

- Для одночасного зображення трьох розв'язків використаємо оператор `display`. У даному випадку графіки набудуть вигляду, зображеному на рис. 2.1.

На рис. 2.1 суцільною чорною лінією побудовано графік функції, отриманий методом Рітца для $N=3$, точковою синьо – для $N=10$, а суцільною червоною – засобами чисельного інтегрування, закладеними в СКА Maple

Збільшення кількості лінійно незалежних функцій зменшує відхилення між функціями-розв'язками, отриманими методом Рітца та чисельними розв'язками, знайденими за допомогою засобів СКА. Це свідчить про збіжність послідовності наближених розв'язків до точного.

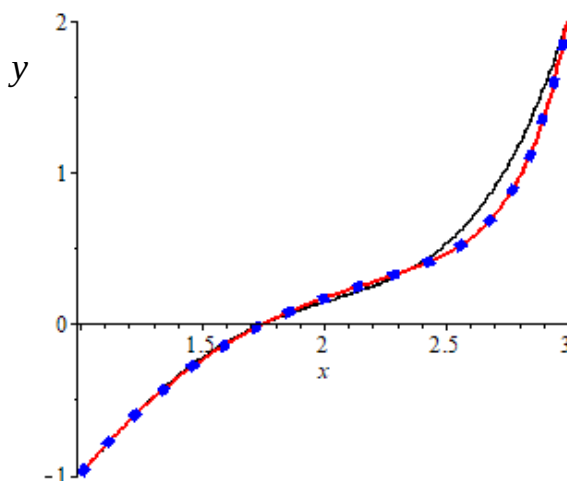


Рис. 2.1 Графічне подання результатів розв'язання задачі 2.1

Контрольні питання до лабораторної роботи №1

1. Дайте означення функціонала та оператора.
2. Сформулюйте постановку варіаційної задачі.
3. Сформулюйте теорему про зведення крайової задачі до варіаційної.
4. Опишіть ідею методу Рітца у загальному вигляді.
5. Яким властивостям мають задовольняти функції лінійно незалежної системи?
6. Опишіть послідовність дій для застосування методу Рітца до крайової задачі для звичайного диференціального рівняння.
7. Який фактор впливає на точність наближеного розв'язку крайової задачі методом Рітца?

Тема 6. Застосування методу Рітца до задачі Штурма-Ліувіля.

Постановка задачі Штурма Ліувіля.

Розглянемо однорідне самоспряжене диференціальне рівняння

$$\frac{d}{dx}[p(x) y'] + (q(x) + \lambda \rho(x))y = 0 \quad (2.28)$$

з однорідними крайовими умовами

$$\Gamma_a(y) \equiv \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = 0, \quad \Gamma_b(y) \equiv \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = 0 \quad (2.29)$$

де $p(x) > 0$, $q(x)$, $\rho(x)$ – неперервні функції на $[a, b]$, $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$, $|\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$, λ – параметр.

Вочевидь, така задача має нульовий розв'язок, проте у задача Штурма-Ліувіля потребує пошуку нетривіальних розв'язків, а саме:

- потрібно знайти такі значення параметра λ , які називають власними значеннями задачі Штурма-Ліувіля, за якого існує ненульовий розв'язок задачі (2.28) – (2.29);
- також потрібно визначити ті нетривіальні розв'язки, що носять назву власних функцій, що відповідають власним значенням.

Система власних функцій є зчисленною системою лінійно незалежних функцій. Метод Рітца дозволяє знайти наближений розв'язок задачі Штурма-Ліувіля зі скінченної кількості власних чисел та власних функцій зазначеної системи.

Застосування методу Рітца до наближеного рзв'язання задачі Штурма-Ліувіля.

Розглянемо окремий випадок однорідних крайових умов у вигляді:

$$y(a) = 0, y(b) = 0. \quad (2.30)$$

Задача зводиться до мінімізації функціонала

$$\Phi_1[y] = \int_a^b [p(x)y'^2 - (q(x) + \lambda \rho(x)) y^2] dx, \quad (2.31)$$

що передбачає пошук ненульових функцій $y(x, \lambda)$, що задовольняють крайові умови

$$y(a, \lambda) = 0, y(b, \lambda) = 0.$$

Наближені власні функції подаються лінійною комбінацією лінійно незалежних функцій $\{u_j(x)\}_{j=1}^n$, які задовольняють крайові умови (2.30), у вигляді

$$\bar{y}(x, \lambda) = \sum_{j=1}^n C_j(\lambda) u_j(x). \quad (2.32)$$

Вибір лінійно незалежних функцій може бути реалізованим через подання (2.23) або (2.24).

Для визначення власних значень та власних функцій

- підставляємо функцію (2.32) у функціонал (2.31);
- мінімізуємо його з використанням необхідної умови локального екстремуму функції багатьох змінних, яка записується через співвідношення (2.21);
- приходимо до однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), яка має ненульовий розв'язок, якщо її визначник дорівнює нулю;

- підставляючи власне значення λ до однорідної СЛАР, знаходячи її фундаментальний розв'язок $\{C_j(\lambda)\}_{j=1}^n$, а разом з тим і наближену власну функцію, що відповідає власному значенню λ .

Точність наближеного розв'язку покращується із збільшенням кількості n лінійно незалежних функцій.

Лабораторна робота №2 «Метод Рітца розв'язання задачі Штурма-Ліувіля»

Мета: навчитися застосовувати метод Рітца для наближеного розв'язання задачі Штурма-Ліувіля.

Завдання до лабораторної роботи №2

Методом Рітца наближено розв'язати задачу Штурма Ліувіля: визначити перші 2, 3 та 4 власні значення і власні функції задачі, що відповідають їм у задачі Штурма-Ліувіля для даного рівняння і даних крайових умовах відповідно до індивідуальних варіантів (табл. 2.2).

Результати порівняти для перших двох власних значень та відповідних їм функцій.

Значення для s : $s = 2$ – для денної форми навчання, $s = 1$ – для заочної.

Таблиця 2.2 – Варіанти завдань до лабораторної роботи №2

Варіант	Крайова задача
1	$y'' + (sx + \lambda)y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0$
2	$y'' + 2s \times \lambda y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0$
3	$y'' + (sx - \lambda)y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0$
4	$y'' - (2s + \lambda)y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0$
5	$y'' + (\lambda - s)y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0$
6	$y'' + (4x + s\lambda)y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0$
7	$y'' + (\lambda - 2s)y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0$
8	$y'' + (x - s\lambda)y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0$
9	$y'' - (3s + \lambda)y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0$
10	$y'' + (\lambda s - 2x)y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0$

Методичні рекомендації до лабораторної роботи №2

Задача 2.2 Методом Рітца наближено розв'язати задачу Штурма-Ліувіля
 $y'' + (-2x + \lambda)y = 0, \quad y(1) = y(3) = 0.$

Розв'язання.

- У даному випадку покладемо

$$p(x) = 1; \quad q_1(x) = -2x + \lambda; \quad a = 1; \quad b = 3.$$

- В СКА визначимо функціонал

$$F := \int (p(x) * (\text{diff}(y(x), x))^2 - q_1(x) * y(x)^2, x = a .. b),$$

а лінійно незалежну систему функцій $\{u_j(x)\}_{j=1}^N$ задамо аналогічно, як в лабораторній роботі №1. Зверніть увагу, що нульова функція тут не визначається!

- Далі описуємо СЛАР, як в попередній лабораторній роботі. Щоб знайти матрицю СЛАР, можна використати зазначений нижче програмний код, який передбачає в рівняннях системи обнуління коефіцієнтів, що не відповідають місцю елемента матриці, та прирівнювання до 1 такого коефіцієнта у супротивному випадку:

```
> with(linalg): M := matrix(N, N);
  for i1 to N do
    for j to N do
      M[i1, j] := rr[i1];
      for l to N do
        if j = l then M[i1, j] := subs(c[l] = 1, M[i1, j]) fi;
        if j <> l then M[i1, j] := subs(c[l] = 0, M[i1, j]) fi
      od: od: od:
```

Пропонуємо студентам знайти інший спосіб пошуку матриці СЛАР в Maple.

- Знаходимо власні значення $\{\lambda_1(i)\}_{i=1}^N$ задачі Штурма-Ліувіля, розв'язуючи рівняння, в якому визначник матриці прирівнюємо до нуля:

```
> RR := solve(det(M), lambda);
> for i1 to N do lambda1[i1] := RR[i1] od:
```

- Тепер перейдемо до пошуку власних функцій, що відповідають власним значенням $\lambda_1(i), i = \overline{1, N}$. Запропонуємо один з можливих способів розв'язання. Оператор `gausselim` дозволяє звести матрицю до діагональної методом Гаусса. Рядок, в якому діагональний буде близьким до нуля, є лінійно залежним від інших рядків діагональної матриці. Тому такий рядок прибирається з розгляду для подальшого розв'язання системи. Отриманий розв'язок підставляємо у функцію (2.32) і отримаємо відповідну власну функцію. Нижче наведемо відповідний програмний код Maple з результатами (номер елемента, відповідне власне значення та власна функція) при $N = 4$.

>

```

M1 := matrix(N,N); C := vector(N);
for ll to N do
  for i1 to N do
    for j to N do
      M1[i1,j] := subs(lambda = lambdaI[ll], M[i1,j])
    od:od:
M2 := gausselim(M1); Eq := multiply(M2, C);
for i2 to N do
  if abs(M2[i2, i2]) < 10^(-3) then i0 := i2 fi;
od:
var := {seq(C[i], i = 1 .. i0-1), seq(C[i], i = i0 + 1 .. N)};
sys := {seq(Eq[i], i = 1 .. i0-1), seq(Eq[i], i = i0 + 1 .. N)};
Rs := solve(sys, var);
yy(x)[ll] := y(x);
for i3 to N do
  if i3 < i0 then yY := subs(c[i3] = rhs(Rs[i3]), yy(x)[ll]) fi;
  if i3 = i0 then yY := subs(c[i0] = C[i0], yy(x)[ll]) fi;
  if i3 > i0 then yY := subs(c[i3] = rhs(Rs[i3-1]), yy(x)[ll]) fi;
  yy(x)[ll] := yY od;
yy(x)[ll] := expand(yY/C[i0]); print(ll, lambdaI[ll], yy(x)[ll]) od:

```

$$\begin{aligned}
& 1, 6.397504010, 87.50521519x^2 - 56.69306104x + 7.22229253 - 48.48333582x^3 \\
& \quad + 11.44888915x^4 - x^5 \\
& 2, 13.90326107, 57.99119281x^2 - 41.60066615x + 10.30917890 - 35.50459693x^3 \\
& \quad + 9.804891375x^4 - x^5 \\
& 3, 29.47845971, 254.2717212x^2 - 282.6531597x + 113.9743901 - 102.6031236x^3 \\
& \quad + 18.01017205x^4 - x^5 \\
& 4, 52.51258293, 71.52255250x^2 - 63.85967053x + 21.83560779 - 38.47070560x^3 \\
& \quad + 9.972215831x^4 - x^5
\end{aligned}$$

Порівняємо результати. В табл. 2.3 наведено два перших власних значення. На рис. 2.2 – графіки власних функцій, які попередньо нормовано, тобто поділено на найбільше значення модуля отриманої власної функції. Червоним суцільним лініям відповідаю власні функції, отримані при $N = 2$, синіми пунктирними – $N = 3$, зеленим штрих-пунктирними – $N = 4$.

За наведеними результатами складно зробити висновок про точність наближеного розв'язку.

Таблиця 2.3 – наближені власні значення задачі 2.2

N	λ_1	λ_2
2	6.429198089	14.57084530
3	6.402671314	14.51075236
4	6.397516941	13.90387056

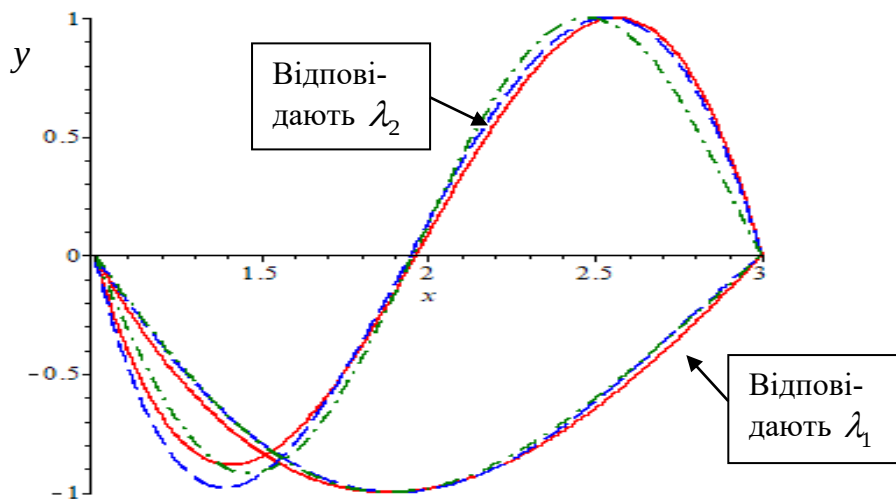


Рис. 2.2 Власні функції задачі 2.2

Наступна задача дозволяє провести порівняння та зробити висновки, оскільки має точний розв'язок.

Задача 2.3 Методом Рітца наближено розв'язати задачу Штурма-Ліувіля $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = y(1) = 0$.

Розв'язання. Точний розв'язок Даної задачі Штурма-Ліувіля: власні значення – $\pi^2 j^2$, $j \in \mathbb{N}$, власні функції – $\sin(\pi j)$, $j \in \mathbb{N}$.

Використовуючи зазначену в задачі 2.2 схему, знайдемо результати. В табл. 2.4 та на рис. 2.3 наведено як результати наближених обчислень, так і точних.

Таблиця 2.4 – Наближені та точні власні значення задачі 2.3

N	λ_1	λ_2
2	10.00000000	41.99999836
3	9.869749582	42.00000568
4	9.869749123	39.50131998
точні	9.869604404	39.47841762

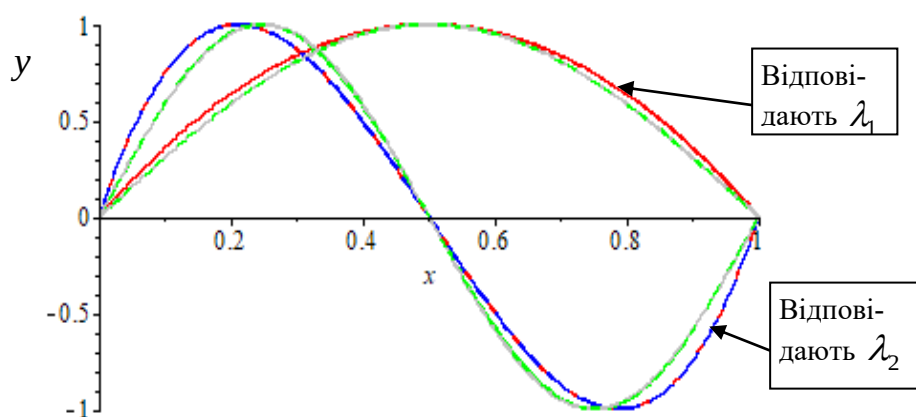


Рис. 2.4 Власні функції задачі Штурма-Ліувіля

На рис. 2.3 використано аналогічну кольорову гаму для подання графіків, як і в задачі 2.2 на рис. 2.2, за винятком графіків, зображених сірими суцільними лініями, які відповідають точним розв'язкам. Найкраще узгоджується з точними результатами наближений розв'язок, знайдений при $N = 4$, тобто з використанням 4-х лінійно незалежних функцій.

Контрольні питання до лабораторної роботи №2

1. Сформулювати постановку задачі Штурма-Ліувіля.
2. Визначте поняття власних значень та власних функцій.
3. Опишіть ідею методу Рітца для наближеного розв'язання задачі Штурма-Ліувіля.
4. Яка потужність множини розв'язків задачі Штурма Ліувіля при точному та наближеному розв'язання?
5. Які властивості функцій, що використовуються в лінійній комбінації для подання наближеного розв'язку?
6. Від чого залежить точність наближеного розв'язку задачі Штурма-Ліувіля.

Тема 7. Варіаційний метод Рітца крайової задачі для рівняння в частинних похідних еліптичного типу

Постановка задачі. Як вже було розглянуто в прикладі 2.3, введемо множину $K = \{u(x, y) \in C^{(2)}(\bar{G})\}$, де G – область на площині, тобто зв'язна відкрита множина евклідового простору $\mathbb{R}_2^2$, множина $\bar{G} = G \cup \Gamma$ – замикання G , а $\Gamma = \partial G$, – множину її межових точок.

На множині K розглянемо оператор Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (2.33)$$

А разом з ним рівняння Пуассона

$$-\Delta u = f(x, y), \quad (2.34)$$

де $f(x, y) \in C(G)$ – задана неперервна на G функція. Окремим випадком (2.34) є рівняння Лапласа

$$\Delta u = 0. \quad (2.35)$$

Потрібно знайти розв'язок рівняння (2.34) або (2.35) в класі функцій K , який задовольняє крайову умову

$$u|_{\Gamma} = \varphi(P), P \in \Gamma. \quad (2.36)$$

Тут $P = (x, y)$ і $\varphi(P)$ задана неперервна функція.

Крайова задачі (2.35), (2.36) носить назву *задачі Діріхле*.

Розглянемо оператор

$$Lu = -\Delta u. \quad (2.37)$$