1 ПОПЕРЕДНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Мета: Ознайомитись з постановкою задачі та класифікацією методів розв'язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь в частинних похідних.

Тема 1. Постановка крайової задачі

Крайова задача – це задача теорії диференціальних рівнянь, в якій крайові умови задаються в точках межі області, на якій визначене відповідне диференціальне рівняння.

Наприклад, в задачі коливання струни крайові умови визначаються нульовими значеннями на кінцях відрізка. В задачі теплопровідності пластини крайові умови задаються на межі області, яка задається такою пластиною.

Розрізняють крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь в частинних похідних.

Крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь. Розглянемо диференціальне рівняння n-го порядку

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 . \tag{1.1}$$

Крайова задача передбачає пошук такої диференційовної n разів функції-розв'язку $y = y(x)$ рівняння (1.1), значення якої та її похідних

$$y_j^{(s)} = y^{(s)}(x_j) \quad (s = 0, 1, ..., r_j)$$

в точках $x = x_j$ $(j = 1, 2, ..., m;\ m \geq 2)$ задовольняють n незалежні крайові умови

$$R_\nu\left(y_1, y_1', ..., y_1^{(r_{1\nu})}, ..., .y_m, y_m', ..., y_m^{(r_{m\nu})}\right) = 0\ (\nu = 1, 2, ..., n), \tag{1.2}$$

де R_ν – лінійна або нелінійна функція, $r_{s\nu} \leq n - 1$.

Загальна крайова задача (1.1) – (1.2) може

- не мати розв'язків,
- мати один єдиний розв'язокб
- мати скінченну або нескінченну множину розв'язків.

Аналогічно ставлять крайові задачі для систем диференціальних рівнянь.

Найпростіші двоточкові крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь потребують пошуку функції $y = y(x)$, що задовольняє диференціальне рівняння другого порядку

$$y'' = f(x, y, y') \tag{1.3}$$

та одну з крайових умов, наведених нижче

а) $y(a) = A,\ y(b) = B$,

б) $y'(a) = A,\ y(b) = B$,

в) $y(a) = A,\ y'(b) = B$,

г) $y'(a) = A,\ y'(b) = B$.

Геометрична інтерпретація крайових умов показана на рис. 1.1 з однойменними підписами рисунків.

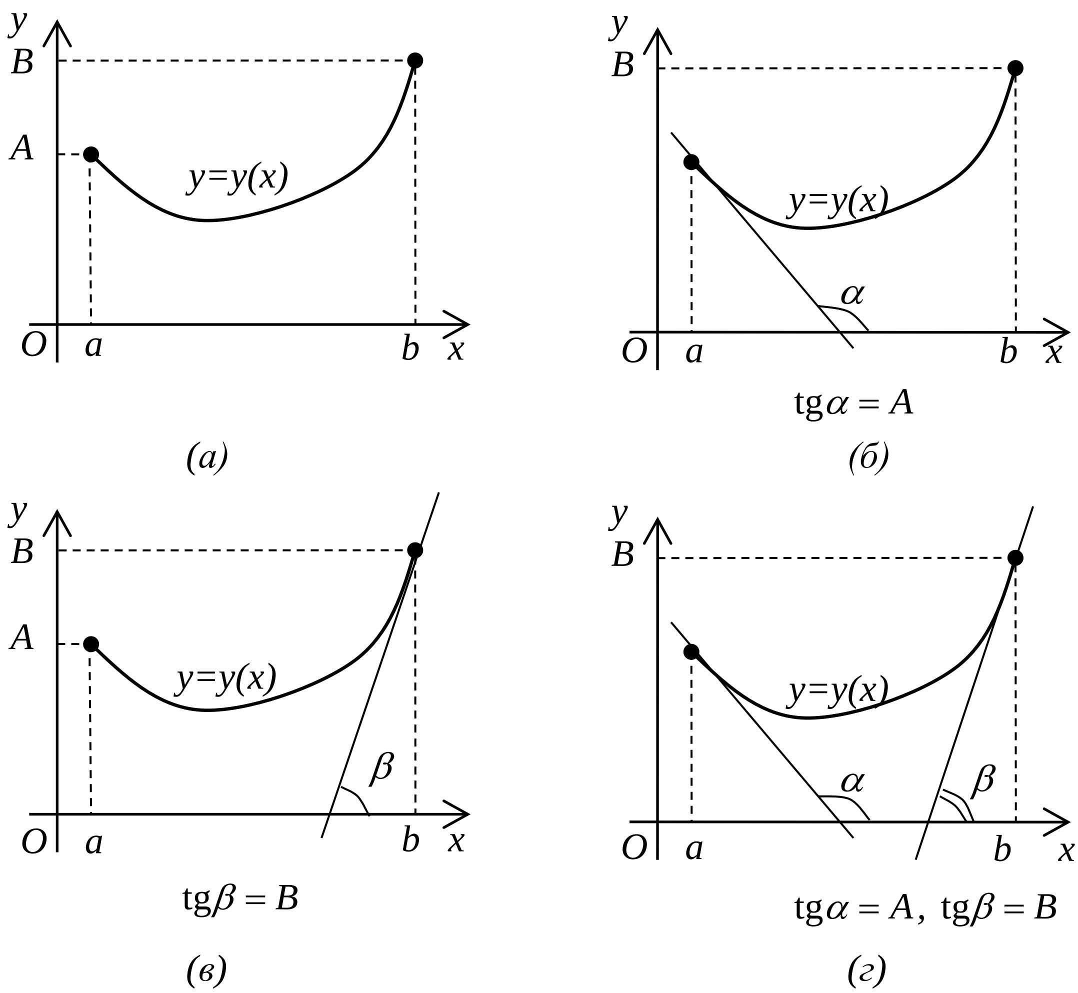

Рис. 1.1 Геометрична інтерпретація крайових умов
двоточкової крайової задачі

Окремий важливий клас крайових задач – *лінійні крайові задачі*. Вони передбачають лінійні диференціальні рівняння та крайові умови. Деякі випадки таких задач розглянемо в межах цього курсу.

Наступним важливим класом задач є такі, що вимагають пошуку нетривіальних розв’язків однорідних диференціальних рівнянь з однорідними крайовими умовами. В таких задачах наявний невідомий параметр, потрібно знайти таке його значення, щоб задача мала нетривіальні розв’язки. Відповідне значення параметра називається *власним значенням*, а розв’язки, що йому відповідають – *власними функціями*.

Прикладом *задачі пошуку власних значень* є дослідження стійкості стрижня, що вимагає пошуку такого значення тиску, за якого існує нетривіальний розв’язок відповідної крайової задачі. Найменше додатне значення тиску називають критичним.

Крайові задачі для рівнянь в частинних похідних. Розглянемо лише рівняння в частинних похідних другого порядку з двома змінними x, y

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0 \qquad (1.4)$$

відносно невідомої двічі неперервно диференційовної функції $u = u(x, y)$ в області G, що має межу $\Gamma = \partial G$ (рис. 1.1).

Якщо рівняння (1.4) є лінійним зі змінними або сталими коефіцієнтами

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = F\left(x, y\right) \text{ на } G, \tag{1.5}$$

то має місце поділ на класи:

- $D = AC - B^2 > 0$ – еліптичне рівняння;
- $D = 0$ – параболічне;
- $D < 0$ – гіперболічне;
- D не зберігає знак – мішане.

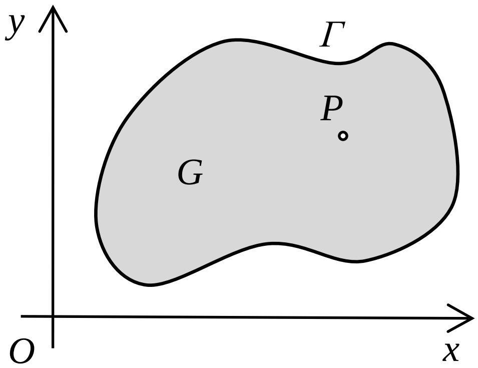

Рис. 1.2 Схема області G

Тепер розглянемо крайові умови для рівняння еліптичного типу.

Перша крайова задача. На межі Γ області G задана неперервна функція $\varphi(x, y)$. Потрібно знайти функцію $u(x, y)$, що задовольняє рівняння (1.5) в області G, а на межі дорівнює $\varphi(x, y)$, тобто

$$u\big|_{\Gamma} = \varphi(x, y), (x, y) \in \Gamma.$$

Друга крайова задача. На $\Gamma = \partial G$ задана неперервна функція $\varphi_1(x, y)$. Знайти функцію $u(x, y)$, що задовольняє (1.5) на G, а на межі Γ її похідна вздовж нормалі до Γ (зовнішньої по відношенню до G) дорівнює $\varphi_1(x, y)$, тобто

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = \varphi_1(x, y), (x, y) \in \Gamma.$$

Третя крайова задача. На Γ області G задана неперервна функція $\varphi_2(x, y)$. Шукана функція $u(x, y)$ задовольняє (1.5) в G, а на межі справджує умову

$$\left.\left(\alpha_0 u + \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\Gamma} = \varphi_3(x, y), (x, y) \in \Gamma,$$

де $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$.

Для рівняння Лапласа $\Delta u \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ перша крайова задача називається *задачею Діріхле,* друга – *задачею Неймана*, третя – мішаною крайовою задачею. Зауважимо, що розв'язок задачі Діріхле визначається однозначно.

Задачі, що визначаються диференціальними рівняннями в частинних похідних параболічного та гіперболічного типу, як правило, визначаються функціями, залежними від координат точок області G та часу t і передбачають наявність крайової та початкової умови.

Тема 2. Класифікація методів розв'язання крайових задач

Якщо крайова задача має розв'язки, то вони можуть бути або точними (аналітичними(або наближеними (чисельними).

Методи пошуку точних розв'язків вивчалися в рамках курсів диференціальних рівнянь та рівнянь математичної фізики. Тут будемо вивчати деякі наближені (чисельні методи). Не вдаючись в деталі та не намагаючись осягнути всі методи наближеного розв'язання крайових задач, зазначимо лише деякі з них.

Деякі методи наближеного (чисельного) розв'язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь:

- зведення до задачі Коші двоточкової крайової задачі для лінійних рівнянь другого порядку;
- варіаційний метод Рітца;
- проєкційний метод Галеркінв;
- різницевий метод скінченних різниць;
- метод прогонки;
- метод колокації;
- метод найменших квадратів;
- інші.

Деякі методи наближеного (чисельного) розв'язання крайових задач для рівнянь в частинних похідних:

- варіаційний метод Рітца розв'язання задачі для рівнянь еліптичного типу;
- різницевий метод скінченних різниць – метод сіток;
- метод прогонки для рівняння теплопровідності;
- метод Монте-Карло розв'язання задачі Діріхле.
- інші.

Вивчення в рамках цього курсу акцентуємо на

- варіаційному методі Рітца для розв'язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь в частинних похідних;
- проєкційному методі Галеркіна для крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь;
- різницевих методах розв'язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь в частинних похідних.

Контрольні питання до тем 1 і 2

1. Сформулювати постановку крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь.
2. Сформулювати постановку найпростішої двоточнової крайової задачі. Дати геометричну інтерпретацію різтих видів крайових умов.
3. Основні типи лінійних рівнянь в частинних похідних другого порядку.
4. Типи крайових умов для рівняння еліптичного типу. Задача Діріхле, задача Неймана.
5. Назвіть декілька методів розв'язання крайових задач для звичпйних диференціальних рівнянь та рівнянь в частинних похідних.