

На рис. 2.3 використано аналогічну кольорову гаму для подання графіків, як і в задачі 2.2 на рис. 2.2, за винятком графіків, зображених сірими суцільними лініями, які відповідають точним розв'язкам. Найкраще узгоджується з точними результатами наближений розв'язок, знайдений при $N = 4$, тобто з використанням 4-х лінійно незалежних функцій.

Контрольні питання до лабораторної роботи №2

1. Сформулювати постановку задачі Штурма-Ліувіля.
2. Визначте поняття власних значень та власних функцій.
3. Опишіть ідею методу Рітца для наближеного розв'язання задачі Штурма-Ліувіля.
4. Яка потужність множини розв'язків задачі Штурма Ліувіля при точному та наближеному розв'язання?
5. Які властивості функцій, що використовуються в лінійній комбінації для подання наближеного розв'язку?
6. Від чого залежить точність наближеного розв'язку задачі Штурма-Ліувіля.

Тема 7. Варіаційний метод Рітца крайової задачі для рівняння в частинних похідних еліптичного типу

Постановка задачі. Як вже було розглянуто в прикладі 2.3, введемо множину $K = \{u(x, y) \in C^{(2)}(\bar{G})\}$, де G – область на площині, тобто зв'язна відкрита множина евклідового простору $\mathbb{R}_2^2$, множина $\bar{G} = G \cup \Gamma$ – замикання G , а $\Gamma = \partial G$, – множину її межових точок.

На множині K розглянемо оператор Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (2.33)$$

А разом з ним рівняння Пуассона

$$-\Delta u = f(x, y), \quad (2.34)$$

де $f(x, y) \in C(G)$ – задана неперервна на G функція. Окремим випадком (2.34) є рівняння Лапласа

$$\Delta u = 0. \quad (2.35)$$

Потрібно знайти розв'язок рівняння (2.34) або (2.35) в класі функцій K , який задовольняє крайову умову

$$u|_{\Gamma} = \varphi(P), P \in \Gamma. \quad (2.36)$$

Тут $P = (x, y)$ і $\varphi(P)$ задана неперервна функція.

Крайова задачі (2.35), (2.36) носить назву *задачі Діріхле*.

Розглянемо оператор

$$Lu = -\Delta u. \quad (2.37)$$

Властивості оператора (2.37), заданого на класі K функцій, що задовольняють однорідну крайову умову

$$u|_{\Gamma} = 0. \quad (2.38)$$

- оператор L симетричний;
- оператор L додатний.

Зведення крайової задачі для рівняння Пуассона до варіаційної задачі. Відповідно до теореми 2.2 про зведення крайової задачі до варіаційної крайова задача (2.34), (2.37) еквівалентна варіаційній, про мінімум функціонала

$$\Phi[u] = (Lu, u) - 2(f, u) \equiv \iint_G (Lu - 2f)u \, dx \, dy.$$

Зазначений функціонал на класі K функцій, що задовольняють однорідну крайову умову, допускає зведення до вигляду

$$\Phi[u] = \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 2fu \right] dx \, dy. \quad (2.39)$$

Задача (2.35), (2.36) з неоднорідною крайовою умовою так само еквівалентна варіаційній задачі на мінімум функціонала (2.39) в класі функцій K , що задовольняють умову (2.36).

Метод Рітца для задачі Діріхле. Розглянемо задачу Діріхле (2.35), (2.36). Така задача еквівалентна варіаційній задачі на мінімум функціонала

$$\Phi[u] = \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx \, dy \quad (2.40)$$

в класі функцій K , що задовольняють умову (2.36).

Побудуємо систему лінійно незалежних (координатних) функцій $\{u_j(x, y)\}_{j=0}^n \in C^{(2)}(\bar{G})$, що задовольняють умови на межі $\Gamma = \partial G$ області G :

$$u_0(x, y)|_{\Gamma} = \varphi(x, y), \quad u_j(x, y)|_{\Gamma} = 0 \quad \forall j = \overline{1, n}. \quad (2.41)$$

Тобто нульова функція задовольняє неоднорідну крайову умову, а інші координатні функції – однорідну.

Наближений розв'язок подаємо лінійною комбінацією координатних функцій

$$\bar{u}(x, y) = u_0(x, y) + \sum_{j=1}^n C_j u_j(x, y). \quad (2.42)$$

Внаслідок (2.41), $\bar{u}(x, y)|_{\Gamma} = \varphi(x, y)$, $\forall \{C_j\}_{j=1}^n$. Якщо покласти $C_0 = 0$, то після підстановки подання наближеного розв'язку (2.42) у функціонал (2.40), отримаємо:

$$\Phi[\bar{u}] = \iint_G \left[\left(\sum_{j=0}^n C_j \frac{\partial u_j}{\partial x} \right)^2 + \left(\sum_{j=0}^n C_j \frac{\partial u_j}{\partial y} \right)^2 \right] dx \, dy = F(C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Щоб знайти мінімум функції багатьох змінних використаємо необхідну умову локального екстремуму:

$$\frac{\partial F}{\partial C_k} = 2 \iint_G \left[\left(\sum_{j=0}^n C_j \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) \frac{\partial u_k}{\partial x} + \left(\sum_{j=0}^n C_j \frac{\partial u_j}{\partial y} \right) \frac{\partial u_k}{\partial y} \right] dx dy = 0, k = \overline{1, n} \quad (2.43)$$

або

$$\begin{cases} [u_0, u_1] + C_1[u_1, u_1] + \dots + C_1[u_n, u_1] = 0; \\ [u_0, u_2] + C_1[u_1, u_2] + \dots + C_1[u_n, u_2] = 0; \\ \dots \\ [u_0, u_n] + C_1[u_1, u_n] + \dots + C_1[u_n, u_n] = 0, \end{cases} \quad (2.44)$$

$$\text{де } [u_j, u_k] = \iint_G \left[\frac{\partial u_j}{\partial x} \frac{\partial u_k}{\partial x} + \frac{\partial u_j}{\partial y} \frac{\partial u_k}{\partial y} \right] dx dy = 0, j = \overline{0, n}, k = \overline{1, n} /$$

В наслідок лінійної незалежності координатних функцій, СЛАР (2.44) має єдиний розв'язок $\{C_j\}_{j=1}^n$, який визначає функцію (2.42), яка є наближеним розв'язком задачі Діріхле.

Наближене розв'язання методом Рітца крайової задачі для **рівняння Пуассона** аналогічне, але замість функціонала (2.40) використовується (2.39).

Лабораторна робота №3 «Варіаційний метод Рітца задачі Діріхле»

Мета: навчитися застосовувати варіаційний метод Рітца для наближеного розв'язання задачі Діріхле.

Завдання до лабораторної роботи №3

Розглянемо задачу Діріхле для рівняння еліптичного типу – рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ на } G, \quad (2.45)$$

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \varphi(x, y), \quad (2.46)$$

де G – деяка скінчена область, Γ – межа області G , $f(x, y)$ – задана на Γ функція.

Індивідуальні варіанти наведено в табл.2.5. Номер варіанта визначається за номером прізвища студента в журналі академічної групи з додаванням числа 0 – для денної форми навчання, 10 – для заочної.

Таблиця 2.5 – Варіанти завдань до лабораторної роботи №3

№1. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1(\Gamma),$ $u(x, y) _{\Gamma} = x + y .$	№2. $(x + 2)(y + 2) = 12(\Gamma),$ $u(x, y) _{\Gamma} = 2 x + y .$	№3. $\left. \begin{matrix} y = 4 - x^2 \\ x \in [-2, 2] \end{matrix} \right\}(\Gamma),$ $u(x, y) _{\Gamma} = x \cdot y .$
---	--	---

Продовження таблиці 2.5

№4. $x^2 + y^2 = 16(\Gamma)$, $u(x, y) _{\Gamma} = x + 2 y $.	№5. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1(\Gamma)$, $u(x, y) _{\Gamma} = x \cdot y $.	№6. $\left. \begin{array}{l} x = 4 - y^2 \\ y \in [-2, 2] \end{array} \right\}(\Gamma)$, $u(x, y) _{\Gamma} = x + y $.
№7. $(x + 2)(y + 2) = 12(\Gamma)$, $u(x, y) _{\Gamma} = x \cdot y $.	№8. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1(\Gamma)$, $u(x, y) _{\Gamma} = 2 x + y $.	№9. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1(\Gamma)$, $u(x, y) _{\Gamma} = x \cdot y $.
№10. $\left. \begin{array}{l} y = 4 - x^2 \\ x \in [-2, 2] \end{array} \right\}(\Gamma)$, $u(x, y) _{\Gamma} = x + y $.	№11. $x^2 + y^2 = 16(\Gamma)$, $u(x, y) _{\Gamma} = 0,5 x + y $.	№12. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1(\Gamma)$, $u(x, y) _{\Gamma} = x + 0,5 y $.
№13. $\left. \begin{array}{l} x = 4 - y^2 \\ y \in [-2, 2] \end{array} \right\}(\Gamma)$, $u(x, y) _{\Gamma} = x + \frac{y^2}{2}$.	№14. $(x + 2)(y + 2) = 12(\Gamma)$, $u(x, y) _{\Gamma} = 2 x + 0,5 y $.	№15. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1(\Gamma)$, $u(x, y) _{\Gamma} = x + y $.
№16. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1(\Gamma)$, $u(x, y) _{\Gamma} = 2 x + 0,5 y $.	№17. $\left. \begin{array}{l} y = 9 - x^2 \\ x \in [-3, 3] \end{array} \right\}(\Gamma)$, $u(x, y) _{\Gamma} = x + \frac{1}{2} y $.	№18. $x^2 + y^2 = 16(\Gamma)$, $u(x, y) _{\Gamma} = \frac{1}{2} x + 2 y $.
№19. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1(\Gamma)$, $u(x, y) _{\Gamma} = 0,5 x + y $.	№20. $\left. \begin{array}{l} y = 9 - x^2 \\ x \in [-3, 3] \end{array} \right\}(\Gamma)$, $u(x, y) _{\Gamma} = 0,5 x + y $.	№21. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1(\Gamma)$, $u(x, y) _{\Gamma} = 0,5 x + 2 y $.

Методичні рекомендації до лабораторної роботи №3

Задача 2.4 Методом Рітца знайти наближений розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{на } G$$

з крайовою умовою

$$u(x, y)|_{\Gamma} = |x| \cdot |y|,$$

на межі $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1(\Gamma)$, області G .

Розв'язання. Знаходимо дві функції, що обмежують область:

$$y = y_1(x), y = y_2(x);$$

$$y_2(x) = 5\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}, y_1(x) = -y_2(x), x \in [-3; 3].$$

В кодї Maple записуємо у формі:

```
> y2 := 5*sqrt(1-(1/9)*x^2); y1 := -y2;
```

Координатні функції, що задовольняють умовам (2.41), вибираємо з урахуванням умови:

$$u_0(x, y) = |x| \cdot |y|, u_k(x, y) = x^i y^j \left(1 - \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} \right) \quad (i, j = \overline{0, n}, k = \overline{1, (n+1)^2}). \quad (2.47)$$

Тут індекс k носить характер лічильника. Фрагмент відповідного програмного коду Maple:

```
> u(x, y)[0] := abs(x)*abs(y);
  k := 0;
  for i from 0 to n do
    for j from 0 to n do
      k := k+1;
      u(x, y)[k] := x^i * y^j * ((1/9)*x^2+(1/25)*y^2-1);
    od: od;
```

Відповідно до (2.42), наближений розв'язок подаємо функцією

```
> U(x,y):=u(x,y)[0]+sum(C[jj]*u(x,y)[jj],jj=1..k);
```

Потім визначаємо функціонал, в який підставляється $U(x, y)$

```
> F := evalf(int(int((diff(U(x, y), x))^2+(diff(U(x, y), y))^2, y = y1 .. y2), x = -3 .. 3));
```

і утворюється функція багатьох змінних $C_1, \dots, C_k$. Для пошуку її мінімуму застосовуємо необхідну умову локального екстремуму

```
> for h to k do eq[h] := diff(F, C[h]) end do;
  sys := {seq(eq[hh], hh = 1 .. k)};
  var := {seq(C[hh], hh = 1 .. k)};
  RRR := solve(sys, var); assign(RRR);
```

Для аналізу точності отриманого розв'язку можна знайти нев'язку

$$(Fu)(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \text{ для наближеного розв'язку в точках } (x, y) \text{ області } G. \text{ При}$$

виборі $n = 4$ абсолютні значення нев'язки не перевищували 1.5. За даної умови, зважаючи на симетрію функцій, за координатні можна взяти функції

$$u_k(x, y) = x^{2i} y^{2j} \left(1 - \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} \right), \quad \text{тоді при } n = 5, \quad \text{модуль нев'язки не}$$

перевищить 0,3.

На рис. 2.4 побудовано графік функції, що визначає наближений розв'язок поставленої задачі Діріхле.

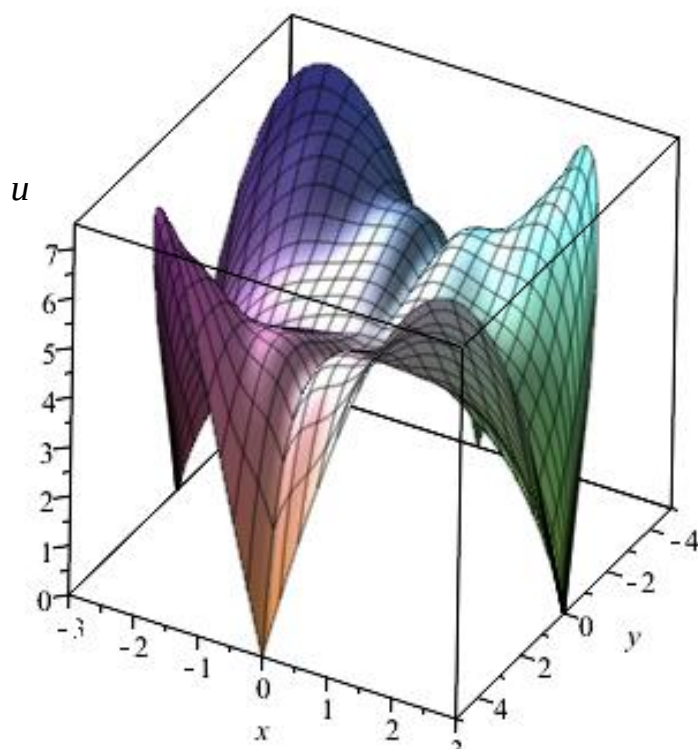


Рис. 2.4 Наближений розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа

Задача 2.5 Розв'язати рівняння Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \text{ на } G$$

з функцією правої частини $f(x, y) = 0.6 \sin(x) - 1.25 y^2 + 1$, з крайовими умовами та областю, як в задачі 2.4.

Розв'язання. Зважаючи на відмінність даного рівняння Пуассона від форми запису рівняння (2.34), функціонал, що підлягає мінімізації, має бути поданим у вигляді

$$\Phi[u] = \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 f u \right] dx dy.$$

Для спрощення процесу інтегрування, до тригонометричної функції застосуємо формулу Маклорена, тоді

$$f(x, y) \approx 0.6 \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \right) - 1.25 y^2 + 1.$$

Для подальшої реалізації методу Рітца використовуємо лінійно незалежну систему (2.47) і проводимо дії, аналогічні викладеним в задачі 2.4.

В результаті розрахунків при $n=5$ отримано функцію, зображену на рис. 2.5, обчислюємо нев'язку, яка не перевищила 1.3.

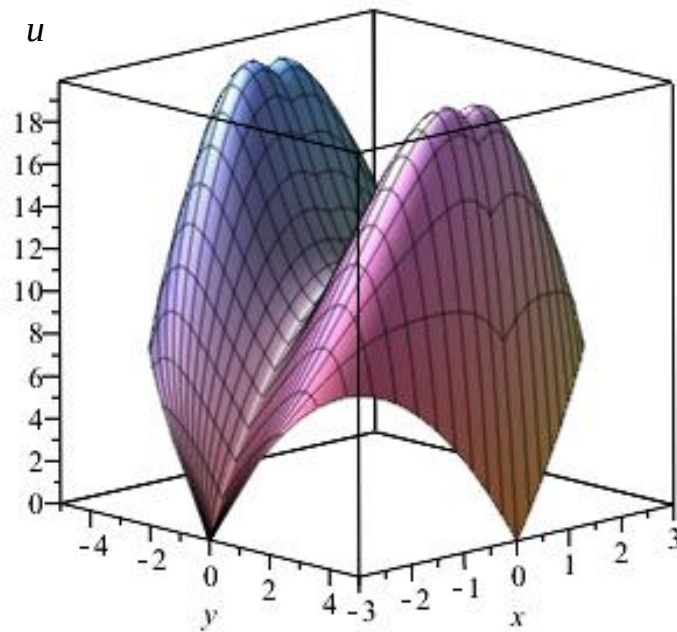


Рис. 2.5 Наближений розв'язок крайової задачі для рівняння Пуассона

Контрольні питання до лабораторної роботи №3

1. Виписати рівняння Пуассона і Лапласа.
2. Сформулювати постановку задачі Діріхле.
3. Запишіть, до якої варіаційної задачі зводиться крайова задача для рівняння Пуассона.
4. Яким властивостям мають задовольняти координатні функції, які визначають наближений розв'язок методом Рітца?

Тема 8. Проекційний метод Галеркіна розв'язання крайової задачі для звичайного диференціального рівняння.

Означення 2.6 Ортогональна система функцій $\{\psi_j\}$ називається замкнутою в евклідовому просторі X , якщо будь-яку функцію $f \in X$ можна наблизити з будь-яким степенем точності $\varepsilon > 0$ скінченною лінійною комбінацією елементів системи за нормою простору X , тобто

$$\forall f \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \{\psi_k\}_{k=1}^n \quad \exists \{C_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R} : \left\| \sum_{k=1}^n C_k \psi_k - f \right\| < \varepsilon.$$

Означення 2.7 Ортонормована система функцій $\{\psi_j\}$ називається повною в евклідовому просторі X , якщо будь-яка функція $f \in X$, що є ортогональною до всіх елементів системи, є нульовою функцією.

Теорема 2.3 Будь яка замкнена ортонормована система $\{\psi_j\}$ є повною.