористаємося формулами (9.2):

$$A:\begin{cases}x=3\cos\dfrac{\pi}{6},\\ y=3\sin\dfrac{\pi}{6}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\\ y=\dfrac{3}{2};\end{cases}$$

$$B:\begin{cases}x=2\cos\dfrac{\pi}{4},\\ y=2\sin\dfrac{\pi}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\sqrt{2},\\ y=\sqrt{2}.\end{cases}$$

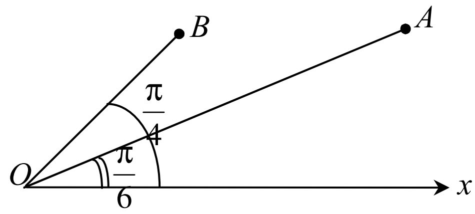


Рисунок 9.1 – Рисунок до прикладу 1

Приклад 2 Побудувати точки, полярні кути яких дорівнюють 0°, 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 90°, а відповідні радіус-вектори обчислюються з рівняння $\rho = a\sin 2\varphi$. Отримані точки з’єднати плавною кривою.

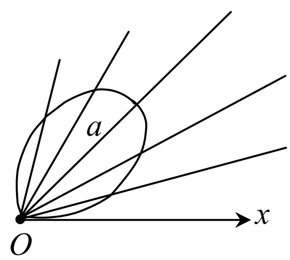


Рисунок 9.2 – Рисунок до прикладу 2

Розв’язання. Для побудови складемо

таблицю

Таблиця 9.1 – Таблиця до прикладу 2

φ	$0°$	$15°$	$30°$	$45°$	$60°$	$75°$	$90°$
2φ	$0°$	$30°$	$60°$	$90°$	$120°$	$150°$	$180°$
$\rho = a\sin 2\varphi$	0	$\frac{a}{2}$	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	a	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$\frac{a}{2}$	0

Приклад 3 Вершина O тетраедра $OABC$ прийнята за початок координат, вектори $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ – за базис. Знайти в цій системі координат координати точок L, M, N – середин ребер AC, AB, BC відповідно.

Розв'язання. Координати точок L, M, N співпадають з координатами їх радіус-векторів, тобто з координатами векторів $\overline{OL}$, $\overline{OM}$, $\overline{ON}$. Використовуючи формули ділення відрізка в даному відношенні $\lambda = 1$ (точки є серединами відрізків), будемо мати

$$\overline{OL} = \frac{1}{2}\left(\overline{OA} + \overline{OC}\right), \qquad L\left(\frac{1}{2};\ 0;\ \frac{1}{2}\right);$$

$$\overline{OM} = \frac{1}{2}\left(\overline{OA} + \overline{OB}\right), \qquad M\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ 0\right);$$

$$\overline{ON} = \frac{1}{2}\left(\overline{OB} + \overline{OC}\right), \qquad N\left(0;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right).$$

Приклад 4 Блок з вантажем зав важки 350 кг підчеплено за допомогою двох тросів (рис. 9.3). У точці A, де діють три сили: $\overline{W}$, яка тягне блок донизу, $\overline{R}$ та $\overline{S}$, що напрямлені догори і зовні. Знайти натяг обох тросів.

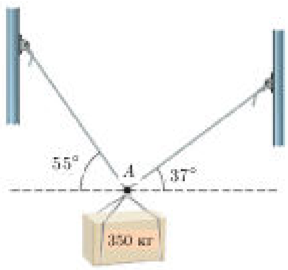


Рисунок 9.3

Розв'язання. Відкладемо на силовій діаграмі усі вектори від початку (рис. 9.4). Задля рівноваги рівнодійна всіх сил

$$\overline{F} = \overline{R} + \overline{S} + \overline{W}.$$

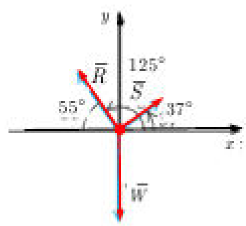


Рисунок 9.4

Виразімо кожен вектор через довжину і їхні напрямні косинуси:

$$\overline{R} = \left|\overline{R}\right|\left(\bar{i}\cos 125° + \bar{j}\sin 125°\right),$$

$$\overline{S} = \left|\overline{S}\right|\left(\bar{i}\cos 37° + \bar{j}\sin 37°\right),$$

$$\overline{W} = \left|\overline{W}\right|\left(\bar{i}\cos 270° + \bar{j}\sin 270°\right) = -350\,\bar{j}.$$

Підставляючи вирази для $\overline{R}$, $\overline{S}$ та $\overline{W}$ у рівняння сил, дістаємо:

$$\left(\left|\overline{R}\right|\cos 125° + \left|\overline{S}\right|\cos 37°\right)\bar{i} + \left(\left|\overline{R}\right|\sin 125° + \left|\overline{S}\right|\sin 37° - 350\right)\bar{j} = \bar{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left|\overline{R}\right|\cos 125° + \left|\overline{S}\right|\cos 37° = 0, \\ \left|\overline{R}\right|\sin 125° + \left|\overline{S}\right|\sin 37° - 350 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left|\overline{R}\right| \approx 280, \\ \left|\overline{S}\right| \approx 201. \end{cases}$$

Отже, натяги тросів становлять 280 кг та 201 кг.

Задачі для самостійного розв'язування

№ 9.1. Побудувати точки, полярні координати яких мають наступні значення: $\left(1; \frac{5\pi}{3}\right)$, $\left(5; \frac{7\pi}{6}\right)$, $\left(\frac{1}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(2{,}5; \frac{2\pi}{3}\right)$, $(6; \pi)$, $\left(3; \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(\sqrt{3}; -\frac{\pi}{6}\right)$. Визначити декартові координати цих точок в узгодженій декартовій системі координат.

№ 9.2. Знайти полярні координати точок, симетричних із точками $\left(1; \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(3; \frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3}; -\frac{\pi}{6}\right)$: 1) відносно полюса; 2) відносно полярної осі.

№ 9.3. Щоб зрівноважити тіло, вага якого рівна P, на похилій площині, що утворює з горизонтальною площиною кут α, потрібно застосувати силу $Q = P\sin\alpha$ (рис. 9.5). Сила Q одного і того ж самого вантажу P залежить від кута нахилу α. Виразити цю залежність графічно, користуючись полярними координатами.

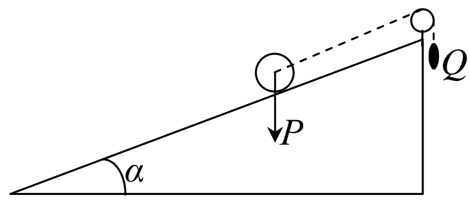


Рисунок 9.5 – Рисунок до задачі № 9.3.

№ 9.4. Дано ромб $ABCD$, O – точка перетину його діагоналей. Приймаючи за початок координат точку A, а за базис – вектори $\overline{AO}$ і $\overline{AB}$, знайти в цій системі координат координати всіх вершин ромба.

№ 9.5. Вершина O тетраедра $OABC$ прийнята за початок координат, вектори $\overline{OM}$, $\overline{ON}$, $\overline{OL}$ – за базис. Знайти в цій системі координат координати всіх вершин тетраедра, де L, M, N – середини ребер AC, AB, BC відповідно.

№ 9.6. Вершина O тетраедра $OABC$ прийнята за початок координат, вектори $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ – за базис. Знайти в цій системі координат координати центрів ваги всіх граней тетраедра.

№ 9.7. Вершина A паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ прийнята за початок координат, вектори $\overline{AC}$, $\overline{AB_1}$, $\overline{AD_1}$ – за базис. Знайти в цій системі координат координати всіх вершин паралелепіпеда.

№ 9.8. По горизонтальній балці, яка лежить на двох опорах A і B, йде людина. Тиск, якому піддається опора B, змінюється в залежності від положення людини на балці. Зобразити графічно залежність між цим тиском і відстанню людини від іншого кінця балки A при наступних чисельних даних: вага балки $P = 120$ кг, довжина її $l = 5$ м, вага людини $p = 65$ кг.

№ 9.9. Найпростіший підіймальний пристрій складається з барабану і колеса, які обертаються на горизонтальній осі. На барабан намотана мотузка, до кінця якої підвішений вантаж Q, а колесо обмотане мотузкою, за яку тягнуть, щоб підняти вантаж. Сила P, яку при цьому треба застосувати, обчислюється за формулою $P = \frac{r}{R} \cdot Q$, де r – радіус барабану, R – радіус колеса. Зобразити графічно залежність між силою P і радіусом колеса R, якщо $r = 19$ см і $Q = 12$ кг (вага відра води).

10 ДОБУТКИ ВЕКТОРІВ

Теоретичні відомості

Скалярний добуток двох векторів

Скалярним добутком $(\overline{a}, \overline{b})$ двох ненульових векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називається число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута φ між ними: $(\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos\varphi$. Якщо хоча б один з векторів $\overline{a}$ або $\overline{b}$ є нульовим, тоді вважають $(\overline{a}, \overline{b}) = 0$. Іноді для скалярного добутку $(\overline{a}, \overline{b})$ користуються іншим позначенням: $\overline{a} \cdot \overline{b}$.

Властивості скалярного добутку

1. Для будь-яких векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ скалярний добуток $(\overline{a}, \overline{b})$ комутативний: $(\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{b}, \overline{a})$.

2. Для будь-якого вектора $\overline{a}$ скалярний добуток вектора $\overline{a}$ на себе дорівнює квадрату довжини цього вектора: $(\overline{a}, \overline{a}) = |\overline{a}|^2$. Звідки, $|\overline{a}| = \sqrt{\overline{a}^2}$.

Помітимо, що скалярний добуток $(\overline{a}, \overline{a})$ прийнято називати *скалярним квадратом* вектора $\overline{a}$ й позначати так: $\overline{a}^2$.

3. Для будь-яких векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ і будь-якого дійсного числа α вірні рівності: $(\alpha\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{a}, \alpha\overline{b}) = \alpha(\overline{a}, \overline{b})$.

4. Якщо $\overline{a} \neq \overline{0}$ і $\overline{b} \neq \overline{0}$, а $(\overline{a}, \overline{b}) = 0$, то $\overline{a}$ і $\overline{b}$ ортогональні.

5. Для будь-яких векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$

$$(\overline{a} + \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{a}, \overline{c}) + (\overline{b}, \overline{c}).$$

Наслідок Для будь-яких векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ і $\overline{d}$

$$(\overline{a} + \overline{b}, \overline{c} + \overline{d}) = (\overline{a}, \overline{c}) + (\overline{a}, \overline{d}) + (\overline{b}, \overline{c}) + (\overline{b}, \overline{d}).$$

Легко переконатися в тому, що базис $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ є ортонормованим тоді й тільки тоді, коли мають місце рівності:

$$(\overline{i}, \overline{i}) = 1,\ (\overline{j}, \overline{j}) = 1,\ (\overline{k}, \overline{k}) = 1,\ (\overline{i}, \overline{j}) = 0,\ (\overline{i}, \overline{k}) = 0,\ (\overline{j}, \overline{k}) = 0. \qquad (10.1)$$

Нагадаємо, що *ортом* ненульового вектора $\overline{a}$ називають вектор $\overline{a}_0$, який має одиничну довжину. Його напрямок збігається з напрямком вектора $\overline{a}$, тобто $\overline{a}_0 = \dfrac{\overline{a}}{|\overline{a}|}$.

Теорема 10.1 Скалярний добуток двох векторів, заданих в ортонормованому базисі своїми координатами, дорівнює сумі добутків відповідних координат співмножників, тобто для $\overline{a}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ і $\overline{b}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$

$$(\overline{a}, \overline{b}) = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2. \qquad (10.2)$$

Наслідок 1 Довжина вектора $\overline{a}(\alpha, \beta, \gamma)$ в ортонормованому базисі обчислюється за формулою

$$|\overline{a}| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}. \qquad (10.3)$$

Наслідок 2 Необхідною й достатньою умовою ортогональності ненульових векторів $\bar{a}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ і $\bar{b}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, заданих в ортонормованому базисі своїми координатами є рівність

$$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0. \qquad (10.4)$$

Наслідок 3 В ортонормованому базисі кут між двома векторами $\bar{a}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ і $\bar{b}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ визначається за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2} \cdot \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2}}, \ \bar{a} \neq \bar{0}, \ \bar{b} \neq \bar{0}. \qquad (10.5)$$

Наслідок 4 Декартові координати вектора $\bar{a}(\alpha, \beta, \gamma)$ дорівнюють проекціям цього вектора на осі декартової системи координат:

$$\alpha = \text{пр}_{\bar{i}}\bar{a}, \ \beta = \text{пр}_{\bar{j}}\bar{a}, \ \gamma = \text{пр}_{\bar{k}}\bar{a}.$$

Наслідок 5 Напрямні косинуси вектора $\bar{a}(\alpha, \beta, \gamma)$ в ортонормованому базисі визначаються формулами:

$$\cos\left(\bar{a},^\wedge \bar{i}\right) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}, \qquad \cos\left(\bar{a},^\wedge \bar{j}\right) = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}},$$

$$\cos\left(\bar{a},^\wedge \bar{k}\right) = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}.$$

Теорема 10.2 $\left(\bar{a}, \bar{b}\right) = |\bar{a}| \cdot \text{пр}_{\bar{a}}\bar{b} = \left|\bar{b}\right| \cdot \text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}$.

Теорема 10.3 Якщо вектор зображує силу $\bar{F}$ (рис. 10.1), точка прикладання якої переміщується з початку в кінець вектора $\bar{s}$, то робота A цієї сили визначається формулою $A = \bar{F} \cdot \bar{s}$.

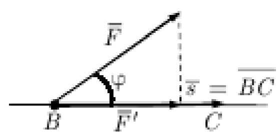


Рисунок 10.1

Векторний добуток векторів

Векторним добутком двох ненульових векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називається вектор $\bar{c}$, який задовольняє умовам:

1) вектор $\bar{c}$ є перпендикулярним до векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$;

2) вектор $\bar{c}$ напрямлений так, щоб трійка векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ виявилася правою;

3) довжина вектора $|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot \left|\bar{b}\right| \sin\varphi$, де φ – кут між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$.

Векторний добуток векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ позначають так: $\left[\bar{a}, \bar{b}\right]$ або $\bar{a} \times \bar{b}$. Якщо $\bar{a} = \bar{0}$ або $\bar{b} = \bar{0}$, то вважають $\left[\bar{a}, \bar{b}\right] = \bar{0}$.

Нехай $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – ортонормований базис. Визначимо векторні добутки цих векторів:

$$\left[\bar{i}, \bar{i}\right] = \bar{0}, \ \left[\bar{i}, \bar{j}\right] = \bar{k}, \ \left[\bar{i}, \bar{k}\right] = -\bar{j}, \ \left[\bar{j}, \bar{i}\right] = -\bar{k}, \ \left[\bar{j}, \bar{j}\right] = \bar{0}, \ \left[\bar{j}, \bar{k}\right] = \bar{i},$$

$$\left[\bar{k}, \bar{i}\right] = \bar{j}, \ \left[\bar{k}, \bar{j}\right] = -\bar{i}, \ \left[\bar{k}, \bar{k}\right] = \bar{0}. \qquad (10.6)$$

Властивості векторного добутку

1. Векторний добуток $\left[\bar{a}, \bar{b}\right] = \bar{0}$ тоді й тільки тоді, коли один з векторів

нульовий або вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ колінеарні.

2. Для будь-яких векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ векторний добуток $[\overline{a}, \overline{b}]$ антикомутативний, тобто $[\overline{a}, \overline{b}] = -[\overline{b}, \overline{a}]$.

3. Для будь-яких векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ і будь-якого дійсного числа α:

$$\lambda[\overline{a}, \overline{b}] = [\lambda\overline{a}, \overline{b}] = [\overline{a}, \lambda\overline{b}].$$

4. Для будь-яких векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$

$$[\overline{a} + \overline{b}, \overline{c}] = [\overline{a}, \overline{c}] + [\overline{b}, \overline{c}]; \qquad [\overline{a}, \overline{b} + \overline{c}] = [\overline{a}, \overline{b}] + [\overline{a}, \overline{c}].$$

Відзначимо, що модуль векторного добутку $[\overline{a}, \overline{b}]$ має простий *геометричний зміст*: він дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$ як на сторонах.

Нехай $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ – правий ортонормований базис і нехай в цьому базисі відомі координати двох векторів $\overline{a}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ і $\overline{b}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$. Тоді координати вектора $[\overline{a}, \overline{b}]$ можна обчислити за формулою:

$$[\overline{a}, \overline{b}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}. \tag{10.7}$$

Теорема 10.4 Якщо вектор зображує силу $\overline{F}$, що прикладена в деякій точці A, а вектор $\overline{s}$ виходить з точки O в точку A, то вектор $\overline{M_O} = \overline{s} \times \overline{F}$ є моментом сили $\overline{F}$ відносно точки O.

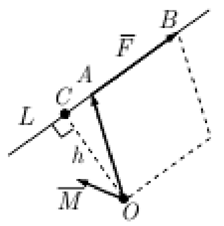


Рисунок 10.2

Мішаний добуток векторів

Мішаним добутком векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ називають число $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}])$.

Теорема 10.5 Мішаний добуток дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли один з векторів є нульовим, два з векторів колінеарні або всі три вектори компланарні.

Властивості мішаного добутку

1. Мішаний добуток трьох ненульових некомпланарних векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ за абсолютним значенням дорівнює об'єму V паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$. При цьому, якщо трійка векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ права, то $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = V$, якщо ж ліва, то $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = -V$. Вірне й обернене твердження.

2. При циклічній перестановці некомпланарних векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ у мішаному добутку $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ останній не змінюється, тобто

$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{c}, \overline{a}, \overline{b}) = (\overline{b}, \overline{c}, \overline{a}).$$

При перестановці будь-яких двох векторів у мішаному добутку $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ останній змінює знак, тобто

$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = -(\overline{b}, \overline{a}, \overline{c}) = -(\overline{a}, \overline{c}, \overline{b}) = -(\overline{c}, \overline{b}, \overline{a}).$$

3. Для будь-яких векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ і $\overline{d}$ та будь-яких дійсних чисел λ і μ

$$(\lambda\bar{a}+\mu\bar{b},\bar{c},\bar{d})=\lambda(\bar{a},\bar{c},\bar{d})+\mu(\bar{b},\bar{c},\bar{d}),\ (\bar{a},\lambda\bar{b}+\mu\bar{c},\bar{d})=\lambda(\bar{a},\bar{b},\bar{d})+\mu(\bar{a},\bar{c},\bar{d}),$$
$$(\bar{a},\bar{b},\lambda\bar{c}+\mu\bar{d})=\lambda(\bar{a},\bar{b},\bar{c})+\mu(\bar{a},\bar{b},\bar{d}).$$

Мішаний добуток векторів $\bar{a}(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$, $\bar{b}(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$, $\bar{c}(\alpha_3,\beta_3,\gamma_3)$, заданих своїми координатами в ортонормованому базисі $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$, можна обчислити за формулою

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix}. \tag{10.8}$$

Тест для самоперевірки

1. *При яких значеннях числа k вектор $k\bar{c}+\bar{c}$ $(\bar{c}\neq\bar{0})$ протилежно напрямлений до вектора $\bar{c}$?*

А $k<0$; **Б** $k>-1$; **В** $k<-1$; **Г** $k>0$.

2. *$SABC$ – правильний тетраедр із ребром 1. Скалярний добуток $\overline{SA}\cdot\overline{SB}$ дорівнює:*

А 1; **Б** 2; **В** 0,5; **Г** –0,5.

3. *З рівності $\bar{a}\cdot\bar{c}=\bar{b}\cdot\bar{c}$ $(\bar{c}\neq\bar{0})$ випливає:*

А $\bar{a}=\bar{b}$; **Б** $(\bar{a}-\bar{b})\perp\bar{c}$, $\bar{a}\neq\bar{b}$;
В $(\bar{a}-\bar{b})\parallel\bar{c}$; **Г** $\bar{a}=\bar{b}$ чи $(\bar{a}-\bar{b})\perp\bar{c}$.

4. *Скільки існує векторів $\bar{a}$ у просторі таких, що $\bar{a}^2=\log_{0,3}2$?*

А жодного; **Б** один; **В** два; **Г** безліч.

5. *Дано ненульовий вектор $\bar{a}$ простору. Скільки існує векторів $\bar{x}$ таких, що $\bar{a}\cdot\bar{x}=-1$?*

А жодного; **Б** один; **В** два; **Г** безліч.

6. *Якщо для трьох ненульових векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ у просторі виконується рівність $\bar{a}\times\bar{c}=\bar{b}\times\bar{c}$, то...*

А $\bar{a}\parallel\bar{b}$; **Б** $\bar{a}=\bar{b}$;
В $\bar{a}\perp\bar{b}$; **Г** $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ – компланарні.

7. *Спростіть вираз $(\bar{i}\times(\bar{j}\times\bar{k}))\cdot\bar{i}$, де $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ – ортонормований базис.*

А 1; **Б** 0; **В** $\bar{i}^2$; **Г** –1.

8. *Дано точки A(–2; –3; –6), B(3; 2; 5), C(1; –1; 2), D(3; –2; 4). Знайдіть* $\text{пр}_{\overline{CD}}\overline{AB}$.

А 9; **Б** –3; **В** $\sqrt{3}$; **Г** 3.

9. *При яких значеннях p вектор $\bar{a}=\bar{i}+p\bar{j}+\bar{k}$ ортогональний до вектора $\bar{b}(-2;1;0)$?*

А –2; **Б** 2; **В** 1; **Г** 0.

10. *Якщо $\bar{a}=(1,2,3)$ і $\bar{b}=(3,2,1)$, то $\bar{a}\cdot\bar{b}$ буде дорівнювати*

А 10; **Б** 12; **В** –4; **Г** 16.

11. Відомо, що $\overline{a}(7,1)$ *і* $\overline{b}(3,4)$. *Скалярний добуток векторів* $\overline{c}=\overline{a}-\overline{b}$ *і* $\overline{d}=\overline{a}+\overline{b}$ *буде дорівнювати*

А 16; **Б** 25; **В** 38; **Г** 15.

12. При якому значенні параметра λ *вектори* $\overline{i}+4\overline{j}+3\overline{k}$ *і* $7\overline{i}+5\overline{j}-\lambda^2\overline{k}$ *ортогональні?*

А 3; **Б** –3; **В** ±3; **Г** $\lambda\in\varnothing$.

13. Одиничний вектор, протилежний вектору (2; –1; 0), *дорівнює:*

А (–2; 1; 0); **Б** $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}}; 0\right)$; **В** $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}; 0\right)$; **Г** (–1; 1; 0).

14. Вкажіть всі значення p і q при яких вектори $\overline{a}(1;0;p)$ *і* $\overline{b}(2;q;1)$ *колінеарні?*

А $p=\frac{1}{2}$, $q=2$; **Б** $p=2$, $q=\frac{1}{2}$;

В $p=\frac{1}{2}$, $q=0$; **Г** $p=2$, $q=0$.

15. Вектори простору $\overline{a}$ *і* $\overline{b}$ *неколінеарні. Вкажіть усі значення параметрів* λ *і* μ, *при яких компланарні вектори* $\overline{a}$, $\overline{a}+\lambda\overline{b}$, $\mu\overline{a}-\overline{b}$.

А $\lambda>0$, $\mu>0$; **Б** $\lambda=0$, $\mu\in R$; **В** $\lambda\in R$, $\mu=0$; **Г** $\lambda\in R$, $\mu\in R$.

16. Вектори простору $\overline{a}$ *і* $\overline{b}$ *неколінеарні. При якому значенні параметру* α *вектори* $\overline{p}=\alpha\overline{a}+5\overline{b}$ *і* $\overline{q}=3\overline{a}-\overline{b}$ *будуть колінеарні?*

А 0; **Б** –13; **В** –15; **Г** 1.

17. Дано вектори $\overline{AB}(1;0;-2)$ *і* $\overline{AC}(-1;0;1)$. *Площа трикутника ABC дорівнює:*

А 1; **Б** 0,5; **В** $\sqrt{3}$; **Г** 2.

18. Як розміщені прямі AB і AC, якщо виконується рівність $\left(\overline{AB}+\overline{AC}\right)^2=\left(\overline{AB}-\overline{AC}\right)^2$ *?*

А паралельні; **Б** перпендикулярні;

В перетинаються ; **Г** визначити неможливо.

19. Мішаним добутком трьох векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ *і* $\overline{c}$ *називається число, яке позначають* $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$ *й дорівнює:*

А $\overline{a}\cdot\left(\overline{b}\times\overline{c}\right)$; **Б** $\overline{a}\times\left(\overline{b}+\overline{c}\right)$; **В** $\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}$; **Г** $\overline{a}\times\left(\overline{b}\times\overline{c}\right)$.

20. Довжина векторного добутку $\overline{c}\neq\overline{0}$ *і* $\overline{d}\neq\overline{0}$ *численно дорівнює*

А площі трикутника, побудованого на цих векторах;

Б площі паралелограма, побудованого на цих векторах;

В об’єму паралелепіпеда;

Г об’єму тетраедра.

Відповіді: 1.В. 2.В. 3.Г. 4.А. 5.Б. 6.Г. 7.Б. 8.А. 9.Б. 10.А. 11.Б. 12.В. 13.В. 14.В. 15.Г. 16.В. 17.Б. 18.Б. 19.А,Б. 20.Б.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1 По похилій площині з кутом нахилу α рухається вниз брусок A масою m (рис. 10.3). Коефіцієнт тертя бруска до площини дорівнює μ. Визначити величину прискорення $\overline{a}$ бруска.

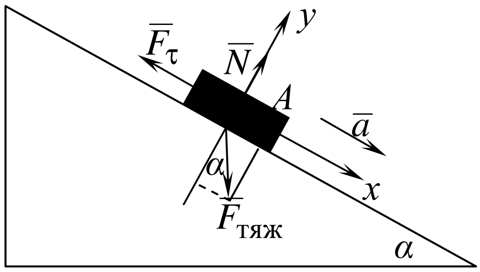


Рисунок 10.3 – Рисунок до прикладу 1

Розв'язання.

На брусок діють три сили: сила тяжіння $\overline{F}_{тяж} = m\overline{g}$, сила тертя $\overline{F}_\tau$ і сила реакції опори $\overline{N}$. Напрямки цих сил показані на рис. 10.3. Разом ці сили й надають бруску прискорення $\overline{a}$, що спрямоване вздовж площини вниз. Щоб спростити рисунок, усі сили прикладені до центру бруска. Насправді, $\overline{F}_\tau$ і $\overline{N}$ прикладені до основи бруска.

Спрямуємо осі координат Ox і Oy так, як показано на рис. 10.3. Другий закон Ньютона запишемо у векторній формі

$$m\overline{a} = m\overline{g} + \overline{N} + \overline{F}_\tau,$$

а також у скалярній формі для проекції векторів, що входять до нього, на осі Ox і Oy.

Для проекцій на вісь Ox рівняння другого закону Ньютона запишеться так:

$$ma = mg\sin\alpha - F_\tau. \qquad (10.9)$$

Для проекцій на вісь Oy маємо

$$0 = N - mg\cos\alpha \text{ або } N = mg\cos\alpha. \qquad (10.10)$$

Оскільки величина сили тертя дорівнює μN, то, враховуючи (10.10), отримаємо $F_\tau = \mu mg\cos\alpha$. Підставляючи F_τ в (10.9), знайдемо:

$$|\,\overline{a}\,| = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Приклад 2 Дві однакові кульки підвішені на нитках завдовжки $l = 2$ м до однієї точки (рис. 10.4). Коли кулькам надали однакових зарядів по $q = 2\cdot 10^{-8}$ Кл, то вони розійшлися на відстань $r = 16$ см. Визначити натяг кожної нитки.

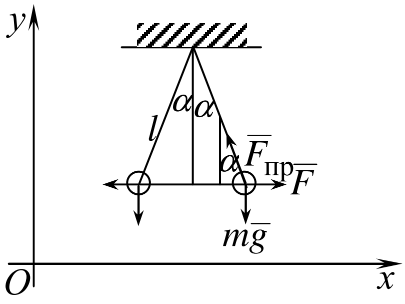


Рисунок 10.4 – Рисунок до прикладу 2

Розв'язання.

На кожну кульку діють три сили: сила тяжіння $m\overline{g}$, сила пружності нитки $\overline{F}_{пр}$ і кулонівська сила $\overline{F}$.

Кульки нерухомі, отже, сума проекцій відповідних сил на осі Ox і Oy дорівнює нулю. Для суми проекцій сил на вісь Ox ця умова має вигляд

$$F - F_{пр}\sin\alpha + mg\cos 90^\circ = 0.$$

Оскільки $\sin\alpha = \dfrac{r}{2l}$ і $F = k\dfrac{q^2}{r^2}$, то

$$F_{\text{пр}} = \frac{F}{\sin\alpha} = \frac{F \cdot 2l}{r} = k\frac{q^2 \cdot 2l}{r^2} \approx 3{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ Н.}$$

Приклад 3 Два однакових точкових заряди розміщені на відстані r один від одного в однорідному середовищі з діелектричною проникністю ε (рис. 10.5). Знайти напруженість електричного поля в точці, що розміщена на однаковій відстані r як від одного, так і від іншого заряду.

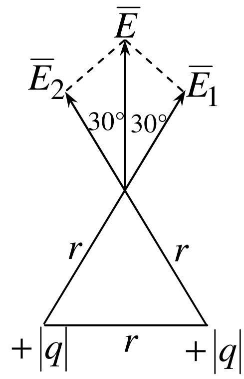


Рисунок 10.5 – Рисунок до прикладу 3

Розв'язання.

Згідно з принципом суперпозиції, шукана напруженість $\overline{E}$ дорівнює геометричній напруженості полів, створених кожним із зарядів. Модулі напруженостей кожного заряду дорівнюють $E_1 = E_2 = k\frac{|q|}{\varepsilon r^2}$.

Діагональ паралелограма, побудованого на векторах $\overline{E}_1$ та $\overline{E}_2$, є напруженістю результуючого поля, модуль якої дорівнює

$$E = eE_l \cos 30^\circ = 2k\frac{|q|}{\varepsilon r^2}\frac{\sqrt{3}}{2} = k\frac{|q|\sqrt{3}}{\varepsilon r^2}.$$

Приклад 4 Задано вектори $\overline{a} = m\overline{i} + 8\overline{j} + 4\overline{k}$ і $\overline{b} = 4\overline{i} + m\overline{j} - 7\overline{k}$, де $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ – ортонормований базис. При якому значенні m ці вектори перпендикулярні?

Розв'язання.

Скористаємось формулою (10.4):

$$4m + 8m - 28 = 0,\ m = \frac{7}{3}.$$

Приклад 5 Знайти кут між векторами $\overline{a} = \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}$ і $\overline{b} = 6\overline{i} + 4\overline{j} - 2\overline{k}$, де $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ – ортонормований базис.

Розв'язання.

Скористаємось формулою (10.5):

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 6 + 2\cdot 4 + 3\cdot(-2)}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\cdot\sqrt{6^2+4^2+(-2)^2}} = \frac{8}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{56}} = \frac{2}{7}, \qquad \varphi = \arccos\frac{2}{7}.$$

Приклад 6 Знайти орт вектора $\overline{a} = 2\overline{i} + 4\overline{j} + 4\overline{k}$.

Розв'язання.

Знаходимо довжину вектора $\overline{a}$: $|\overline{a}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = 6$. Оскільки $\overline{a}_0 = \frac{\overline{a}}{|\overline{a}|}$, то $\overline{a}_0 = \frac{1}{3}\overline{i} + \frac{2}{3}\overline{j} + \frac{2}{3}\overline{k}$.

Приклад 7 До точки прикладені дві сили $\overline{P}$ і $\overline{Q}$, які діють під кутом 120°, причому $|\overline{P}| = 7$, $|\overline{Q}| = 4$. Знайти величину рівнодійної сили $\overline{R}$.

Розв'язання.

Оскільки $\overline{R} = \overline{P} + \overline{Q}$, то

$$\left|\overline{R}\right| = \sqrt{\overline{R}^2} = \sqrt{\left(\overline{P} + \overline{Q}\right)^2} = \sqrt{\overline{P}^2 + 2\overline{P}\overline{Q} + \overline{Q}^2} =$$
$$= \sqrt{\left|\overline{P}\right|^2 + 2\left|\overline{P}\right| \cdot \left|\overline{Q}\right| \cdot \cos 120^\circ + \left|\overline{Q}\right|^2} = \sqrt{37}.$$

Приклад 8 Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}(1;1;1)$, $\overline{b}(3;2;1)$, якщо координати векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ задані в правому ортонормованому базисі $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$.

Розв'язання.

У випадку правого ортонормованого базису $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ має місце формула (10.7), згідно з якою:

$$\left[\overline{a}, \overline{b}\right] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\overline{i} + 2\overline{j} - \overline{k}.$$

Таким чином, $\left[\overline{a}, \overline{b}\right] = (-1; 2; -1)$. Визначимо модуль вектора $\left[\overline{a}, \overline{b}\right]$ або, що теж саме, шукану площу паралелограма

$$S = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6} \text{ (кв. од).}$$

Приклад 9 В ортонормованому базисі $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ задані вектори $\overline{a}(1;2;3)$, $\overline{b}(3;2;1)$, $\overline{c}(2;3;1)$. З'ясувати, чи є трійка векторів $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ правою. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах.

Розв'язання.

Обчислимо мішаний добуток векторів $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ за формулою (10.8):

$$\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 12.$$

Оскільки $\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right) > 0$, то за властивістю 1 мішаного добутку векторів, трійка векторів $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – права й об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, дорівнює $V = 12$ (куб. од.).

Приклад 10 Обчислити роботу, що виконується силою $\overline{F} = (3; -5; 2)$, коли точка прикладання переміщується із початку в кінець вектора $\overline{S}(2, -5, 7)$.

Розв'язування.

Якщо вектор зображає силу $\overline{F}$, точка прикладання якої переміщується із початку в кінець вектора $\overline{S}$, то робота *A* цієї сили визначається рівністю

$$A = \left(\overline{F}, \overline{S}\right) = 3 \cdot 2 + (-5) \cdot (-5) + 2 \cdot 7 = 45.$$

Приклад 11 Сила $\overline{P} = (2; -4; 5)$ прикладена до точки $A(2; -1; 1)$. Визначити момент цієї сили відносно початку координат.

Розв'язування.

Якщо вектор $\bar{f}$ зображає силу, що прикладена в деякій точці M, а вектор $\bar{S}$ виходить з деякої точки B в точку M, то вектор $\left[\bar{S},\ \bar{f}\right]=\overline{M}_B$ є моментом сили $\bar{f}$ відносно точки B, тут $\left[\bar{S},\ \bar{f}\right]$ – векторний добуток векторів $\bar{S}$ і $\bar{f}$.

Оскільки вектор $\overline{OA}(2;-1;2)$, тоді момент сили $\overline{P}$ відносно початку координат буде:

$$\overline{M}_O=\left[\overline{OA},\ \overline{P}\right]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & -1 & 2\\ 2 & -4 & 5\end{vmatrix}=3\bar{i}-6\bar{j}-6\bar{k}.$$

Приклад 12 Знайти об'єм трикутної піраміди з вершинами $A(2;2;2)$, $B(4;3;3)$, $C(4;5;4)$ і $D(5;5;6)$.

Розв'язання.

Знаходимо координати векторів $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{AD}$, які збігаються з ребрами піраміди, що виходять з вершини A: $\overline{AB}(2;1;1)$, $\overline{AC}(2;3;2)$, $\overline{AD}(3;3;4)$. Знайдемо мішаний добуток цих векторів за формулою (10.8):

$$\left(\overline{AB},\ \overline{AC},\ \overline{AD}\right)=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 3 & 4\end{vmatrix}=24+6+6-9-12-8=7.$$

Оскільки об'єм піраміди дорівнює $\dfrac{1}{6}$ частині об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{AD}$, то $V=\dfrac{7}{6}$ (куб. од.).

Приклад 13 Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}+3\bar{b}$ і $3\bar{a}+\bar{b}$, якщо $|\bar{a}|=|\bar{b}|=1$, $\angle(\bar{a},\bar{b})=30^\circ$.

Розв'язання.

Маємо

$$\left(\bar{a}+3\bar{b}\right)\times\left(3\bar{a}+\bar{b}\right)=\bar{a}\times\left(3\bar{a}\right)+\left(3\bar{b}\right)\times\left(3\bar{a}\right)+\bar{a}\times\bar{b}+\left(3\bar{b}\right)\times\bar{b}=$$
$$=3\cdot\bar{0}-9\bar{a}\times\bar{b}+\bar{a}\times\bar{b}+3\cdot\bar{0}=-8\bar{a}\times\bar{b}.$$

Отже,

$$S=\left|-8\bar{a}\times\bar{b}\right|=8\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|=8\cdot1\cdot1\cdot\sin30^\circ=4 \text{ (кв. од.).}$$

Задачі для самостійного розв'язування

№ 10.1. Спростіть вираз:

1) $\left(2\bar{i}+3\bar{j}-\bar{k}\right)\cdot\left(\bar{i}-\bar{j}+4\bar{k}\right)$; 2) $\left(\bar{a}+\bar{b}\right)\cdot\left(\bar{a}-\bar{b}\right)$;

3) $\bar{i}\times\bar{j}+\bar{i}\times\bar{k}-\bar{j}\times\bar{k}$; 4) $\bar{i}\times\bar{j}\times\bar{k}$;

5) $\left(\bar{a}+\bar{b}\right)\cdot\left(\bar{b}+\bar{c}\right)\cdot\left(\bar{c}+\bar{a}\right)$;

6) $\left(\bar{i}-3\bar{j}+\bar{k}\right)\cdot\left(2\bar{i}+\bar{j}-3\bar{k}\right)\cdot\left(\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}\right)$;

7) $\left(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}\right)\cdot\left(\bar{a}+\bar{b}-\bar{c}\right)\cdot\left(\bar{a}-\bar{b}+\bar{c}\right)$.

№ 10.2. Дано вектори $\bar{a}(2;3;0)$, $\bar{b}(-1;2;2)$, $\bar{c}(3;1;0)$. Знайдіть:

1) $(3\overline{a}-4\overline{b})+(\overline{b}-3\overline{c})+(2\overline{c}-\overline{a})$; 2) $(\overline{a}+\overline{b}-\overline{c})(-2\overline{a}-3\overline{b})$;

3) $\left|\overline{a}+\overline{b}-\overline{c}\right|$; 4) $\angle(\overline{a},\overline{i})$;

5) $\angle(\overline{a}+\overline{b}-\overline{c},-2\overline{a}-3\overline{b})$; 6) $\overline{a}\times\overline{b}$;

7) $\overline{a}\times(17\overline{a}+3\overline{b})$; 8) $\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}$;

9) $\overline{a}\times(\overline{b}\times\overline{c})-(\overline{a}\times\overline{b})\times\overline{c}$.

№ 10.3. Обчислити проекцію вектора $\overline{a}=5\overline{i}+2\overline{j}+5\overline{k}$ на вісь, що визначається вектором $\overline{b}=2\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k}$.

№ 10.4. Дано три вектори $\overline{a}(7,-6,1)$, $\overline{b}(2,-3,-6)$ і $\overline{c}(3,-4,12)$. Обчислити $\text{пр}_{\overline{b}}(\overline{a}+\overline{c})$.

№ 10.5. Обчислити роботу, що її виконує сила $\overline{f}(4;5;2)$, коли точка, до якої вона прикладена, рухаючись прямолінійно, перемістилася із положення $A(3;-7;1)$ у положення $B(6;-1;-2)$.

№ 10.6. Дано три сили: $\overline{f}_1(3;-4;2)$, $\overline{f}_2(2;3;-5)$, $\overline{f}_3(-3;-2;4)$, прикладені до однієї точки. Обчислити роботу, яку виконує рівнодійна цих сил, коли точка, до якої вона прикладена, рухаючись прямолінійно, перемістилася з точки $A(5;3;-7)$ у точку $B(4;-1;-4)$.

№ 10.7. Маса *m*, зосереджена в точці $A(x;y;z)$, притягується, згідно з законом Ньютона, до маси *M*, що зосереджена в початку координат. Знайти силу тяжіння.

№ 10.8. У початку координат розміщений заряд *q*. Визначити в довільній точці $M(x;y;z)$ простору напругу *E* електростатичного поля, утвореного цим зарядом.

№ 10.9. До однієї і тієї ж точки прикладені дві сили $\overline{f}_1$ та $\overline{f}_2$, кут між якими *α*. Знайти величину рівнодійної.

№ 10.10. Дано точки *A*(3,1, 2), *B*(4, 0,1) і *C*(5,4, 7). Обчислити площу трикутника *ABC*.

№ 10.11. Знайти орт вектора, перпендикулярного до векторів $\overline{a}=2\overline{i}+2\overline{j}+\overline{k}$ та $\overline{b}=4\overline{i}+5\overline{j}+3\overline{k}$.

№ 10.12. Дано, що $\left|\overline{a}\right|=3$, $\left|\overline{b}\right|=5$. Визначити, при якому значенні *α* вектори $\overline{a}+\alpha\overline{b}$ і $\overline{a}-\alpha\overline{b}$ будуть взаємно перпендикулярні.

№ 10.13. Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ утворюють кут $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$. Знаючи, що $\left|\overline{a}\right|=3$, $\left|\overline{b}\right|=4$, обчислити:

1) $\overline{a}\cdot\overline{b}$; 2) $\overline{a}^2$; 3) $\overline{b}^2$; 4) $(\overline{a}+\overline{b})^2$;

5) $(3\overline{a}-2\overline{b})\cdot(\overline{a}+2\overline{b})$; 6) $(\overline{a}-\overline{b})^2$; 7) $(3\overline{a}+2\overline{b})^2$.

№ 10.14. Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ взаємно перпендикулярні, вектор $\overline{c}$ утворює з ними кути, рівні $\dfrac{\pi}{3}$. Знаючи, що $\left|\overline{a}\right|=3$, $\left|\overline{b}\right|=5$, $\left|\overline{c}\right|=8$, обчислити:

1) $\left(3\overline{a}-2\overline{b}\right)\cdot\left(\overline{b}+3\overline{c}\right)$; 2) $\left(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}\right)^2$; 3) $\left(\overline{a}+2\overline{b}-3\overline{c}\right)^2$.

№ 10.15. Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ утворюють кут $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$. Знаючи, що $\left|\overline{a}\right|=\sqrt{3}$, $\left|\overline{b}\right|=1$, обчислити кут між векторами $\overline{p}=\overline{a}+\overline{b}$ и $\overline{q}=\overline{a}-\overline{b}$.

№ 10.16. Дано вектори $\overline{a}(4;-2;-4)$, $\overline{b}(6;-3;2)$. Обчислити:

1) $\overline{a}\cdot\overline{b}$; 2) $\sqrt{\overline{a}^2}$; 3) $\sqrt{\overline{b}^2}$;

4) $\left(2\overline{a}-3\overline{b}\right)\left(\overline{a}+2\overline{b}\right)$; 5) $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)^2$; 6) $\left(\overline{a}-\overline{b}\right)^2$.

№ 10.17. Дано точки $A(-1;3;-7)$, $B(2\ -1;5)$ і $C(0;1;-5)$. Обчислити:

1) $\left(2\overline{AB}-\overline{CB}\right)\cdot\left(2\overline{BC}+\overline{BA}\right)$; 2) $\sqrt{\overline{AB}^2}$; 3) $\sqrt{\overline{AC}^2}$.

№ 10.18. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}=\overline{m}+\overline{n}$ і $\overline{b}=3\overline{m}+2\overline{n}$, якщо $\left|\overline{m}\right|=\left|\overline{n}\right|=1$, $\angle\left(\overline{m},\overline{n}\right)=\dfrac{\pi}{6}$.

№ 10.19. Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ утворюють кут $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$. Знаючи, що $\left|\overline{a}\right|=1$, $\left|\overline{b}\right|=2$, обчислити:

1) $\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)^2$; 2) $\left(\left(2\overline{a}+\overline{b}\right)\times\left(\overline{a}+2\overline{b}\right)\right)^2$;

3) $\left(\left(\overline{a}+3\overline{b}\right)\times\left(3\overline{a}-\overline{b}\right)\right)^2$.

№ 10.20. Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ взаємно перпендикулярні. Знаючи, що $\left|\overline{a}\right|=3$, $\left|\overline{b}\right|=4$, обчислити:

1) $\left|\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\times\left(\overline{a}-\overline{b}\right)\right|$; 2) $\left|\left(3\overline{a}-\overline{b}\right)\times\left(\overline{a}-2\overline{b}\right)\right|$.

№ 10.21. Дано точки $A(2;-1;2)$, $B(1\ 2;-1)$ і $C(3;2;1)$. Знайти координати векторних добутків:

1) $\overline{AB}\times\overline{BC}$; 2) $\left(\overline{BC}-2\overline{CA}\right)\times\overline{CB}$.

№ 10.22. З'ясувати, праву чи ліву трійку утворюють вектори?

1) $\overline{a}(2,1,2)$, $\overline{b}(3,-2,1)$ і $\overline{c}(3,-1,-2)$;

2) $\overline{a}(2,-2,-3)$, $\overline{b}(2,0,3)$ і $\overline{c}(1,1,1)$.

№ 10.23. Знайти об'єм тетраедра за вершинами $A(-5;-4;8)$, $B(2;3;1)$, $C(4;1;-2)$, $D(6;3;7)$.

№ 10.24. Обчислити $\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\times\overline{c}$, якщо

1) $\overline{a}(1,2,-1)$, $\overline{b}(2,1,-2)$, $\overline{c}(3,1,-1)$;

2) $\overline{a}(3,2,1)$, $\overline{b}(0,1,-1)$, $\overline{c}(-1,1,1)$.

№ 10.25. Обчислити $\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\times\overline{c}-\overline{a}\times\left(\overline{b}\times\overline{c}\right)$, якщо $\overline{a}(1,-1,3)$, $\overline{b}(-2,2,1)$, $\overline{c}(3,-2,5)$.

№ 10.26. Сила $\bar{f}(2;-4;3)$ прикладена до точки $A(1;5;-2)$. Знайти момент цієї сили відносно точки $B(5;-3;4)$.

№ 10.27. Знайти момент сили відносно точки $A(3;-2;1)$, якщо ця сила прикладена до точки $B(2;-1;3)$, причому $|\bar{f}|=5$ і $\bar{f} \parallel \bar{a}$, де $\bar{a}(2,1,-2)$.

№ 10.28. Сила $\bar{f}(2;2;9)$ прикладена до точки $A(4;2;-3)$. Визначити величину та напрямні косинуси моменту цієї сили відносно точки $B(2;4;0)$.

№ 10.29. По нескінченному прямолінійному провіднику тече струм із силою $\bar{I}$. Знайти в будь-якій точці простору напруженість $\overline{H}$ магнітного поля, утвореного цим струмом, використовуючи при визначенні напрямку вектора напруженості $\overline{H}$ правило свердлика.

Використовуючи розв'язок задачі 10.29.,розв'язати задачі 10.30 – 10.32:

№ 10.30. Обчислити в будь-якій точці простору напруженість $\overline{H}$ магнітного поля, утвореного струмом, що тече по прямолінійному провіднику, якщо напрямок провідника збігається з напрямком 1) осі Ox; 2) осі Oy; 3) осі Oz.

№ 10.31. Обчислити в точці $M(-3;4;2)$ напруженість $\overline{H}$ магнітного поля, утвореного струмом з силою $\bar{I}=-3\bar{k}$, який тече по прямолінійному провіднику. Знайти орт вектора $\overline{H}$.

№ 10.32. Обчислити в точці $M(2;5;0)$ напруженість $\overline{H}$ магнітного поля, утвореного струмом з силою $\bar{I}=-2\bar{i}$, який тече по прямолінійному провіднику, та знайти напрямні косинуси вектора $\overline{H}$.

11 ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ. ПЛОЩИНА Й ПРЯМА В ПРОСТОРІ

Теоретичні відомості

Пряма на площині

Таблиця 11.1 – Основні види рівнянь прямої на площині

Назва рівняння	**Рівняння**
Загальне рівняння прямої	$Ax + By + C = 0$
Рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{n}(A, B)$ – нормальний вектор прямої	$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$
Канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно вектору $\overline{a}(a_x, a_y)$ – напрямний вектор прямої	$\dfrac{x - x_0}{a_x} = \dfrac{y - y_0}{a_y}$
Параметричні рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно вектору $\overline{a}(a_x, a_y)$ – напрямний вектор прямої	$\begin{cases} x - x_0 = a_x t, \\ y - y_0 = a_y t \end{cases}$
Канонічне рівняння прямої, що проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$	$\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$
Рівняння прямої *у відрізках на осях*	$\dfrac{x}{\alpha} + \dfrac{y}{\beta} = 1$
Нормальне рівняння прямої	$\dfrac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$
Рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$, та має *кутовий коефіцієнт* k	$y = k(x - x_0) + y_0$

Формула відстані від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Таблиця 11.2 – Формули для обчислення кута між двома прямими й умов взаємного розташування двох прямих

Назва формули (умови)	**Види рівнянь прямих**		
	Загальний: $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ і $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$	**Канонічний:** $\dfrac{x - x_1}{a_x} = \dfrac{y - y_1}{a_y}$ і $\dfrac{x - x_2}{b_x} = \dfrac{y - y_2}{b_y}$	**З кутовим коефіцієнтом:** $y = k_1 x + b_1$ і $y = k_2 x + b_2$
1	**2**	**3**	**4**
Кут θ між двома прямими	$\cos\theta = \dfrac{\lvert A_1 A_2 + B_1 B_2\rvert}{\sqrt{(A_1^2 + B_1^2)(A_2^2 + B_2^2)}}$	$\cos\theta = \dfrac{\lvert a_x b_x + a_y b_y\rvert}{\sqrt{(a_x^2 + b_x^2)(a_y^2 + b_y^2)}}$	$\mathrm{tg}\,\theta = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$

Продовження таблиці 5.2

1	2	3	4
Умова перпендикулярн ості	$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$	$a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y = 0$	$k_1 \cdot k_2 = -1$
Умова паралельності	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ $(C_1 \neq C_2)$	$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y}$	$k_1 = k_2$

Площина в просторі

Таблиця 11.3 – Основні види рівнянь площини

Назва рівняння, необхідні компоненти	**Рівняння**
Загальне рівняння площини	$Ax + By + Cz + D = 0$
Рівняння площини, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{n}(A, B, C)$ – нормальний вектор площини	$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$
Детермінантне рівняння площини, що проходить через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$	$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$
Нормальне рівняння площини	$\frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$
Рівняння площини *у відрізках на осях*	$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1$

Формула відстані від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Таблиця 11.4 – Формули для обчислення кута між двома площинами $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ та їх взаємного розташування у просторі

Назва формули (умови)	**Формула**
Величина двогранного кута θ між двома площинами	$\cos\theta = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$
Умова перпендикулярності	$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0$
Умова паралельності	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$

Пряма в просторі

Таблиця 11.5 – Основні види рівнянь прямої в просторі

Назва рівняння, необхідні компоненти	Рівняння
Канонічне рівняння прямої, що проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$	$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$
Загальне рівняння прямої як перетину двох площин, напрямний вектор якої має координати $\overline{a}\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right)$	$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$
Канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ паралельно вектору $\overline{a}(a_x, a_y, a_z)$ – напрямний вектор прямої	$\dfrac{x-x_0}{a_x}=\dfrac{y-y_0}{a_y}=\dfrac{z-z_0}{a_z}$
Параметричні рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ паралельно вектору $\overline{a}(a_x, a_y, a_z)$ – напрямний вектор прямої	$\begin{cases} x-x_0=a_xt, \\ y-y_0=a_yt, \\ z-z_0=a_zt \end{cases}$

Формула відстані від точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямої $\dfrac{x-x_0}{a_x}=\dfrac{y-y_0}{a_y}=\dfrac{z-z_0}{a_z}$:

$$d=\frac{\left|\overline{M_0M_1}\times\overline{a}\right|}{|\overline{a}|}.$$

Таблиця 11.6 – Формули для обчислення відстані й кута між двома прямими $\dfrac{x-x_1}{a_x}=\dfrac{y-y_1}{a_y}=\dfrac{z-z_1}{a_z}$ і $\dfrac{x-x_2}{b_x}=\dfrac{y-y_2}{b_y}=\dfrac{z-z_2}{b_z}$ та їх взаємного розташування у просторі

Назва формули	Формула
Відстань між двома прямими	$\rho=\dfrac{\left|\left(\overline{M_1M_2}, \overline{a}_1, \overline{a}_2\right)\right|}{|\overline{a}_1\times\overline{a}_2|}$
Кут θ між двома прямими в просторі	$\cos\theta=\dfrac{\left|a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\right|}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$
Умова перпендикулярності	$\overline{a}_1\cdot\overline{a}_2=0\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$
Умова паралельності	$\overline{a}_1 \parallel \overline{a}_2\Leftrightarrow\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$

Пряма й площина в просторі

Нехай дано пряма в канонічному виді: $\frac{x-x_1}{a_x}=\frac{y-y_1}{a_y}=\frac{z-z_1}{a_z}$ і площина в загальному виді $Ax+By+Cz+D=0$.

Таблиця 11.7 – Формули для обчислення кута між прямою і площиною в просторі, взаємного розташування прямої і площини в просторі

Назва формули	Формула
Кут θ між прямою і площиною в просторі	$\sin\theta=\frac{\left\lvert A\cdot a_x+B\cdot a_y+C\cdot a_z\right\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$
Умова перпендикулярності прямої і площини	$\frac{A}{a_x}=\frac{B}{a_y}=\frac{C}{a_z}$
Умова паралельності прямої і площини	$A\cdot a_x+B\cdot a_y+C\cdot a_z=0$

Тест для самоперевірки

1. *Рівняння прямої, яка проходить через точку* $A(2; –3)$ *і перпендикулярна до прямої* $x-4y+7=0$, *має вигляд*

А $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{-4}$; **Б** $\frac{x-2}{-4}=\frac{y+3}{1}$;

В $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{-4}$; **Г** $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{-4}$.

2. *Рівняння прямої, яка проходить через точку* $A(–1; 4; –2)$ *і перпендикулярна до площини* $2x-y+3z-7=0$, *має вигляд*

А $\frac{x+2}{3}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z+1}{2}$; **Б** $\frac{x-1}{2}=\frac{y+4}{-1}=\frac{z-2}{3}$;

В $\frac{x+1}{-3}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z+2}{2}$; **Г** $\frac{x+1}{2}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z+2}{3}$.

3. *Рівняння прямої, симетричної прямій* $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}$ *відносно точки* $(3;-1)$, *має вигляд*

А $\frac{x+5}{2}=\frac{y-1}{1}$; **Б** $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{1}$;

В $\frac{x-5}{2}=\frac{y+1}{1}$; **Г** $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}$.

4. *Яка з наступних площин паралельна векторам* $\overline{a}(-1;0;1)$ *і* $\overline{b}(0;-1;2)$?

А $x+3y+z-1=0$; **Б** $x-2y+z-1=0$;

В $x+2y+z-1=0$; **Г** $x-2y-z-1=0$.

5. *Прямі, які задані рівняннями* $\frac{x}{4}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{0}$ *та* $\frac{x}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-4}{0}$

А паралельні; **Б** перетинаються; **В** мимобіжні; **Г** збігаються.

6. *Прямі, які задані рівняннями* $\frac{x}{4}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{0}$ *та* $\frac{x}{2}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-4}{1}$

А паралельні; **Б** перетинаються; **В** мимобіжні; **Г** збігаються.

7. *Встановіть взаємне розташування площин* $2x-y+3z-2=0$ *і* $x+y-z+2=0$.

А паралельні; **Б** співпадають;
В перетинаються; **Г** перпендикулярні.

8. *Встановіть взаємне розташування площин* $2x+3y-z+7=0$ *і* $4x+6y-2z+9=0$.

А паралельні; **Б** співпадають;
В перетинаються; **Г** перпендикулярні.

9. *Вкажіть усі значення параметра p, при яких прямі* $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{p}=\frac{z+1}{2}$ *і* $\frac{x+2}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-1}$ *паралельні.*

А 4; **Б** –4; **В** 2; **Г** –2.

10. *Вкажіть усі значення параметра p, при яких прямі* $\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{p}=\frac{z+1}{3}$ *і* $\frac{x+2}{-2}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-1}{-6}$ *перпендикулярні.*

А 4; **Б** –4; **В** 3; **Г** –3.

11. *Вкажіть усі значення параметра a, при яких пряма* $\frac{x}{1}=\frac{y}{a}=\frac{z-2}{-1}$ *паралельна площині* $3ax+ay+4z-4=0$.

А 0; **Б** –4, 1; **В** –4; **Г** 1.

12. *Вкажіть усі значення параметра a, при яких пряма* $\frac{x-1}{a}=\frac{y+1}{a^2}=\frac{z}{3}$ *перпендикулярна до площини* $5a^2x-2ay-z+5=0$.

А 0; **Б** –1, 1; **В** –1; **Г** 1.

13. *Відстань між точками перетину прямої* $\frac{x}{4}-\frac{y}{3}=1$ *з осями координат дорівнює*

А 5; **Б** 25; **В** 12; **Г** $\sqrt{5}$.

14. *Відстань між прямими* $5(x-2)-12(y-3)=0$ *і* $5x-12y-13=0$ *дорівнює*

А 1; **Б** 3; **В** 4; **Г** $\sqrt{2}$.

15. *Кут між прямими* $5(x-2)-12(y-3)=0$ *і* $5x-12y-13=0$ *дорівнює*

А 90°; **Б** 0°; **В** $\mathrm{arctg}\frac{5}{12}$; **Г** $\mathrm{arctg}\frac{12}{5}$.

16. Відстань між прямою $\frac{x}{4}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+5}{0}$ *та площиною* $x+3y-7z+2=0$ *дорівнює*

А $\sqrt{59}$; **Б** $\sqrt{17}$; **В** $\frac{\sqrt{17}}{2}$; **Г** 0.

17. Кут між прямою $\frac{x}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z+2}{2}$ *та площиною* $2x-y+z+3=0$ *дорівнює*

А $0°$; **Б** $\arcsin\frac{5}{3\sqrt{6}}$; **В** $90°$; **Г** $\arccos\frac{5}{3\sqrt{6}}$.

18. Відстань між прямою $\frac{x-7}{5}=\frac{y-4}{7}=\frac{z-5}{-4}$ *та площиною* $3x-y+2z-5=0$ *дорівнює*

А $\frac{22}{\sqrt{14}}$; **Б** $\frac{27}{\sqrt{14}}$; **В** $\frac{22}{\sqrt{42}}$; **Г** 0.

19. Відстань між площинами $(x-1)+2(y-2)-2(z+1)=0$ *і* $x-2y-2z-6=0$ *дорівнює*

А $\frac{1}{3}$; **Б** 0; **В** 13; **Г** 1.

20. Кут між площинами $(x+1)+3(y-1)-(z+5)=0$ *і* $x+3y-z+3=0$ *дорівнює*

А $\arccos\frac{1}{\sqrt{11}}$; **Б** $90°$; **В** $0°$; **Г** $60°$.

Відповіді: 1.В. 2.Г. 3.В. 4.В. 5.А. 6.В. 7.В. 8.А. 9.Б. 10.А. 11.Б. 12.А. 13.А. 14.Б. 15.Б. 16.Г. 17.Б. 18.А. 19.А. 20.В.

Приклади розв’язання задач

Приклад 1 На площині заданий ΔABC з вершинами $A(-1,0)$, $B(1,-4)$, $C(-8,-2)$. Потрібно знайти:

1) довжину сторони *BC*;
2) загальні рівняння медіани, висоти та бісектриси кута *A*;
3) відстань вершини *B* від медіани;
4) кут між медіаною і висотою (у градусах).

Розв’язання.

1) Знайдемо координати вектора $\overline{BC}(-9,2)$ та його довжину: $BC=\sqrt{(-9)^2+2^2}=\sqrt{81+4}=\sqrt{85}$.

2) Медіана кута *A* ділить сторону *BC* навпіл, тому координати точки *M* – середини *BC* будуть: $M\left(\frac{-1-8}{2},\frac{-4-2}{2}\right)$, $M\left(-\frac{9}{2},-3\right)$. Тепер складемо рівняння медіани як рівняння прямої за двома точками:

$$AM:\ \frac{x+1}{-\frac{9}{2}+1}=\frac{y-0}{-3-0}, \qquad \frac{x+1}{-\frac{7}{2}}=\frac{y}{-3},$$

$$-3(x+1)=-\frac{7}{2}y, \qquad -3x-3+\frac{7}{2}y=0,$$

$6x-7y+6=0$ – загальне рівняння медіани кута *A*.

Висота кута *A* – це перпендикуляр до сторони *BC*, тому її нормальний вектор колінеарний до напрямного вектора прямої *BC*, тобто $\overline{n}_h(-9,2)$. Складемо рівняння висоти кута *A* за точкою та нормальним вектором:

$$-9(x+1)+2(y-0)=0, \qquad -9x-9+2y=0,$$

$9x-2y+9=0$ – загальне рівняння висоти кута *A*.

Бісектриса кута *A* ділить сторону *BC* у відношенні, що дорівнює відношенню прилеглих сторін, тобто $\frac{BN}{NC}=\frac{AB}{AC}$, N – основа бісектриси. Будемо мати: $\frac{BN}{NC}=\frac{\sqrt{2^2+(-4)^2}}{\sqrt{(-7)^2+(-2)^2}}$, $\frac{BN}{NC}=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{53}}$. Тепер знайдемо координати Точки N, використовуючи формули ділення відрізка в даному відношенні:

$$x_N=\frac{-1+\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{53}}\cdot(-10)}{1+\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{53}}}=\frac{-\sqrt{53}-20\sqrt{5}}{\sqrt{53}+2\sqrt{5}}, \qquad y_N=\frac{-6+\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{53}}\cdot(-4)}{1+\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{53}}}=\frac{-6\sqrt{53}-8\sqrt{5}}{\sqrt{53}+2\sqrt{5}}.$$

Складемо рівняння бісектриси кута *A* за двома точками $A(-1,0)$ та $N\left(\frac{-\sqrt{53}-20\sqrt{5}}{\sqrt{53}+2\sqrt{5}},\frac{-6\sqrt{53}-8\sqrt{5}}{\sqrt{53}+2\sqrt{5}}\right)$:

$$AN:\ \frac{x+1}{\frac{-\sqrt{53}-20\sqrt{5}}{\sqrt{53}+2\sqrt{5}}+1}=\frac{y-0}{\frac{-6\sqrt{53}-8\sqrt{5}}{\sqrt{53}+2\sqrt{5}}-0},$$

$$\frac{x+1}{\frac{-18\sqrt{5}}{\sqrt{53}+2\sqrt{5}}}=\frac{y}{\frac{-6\sqrt{53}-8\sqrt{5}}{\sqrt{53}+2\sqrt{5}}},$$

$$\left(-6\sqrt{53}-8\sqrt{5}\right)(x+1)=\left(-18\sqrt{5}\right)y,$$

$$\left(-6\sqrt{53}-8\sqrt{5}\right)x+18\sqrt{5}y-6\sqrt{53}-8\sqrt{5}=0$$

– загальне рівняння бісектриси кута *A*.

3) Відстань вершини *B* від медіани знайдемо за формулою відстані від точки до прямої. Будемо мати:

$$d=\frac{|6\cdot 1-7\cdot(-4)+6|}{\sqrt{6^2+(-7)^2}}=\frac{40}{\sqrt{36+49}}=\frac{40}{\sqrt{85}}=\frac{8\sqrt{85}}{17}.$$

4) Знайдемо кут між медіаною й висотою за формулою:

$$\cos\left(\widehat{AM, h}\right) = \cos\left(\widehat{\bar{n}_{AM}, \bar{n}_h}\right) = \frac{\bar{n}_{AM} \cdot \bar{n}_h}{|\bar{n}_{AM}| \cdot |\bar{n}_h|}.$$

Підставимо відповідні значення, отримаємо:

$$\cos\left(\widehat{AM, h}\right) = \frac{6 \cdot 9 + (-7) \cdot (-2)}{\sqrt{6^2 + (-7)^2} \cdot \sqrt{9^2 + (-2)^2}} = \frac{68}{\sqrt{85} \cdot \sqrt{85}} = \frac{68}{85} \approx 0{,}8, \quad \angle(AM, h) \approx 37^\circ.$$

Приклад 2 Трикутна піраміда задана вершинами $A_1(-1,0,1)$, $A_2(1,-1,1)$, $A_3(-1,-2,0)$, $A_4(5,2,10)$. Потрібно знайти:

1) рівняння грані $A_1A_2A_3$;
2) рівняння висоти піраміди, яка проходить через вершину A_4;
3) довжину цієї висоти;
4) кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$ в градусах.

Розв'язання.

1) Складемо детермінантне рівняння грані $A_1A_2A_3$:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-0 & z-1 \\ 1+1 & -1-0 & 1-1 \\ -1+1 & -2-0 & 0-1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$x + 2y - 4z + 5 = 0$ – рівняння грані $A_1A_2A_3$.

2) Висота піраміди, яка проходить через вершину A_4, це перпендикуляр до грані $A_1A_2A_3$, тому її напрямний вектор колінеарний до нормального вектора грані $A_1A_2A_3$, тобто $\bar{a}_{A_4D}(1,2,-4)$. Складемо рівняння висоти A_4D за точкою та напрямним вектором

A_4D: $\dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-10}{-4}$ – канонічне рівняння висоти піраміди, яка проходить через вершину A_4.

3) Довжину висоти A_4D знайдемо як відстань вершини A_4 від грані $A_1A_2A_3$ за формулою відстані від точки до площини. Будемо мати:

$$d = \frac{|1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 - 4 \cdot 10 + 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-4)^2}} = \frac{26}{\sqrt{1+4+16}} = \frac{26}{\sqrt{21}}.$$

4) Знайдемо кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$ за формулою:

$$\sin\left(\widehat{A_1A_4, A_1A_2A_3}\right) = \sin\left(\widehat{\bar{a}_{A_1A_4}, \bar{n}_{A_1A_2A_3}}\right) = \frac{|\bar{a}_{A_1A_4} \cdot \bar{n}_{A_1A_2A_3}|}{|\bar{a}_{A_1A_4}| \cdot |\bar{n}_{A_1A_2A_3}|}.$$

Для цього спочатку знайдемо координати напрямного вектора ребра A_1A_4: $\bar{a}_{A_1A_4}(6,2,9)$.

Підставимо відповідні значення, отримаємо:

$$\sin\left(\widehat{A_1A_4, A_1A_2A_3}\right) = \frac{|6 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 9 \cdot (-4)|}{\sqrt{6^2 + 2^2 + 9^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + (-4)^2}} = \frac{26}{\sqrt{121} \cdot \sqrt{21}} = \frac{26}{11\sqrt{21}} \approx 0{,}515,$$

$$\angle(A_1A_4, A_1A_2A_3) \approx 31^{\circ}.$$

Приклад 3 Точка $M(x;\, y;\, z)$ рухається прямолінійно і рівномірно з початкової точки $M_0(11; -21; 20)$ в напрямку вектора $\bar{s}(-1; 2; -2)$ зі швидкістю $v = 12$. Визначити, за який час вона пройде відрізок своєї траєкторії, який міститься між площинами $2x + 3y + 5z - 41 = 0$, $2x + 3y + 5z + 31 = 0$.

Розв'язання.

Рівняння траєкторії руху має вигляд

$$\frac{x-11}{-1} = \frac{y+21}{2} = \frac{z-20}{-2} \text{ або } \begin{cases} x = -t + 11, \\ y = 2t - 21, \\ z = -2t + 20. \end{cases}$$

Знайдемо координати точок перетину траєкторії з площинами. Для цього розв'яжемо системи:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x + 3y + 5z - 41 = 0, \\ x = -t + 11, \\ y = 2t - 21, \\ z = -2t + 20. \end{cases}$$

Підставляючи вирази для $x,\, y,\, z$ у перше рівняння, маємо:

$$-2t + 22 + 6t - 63 - 10t + 100 - 41 = 0 \text{ або } 6t = 18,\ t = 3.$$

Отже, $x_1 = 8$, $y_1 = -15$, $z_1 = 14$.

$$\text{б) } \begin{cases} 2x + 3y + 5z + 31 = 0, \\ x = -t + 11, \\ y = 2t - 21, \\ z = -2t + 20. \end{cases}$$

Аналогічно знаходимо $t = 15$, $x_2 = 4$, $y_2 = 9$, $z_2 = -10$. Отже, точками перетину паралельних площин траєкторією будуть $A(8; -15; 14)$, $B(-4; 9; -10)$. Довжина відрізка

$$AB = \sqrt{(8+4)^2 + (-15-9)^2 + (14+10)^2} = 36.$$

Оскільки час $t = \dfrac{|AB|}{v}$, то $t = \dfrac{36}{12} = 3$.

Приклад 4 Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(3; -1; -5)$ і перпендикулярна площинам $3x - 2y + 7 = 0$ і $5x - 4y + 3z + 1 = 0$.

Розв'язання.

Оскільки за нормальний вектор $\bar{n}$ шуканої площини можна взяти векторний добуток нормальних векторів $\bar{n}_1(3; -2; 2)$ і $\bar{n}_2(5; -4; 3)$ заданих площин, то

$$\bar{n} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 2\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}\ .$$

Скористаємося рівнянням площини, що проходить через задану точку $M(3;\,-1;\,-5)$ перпендикулярно вектору $\bar{n}(2,\,1,-\,2)$. Отримаємо

$$2(x-3)+(y+1)-2(z+5)=0 \text{ або } 2x+y-2z-15=0.$$

Приклад 5 Скласти рівняння площини, що проходить через початок координат і перпендикулярна до площин $2x-y+3z-1=0$ та $x+2y+z=0$.

Розв'язання.

Нехай рівняння шуканої площини має вигляд $Ax+By+Cz=0$, тоді нормальні вектори площин $\bar{n}_1(2;\,-1;\,3)$ і $\bar{n}_2(1;\,2;\,1)$ за умовою задачі будуть перпендикулярні до вектора $\bar{n}(A,\,B,\,C)$, тобто справедливі рівності

$$\begin{cases} 2A-B+3C=0, \\ A+2B+C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\dfrac{7}{5}C, \\ B=\dfrac{1}{5}C. \end{cases}$$

Отже, шукане рівняння площини має вигляд

$$-\frac{7}{5}Cx+\frac{1}{5}Cy+Cz=0.$$

Оскільки $C \neq 0$, то рівняння площини $7x-y-5z=0$.

Приклад 6 З початку координат опустити перпендикуляр на пряму

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{1}.$$

Розв'язання.

Оскільки напрямний вектор прямої $\bar{a}(2;\,3;\,1)$ буде нормальним до площини, що проходить через початок координат, то рівняння такої площини має вигляд

$$2x+3y+z=0.$$

Розв'язавши систему

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{1}, \\ 2x+3y+z=0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x=2t+2, \\ y=3t+1, \\ z=t+3, \\ 2x+3y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=-\dfrac{5}{7}, \\ x=\dfrac{4}{7}, \\ y=\dfrac{6}{7}, \\ z=\dfrac{16}{7}. \end{cases}$$

Складемо рівняння прямої, що проходить через точки $O(0,\,0,\,0)$ і $M\left(\dfrac{4}{7};\,\dfrac{6}{7};\,\dfrac{16}{7}\right)$:

$$\frac{x}{4/7}=\frac{y}{6/7}=\frac{z}{16/7} \text{ або } \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{8}.$$

Задачі для самостійного розв'язування

№ 11.1. Визначити, які з точок $A_1(1;-2)$, $A_2(1;1)$ та $A_3(3;-4)$ належать прямій $x+2y-3=0$.

№ 11.2. Знайти відрізки, що відтинає пряма $x-3y+6=0$ на осях координат.

№ 11.3. Скласти рівняння прямої, що проходить під кутом $\varphi=150^\circ$ до осі Ox і відтинає на осі Oy відрізок $b=3$.

№ 11.4. Під яким кутом до осі Ox нахилена пряма, що проходить через точки $A(-1;\,3)$ та $B(4;\,-2)$?

№ 11.5. Сила, прикладена в початку координат. Складові її на координатних осях відповідно дорівнюють 5 і –2. Знайти рівняння прямої, вздовж якої напрямлена сила.

№ 11.6 Через точку $P(-1;\,3)$ провести пряму, перпендикулярну до прямої $4x-2y+3=0$.

№ 11.7. Через точку $P(1;\,2)$ провести пряму, перпендикулярну до прямої $5x+2y-11=0$.

№ 11.8. Знайти проекцію точки $P(1;\,-2)$ на пряму $3x-y-9=0$.

№ 11.9. Промінь світла, що має напрямок прямої $x+5y=0$, падає на дзеркало, що визначається рівнянням $2x-y+5=0$. Написати рівняння відбитого променя.

№ 11.10. Через точку перетину прямих $x+2y-1=0$ і $2x+y-4=0$ провести пряму, яка:

1) проходить через точку $M\,(-1;\,3)$;
2) паралельна осі Oy;
3) перпендикулярна до прямої $x-2y+11=0$.

№ 11.11. Звести до нормального вигляду такі рівняння:

1) $4x+3y+11=0$;
2) $x+2y-1=0$;
3) $x+2=0$.

№ 11.12. Обчислити відстань від точки P до прямої:

1) $P(-2;\,1)$, $4x-3y-2=0$;
2) $P(3;\,-2)$, $12x+5y-3=0$;
3) $P(0;\,1)$, $x-2y+1=0$.

№ 11.13. Знайти довжину перпендикуляра, опущеного з точки $M_0(2;\,3;\,-5)$ на площину $4x-2y+5z-12=0$.

№ 11.14. Перевірити, які з точок $A(-1;\,2;\,3)$, $B(1;\,-2;\,1)$, $C(0;\,1;\,2)$, $D(3;\,0;\,3)$ та $E(5;\,-7;\,11)$ належать площині $2x-3y+z-9=0$.

№ 11.15. Визначити координати нормального вектора площини, яка проходить через точки $A(2; -1; 1)$, $B(3; 1; 0)$ і $C(1; 5; -2)$.

№ 11.16. Площина проходить через точки $A(1; 2; 1)$ та $B(0; 3; -1)$ паралельно до осі Oz. Написати її рівняння.

№ 11.17. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $P(-1; 2; 3)$ і відтинає від осей Ox та Oy відрізки $a = 2$, $b = -1$.

№ 11.18. Через точку $P(1; 2; -1)$ провести площину, що відтинає від осей координат рівні відрізки.

№ 11.19. Знайти відстань між площинами $2x + 2y - z - 15 = 0$ і $4x + 4y - 2z + 11 = 0$.

№ 11.20. Дано рівняння руху точки $M(x;\ y;\ z)$ $\begin{cases} x = 3 - 4t, \\ y = 5 + 3t, \\ z = -2 + 12t. \end{cases}$ Визначити її швидкість v.

№ 11.21. Дано рівняння руху точки $M(x;\ y;\ z)$ $\begin{cases} x = 5 - 2t, \\ y = -3 + 2t, \\ z = 5 - t. \end{cases}$ Визначити відстань d, яку пройде ця точка за проміжок часу від $t_1 = 0$ до $t_2 = 7$.

№ 11.22. Скласти рівняння руху точки $M(x;\ y;\ z)$, яка, маючи початкове положення $M_0(3; -1; -5)$, рухається прямолінійно й рівномірно в напрямку вектора $\bar{s}(-2; 6; 3)$ зі швидкістю $v = 21$.

№ 11.23. Скласти рівняння руху точки $M(x;\ y;\ z)$, яка, рухаючись прямолінійно, пройшла відстань від точки $M_1(-7; 12; 5)$ до точки $M_2(9; -4; -3)$ за проміжок часу від $t_1 = 0$ до $t_2 = 4$.

№ 11.24. Точка $M(x;\ y;\ z)$ рухається прямолінійно й рівномірно з початкового положення $M_0(20; -18; -32)$ в напрямку, протилежному вектору $\bar{s}(-2; 6; 3)$, зі швидкістю $v = 26$. Скласти рівняння руху точки M і визначити точку, з якою вона збігається в момент часу $t = 3$.

№ 11.25. Точки $M(x;\ y;\ z)$ й $N(x;\ y;\ z)$ рухаються прямолінійно й рівномірно: перша з початкового положення $M_0(-5; 4; -5)$ зі швидкістю $v_M = 14$ в напрямку вектора $\bar{s}(3; -6; 2)$, друга з початкового положення $N_0(-5; 16; -6)$ зі швидкістю $v_N = 13$ в напрямку, протилежному вектору $\bar{r}(-4; 12; -3)$. Скласти рівняння руху кожної з точок і знайти:

1) точку P перетину їх траєкторій;
2) час, витрачений на рух точки M від M_0 до P;
3) час, витрачений на рух точки N від N_0 до P;
4) довжини відрізків M_0P і N_0P.

№ 11.26. Дано точки $A(-3; 6)$, $B(4; -1)$, $C(-3; -5)$, $D(-1; 2)$. Скласти рівняння прямої, яка проходить:

1) через точки B і C;

2) через точку A й утворює кут 135° з віссю x;
3) через точку D перпендикулярно до прямої BC;
4) через точку A паралельно прямій BC;
5) через точку B і точку, що ділить відрізок AD у відношенні 1:3, рухаючись від точки A.

№ 11.27. Дано прямі $l_1: 2x-3y+1=0$, $l_2: 3x-y-4=0$. Знайти:

1) відстань від точки $A(2; -1)$ до прямої l_1;
2) кут між прямими l_1 і l_2;
3) значення параметра m, при яких пряма $2x+my+4=0$ перпендикулярна до прямої l_2;
4) значення параметра p, при яких пряма $px-y-p=0$ збігається з прямою l_2.

№ 11.28. Дано точки $A(1; -1; 1)$, $B(1; 3; 1)$, $C(4; 3; 1)$, $D(4; -1; 1)$, $F(2; 0; 1)$. Скласти рівняння:

1) площини, що проходить через точки A, B, C;
2) прямої, яка проходить через точку A й паралельна прямій BC;
3) прямої, яка проходить через точки C і D.

№ 11.29. Дано площини $\alpha: 2x-y+z+3=0$, $\beta: 3x-2y-z-1=0$, $\gamma: -4x+2y-2z+1=0$ і прямі $l_1: \dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{-1}$, $l_2: \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$.

1) Знайдіть відстань від точки $A(2; -1; 1)$ до площини α;
2) Встановіть взаємне розташування площин α і β, β і γ, α і γ, прямої l_1 і площини β, прямих l_1 і l_2;
3) Знайдіть відстань між площинами α і γ;
4) При яких значеннях параметра m площина α паралельна площині $2x-my+z=0$;
5) Знайдіть кути між площинами α і β, прямими l_1 і l_2;
6) При яких значеннях параметра p площини γ і $px-2y+pz-1=0$ перпендикулярні.
7) Знайдіть відстань між прямими l_1 і l_2.

12 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ КРИВИХ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Теоретичні відомості

Еліпс – геометричне місце точок площини, сума відстаней від яких до двох даних точок площини F_1 і F_2 (фокусів) є величина постійна і дорівнює $2a$.

Канонічне рівняння еліпса: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $b^2=a^2-c^2$.

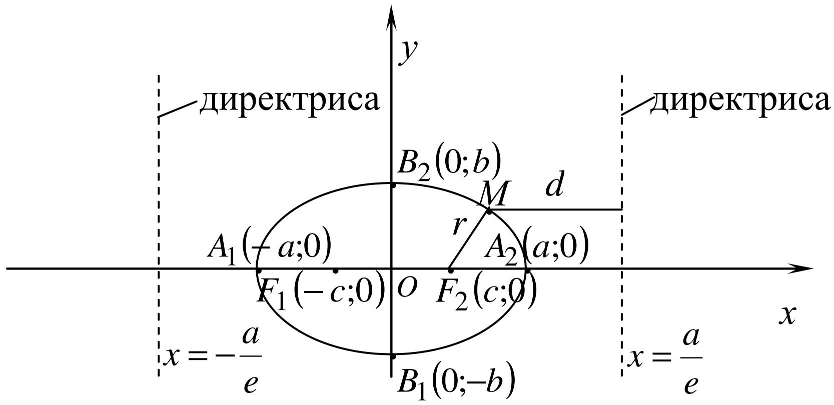


Рисунок 12.1 – Еліпс та його елементи

A_1A_2 – *велика* (*фокальна*) вісь, B_1B_2 – *мала вісь*; A_1, A_2, B_1 і B_2 – вершини (рис. 12.1);

$$0\le e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}<1 \text{ – ексцентриситет.}$$

Директриси еліпса: $x=\frac{a}{e}$ (права), $x=-\frac{a}{e}$ (ліва).

Фокальні радіуси: $F_1M=a+ex$, $F_2M=a-ex$.

Рівняння дотичної в точці $M(x_1,y_1)$ еліпса: $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$.

Гіпербола – геометричне місце точок площини, різниця відстаней від яких до двох даних точок площини F_1 і F_2 (фокусів) є величина постійна і дорівнює $2a$ (рис. 12.2).

Канонічне рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $b^2=c^2-a^2$.

A_1A_2 – *дійсна вісь*, B_1B_2 – *уявна вісь*; A_1, A_2 – *вершини*;

$e=\frac{c}{a}<1$ – ексцентриситет; $y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$ – асимптоти.

Директриси: $x=\frac{a}{e}$ (права), $x=-\frac{a}{e}$ (ліва).

Фокальні радіуси для правої вітки гіперболи: $F_1M=ex+a$, $F_2M=ex-a$, для лівої: $F_1M=-(ex+a)$, $F_2M=-(ex-a)$.

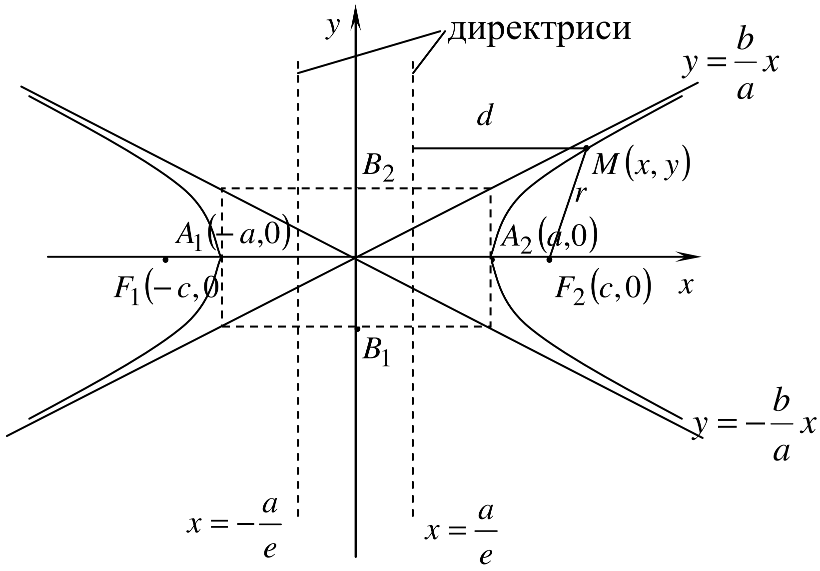


Рисунок 12.2 – Гіпербола та її елементи

Властивість директрис: відношення відстані r від правого фокуса F_2 до точки M правої вітки гіперболи до відстані d від цієї точки до правої директриси дорівнює ексцентриситету гіперболи, тобто $e=\frac{r}{d}$. Аналогічне твердження справедливе й для лівої вітки гіперболи.

Дотична до гіперболи в точці $M(x_1,y_1)$: $\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$.

Спряжена гіпербола: $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ або $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$.

Парабола – геометричне місце точок площини, рівновіддалених від даної точки F (фокуса) і даної прямої (директриси) (рис. 12.3).

Канонічне рівняння параболи: $y^2=2px$, p – відстань між фокусом і директрисою.

Ексцентриситет: $e=\frac{r}{d}=1$.

Дотична до параболи в точці $M(x_1,y_1)$: $yy_1=p(x+x_1)$.

Фокальний радіус: $FM=x+\frac{p}{2}$.

Рисунок 12.3 – Парабола та її елементи

Оптичні кластивост кривих

1. Якщо помстити в один з фокусів еліпса точкове джерело світла, то всі промені пісдя відбиття від еліпса зійдуться в іншому його фокусі (рис. 12.4).

2. Якщо помістити в один з фокусів гіперболи точкове джерело світла, то кожний промінь після відбиття від гіперболи начебто виходить з іншого фокуса (рис. 12.5).

3. Якщо помістити у фокус параболи точкове джерело світла, то всі промені, відбиті від параболи, спрямуються паралельно фокальній осі параболи (рис. 12.6). Ця властивість обгрунтовує форму параболічних антен, дзеркал для прожекторів тощо.

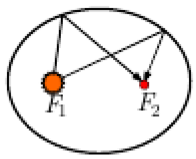


Рисунок 12.4

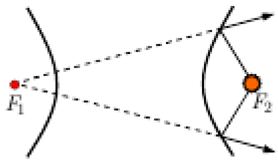


Рисунок 12.5

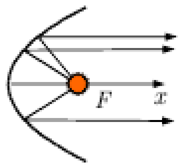


Рисунок 12.6

Оптичну властивість еліпса використовують для побудови «галерей шепотіння». У такій кімнаті слово, вимовлене пошепки в одному з фокусів можна добре почути, перебуваючи в іншому фокусі.

Ґрунтуючись на оптичній властивості, працює і медичний прилад – літотриптер. Він використовує ультразвукові ударні хвилі для подрібнення каміння у нирках. Хвилі створюють в одному з фокусів еліпса і відбивають їх на камінець, розташований у другому фокусі.

Арки деяких мостів інколи будують еліптичними. Еліптичні шестерні використовують для деяких пристроїв, зокрема, де потрібне повільне, але потужне зусилля, таке як у перфораторі.

Коли реактивний літак летить з надзвуковою швидкістю, ударна хвиля створює звуковий удар. Хвиля має конічну форму, але досягає земної поверхні як гілка гіперболи.

Галеєва комета, яка стала складовою Сонячної системи, рухається навколо Сонця еліптичною орбітою. Інші комети пролітають Сонячну системи лише один раз, рухаючись гіперболічною орбітою із Сонцем у фокусі.

Світлові промені від фар машини, електричні ліхтарики, прожектори мають параболічну форму. Параболічна антена та польові мікрофони, які використовують на спортивних змаганнях, мають параболічні перерізи. Оптичну властивість параболи збирати паралельні пучки світла у фокусі використовують у телескопах. Деякі ж телескопи мають і параболічні, і гіперболічні дзеркала.

Троси підвісних мостів мають форму парабол (у разі ж вільного провисання трос матиме форму ланцюгової лінії).

Відомості про загальні рівняння кривих другого порядку та методи зведення їх до канонічного виду

Загальне рівняння кривої другого порядку має вигляд:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \qquad (12.1)$$

$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ – *дискримінант старших членів* кривої,

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ – *дискримінант кривої.*

Тут $a_{12} = a_{21}$, $a_{23} = a_{32}$, $a_{13} = a_{31}$.

Таблиця 12.1 – Вид кривої другого порядку в залежності від значення дискримінанту старших членів та дискримінанту кривої

	$\Delta = 0$	$\Delta \neq 0$
$\delta > 0$	уявні прямі, що перетинаються в дійсній точці	еліпс (дійсний або уявний)
$\delta = 0$	паралельні прямі (дійсні, уявні, співпадаючі)	парабола
$\delta < 0$	дійсні прямі, що перетинаються	гіпербола

Методи зведення загальних рівнянь кривих другого порядку до канонічного виду:

1. За допомогою перетворень координат.

а) *паралельне перенесення*: $\begin{cases} x = \bar{x} + a, \\ y = \bar{y} + b, \end{cases}$ де $\bar{a}(a; b)$ – вектор паралельного перенесення, $\bar{x}$ і $\bar{y}$ – нові координати.

За відсутності добутку xy це перетворення рівносильне виділенню повних квадратів відносно змінних x і y.

б) *перетворення повороту* координатних осей на кут φ у додатному напрямку, за допомогою якого можна анулювати коефіцієнт при добуткові змінних xy. Нові координати $\bar{x}$ і $\bar{y}$ пов'язані з координатами x і y рівностями:

$$\begin{cases} x = \bar{x}\cos\varphi - \bar{y}\sin\varphi, \\ y = \bar{x}\sin\varphi + \bar{y}\cos\varphi. \end{cases}$$

Кут повороту φ завжди можна вибрати таким чином: у випадку, коли $a_{22} \neq a_{11}$, то $\operatorname{tg}2\varphi = \dfrac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$, а коли $a_{22} = a_{11}$ і $a_{12} \neq 0$, то $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

в) комбінування двох вищевказаних перетворень.

2. За допомогою теорії квадратичних форм.

Групу старших членів рівняння (12.1) як квадратичну форму двох змінних зводимо до канонічного виду методом ортогональних перетворень. У результаті такого перетворення зникають доданки з добутком координат. Далі здійснюємо паралельне перенесення нових осей координат і отримаємо канонічний вид вихідної кривої:

$$\lambda_1\bar{x}^2 + \lambda_2\bar{y}^2 = C,$$

де λ_1, λ_2 – власні значення матриці старших членів.

Тест для самоконтролю

1. *При* $a > 0$ *рівняння* $ax^2 + 4y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ *визначає*

А еліпс; **Б** гіперболу; **В** параболу; **Г** порожню множину.

2. *За яких умов рівняння* $x^2 + 2y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$ *визначає еліпс?*

А $a_1^2 + a_2^2 - a_0 > 0$; **Б** $2a_1^2 + a_2^2 - 2a_0 > 0$;

В $a_1^2 + a_2^2 - a_0 < 0$; **Г** $2a_1^2 + a_2^2 - 2a_0 < 0$.

3. *Вкажіть всі значення параметра a, при яких крива* $ax^2 + y^2 - 6y = 0$ *є гіперболою.*

А $a \le 0$; **Б** $a \ge 0$; **В** $a < 0$; **Г** $a > 0$.

4. *Вкажіть всі значення параметра c, при яких крива* $cx^2 + y^2 + 4x - 2 = 0$ *є параболою.*

А $c > 0$; **Б** $c < 0$; **В** $c = 0$; **Г** $c \ne 0$.

5. *Вкажіть всі значення параметра p, при яких крива* $y^2 = 2px + 2$ *є парою паралельних прямих.*

А $p < 0$; **Б** $p = 0$; **В** $p > 0$; **Г** $p \ne 0$.

6. *Вкажіть всі значення параметра a, при яких крива* $x^2 + ay^2 - 4x + 2 = 0$ *є еліпсом.*

А $a > 0$; **Б** $a < 0$; **В** $a \ne 0$; **Г** $a = 0$.

7. *Вкажіть всі значення параметра b, при яких крива* $bx^2 + y^2 + 4x + 2 = 0$ *є гіперболою.*

А $b > 0$; **Б** $b < 0$; **В** $b \ne 0$; **Г** $b = 0$.

8. *Дано еліпс* $5x^2 + 9y^2 = 45$. *Ексцентриситет еліпса дорівнює*

А $e = \frac{3}{2}$; **Б** $e = -\frac{3}{2}$; **В** $e = -\frac{2}{3}$; **Г** $e = \frac{2}{3}$.

9. *Велика піввісь еліпса* $5x^2 + 9y^2 = 45$ *дорівнює*

А $\sqrt{5}$; **Б** $2\sqrt{5}$; **В** 3; **Г** 6.

10. *Мала піввісь еліпса* $5x^2 + 9y^2 = 45$ *дорівнює*

А $\sqrt{5}$; **Б** $2\sqrt{5}$; **В** 3; **Г** 6.

11. *Дана гіпербола* $36x^2 - 64y^2 = 1$. *Відстань між директрисами дорівнює*

А $\frac{2}{15}$; **Б** $\frac{15}{4}$; **В** $\frac{15}{2}$; **Г** $\frac{4}{15}$.

12. *Парабола* $y^2 = -9x$ *проходить через точку*

А $(3,1)$; **Б** $(-1,3)$; **В** $(-3,1)$; **Г** $(1,-3)$.

13. *Яка з вказаних точок належить еліпсу* $8x^2 + 5y^2 = 77$ *?*

А $A(3;-2)$; **Б** $B(2;-2)$; **В** $C(-2;3)$; **Г** $D(2;1)$.

14. Відстань між фокусами еліпса $9x^2+25y^2=225$ *дорівнює*

А 8; **Б** 4; **В** 2; **Г** 16.

15. Рівняння директрис еліпса $9x^2+25y^2=225$ *мають вигляд*

А $x=\pm\frac{4}{25}$; **Б** $x=\pm\frac{4}{5}$; **В** $x=\pm\frac{25}{4}$; **Г** $x=\pm\frac{5}{4}$.

16. Ексцентриситет гіперболи $16x^2-9y^2=144$ *дорівнює*

А $\frac{4}{5}$; **Б** $\frac{5}{4}$; **В** $\frac{3}{5}$; **Г** $\frac{5}{3}$.

17. Дійсна піввісь гіперболи $5x^2-4y^2=20$ *дорівнює*

А 2; **Б** 4; **В** $\sqrt{5}$; **Г** $2\sqrt{5}$.

18. Уявна піввісь гіперболи $5x^2-4y^2=20$ *дорівнює*

А 2; **Б** 4; **В** $\sqrt{5}$; **Г** $2\sqrt{5}$.

19. Ексцентриситет спряженої гіперболи до $5x^2-4y^2=20$ *дорівнює*

А $\frac{\sqrt{5}}{3}$; **Б** $\frac{3}{\sqrt{5}}$; **В** $\frac{3}{2}$; **Г** $\frac{2}{3}$.

20. Рівняння асимптот гіперболи $36x^2-64y^2=2304$ *мають вигляд:*

А $y=\pm\frac{9}{16}x$; **Б** $y=\pm\frac{16}{9}x$; **В** $y=\pm\frac{4}{3}x$; **Г** $y=\pm\frac{3}{4}x$.

Відповіді: 1.А. 2.Б. 3.В. 4.В. 5.Б. 6.А. 7.Б. 8.Г. 9.В. 10.А. 11.Г. 12.Б. 13.В. 14.А. 15.В. 16.Г. 17.А. 18.В. 19.Б. 20.Г.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1 Скласти канонічне рівняння еліпса, що проходить через точки $M\left(\frac{5}{2};\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$ і $N\left(-2;\frac{\sqrt{15}}{5}\right)$.

Розв'язання.

Нехай $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ – шукане рівняння еліпса. Це рівняння повинні задовольняти координати даних точок. Маємо

$$\begin{cases}\frac{25}{4a^2}+\frac{3}{8b^2}=1,\\ \frac{4}{a^2}+\frac{3}{b^2}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=10,\\ b^2=1.\end{cases}$$

Отже, рівняння еліпса має вид $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{1}=1$.

Приклад 2 Задані точки $A(1;\ 0)$ і $B(2;\ 0)$. Точка M рухається так, що в трикутнику AMB $\angle B$ у два рази більший за $\angle A$. Знайти рівняння кривої, яку описує точка M.

Розв'язання.

Візьмемо точку M з координатами x і y. Виразимо $\mathrm{tg}\angle B$ і $\mathrm{tg}\angle A$ через координати точок A, B і M:

$$\mathrm{tg}\angle B = \frac{y}{2-x}, \ \mathrm{tg}\angle A = \frac{y}{x+1}.$$

Згідно з умовою $\angle B = 2\angle A$, тобто

$$\mathrm{tg}\angle B = \frac{2\mathrm{tg}\angle A}{1-\mathrm{tg}^2\angle A} \text{ або } \frac{y}{2-x} = \frac{2\frac{y}{x+1}}{1-\left(\frac{y}{x+1}\right)^2}.$$

Після спрощення дістаємо $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$. Отже, шукана крива – гіпербола.

Приклад 3 Скласти рівняння параболи, симетричної відносно осі Ox, з вершиною в початку координат, якщо довжина деякої хорди цієї параболи, що перпендикулярна до осі Ox, дорівнює 16, а відстань до цієї хорди від вершини дорівнює 6.

Розв'язання.

Оскільки відома довжина хорди й відстань до неї від вершини, то відомі координати кінця цієї хорди – точки M, що лежить на параболі. У рівнянні параболи $y^2 = 2px$ покладемо $x = 6$, $y = 8$. Тоді $2p = \frac{32}{3}$. Отже, рівняння параболи $y^2 = \frac{32x}{3}$.

Приклад 4 Звести до канонічного виду рівняння кривої другого порядку, використовуючи перетворення координат, а саме перетворення повороту та паралельного переносу: $5x^2 - 4\sqrt{2}xy + 3y^2 - 14 = 0$.

Розв'язання.

У загальному рівнянні кривої присутній член xy, тому виконаємо перетворення повороту. У вихідному рівнянні $a_{22} = 3 \neq a_{11} = 5$, тому $\mathrm{tg}2\varphi = \frac{2\cdot\left(-2\sqrt{2}\right)}{5-3} = -2\sqrt{2}$. Знайдемо $\sin\varphi$ та $\cos\varphi$, використовуючи формули: $\mathrm{tg}2\varphi = \frac{2\mathrm{tg}\varphi}{1-\mathrm{tg}^2\varphi}$, $\sin\varphi = \frac{\mathrm{tg}\varphi}{\pm\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\varphi}}$, $\cos\varphi = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\varphi}}$. Будемо мати: $\mathrm{tg}\varphi = \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{2}\right\}$, а $\sin\varphi$ і $\cos\varphi$ візьмемо, наприклад, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Запишемо формули перетворення

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(\overline{x} - \overline{y}\sqrt{2}\right), \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(\overline{x}\sqrt{2} + \overline{y}\right), \end{cases}$$

за допомогою яких отримаємо рівняння кривої в новій системі координат:

$$3\overline{x}^2 + 21\overline{y}^2 - 42 = 0 \text{ або } \frac{\overline{x}^2}{14} + \frac{\overline{y}^2}{2} = 1.$$

Маємо рівняння еліпса у новій системі координат: $\dfrac{\overline{x}^2}{14} + \dfrac{\overline{y}^2}{2} = 1$ з центром в початку координат та осями $\sqrt{14}$ та $\sqrt{2}$, при цьому системи координат зв'язані формулами: $\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{x\sqrt{3}}{3} + \dfrac{y\sqrt{6}}{3}, \\ \overline{y} = -\dfrac{x\sqrt{6}}{3} + \dfrac{y\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$

Приклад 5 Звести до канонічного виду рівняння кривої другого порядку, використовуючи теорію квадратичних форм:

$$5x^2 - 4\sqrt{2}xy + 3y^2 - 14 = 0.$$

Розв'язання.

Випишемо матрицю старших членів:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо власні значення цієї матриці. Для цього складемо характеристичне рівняння та розв'яжемо його:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad (3-\lambda)(5-\lambda) - 8 = 0,$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0, \qquad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 7.$$

Для знаходження перетворення координат, знайдемо власні вектори, відповідні знайденим власним значенням. Для цього розв'яжемо однорідну систему рівнянь:

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 3-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}_{\cdot\sqrt{2}+\mathrm{I}} \sim \begin{pmatrix} 4 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$4x_1 - 2\sqrt{2}x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}x_2.$$

Таким чином, для $\lambda_1 = 1$ власний вектор $X_1 = c_1\left(\sqrt{2};\, 2\right)$, $c_1 = const \neq 0$, який після нормування буде: $E_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}};\, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

При $\lambda_2 = 7$:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & -4 \end{pmatrix}_{-\mathrm{I}\cdot\sqrt{2}} \sim \begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$-2x_1 - 2\sqrt{2}x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{2}x_2.$$

Таким чином, для $\lambda_2 = 7$ власний вектор $X_2 = c_2\left(-2;\, \sqrt{2}\right)$, $c_2 = const \neq 0$, який після нормування буде: $E_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}};\, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Можна перевірити, що отримані нормовані власні вектори попарно ортогональні, тому можемо скласти матрицю перетворення координат:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Звідси будемо мати формули перетворення координат:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{x} - \frac{2}{\sqrt{6}}\bar{y}, \\ y = \frac{2}{\sqrt{6}}\bar{x} + \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{y}. \end{cases}$$

Підставимо знайдені вирази до рівняння кривої, спростимо його, будемо мати:

$$\bar{x}^2 + 7\bar{y}^2 - 42 = 0 \text{ або } \frac{\bar{x}^2}{42} + \frac{\bar{y}^2}{6} = 1 \text{ – еліпс.}$$

Приклад 6 Знайти головні напрями деформації еластичної мембрани, обмеженої колом $x^2 + y^2 = 1$ на площині Oxy, яку розтягнуто так, що точка $P(x;\, y)$ переходить у точку $Q(x_1;\, y_1)$ за допомогою лінійного перетворення

$$\begin{cases} x = 5x_1 + 3y_1, \\ y = 3x_1 + 5y_1. \end{cases}$$

Визначити, якої форми набуде мембрана після деформування.

Розв'язання.

Нагадаємо, що головним напрямом деформації називають напрям радіус-вектора $\bar{x}$ точки P, при якому він переходить у колінеарний йому радіус-вектор $\bar{y}$ точки Q.

Шукаємо вектори $\bar{x}$ такі, що $\bar{y} = \lambda\bar{x}$, звідки $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$. Таким чином, задачу зведено до відшукання власних векторів матриці A.

Записуємо матрицю

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 3 & 5-\lambda \end{pmatrix}.$$

Знаходимо характеристичний многочлен матриці A та, відповідно, його корені:

$$\det(A - \lambda E) = (5-\lambda)^2 - 9 = \lambda^2 - 10\lambda + 16,$$

$$\lambda^2 - 10\lambda + 16 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 8,\ \lambda_2 = 2.$$

Знаходимо власний вектор, який відповідає власному значенню $\lambda_1 = 8$:

$$\begin{cases} -3x_1 + 3y_1 = 0, \\ 3x_1 - 3y_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо власний вектор, який відповідає власному значенню $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3y_1 = 0, \\ 3x_1 + 3y_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1, \\ y_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Власні вектори матриці A $\bar{e}_1$ та $\bar{e}_2$ утворюють відповідно кути $\frac{\pi}{4}$ та $\frac{3\pi}{4}$ з додатним напрямом осі Ox. Це і є головні напрями. Власні значення вказують, що у головних напрямах мембрана розтягується відповідно у 8 та 2 рази, тобто здеформовану мембрану обмежено еліпсом.

Задачі для самостійного розв'язування

№ 12.1. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо:

1) його півосі дорівнюють 5 і 2;
2) його велика вісь дорівнює 10, а відстань між фокусами $2c = 8$;
3) його мала вісь дорівнює 24, а відстань між фокусами $2c = 10$;
4) відстань між фокусами $2c = 6$ і ексцентриситет $e = \frac{3}{5}$;
5) його велика вісь дорівнює 20, а ексцентриситет $e = \frac{3}{5}$;
6) його мала вісь дорівнює 10, а ексцентриситет $e = \frac{12}{13}$;
7) відстань між директрисами дорівнює 5 і відстань між фокусами $2c = 4$;
8) його велика вісь дорівнює 8, а відстань між директрисами дорівнює 16;
9) його мала вісь дорівнює 6, а відстань між директрисами дорівнює 13;
10) відстань між директрисами дорівнює 32 і $e = \frac{1}{2}$;
11) точка $M\left(-2\sqrt{5};\, 2\right)$ еліпсу і його мала піввісь дорівнює 3;
12) точка $M(2;\, -2)$ еліпсу і його велика піввісь дорівнює 4;
13) точки $M\left(4;\, -\sqrt{3}\right)$ і $N\left(2\sqrt{2};\, 3\right)$ еліпсу.

№ 12.2. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо:

1) її вісі $2a = 10$ і $2b = 8$;
2) відстань між фокусами $2c = 10$ і вісь $2b = 8$;
3) відстань між фокусами $2c = 6$ і ексцентриситет $e = \frac{3}{2}$;
4) вісь $2a = 16$ і ексцентриситет $e = \frac{5}{4}$;
5) рівняння асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$ і відстань між фокусами $2c = 20$;
6) відстань між директрисами $22\frac{2}{13}$ і відстань між фокусами $2c = 26$;
7) відстань між директрисами $\frac{32}{5}$ і вісь $2b = 6$;
8) відстань між директрисами дорівнює $\frac{8}{3}$ і $e = \frac{3}{2}$;
9) рівняння асимптот $y = \pm\frac{3}{4}x$ і відстань між директрисами $12\frac{4}{5}$;
10) точки $M(6; -1)$ і $N(-8; 2\sqrt{2})$ гіперболи;
11) точка $M(-5; 3)$ гіперболи і ексцентриситет $e = \sqrt{2}$;
12) точка $M\left(\frac{9}{2}; -1\right)$ гіперболи і рівняння асимптот $y = \pm\frac{2}{3}x$;
13) точка $M\left(-3; \frac{5}{2}\right)$ гіперболи і рівняння директрис $x = \pm\frac{4}{3}$;
14) рівняння асимптот $y = \pm\frac{3}{4}x$ і рівняння директрис $x = \pm\frac{16}{5}$.

№ 12.3. Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, якщо парабола розташована

1) в правій півплощині симетрично відносно вісі Ox, і її параметр $p = 3$;
2) в лівій півплощині симетрично відносно вісі Ox, і її параметр $p = 0{,}5$;
3) в верхній півплощині симетрично відносно вісі Oy, і її параметр $p = \frac{1}{4}$;
4) в нижній півплощині симетрично відносно вісі Oy, і її параметр $p = 3$;
5) симетрично відносно вісі Ox і проходить через точку $A(9; 6)$;
6) симетрично відносно вісі Ox і проходить через точку $B(-1; 3)$;
7) симетрично відносно вісі Oy і проходить через точку $C(1; 1)$;
8) симетрично відносно вісі Oy і проходить через точку $D(4; -8)$.

№ 12.4. Скласти рівняння гіперболи, якщо відомо її ексцентриситет $e = \sqrt{5}$, фокус $F(2; -1)$ і рівняння відповідної директриси $3x - y + 3 = 0$.

№ 12.5. Скласти рівняння параболи, якщо заданий її фокус $F(4; 3)$ і директриса $y + 1 = 0$.

№ 12.6. Скласти рівняння двох спряжених гіпербол, якщо відстань між директрисами першої з них дорівнює 7,2 і відстань між директрисами другої дорівнює 12,8.

№ 12.7. Скласти рівняння параболи, якщо:

1) фокус має координати (5, 0), а вісь ординат є директрисою;
2) парабола симетрична відносно осі Ox, проходить через початок координат і через точку $M(1; -4)$;
3) парабола симетрична відносно осі Oy, фокус знаходиться в точці $(0; 2)$, а вершина збігається з початком координат;
4) парабола симетрична відносно осі Oy, проходить через початок координат і через точку $M(6; -2)$.

№ 12.8. Скласти рівняння еліпса, якщо його ексцентриситет 0,5, фокус знаходиться в точці $F(1; -2)$, а відповідна директриса визначається рівнянням $x - y + 1 = 0$.

№ 12.9. Точка $M\left(-\frac{5}{2}; 1\right)$ лежить на гіперболі $4x^2 - 5y^2 = 20$. Знайти її фокальні радіуси.

№ 12.10. Знайти точки перетину еліпса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ з прямою $x - 2y + 2 = 0$.

№ 12.11. Знайти точки перетину гіперболи $\frac{x^2}{90} - \frac{y^2}{36} = 1$ з прямою $x - y + 5 = 0$.

№ 12.12. Через точку $M(2; 4)$ провести дотичні до еліпса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

№ 12.13. Скласти рівняння дотичних, проведених через точку $M\left(0; -\frac{1}{4}\right)$ до гіперболи $9x^2 - 2y^2 = 1$.

№ 12.14. З правого фокуса еліпса $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{20} = 1$ під кутом α до осі Ox напрямлено промінь світла. Дійшовши до еліптичного дзеркала, промінь відбивається. Написати рівняння відбитого променя, якщо $\operatorname{tg}\alpha = -2$.

№ 12.15. З фокуса параболічного дзеркала $y^2 = 12x$ під кутом α напрямлено промінь світла. Дійшовши до параболи, промінь відбивається. Написати рівняння відбитого променя, якщо $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$.

№ 12.16. Звести до канонічного виду рівняння кривої другого порядку, використовуючи перетворення координат, а саме перетворення повороту та паралельного переносу. Побудувати криву (якщо вона існує):

1) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 3 = 0$;
2) $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$;

3) $7x^2+6xy-y^2+28x+12y+28=0$;

4) $5x^2-2xy+5y^2-4x+20y+20=0$;

5) $9x^2-24xy+16y^2-20x+110y-50=0$;

6) $9x^2+12xy+4y^2-24x-16y+3=0$;

7) $16x^2-24xy+9y^2-160x+120y+425=0$;

8) $4x^2+12xy+9y^2-4x-6y+1=0$;

9) $19x^2+6xy+11y^2+38x+6y+29=0$;

10) $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$.

№ 12.17. Звести рівняння кривої до канонічного виду за допомогою теорії квадратичних форм, визначити її тип. Побудувати криву (якщо вона існує):

1) $5x^2+4xy+2y^2-18=0$;

2) $x^2+2xy-y^2-8\sqrt{2}=0$;

3) $4x^2+2\sqrt{6}xy+3y^2-24=0$;

4) $5x^2-2\sqrt{45}xy+y^2-5=0$;

5) $6x^2+2\sqrt{5}xy+2y^2-21=0$;

6) $7x^2-8xy+y^2-9=0$;

7) $3x^2-4\sqrt{6}xy+5y^2+18=0$;

8) $2\sqrt{6}xy+5y^2+6=0$;

9) $9x^2+8\sqrt{3}xy+6y^2-36=0$;

10) $5x^2+12xy-19=0$.

13 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОВЕРХОНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Теоретичні відомості

Канонічні рівняння поверхонь другого порядку

Еліпсоїд: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

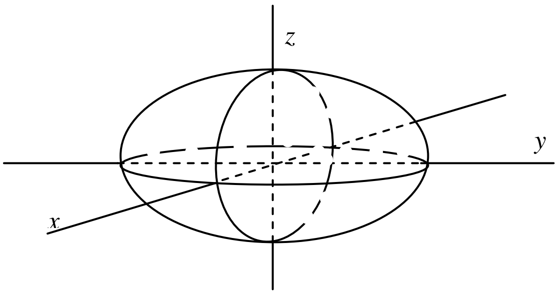


Рисунок 13.1 – Еліпсоїд

Еліптичний параболоїд: $z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$

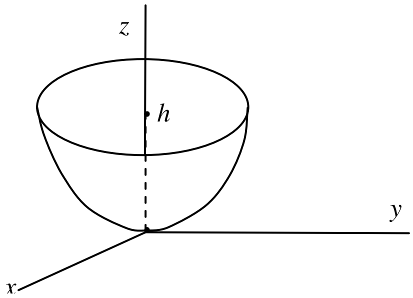


Рисунок 13.2 – Еліптичний параболоїд

Однопорожнинний гіперболоїд:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

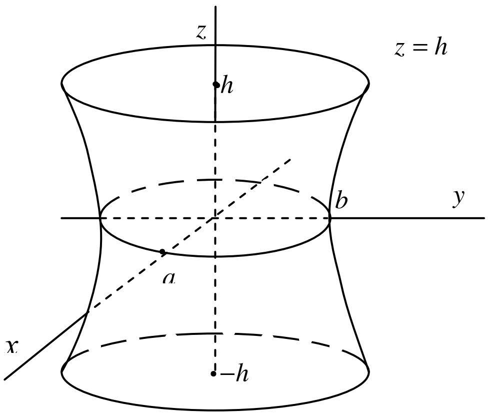


Рисунок 13.3 – Однопорожнинний гіперболоїд

Двопорожнинний гіперболоїд:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

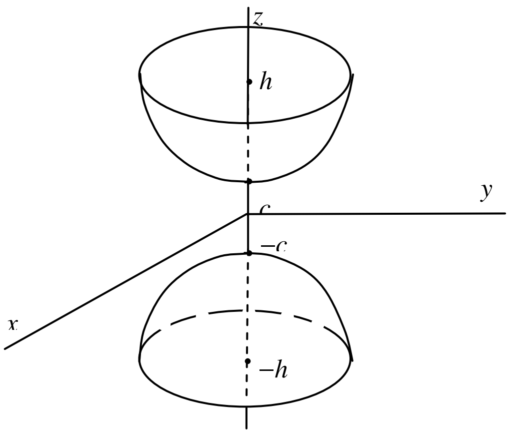


Рисунок 13.4 – Двопорожнинний гіперболоїд

Гіперболічний параболоїд: $z=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$

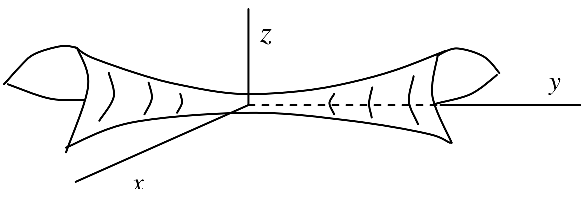


Рисунок 13.5 – Гіперболічний параболоїд

Конус: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$

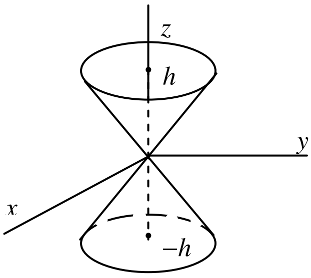


Рисунок 13.6 – Конус

Еліптичний циліндр:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Гіперболічний циліндр:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Параболічний циліндр:

$$y^2=2px$$

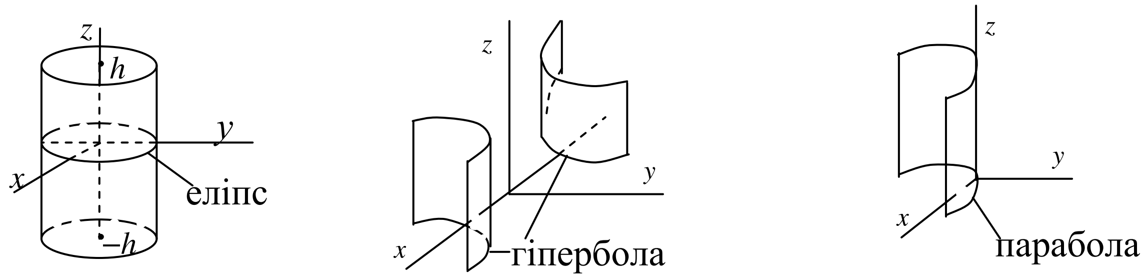


Рисунок 13.7 – Приклади циліндрів

Методи зведення загальних рівнянь поверхонь другого порядку до канонічного виду

Загальне рівняння поверхні другого порядку має вигляд:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+$$
$$+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0\,. \qquad (13.1)$$

Методи приведення загальних рівнянь поверхонь другого порядку до канонічного виду:

1. За допомогою перетворень координат.

а) *паралельне перенесення*:

$$\begin{cases} x=\overline{x}+a, \\ y=\overline{y}+b, \\ z=\overline{z}+c, \end{cases}$$

де $\overline{a}(a;\,b;\,c)$ – вектор паралельного перенесення, $\overline{x}$, $\overline{y}$ і $\overline{z}$ – нові координати.

За відсутності добутків xy, xz і yz це перетворення рівносильне виділенню повних квадратів відносно змінних x, y і z.

б) *перетворення повороту* на кут φ у додатному напрямку в одній з координатних площин, за допомогою якого можна анулювати коефіцієнт при добуткові змінних xy, xz або yz. Нові координати $\overline{x}$, $\overline{y}$ і $\overline{z}$ пов'язані з координатами x, y і z рівностями при повороті на кут φ у додатному напрямку в одній з координатних площин, наприклад xOy:

$$\begin{cases} x=\overline{x}\cos\varphi-\overline{y}\sin\varphi, \\ y=\overline{x}\sin\varphi+\overline{y}\cos\varphi. \end{cases}$$

Такі перетворення потрібно зробити у всіх координатних площинах.

в) *комбінування* двох вищевказаних перетворень.

2. За допомогою теорії квадратичних форм.

Групу старших членів рівняння (13.1) як квадратичну форму трьох змінних зводимо до канонічного виду методом ортогональних перетворень. В результаті такого перетворення зникають доданки з добутком координат. Далі здійснюємо паралельне перенесення нових осей координат і отримаємо канонічний вид вихідної поверхні:

$$\lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 + \lambda_3 \bar{z}^2 = C,$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – власні значення матриці старших членів.

Тест для самоконтролю

1. *Яке з наступних співвідношень визначає коло в просторі?*

А $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3, \\ y = 3 \end{cases}$ **Б** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ 2x + 3y + 4z = 0 \end{cases}$

В $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$ **Г** $x^2 + y^2 = 1.$

2. *Яке з наступних рівнянь визначає гіперболічний параболоїд?*

А $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$ **Б** $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$

В $\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 2px;$ **Г** $\frac{x^2 + z^2}{a^2} = 2py.$

3. *Яке з наступних рівнянь визначає еліптичний параболоїд?*

А $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$ **Б** $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$

В $\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 2px;$ **Г** $\frac{x^2 + z^2}{a^2} = 2py.$

4. *Рівняння* $x^2 + z^2 + 4x - 2z + 1 = 0$ *визначає в просторі*

А коло; **Б** еліптичний циліндр;
В гіперболічний циліндр; **Г** кулю.

5. *Яку фігуру визначає система рівнянь* $\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 4z, \\ y = 2 \end{cases}$ *?*

А параболу; **Б** еліпс; **В** гіперболу; **Г** дві прямі.

6. *Яку фігуру визначає система рівнянь* $\begin{cases} \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 4z^2, \\ y = 2 \end{cases}$ *?*

А параболу; **Б** еліпс; **В** гіперболу; **Г** дві прямі.

7. *Скільки площин симетрії має фігура в просторі, яка задана рівнянням* $xy = 1$ *?*

А 2; **Б** 4; **В** ні однієї; **Г** безліч.

8. *Маємо три системи рівнянь:*

1) $\begin{cases} y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4; \end{cases}$ ***2)*** $\begin{cases} x^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4; \end{cases}$ ***3)*** $\begin{cases} x^2 + z^2 = 4, \\ x = 0. \end{cases}$

Які з них визначають однакові фігури?

А 1, 2, 3; **Б** 2, 3; **В** 1, 3; **Г** 1, 2.

9. *Яка з наступних поверхонь не має центру симетрії?*

А $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{5}=0$; **Б** $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=z$;

В $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=-1$; **Г** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$.

10. *Яка з наступних поверхонь має безліч площин симетрії?*

А $\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{9}+\frac{(z-1)^2}{4}=1$; **Б** $\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1$;

В $\frac{(x+3)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{16}=2z$; **Г** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=0$.

11. *Вкажіть всі значення параметра a, при яких поверхня* $x^2+2y^2+az^2-2x+4y+2z=0$ *є параболоїдом.*

А $a>0$; **Б** $a<0$; **В** $a=0$; **Г** $a\neq 0$.

12. *Вкажіть всі значення параметра q, при яких поверхня* $2x^2+y^2-4x+2y+qz=0$ *є циліндричною.*

А $q>0$; **Б** $q<0$; **В** $q\neq 0$; **Г** $q=0$.

13. *Яке з рівнянь визначає двопорожнинний гіперболоїд?*

А $2x^2-3y^2+6z^2=1$; **Б** $-2x^2-3y^2-6z^2=1$;

В $2x^2-3y^2+6z^2=-1$; **Г** $2x^2-3y^2-6z^2=-1$.

14. *Яке з рівнянь визначає еліптичний параболоїд?*

А $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; **Б** $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$;

В $\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=2px$; **Г** $\frac{x^2+z^2}{a^2}=2py$.

15. *Яке з рівнянь визначає гіперболічний параболоїд?*

А $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; **Б** $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$;

В $\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=2px$; **Г** $\frac{x^2+z^2}{a^2}=2py$.

16. *Яке з рівнянь визначає конус?*

А $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$; **Б** $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$;

В $\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0$; **Г** $\frac{x^2+z^2}{a^2}=0$.

17. *Яке з рівнянь визначає еліпсоїд?*

А $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; **Б** $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$;

В $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{b^2}=2px$; **Г** $\dfrac{x^2+z^2}{a^2}=2py$.

18. Рівняння $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=4z$ *визначає в просторі*

А еліпс; **Б** еліптичний параболоїд;
В еліптичний циліндр; **Г** конус.

19. Рівняння $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=4z$ *визначає в просторі*

А гіперболу; **Б** гіперболічний циліндр;
В гіперболічний параболоїд; **Г** конус.

20. Рівняння $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=-4$ *визначає в просторі*

А гіперболу; **Б** гіперболічний циліндр;
В гіперболічний параболоїд; **Г** порожню множину.

Відповіді: 1.Б. 2.В. 3.Г. 4.Б. 5.А. 6.В. 7.Г. 8.Г. 9.Б. 10.В. 11.В. 12.Г. 13.В. 14.Г. 15.В. 16.Б. 17.А. 18.Б. 19.В. 20.Б.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1 Звести до канонічного виду рівняння поверхні

$$3x^2+5y^2+3z^2-2xy+2xz-2yz-12x-10=0.$$

Розв'язання.

Випишемо матрицю старших членів:

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ -1 & 5 & -1\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}.$$

Знайдемо власні значення цієї матриці. Для цього складемо характеристичне рівняння та розв'яжемо його:

$$\begin{vmatrix}3-\lambda & -1 & 1\\ -1 & 5-\lambda & -1\\ 1 & -1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0, \qquad (3-\lambda)^2(5-\lambda)+2-(5-\lambda)-2(3-\lambda)=0,$$

$$(3-\lambda)\left(\lambda^2-8\lambda+12\right)=0, \qquad \lambda_1=2,\ \lambda_2=3,\ \lambda_3=6.$$

Для знаходження перетворення координат, знайдемо власні вектори, що відповідають знайденим власним значенням. Для цього розв'яжемо однорідну систему рівнянь:

$$\begin{pmatrix}3-\lambda & -1 & 1\\ -1 & 5-\lambda & -1\\ 1 & -1 & 3-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

При $\lambda_1=2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ +\mathrm{I} \\ -\mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 \qquad\quad = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Таким чином, для $\lambda_1 = 2$ власний вектор $X_1 = c_1(1;\, 0;\, -1)$, $c_1 = const \neq 0$, який після нормування буде: $E_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}};\, 0;\, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$.

При $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \leftrightarrow \mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ +\mathrm{I} \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ +\mathrm{II} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \qquad = 0, \\ \qquad x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ x_3 = x_2. \end{cases}$$

Таким чином, для $\lambda_2 = 3$ власний вектор $X_2 = c_2(1;\, 1;\, 1)$, $c_2 = const \neq 0$, який після нормування буде: $E_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}};\, \frac{1}{\sqrt{3}};\, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$.

При $\lambda_3 = 6$:

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \cdot 3 - \mathrm{I} \\ +\mathrm{II} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \cdot(-1/2) \\ -\mathrm{II} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ \quad x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = -2x_3. \end{cases}$$

Таким чином, для $\lambda_3 = 6$ власний вектор $X_3 = c_3(1; -2; 1)$, $c_3 = const \neq 0$, який після нормування буде: $E_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

Можна перевірити, що отримані нормовані власні вектори попарно ортогональні, тому можемо скласти матрицю перетворення координат:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Звідси будемо мати формули перетворення координат:

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} + \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{y} + \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{z}, \\ y = \qquad\qquad \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{y} + \frac{2}{\sqrt{6}}\bar{z}, \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{x} + \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{y} - \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{z}. \end{cases}$$

Підставимо знайдені вирази до рівняння поверхні, спростимо його та виділимо повні квадрати відносно кожної змінної:

$$2\bar{x}^2 + 3\bar{y}^2 + 6\bar{z}^2 - 6\sqrt{2}\bar{x} - 4\sqrt{3}\bar{y} - 2\sqrt{6}\bar{z} - 10 = 0,$$

$$2\left(\bar{x} - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 3\left(\bar{y} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 6\left(\bar{z} - \frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2 = 24,$$

$$\frac{\left(\bar{x} - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}{12} + \frac{\left(\bar{y} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}{8} + \frac{\left(\bar{z} - \frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2}{4} = 1.$$

Зробимо паралельне перенесення осей, будемо мати:

$$\begin{cases} x' = \bar{x} - \frac{3\sqrt{2}}{2}, \\ y' = \bar{y} - \frac{2\sqrt{3}}{3}, \\ z' = \bar{z} - \frac{\sqrt{6}}{6}, \end{cases}$$

$$\frac{x'^2}{12} + \frac{y'^2}{8} + \frac{z'^2}{4} = 1 \text{ – еліпсоїд.}$$

Приклад 2 Звести до канонічного вигляду рівняння поверхні

$$2x^2+y^2+2z^2-2xy+2yz-4x-2y=0.$$

Розв'язання.

Випишемо матрицю старших членів:

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}.$$

Знайдемо власні значення цієї матриці. Для цього складемо характеристичне рівняння та розв'яжемо його:

$$\begin{vmatrix}2-\lambda&-1&0\\-1&1-\lambda&1\\0&1&2-\lambda\end{vmatrix}=0, \qquad (2-\lambda)^2(1-\lambda)-2(2-\lambda)=0,$$

$$(2-\lambda)\left(\lambda^2-3\lambda\right)=0, \qquad \lambda_1=3,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=0.$$

Для знаходження перетворення координат, знайдемо власні вектори, що відповідають знайденим власним значенням. Для цього розв'яжемо однорідну систему рівнянь:

$$\begin{pmatrix}2-\lambda&-1&0\\-1&1-\lambda&1\\0&1&2-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

При $\lambda_1=3$:

$$\begin{pmatrix}-1&-1&0\\-1&-2&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}-1&-1&0\\-1&-2&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\-\mathrm{I}\\ \\ \end{matrix}\sim\begin{pmatrix}-1&-1&0\\0&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\+\mathrm{I}\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}-1&-1&0\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&-1&0\\0&-1&1\end{pmatrix},$$

$$\begin{cases}-x_1-x_2=0,\\ -x_2+x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-x_2,\\ x_3=x_2.\end{cases}$$

Таким чином, для $\lambda_1=3$ власний вектор $X_1=c_1(1;-1;-1)$, $c_1=const\neq0$, який після нормування буде: $E_1=\left(\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

При $\lambda_2=2$:

$$\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&-1&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \mathrm{I} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \mathrm{II} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ \qquad x_2 \qquad = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Таким чином, для $\lambda_2 = 2$ власний вектор $X_2 = c_2(1; 0; 1)$, $c_2 = const \neq 0$, який після нормування буде: $E_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$.

При $\lambda_3 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot 2 + \mathrm{I} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \mathrm{II} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \qquad = 0, \\ \qquad x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} x_2, \\ x_3 = -\frac{1}{2} x_2. \end{cases}$$

Таким чином, для $\lambda_3 = 0$ власний вектор $X_3 = c_3(1; 2; -1)$, $c_3 = const \neq 0$, який після нормування буде: $E_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}} \right)$.

Можна перевірити, що отримані нормовані власні вектори попарно ортогональні, тому можемо скласти матрицю перетворення координат:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Звідси будемо мати формули перетворення координат:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \bar{x} + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{y} + \frac{1}{\sqrt{6}} \bar{z}, \\ y = -\frac{1}{\sqrt{3}} \bar{x} \qquad + \frac{2}{\sqrt{6}} \bar{z}, \\ z = -\frac{1}{\sqrt{3}} \bar{x} + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{y} - \frac{1}{\sqrt{6}} \bar{z}. \end{cases}$$

Підставимо знайдені вирази до рівняння поверхні, спростимо його, будемо мати:

$$3\bar{x}^2 + 2\bar{y}^2 + 2\sqrt{3}\bar{x} + 2\sqrt{2}\bar{y} = 0,$$

$$3\left(\bar{x} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 2\left(\bar{y} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2,$$

$$\frac{3\left(\bar{x} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{2} + \left(\bar{y} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1.$$

Зробимо паралельне перенесення осей, будемо мати:

$$\begin{cases} x' = \bar{x} + \dfrac{\sqrt{3}}{3}, \\ y' = \bar{y} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$$

$$\frac{3x'^2}{2} + y'^2 = 1 \text{ – еліптичний циліндр.}$$

Задачі для самостійного розв'язування

№ 13.1. Визначте вид фігури, яка задана рівнянням або системою рівнянь:

1) $x + 2y - z = 1$;
2) $x^2 - z^2 = 0$;
3) $x^2 + y^2 = 1$;
4) $(x-1)^2 + (y-5)^2 + (z-2)^2 \le a$;
5) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 6z + 4 = 0$;
6) $xy = 0$;
7) $xyz = 0$;
8) $yz + z^2 = 0$;
9) $\dfrac{y^2}{25} + \dfrac{z^2}{16} = 1$;
10) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$;
11) $x^2 = 6z$;
12) $x^2 + y^2 = 0$;
13) $x^2 + z^2 = 2z$;
14) $(x - 3y + z - 2)(2x + y - 4z + 1) = 0$;
15) $(x^2 + y^2 - 4)(y^2 + z^2 - 1) = 0$;
16) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-2}{1}$;
17) $\dfrac{x}{0} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{0}$;
18) $\begin{cases} x = y, \\ y = z; \end{cases}$
19) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ y = 0; \end{cases}$
20) $\begin{cases} x^2 + z^2 = 9, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9; \end{cases}$
21) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = 0; \end{cases}$
22) $\begin{cases} (x-1)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 25, \\ y + 1 = 0; \end{cases}$

23) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1, \\ x - 2 = 0; \end{cases}$ 24) $\begin{cases} x^2 + z^2 = 16, \\ z = 3; \end{cases}$

25) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{25} = 1$; 26) $\dfrac{x^2}{4} - y^2 + \dfrac{z^2}{4} = 0$;

27) $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{6} = 2z$; 28) $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{z^2}{3} = y$;

29) $x^2 + y^2 - z^2 = -1$; 30) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

№ 13.2. Звести рівняння поверхні до канонічного виду, визначити її тип й схематично побудувати:

1) $9x^2 - 4y^2 - 81z^2 - 36 = 0$;

2) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6z + 3 = 0$;

3) $x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x - 4y - 4z = 0$;

4) $x^2 + 2y^2 - z^2 + 2x - 4y + 2z + 1 = 0$;

5) $x^2 + 2y^2 - 4z^2 + 2x - 2y + 2 = 0$;

6) $x^2 + 8z^2 - 4x + 16z + 6 = 0$;

7) $3y^2 + 4z^2 + 24x + 12y - 72z + 360 = 0$;

8) $x^2 - 3y^2 - 2x + 18y - z = 0$;

9) $x^2 - 3y^2 - 2x + 18y - 26 = 0$;

10) $x^2 - 8z^2 - 4x + 16z - 12 = 0$;

11) $y^2 - 10z - 2y - 19 = 0$;

12) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 2 = 0$;

13) $3x^2 + 2y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$;

14) $3x^2 + 3y^2 - 3z^2 - 6x + 4y + 4z + 3 = 0$;

15) $4x^2 + y^2 - 4xy - 36 = 0$;

16) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 6x + 8y - 36z = 0$;

17) $x^2 - 2x + 4y - z^2 + 10 = 0$;

18) $6y^2 + 6z^2 + 5x + 6y + 30z - 11 = 0$;

19) $2x^2 + 2y^2 - 6x - 2y - z = 0$;

20) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz - 14x - 4y + 14z + 16 = 0$.

ЛІТЕРАТУРА

Основна

1. Гриньов Б.В. Векторна алгебра [Текст]: підручник для вищих технічних навчальних закладів затвердж. МОНУ / Б.В. Гриньов. – Харків: Гімназія, 2008.

2. Бєляєв М.Р. Вища алгебра для фізиків та інженерів: теоретичні відомості, збірка задач із прикладами розв’язків [Текст]: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. Рек.МОНУ / М.Р. Бєляєв – Харків: ХНУ ім. В.Н. Каразіна, 2008.

3. Назієв Е.Х. Лінійна алгебра та аналітична геометрія [Текст]: навчальний посібник для вузів / Е.Х. Назієв. – К.: Либідь, 1997.

4. Ильин В.А. Линейная алгебра [Електронний ресурс]: учеб. для вузов / В.А. Ильин. – М.: Физматлит, 2005. – Режим доступу: http://ebooks.znu.edu.ua/files/mathbooks/agrebra_i_teoriya_chisel/BOOKS/algebra/Ilin11.djv.

5. Ильин В.А. Аналитическая геометрия [Електронний ресурс]: учеб. для вузов / В.А. Ильин. – М.: Физматлит, 2004. – Режим доступу: http://ebooks.znu.edu.ua/files/phiziki/matematika/algebra_i_geometria/5IlyinAGeom.djvu.

6. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии [Електронний ресурс] / О.Н. Цубербиллер. – СПб.: Издательство «Лань», 2003. – Режим доступу: http://ebooks.znu.edu.ua/files/mathbooks/matematicheskiy_analiz/BOOKS/zadachi/Cuberbiller.djv.

7. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии [Електронний ресурс] / Д.В. Клетеник. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. – Режим доступу: http://ebooks.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi18/0012291.djvu.

8. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре [Електронний ресурс] / И.В. Проскуряков. – М.: Наука, 1974. – Режим доступу: http://ebooks.znu.edu.ua/files/mathbooks/agrebra_i_teoriya_chisel/BOOKS/algebra/031224095406.djvu.

9. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Текст] / Д.В. Беклемишев. – М.: Наука, 1980.

10. Моденов П.С. Сборник задач по аналитической геометрии [Текст] / П.С. Моденов, А.С. Пархоменко. – М.: Наука, 1976.

11. Рябушко А.П. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике в трех частях. Ч. 1 [Текст] / А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть. – Минск: Вышэйшая школа, 1990.

12. Рублев А.Н. Курс линейной алгебры и аналитической геометрии [Текст] / А.Н. Рублев. – М.: Высшая школа, 1972.

Додаткова

13. Антонов В.И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Опорный конспект [Текст]: учеб. пос. / В.И. Антонов. – М.: Проспект, 2011.

14. Кострикин А.И. Линейная алгебра и геометрия [Текст] / А.И. Кострикин. – М.: Наука, 1990.

Навчальне видання
(українською мовою)

Спиця Оксана Геннадіївна
Зіновєєв Ігор Валерійович
Манько Наталія Іванівна – Володимирівна

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ ТА ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Навчальний посібник
для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра
напрямів підготовки «Фізика», «Прикладна фізика»

Рецензент *С.М. Гребенюк*
Відповідальний за випуск *А.К. Приварников*
Коректор *О.Г. Спиця*